Точные решения нелинейной тестовой задачи заполнения газопровода // Прикладные задачи математики и механики: Материалы XVIII междунар. научн.-техн. конф. Г. Севастополь, 13-17 сент. 2010 г. –Севастополь: СевНТУ, 2010. – С. 116 –120.

УДК 622.691.4
А.В. Якунин, канд. техн. наук, доц.
Харьковская национальная академия городского хозяйства
ул. Революции, 12, Харьков, 61002, Украина
vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧИ ЗАПОЛНЕНИЯ ГАЗОПРОВОДА

При расчете нестационарных течений газа в магистральных газопроводах (МГ) обычно используются конечно-разностные методы, что требует как теоретического обоснования их устойчивости и аппроксимации, так и практического тестирования, распространенный вариант которого – сравнение с эталонными решениями, полученными другими способами. Известные автомодельные [1] и более общие инвариантные [2] решения соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений (ДУ) в частных производных на основе теории размерностей и группового анализа не исчерпывают всего многообразия возможных их точных решений. Кроме того, часть из них не выражается в элементарных функциях и, в общем случае, требуется численное интегрирование обыкновенных ДУ. Поэтому остается актуальной задача пополнения базы эталонных аналитических решений.

В данной работе предлагаются точные аналитические решения нелинейной краевой задачи заполнения полубесконечного газопровода с покоящимся газом, которые, по существу, являются автомодельными для скорректированных режимных переменных. Обычно автомодельные решения строятся, исходя из поставленной краевой задачи. Здесь используется подход [2], при котором для уже полученных решений указываются соответствующие начальные и граничные условия.

При неустановившемся изотермическом движении газа с малой дозвуковой скоростью по длинному МГ, пренебрегая инерционным членом и скоростным напором, можно использовать систему уравнений (в безразмерной форме) [1]:

$$\frac{\partial \ln p}{\partial x} + w^2 = 0\,; \quad \frac{\partial \ln p}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,, \tag{1}$$

где $p = p(x,t)$ – давление газа; $w = w(x,t)$ – скорость течения; x – координата по длине трубопровода; t – время.

Рассматривается задача заполнения полубесконечного $x \in [x_0;+\infty)$, $x_0 > 0$ предварительно отстабилизированного газопровода

$$p(x,t) = p_0 = const\,; \quad w(x,t) = 0\,; \quad t \le 0\,; \quad x \in [x_0;+\infty)\,, \tag{2}$$

в начальном сечении $x = x_0$ которого задается давление

$$p(x_0, t) = p_0 \exp g(t)\,;\;\; t > 0\,, \qquad (3)$$

а вторым граничным условием служит равенство

$$w(+\infty, t) = 0\,;\;\; t > 0\,. \qquad (4)$$

Конкретный вид функции $g(t)$ определяется формируемым аналитическим решением краевой задачи (1) – (4).

Дифференцируя первое уравнение системы (1) по x, второе – по t, а затем исключая давление p, можно получить [1] одно нелинейное уравнение параболического типа для скорости w:

$$2w\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\,. \qquad (5)$$

Предлагается замена

$$w(x, t) = x^{\alpha}\varphi(x^{\beta} t)\,, \qquad (6)$$

сводящая (5) к соотношению:

$$2x^{2\alpha+\beta}\varphi\frac{d\varphi}{d\eta} - \alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}\varphi - (2\alpha+\beta-1)\beta\eta\,x^{\alpha-2}\,\frac{d\varphi}{d\eta} - \beta^2\eta^2 x^{\alpha-2}\,\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} = 0\,. \quad (7)$$

Здесь α, β – постоянные, значения которых подбираются соответствующим образом; $\varphi = \varphi(\eta)$ – новая искомая функция автомодельного аргумента $\eta = x^{\beta} t$.

Из уравнивания показателей степеней x в слагаемых выражения (7) вытекает связь $\beta = -\alpha - 2$, с учетом которой после почленного деления (7) на $x^{\alpha-2} \neq 0$ получается обыкновенное ДУ второго порядка

$$(\alpha+2)^2\eta^2\,\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} - (\alpha^2 - \alpha - 6)\eta\frac{d\varphi}{d\eta} - 2\varphi\frac{d\varphi}{d\eta} + \alpha(\alpha-1)\varphi = 0\,. \qquad (8)$$

Интегрируя уравнение (8) по η с использованием формулы интегрирования по частям, можно прийти к соотношению

$$(\alpha+2)^2\eta^2\,\frac{d\varphi}{d\eta} - (3\alpha^2 + 7\alpha + 2)\eta\varphi - \varphi^2 + 2(2\alpha^2 + 3\alpha + 1)\int\varphi\,d\eta = C_1\,, \qquad (9)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Значение α следует выбрать так, чтобы обнулить последнее слагаемое в левой части (9): $2\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0$; $\alpha_1 = -1/2$; $\alpha_2 = -1$. При этом $\beta_1 = -3/2$; $\beta_2 = -1$; $\eta_1 = x^{-3/2}t$; $\eta_2 = x^{-1}t$. Тогда из условия обращения функции $\varphi = \varphi(\eta)$ в нуль при $x = +\infty$ (согласно (4)) вытекает $C_1 = 0$.

