УДК 519.63:517.958

ЛАМТЮГОВА С.Н., СИДОРОВ М.В.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ К ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ ЗАДАЧ ОБТЕКАНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Введение

Математическое моделирование и численный анализ в последнее время все активнее используются при изучении динамики вязкой жидкости. Необходимость моделировать вязкие течения возникает, например, в гидроаэродинамике, теплоэнергетике, химической кинетике, биомедицине и т.д. Описывающие их уравнения Навье-Стокса [1 – 3] имеют существенные особенности – нелинейность и наличие малого параметра при старшей производной (величина обратная числу Рейнольдса). Кроме того, их часто приходится решать в областях сложной геометрии, которая к тому же может быть неограниченной. Точно учесть геометрию области, а также краевые условия, можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева [4].

Существует обширный класс течений, в которых можно пренебречь нелинейными членами и получить линейную задачу. Полное пренебрежение инерционными членами приводит к так называемым уравнениям ползущего течения или уравнениям Стокса [5 – 7]. Однако для задачи обтекания цилиндрического тела безграничной вязкой несжимаемой жидкостью не существует решения уравнений Стокса (парадокс Стокса) [5, 6, 8]. В этом случае пользуются приближением Озеена [5, 8, 9].

В данной работе рассматривается применение методов R-функций, последовательных приближений и Галеркина для математического моделирования линейной (линеаризация Озеена) и нелинейной стационарных задач обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью.

Линейная задача (линеаризация Озеена)

Рассмотрим задачу медленного обтекания равномерным потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью U_∞ цилиндрического тела, сечением которого является конечная область Ω с кусочно-непрерывной границей $\partial\Omega$ [5, 9]:

$$\nu\Delta^2\psi + A(\Delta\psi) = 0 \text{ вне } \overline{\Omega}, \tag{1}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$\psi \sim U_\infty \rho\sin\varphi \text{ при } \rho\to\infty, \tag{3}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, $\Delta^2\psi = \Delta(\Delta\psi)$, $A\zeta = -\cos\varphi\dfrac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \dfrac{\sin\varphi}{\rho}\dfrac{\partial\zeta}{\partial\varphi}$, $\nu = \mathrm{Re}^{-1}$, Re – число Рейнольдса, $\psi = \psi(\rho,\varphi)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями $v_\rho = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}$, $v_\varphi = -\dfrac{\partial\psi}{\partial\rho}$, $v_z = 0$, $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Имеет место теорема.

Теорема. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1\cdot\rho^{-1}\to 0$ при $\rho\to+\infty$) краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3) точно удовлетворяет функция вида

$$\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2, \tag{4}$$

где $\psi_0 = U_\infty \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right) \sin\varphi$ – решение задачи об обтекании идеальной жидкостью кругового цилиндра радиуса R (считаем, что цилиндр радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела), $\omega_M = f_M(\omega)$, $f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{M\omega}{\omega - M}}, & 0 \le \omega < M, \\ 1, & \omega \ge M, \end{cases}$ а ω – функция, обладающая свойствами: 1) $\omega > 0$ вне $\overline{\Omega}$; 2) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$; 3) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$, строится с использованием конструктивного аппарата теории R-функций [4].

Для аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 воспользуемся проекционным методом Галеркина [10]. Функции Φ_1 и Φ_2 представим в виде

$$\Phi_1 \approx \Phi_1^{m_1} = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \varphi_k, \quad \Phi_2 \approx \Phi_2^{m_2} = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \tau_j, \tag{5}$$

где $\{\varphi_k(\rho,\varphi)\} = \left\{ \rho^{2-k} \begin{matrix} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{matrix}, \ k = 3, 4, ...; \ \rho^{-k} \begin{matrix} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{matrix}, \ k = 1, 2, ... \right\}$ – полная система частных решений уравнения $\Delta^2\psi = 0$ относительно внешности цилиндра конечного радиуса; $\{\tau_j(\rho,\varphi)\} = \left\{ \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \rho^{j+2} \begin{matrix} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{matrix}, \rho^j \begin{matrix} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{matrix}, \ j = 1, 2, ... \right\}$ – полная система частных решений уравнения $\Delta^2\psi = 0$ относительно области $\{\omega(\rho,\varphi) < M\}$.

Таким образом,

$$\psi \approx \psi_N = \omega_M^2 (\psi_0 + \Phi_1^{m_1}) + \omega_M^2 (1 - \omega_M) \Phi_2^{m_2}. \tag{6}$$

Зададимся полной относительно всей плоскости последовательностью функций

$$\{f_i(\rho,\varphi)\} = \left\{ \omega_M^2(\rho,\varphi)\rho^{2-k} \begin{matrix} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{matrix}, k = 3, 4, ...; \omega_M^2(\rho,\varphi)\rho^{-k} \begin{matrix} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{matrix}, k = 1, 2, ...; \right.$$
$$\left. \omega_M^2(\rho,\varphi) \begin{matrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{matrix}, \omega_M^2(\rho,\varphi)\rho^{j+2} \begin{matrix} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{matrix}, \omega_M^2(\rho,\varphi)\rho^j \begin{matrix} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{matrix}, j = 1, 2, ... \right\}. \tag{7}$$

Значения коэффициентов α_k, $k = 1, 2, ..., m_1$, и β_j, $j = 1, 2, ..., m_2$, в соответствии с методом Галеркина найдем из условия ортогональности невязки $R_N = \nu \Delta^2 \psi_N + A(\Delta\psi_N)$ первым N ($N = m_1 + m_2$) элементам последовательности (7)

$$\left(R_N, f_i \right) = 0, \ i = 1, 2, ..., N, \tag{8}$$

причем в силу свойств функции ω_M и координатных функций интегрирование в (8) при вычислении скалярных произведений можно производить только по конечной области $\{0 \le \omega(\rho,\varphi) < M\}$.

