ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ламтюгова С.Н.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр.Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36)
e-mail: maliatko@gmail.com

The nonlinear stationary problem of flowing past a cylindrical body a viscous incompressible fluid is treated in the paper. The R-functions method, the successive approximations method and the Galerkin-Petrov method are used for solving the task. The computational experiment has been conducted for a circular cylinder at Reynolds numbers 2, 4, 5, 10, 15.

В работе рассматривается стационарная задача обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью. Течение описывается нелинейным уравнением [1]

$$\Delta^2\psi = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\varphi}\right) \text{ вне } \overline{\Omega}, \tag{1}$$

где $\Delta\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$, $\Delta^2\psi = \Delta(\Delta\psi)$, $\psi = \psi(\rho,\varphi)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями $v_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$, $v_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}$, $v_z = 0$; (ρ,φ,z) – переменные цилиндрической системы координат.

Если граница тела непроницаема и неподвижна, то

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль, поведение функции тока на бесконечности задается в виде

$$\psi \sim U_\infty \rho \sin\theta \text{ при } \rho \to \infty, \tag{3}$$

где U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Задача (1) – (3) была решена методом последовательных приближений. В качестве начального приближения $\psi^{(0)}$ было взято приближенное решение соответствующей задачи Озеена. Если приближение $\psi^{(i)}$ известно, то следующее приближение $\psi^{(i+1)}$ находим как решение линейной задачи

$$\Delta^2\psi^{(i+1)} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\Delta\psi^{(i)}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\rho}\frac{\partial\Delta\psi^{(i)}}{\partial\varphi}\right) \text{ вне } \overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$\psi^{(i+1)}\Big|_{\partial\Omega}=0,\ \left.\frac{\partial\psi^{(i+1)}}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=0, \tag{5}$$

$$\psi^{(i+1)}\sim U_\infty\rho\sin\theta \text{ при } \rho\to\infty,\ i=0,1,2,... \tag{6}$$

Для решения задачи (4) – (6) используем метод R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [2].

На каждом шаге итерационного процесса приближенное решение задачи (4) – (6) ищем в виде функции

$$\psi^{(i+1)}=\omega_M^2(\psi_0+\Phi_1^{(i+1)})+\omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2^{(i+1)},$$

которая при любом выборе достаточно гладких функций $\Phi_1^{(i+1)}$ и $\Phi_2^{(i+1)}$ ($\Phi_1^{(i+1)}\cdot\rho^{-1}\to 0$ при $\rho\to+\infty$) точно удовлетворяет краевым условиям (5) и условию на бесконечности (6), $\psi_0=U_\infty\left(\rho-R^2\cdot\rho^{-1}\right)\sin\varphi$ – решение задачи об обтекании идеальной жидкостью кругового цилиндра радиуса R (цилиндр радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела), $\omega_M=f_M(\omega)$, $f_M(\omega)=\begin{cases}1-\exp(M\omega(\omega-M)^{-1}), & 0\le\omega<M,\\ 1, & \omega\ge M,\end{cases}$ а ω – функция, обладающая такими свойствами: 1) $\omega>0$ вне $\overline{\Omega}$; 2) $\omega=0$ на $\partial\Omega$; 3) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}=-1$ на $\partial\Omega$ – строится с использованием конструктивного аппарата теории R-функций.

Для аппроксимации неопределенных компонент $\Phi_1^{(i+1)}$ и $\Phi_2^{(i+1)}$ используется проекционный метод Галеркина-Петрова [3]. Функции $\Phi_1^{(i+1)}$ и $\Phi_2^{(i+1)}$ аппроксимируются выражениями вида $\Phi_1^{(i+1)}=\sum_{k=1}^{m_1}a_k^{(i+1)}\varphi_k$, $\Phi_2^{(i+1)}=\sum_{j=1}^{m_2}\beta_j^{(i+1)}\tau_j$,

где $\{\varphi_k\}=\left\{\rho^{2-k}\begin{matrix}\cos k\varphi\\ \sin k\varphi\end{matrix},\ k=3,4,...;\ \rho^{-k}\begin{matrix}\cos k\varphi\\ \sin k\varphi\end{matrix},\ k=1,2,...\right\}$ – полная система частных решений уравнения $\Delta^2\psi=0$ относительно внешности цилиндра конечного радиуса; $\{\tau_j\}=\left\{\cos 2\varphi,\ \sin 2\varphi,\ \rho^{j+2}\begin{matrix}\cos j\varphi\\ \sin j\varphi\end{matrix},\ \rho^{j}\begin{matrix}\cos j\varphi\\ \sin j\varphi\end{matrix},\ j=1,2,...\right\}$ – полная система частных решений уравнения $\Delta^2\psi=0$ относительно области $\{\omega(\rho,\varphi)<M\}$.

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания кругового цилиндра $x^2+y^2=4$ при $U_\infty=1$, $M=2$ и $\mathrm{Re}=2,4,5,10,15$.

1. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с.

2. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.

3. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 420 с.