Таким образом, функция $\varphi=\varphi(\eta)$ удовлетворяет следующим ДУ первого порядка типа Бернулли соответственно при $\alpha_1=-1/2$ и $\alpha_2=-1$:

$$\frac{d\varphi}{d\eta_1}+\frac{1}{3\eta_1}\varphi=\frac{4}{9\eta_1^2}\varphi^2 \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi}{d\eta_2}+\frac{2}{\eta_2}\varphi=\frac{1}{\eta_2^2}\varphi^2 .$$

Их решения соответственно:

$\varphi=\dfrac{3\eta_1}{1+C_2\eta_1^{4/3}}$ и $\varphi=\dfrac{3\eta_2}{1+C_2\eta_2^3}$, где C_2 – произвольная постоянная.

Тогда для скорости w согласно (6) можно получить соответственно:

$$w=\frac{3t}{x^2+C_2t^{4/3}} \quad \text{и} \quad w=\frac{3tx}{x^3+C_2t^3}. \tag{10}$$

Подставляя первое выражение для скорости из (10) во второе уравнение системы (1) и интегрируя по t с учетом условия (2), можно получить решение для давления p при $\alpha_1=-1/2$:

$$p=p_0\exp\left(\frac{9}{2C_2^{3/2}}arctg\frac{C_2^{1/2}t^{2/3}}{x}-\frac{9xt^{2/3}}{2C_2(x^2+C_2t^{4/3})}\right). \tag{11}$$

Подставляя второе выражение для скорости из (10) в первое уравнение системы (1) и интегрируя по x с учетом условия (2), можно получить решение для давления p при $\alpha_2=-1$:

$$p=p_0\exp\frac{3t^2}{x^3+C_2t^3}. \tag{12}$$

Для реализации частного решения (при $\alpha_1=-1/2$) вида

$$p=p_0\exp\left(\frac{9}{2A^{3/2}}arctg\frac{A^{1/2}t^{2/3}}{x}-\frac{9xt^{2/3}}{2A(x^2+At^{4/3})}\right); \quad w=\frac{3t}{x^2+At^{4/3}} \tag{13}$$

в качестве функции $g(t)$ в граничном условии (3) можно положить

$$g(t)=\frac{9}{2A^{3/2}}arctg\frac{A^{1/2}t^{2/3}}{x_0}-\frac{9x_0t^{2/3}}{2A(x_0^2+At^{4/3})}, \tag{14}$$

где A – заданное положительное число. Очевидно, $C_2=A$.

Функция (14) проходит через начало координат и имеет при $t\to+\infty$ горизонтальную асимптоту. Монотонно возрастая на полупрямой $t\in[0;+\infty)$, она приближается снизу к значению $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=9\pi/(4A^{3/2})$. В каждой фиксированной точке по длине газопровода $x=const>x_0$ аналогично ведет себя давление p, а скорость w при $t_{w\max} = (3/A)^{3/4} x^{3/2}$ достигает максимума $w_{\max} = 3^{7/4} \big/ (4A^{3/4} x^{1/2})$. В каждом временном сечении $t = const > 0$ решение (13) и по давлению p, и по скорости w монотонно убывает с ростом $x > x_0$. При $t \to +\infty$ оно приводит к новому отстабилизированному режиму:

$$p(x,t) = p_0 \exp\left[9\pi/(4A^{3/2})\right]; \quad w(x,t) = 0; \quad x \in [x_0; +\infty).$$

Для реализации частного решения (при $\alpha_2 = -1$) вида

$$p = p_0 \exp \frac{3t^2}{x^3 + At^3}; \quad w = \frac{3tx}{x^3 + At^3} \tag{15}$$

в качестве функции $g(t)$ в граничном условии (3) можно положить

$$g(t) = 3t^2 \big/ (x_0^3 + At^3), \tag{16}$$

где A – заданное положительное число. Очевидно, $C_2 = A$.

Функция (16) проходит через начало координат, достигает на полупрямой $t \in [0; +\infty)$ в точке $t_{\max} = x_0 \sqrt[3]{2/A}$ максимума $g_{\max} = 2^{2/3} A^{-2/3} x_0^{-1}$ и при $t \to +\infty$ имеет горизонтальную асимптоту. При $t \to +\infty$, монотонно убывая, она приближается сверху к нулевому значению $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$. В каждой фиксированной точке по длине газопровода $x = const > x_0$ аналогично ведут себя давление p и скорость w, достигая соответственно при $t_{p\max} = x\sqrt[3]{2/A}$ и $t_{w\max} = x(2A)^{-1/3}$ своих максимумов $p_{\max} = p_0 \exp(2^{2/3} A^{-2/3} x^{-1})$ и $w_{\max} = 2^{2/3} A^{-1/3} x^{-1}$. В каждом временном сечении $t = const > 0$ давление p монотонно убывает с ростом $x > x_0$, а скорость w при $x_{w\max} = t\sqrt[3]{A/2}$ достигает максимума $w_{\max} = 2^{2/3} A^{-2/3} t^{-1}$. При $t \to +\infty$ решение (15) возвращается к исходному отстабилизированному режиму (2).

Область применения полученных решений (13), (15) ограничивается теми допущениями, на которых основана дифференциальная система (1). В дальнейшем предполагается поиск аналогичных решений для более общих дифференциальных моделей транспорта газа.

Библиографический список

1. Бобровский С.А. Трубопроводный транспорт газа / С.А. Бобровский, С.Г. Щербаков, Е.И. Яковлев и др. – М.: Наука, 1976. – 495 с.
2. Сухарев М.Г. Оптимизация систем транспорта газа / М.Г. Сухарев, Е.Р. Ставровский. – М.: Недра, 1975. – 277 с.