ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ R-ФУНКЦИЙ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К РАСЧЕТУ СТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ламтюгова С.Н.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков
maliatko@gmail.com

Рассмотрим стационарное обтекание цилиндрического тела потоком вязкой несжимаемой жидкости. Течение описывается нелинейным уравнением [1]

$$\Delta^2\psi = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\varphi}\right) \text{ вне } \overline{\Omega}, \tag{1}$$

где $\Delta\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$, $\Delta^2\psi = \Delta(\Delta\psi)$, $\psi = \psi(\rho,\varphi)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями $v_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$, $v_\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}$, $v_z = 0$; (ρ,φ,z) – переменные цилиндрической системы координат.

Уравнение (1) следует дополнить условиями на $\partial\Omega$ и на бесконечности (при $\rho \to \infty$).

Если граница обтекаемого тела неподвижна и непроницаема, то из условий прилипания следуют такие краевые условия:

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Условие на бесконечности имеет вид

$$\psi \sim U_\infty \rho \sin\varphi \text{ при } \rho \to \infty, \tag{3}$$

где U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Условие (3) означает, что при неограниченном удалении от обтекаемого тела поток становится равномерным.

Итак, для расчета течения около рассматриваемого цилиндрического тела нужно решить краевую задачу (1) – (3).

Задача (1) – (3) была решена методом последовательных приближений. В качестве начального приближения $\psi^{(0)}$ было взято приближенное решение соответствующей задачи Озеена. Если приближение $\psi^{(i)}$ известно, то следующее приближение $\psi^{(i+1)}$ находим как решение линейной задачи

$$\Delta^2\psi^{(i+1)} = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\Delta\psi^{(i)}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial\rho}\frac{\partial\Delta\psi^{(i)}}{\partial\varphi}\right) \text{ вне } \overline{\Omega}, \tag{4}$$

$$\psi^{(i+1)}\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial\psi^{(i+1)}}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

$$\psi^{(i+1)} \sim U_\infty \rho \sin\theta \text{ при } \rho \to \infty, \ i = 0,1,2,... \tag{6}$$

Для решения задачи (4) – (6) используем метод R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [2].

Пусть вне $\bar{\Omega}$ известна достаточно гладкая функция $\omega(\rho,\varphi)$, обладающая следующими свойствами:

1) $\omega(\rho,\varphi)>0$ вне $\bar{\Omega}$; 2) $\omega(\rho,\varphi)=0$ на $\partial\Omega$; 3) $\dfrac{\partial\omega(\rho,\varphi)}{\partial\mathbf{n}}=-1$ на $\partial\Omega$,

где $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Введем в рассмотрение достаточно гладкую функцию $y=f_M(x)$ [3], удовлетворяющую следующим требованиям:

а) $f_M(0)=0$; б) $f_M'(0)=1$; в) $f_M'(x)\geq 0\ \forall x\geq 0$;

г) $f_M(x)\equiv 1\ \forall x\geq M$ $(M=\text{const}>0)$.

Условиям а) – г) удовлетворяет, например, функция

$$f_M(x)=\begin{cases}1-\exp\dfrac{Mx}{x-M}, & 0\leq x<M;\\ 1, & x\geq M.\end{cases}$$

Кроме того, очевидно, что такая $f_M(x)\in C^\infty[0,+\infty)$.

Обозначим

$$\omega_M(\rho,\varphi)=f_M[\omega(\rho,\varphi)]. \tag{7}$$

Легко проверить, что функция $\omega_M(\rho,\varphi)$ удовлетворяет условиям 1) – 3). Кроме того, $\omega_M(\rho,\varphi)\equiv 1$, если $\omega(\rho,\varphi)\geq M$.

Заметим, что это условие означает, что если функция $\omega(\rho,\varphi)$ монотонно возрастает при удалении от $\partial\Omega$, то функция $\omega_M(\rho,\varphi)$ вида (7) отлична от единицы лишь в некоторой кольцеобразной области $\{0\leq\omega(\rho,\varphi)<M\}$, которая содержится во внешности $\bar{\Omega}$ и прилегает к $\partial\Omega$.

Из сказанного выше следует теорема [4].

