ПРО ОДИН МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗОВНІШНІХ ЗАДАЧ ГІДРОДИНАМІКИ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ У НАБЛИЖЕННІ СТОКСА

Колосова С.В.[1], Ламтюгова С. М.[2], Сидоров М.В.[1]
[1] *Харківський національний університет радіоелектроніки*
[2] *Харківська національна академія міського господарства*
Харків, Україна, vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

У даній роботі пропонується чисельний метод розрахунку повільного обтікання тіла в'язкою нестисливою рідиною за наявності в течії осьової симетрії (немає залежності від кута φ). Течія описується рівнянням (наближення Стоксу)

$$E^2(E^2\psi)=0 \ \text{ зовні } \ \Omega, \qquad (1)$$

де $E^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{\sin\theta}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)$, $\psi=\psi(r,\theta)$ – функція течії, пов'язана з компонентами вектора швидкості співвідношеннями $v_r=\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$, $v_\theta=-\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$, $v_\varphi=0$; (r, θ, φ) – змінні сферичної системи координат.

Якщо границя тіла непроникна та нерухома, то

$$\psi\big|_{\partial\Omega}=0 \ \text{ и } \ \partial_{\mathbf{n}}\psi\big|_{\partial\Omega}=0, \qquad (2)$$

де $\mathbf{n}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль; поведінка функції течії на нескінченності така:

$$\lim_{r\to\infty}\psi=\frac{1}{2}U_\infty r^2\sin^2\theta, \qquad (3)$$

де U_∞ – незбурена швидкість рідини на нескінченності.

Нами доведено таку теорему.

Теорема. При будь-якому виборі досить гладких функцій Φ_1 і Φ_2 ($\Phi_1\to 0$ при $r\to\infty$) крайовим умовам (2) і умові на нескінченності (3) точно задовольняє функція вигляду $\psi=\omega_M^2(\psi_0+\Phi_1)+\omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2$, де $\psi_0=0{,}25U_\infty(r-R)^2(2+Rr^{-1})\sin^2\theta$ – розв'язок Стоксу для задачі про обтікання сфери радіусу R, $\omega_M=f_M(\omega)$, $f_M(\omega)=\begin{cases}1-\exp(\omega(\omega-M)^{-1}), & 0\le\omega<M,\\ 1, & \omega\ge M,\end{cases}$ а ω – така функція, що: 1) $\omega>0$ зовні Ω; 2) $\omega=0$ на $\partial\Omega$; 3) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}=1$ на $\partial\Omega$.

Вважаємо, що сфера радіусу R належить тілу, що обтікається. Функція ω з вказаними властивостями будується за допомогою методу R-функцій, для апроксимації невизначених компонент Φ_1 і Φ_2 скористатися проекційним методом Гальоркіна-Петрова, причому функція Φ_1 апроксимується виразом вигляду $\sum_{k=1}^{n_1}a_k\varphi_k$, де $\{\varphi_k\}$ – повна система частинних розв'язків рівняння (1) відносно сфери скінченного радіусу.