О НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

С. Н. Ламтюгова

Рассматривается стационарное обтекание тела вращения потоком вязкой несжимаемой жидкости в сферической системе координат (r, θ, φ):

$$\nu E^2\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial E\psi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial E\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)E\psi \text{ вне } \overline{\Omega}, \quad (1)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

$$\psi \sim \frac{1}{2}U_\infty r^2\sin^2\theta \text{ при } r\to\infty, \quad (3)$$

где $E\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$, $E^2\psi = E(E\psi)$, $\psi = \psi(r,\theta)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями $v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$, $v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$, $v_\varphi = 0$, $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль, U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1\cdot r^{-1}\to 0$ при $r\to+\infty$) краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3) точно удовлетворяет функция вида $\psi = \omega_M^2(\psi_0+\Phi_1) + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2$, где $\psi_0 = {}^1\!/_4 U_\infty (r-R)^2\left(2+R\cdot r^{-1}\right)\sin^2\theta$ – решение Стокса для задачи обтекания сферы радиуса R, $\omega_M = f_M(\omega)$, $f_M(\omega) = \begin{cases} 1-\exp(M\omega(\omega-M)^{-1}), & 0\le\omega<M, \\ 1, & \omega\ge M, \end{cases}$ а ω – такая функция, что: 1) $\omega>0$ вне $\overline{\Omega}$; 2) $\omega=0$ на $\partial\Omega$; 3) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}=1$ на $\partial\Omega$.

Здесь предполагается, что сфера радиуса R содержится в обтекаемом теле, функция ω с указанными свойствами строится с использованием конструктивного аппарата теории R-функций, а для аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 используется проекционный метод Галеркина-Петрова, причем функция Φ_1 аппроксимируется выражением вида $\sum_{k=1}^{n_1} a_k\varphi_k$, где $\{\varphi_k\}$ – полная система частных решений уравнения $E^2(E^2\psi)=0$ относительно сферы конечного радиуса.