Теорема. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1\cdot\rho^{-1}\to 0$ при $\rho\to+\infty$) краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3) удовлетворяет пучок функций $\psi=\omega_M^2(\psi_0+\Phi_1)+\omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2$, где $\psi_0=U_\infty\left(\rho-R^2\cdot\rho^{-1}\right)\sin\varphi$ – решение задачи об обтекании идеальной жидкостью кругового цилиндра радиуса R (цилиндр радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела).

Из теоремы следует, что на каждом шаге итерационного процесса приближенное решение задачи (4) – (6) следует искать в виде функции

$$\psi^{(i+1)}=\omega_M^2(\psi_0+\Phi_1^{(i+1)})+\omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2^{(i+1)},$$

которая при любом выборе достаточно гладких функций $\Phi_1^{(i+1)}$ и $\Phi_2^{(i+1)}$ ($\Phi_1^{(i+1)}\cdot\rho^{-1}\to 0$ при $\rho\to+\infty$) точно удовлетворяет краевым условиям (5) и условию на бесконечности (6).

Известно [5], что общее решение бигармонического уравнения $\Delta^2\psi = 0$ имеет вид:

$$\psi(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\rho^{2+n}\cos n\varphi + \tilde{A}_n\rho^{2+n}\sin n\varphi + B_n\rho^{2-n}\cos n\varphi + \tilde{B}_n\rho^{2-n}\sin n\varphi + \tag{8}$$

$$+C_n\rho^{n}\cos n\varphi + \tilde{C}_n\rho^{n}\sin n\varphi + D_n\rho^{-n}\cos n\varphi + \tilde{D}_n\rho^{-n}\sin n\varphi\Big),$$

где A_n, B_n, C_n, D_n, $\tilde{A}_n$, $\tilde{B}_n$, $\tilde{C}_n$, $\tilde{D}_n$ – произвольные постоянные. Представлением (8) воспользуемся для выбора координатных последовательностей.

Для аппроксимации неопределенной компоненты $\Phi_1^{(k+1)}$ воспользуемся функциями системы

$$\{\varphi_k(\rho,\varphi)\} = \left\{\rho^{2-k}\begin{matrix}\cos k\varphi\\ \sin k\varphi\end{matrix}, k=3,4,...;\rho^{-k}\begin{matrix}\cos k\varphi\\ \sin k\varphi\end{matrix}, k=1,2,...\right\}, \tag{9}$$

а для аппроксимации неопределенной компоненты $\Phi_2^{(k+1)}$ воспользуемся функциями системы

$$\{\tau_j(\rho,\varphi)\} = \left\{\cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \rho^{j+2}\begin{matrix}\cos j\varphi\\ \sin j\varphi\end{matrix}, \rho^{j}\begin{matrix}\cos j\varphi\\ \sin j\varphi\end{matrix}, j=1,2,...\right\}. \tag{10}$$

Итак, функции $\Phi_1^{(k+1)}$ и $\Phi_2^{(k+1)}$ представим в виде

$$\Phi_1^{(i+1)} \approx \Phi_{1,m_1}^{(i+1)} = \sum_{n=1}^{m_1}\alpha_n^{(i+1)}\tau_n\,,\ \Phi_2^{(i+1)} \approx \Phi_{2,m_2}^{(i+1)} = \sum_{n=1}^{m_2}\alpha_{n+m_1}^{(i+1)}\tau_{n+m_1}\,,$$

где τ_1, ..., τ_{m_1} – первые m_1 функций системы (9), а τ_{m_1+1}, ..., $\tau_{m_1+m_2}$ – первые m_2 функций системы (10).

Тогда

$$\psi^{(i+1)} \approx \psi_N^{(i+1)} = \omega_M^2\psi_0 + \sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{(i+1)}\varphi_n\,, \tag{11}$$

где $N = m_1 + m_2$, $\varphi_1 = \omega_M^2\,\tau_1$, …, $\varphi_{m_1} = \omega_M^2\,\tau_{m_1}$, $\varphi_{m_1+1} = \omega_M^2\,(1-\omega_M)\,\tau_{m_1+1}$, …, $\varphi_N = \omega_M^2\,(1-\omega_M)\,\tau_{m_1+m_2}$. Таким образом, построенные функции φ_n образуют координатную последовательность.

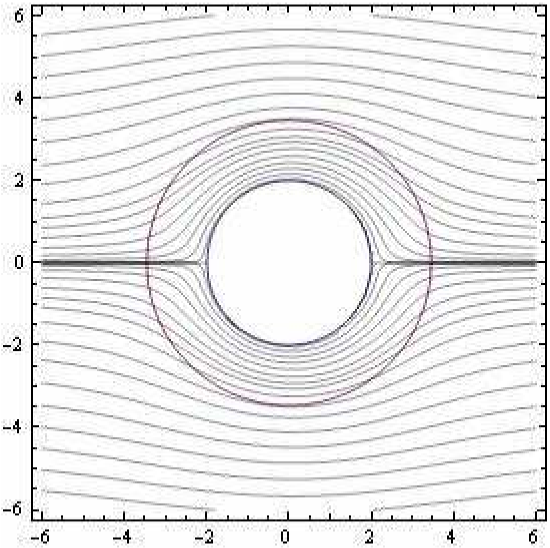
Для нахождения коэффициентов $\alpha_1^{(i+1)}$, ..., $\alpha_N^{(i+1)}$ воспользуемся методом Галеркина-Петрова [6], т.е. коэффициенты $\alpha_1^{(i+1)}$, ..., $\alpha_N^{(i+1)}$ найдем из условия ортогональности невязки, полученной после подстановки функции (11) в уравнение (4), к системе функций

$$\left\{\omega_M^2\,\rho^{2-k}\begin{matrix}\cos k\varphi\\ \sin k\varphi\end{matrix}, k=3,4,...;\omega_M^2\,\rho^{-k}\begin{matrix}\cos k\varphi\\ \sin k\varphi\end{matrix}, k=1,2,...;\omega_M^2\,(1-\omega_M)\cos 2\varphi,\right.$$

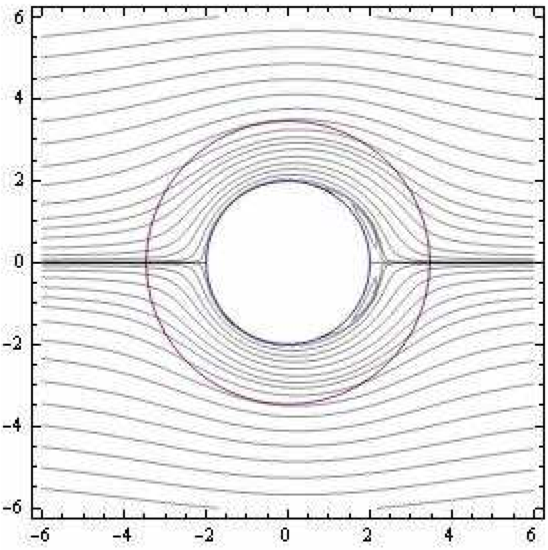
$$\left.\omega_M^2\,(1-\omega_M)\sin 2\varphi, \omega_M^2\,(1-\omega_M)\,\rho^{j+2}\begin{matrix}\cos j\varphi\\ \sin j\varphi\end{matrix}, \omega_M^2\,(1-\omega_M)\,\rho^{j}\begin{matrix}\cos j\varphi\\ \sin j\varphi\end{matrix}, j=1,2,...\right\}.$$

Это приводит к необходимости решения системы линейных уравнений относительно $\alpha_1^{(i+1)}$, ..., $\alpha_N^{(i+1)}$.

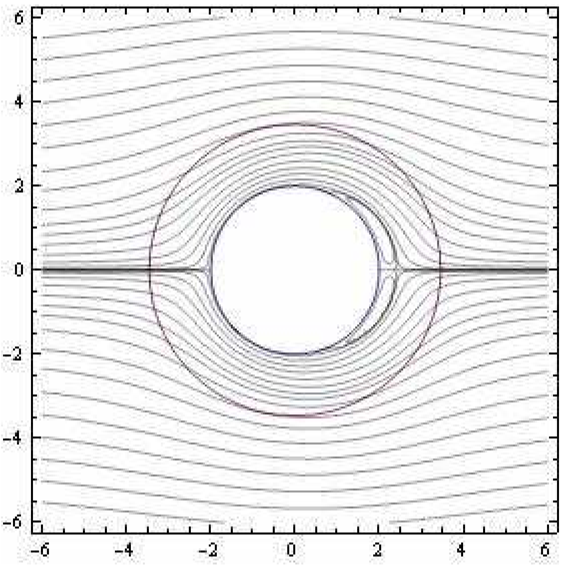
Итерации следует прекратить, когда $\left\|\psi^{(i+1)}-\psi^{(i)}\right\|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ – малое число.



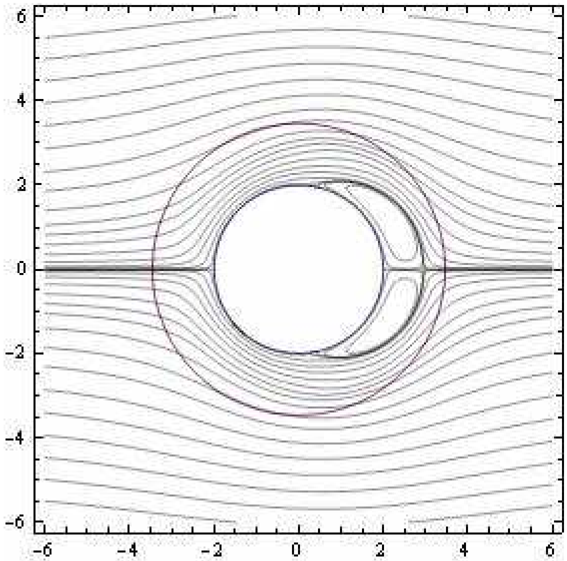
а) $\mathrm{Re}=2$



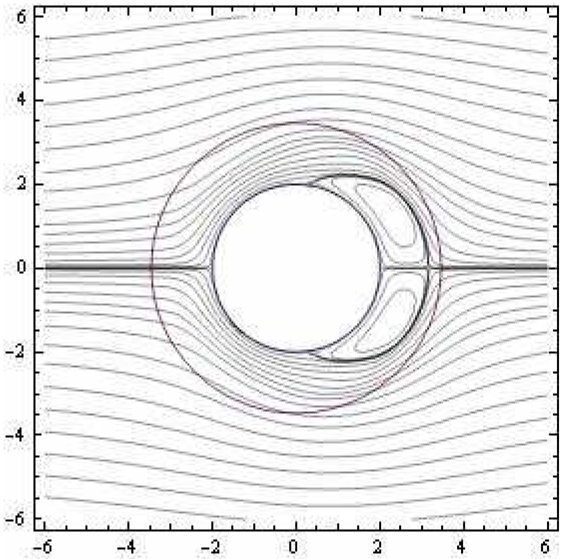
б) $\mathrm{Re}=4$



в) $\mathrm{Re}=5$



г) $\mathrm{Re}=10$



д) $\mathrm{Re}=15$

Рис. 1. Линии уровня функции тока приближенного решения

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания кругового цилиндра $x^2+y^2=4$ при $U_\infty=1$, $M=2$, $m_1=4$, $m_2=10$ и чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}=2, 4, 5, 10, 15$. Вычисления прекращались при достижении точности $\varepsilon=10^{-6}$. Линии уровня функции тока полученного приближенного решения для различных чисел Рейнольдса представлены на рис. 1.

Таким образом, в работе впервые разработан численный метод расчета внешних течений вязкой несжимаемой жидкости, основанный на совместном применении методов последовательных приближений, R-функций и Галеркина-Петрова, который отличается от известных методов универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области) и тем, что структура решения точно учитывает как краевые условия на границе обтекаемого тела, так и условие на бесконечности. Для различных чисел Рейнольдса численно решена задача обтекания кругового цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами физических экспериментов [7, 8] и результатами, полученными другими авторами [9 – 12].

Библиографический список

1. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с.
2. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
3. Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л. Про один метод розв'язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. – № 9. – 1972. – С. 837 – 839.
4. Ламтюгова С.Н. Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №1. – С. 112 – 122.
5. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
6. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
7. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 660 с.
8. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986. – 184 с.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
10. Приходько А. А., Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье-Стокса // Прикладна гідромеханіка. – 2005. – 7 (79), № 1. – С. 56 – 71.

11. Ермаков М.К. Исследование возможностей матричных методов для решения уравнений Навье-Стокса // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. – 2010. – Т. 9. – С. 1 – 8.
12. Dennis S.C.R., Chang Gau-Zu. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100 // J. Fluid Mech. – 1970. – V. 42. – P. 471 – 489.