Нелинейная задача

Рассмотрим нелинейную стационарную задачу обтекания цилиндрического тела потоком вязкой несжимаемой жидкости:

$$\nu\Delta^2\psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\varphi} \ \text{вне} \ \overline{\Omega}. \tag{9}$$

Уравнение (9) дополняется краевыми условиями (2) и условием на бесконечности (3).

Задача (9), (2), (3) была решена методом последовательных приближений. В качестве начального приближения $\psi^{(0)}$ было взято приближенное решение соответствующей линейной задачи Озеена. Если приближение $\psi^{(p)}$ известно, то следующее приближение $\psi^{(p+1)}$ находим как решение линейной задачи

$$\nu\Delta^2\psi^{(p+1)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi^{(p)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\Delta\psi^{(p)}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi^{(p)}}{\partial\rho}\frac{\partial\Delta\psi^{(p)}}{\partial\varphi} \text{ вне } \overline{\Omega},$$

$$\psi^{(p+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi^{(p+1)}}{\partial\mathbf{n}}\Bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad \psi^{(p+1)} \sim U_\infty\rho\sin\varphi \text{ при } \rho\to\infty, \ p = 0,1,2,...$$

На каждом шаге итерационного процесса приближенное решение ищем в виде функции

$$\psi^{(p+1)} = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1^{(p+1)}) + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2^{(p+1)},$$

которая при любом выборе достаточно гладких функций $\Phi_1^{(p+1)}$ и $\Phi_2^{(p+1)}$ ($\Phi_1^{(p+1)}\cdot\rho^{-1}\to 0$ при $\rho\to+\infty$) точно удовлетворяет краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3). Для аппроксимации неопределенных компонент $\Phi_1^{(p+1)}$ и $\Phi_2^{(p+1)}$ используем проекционный метод Галеркина [10]. Функции $\Phi_1^{(p+1)}$ и $\Phi_2^{(p+1)}$ аппроксимируются выражениями вида (5). В результате решения полученной системы линейных уравнений получаем новое приближение. Итерации следует прекратить, когда $\left\|\psi^{(p+1)} - \psi^{(p)}\right\| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малое число.

Можно доказать сходимость итерационного процесса при малых числах Рейнольдса. Вычислительный эксперимент показал, что итерационный процесс расходится при $\mathrm{Re} > 10$.

При $\mathrm{Re} > 10$ предлагается использовать нелинейный метод Галеркина. Приближенное решение задачи (9), (2), (3) ищем в виде (6), где Φ_1 и Φ_2 имеют вид (5). Коэффициенты α_k и β_j найдем из условия ортогональности невязки Q_N элементам f_1, ..., f_N проекционной последовательности (7):

$$(Q_N, f_i) = 0, \ i = \overline{1, N}, \ N = m_1 + m_2, \tag{10}$$

где $Q_N = \nu\Delta^2\psi_N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_N}{\partial\varphi}\frac{\partial(\Delta\psi_N)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_N}{\partial\rho}\frac{\partial(\Delta\psi_N)}{\partial\varphi}$, причем в силу свойств функции ω_M и координатных функций интегрирование в (10) при вычислении скалярных произведений можно производить только по конечной области $\{0 \le \omega(\rho,\varphi) < M\}$.

В результате получим систему нелинейных уравнений, каждое из которых представляет собой квадратичную функцию относительно α_k и β_j. Полученная система решается методом Ньютона. В качестве начального приближения выбирается набор α_k и β_j, соответствующий решению задачи Озеена, или, при больших числах Рейнольдса, решению, полученному при меньших числах Рейнольдса.

Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, при $U_\infty = 1$, $R = 1$, $m_1 = 8$, $m_2 = 14$, $\mathrm{Re} = 0{,}01; 5; 10; 15$. На рис. 1 – 4 представлены линии уровня функции тока полученного приближенного решения.

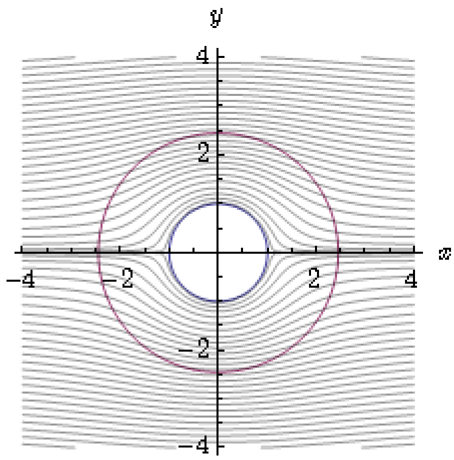

Рис. 1 Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re} = 0{,}01$

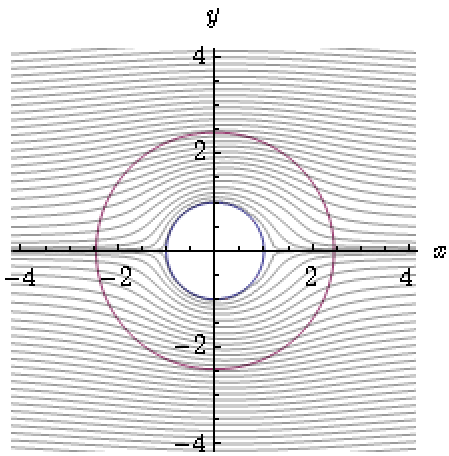

Рис. 2 Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re} = 5$

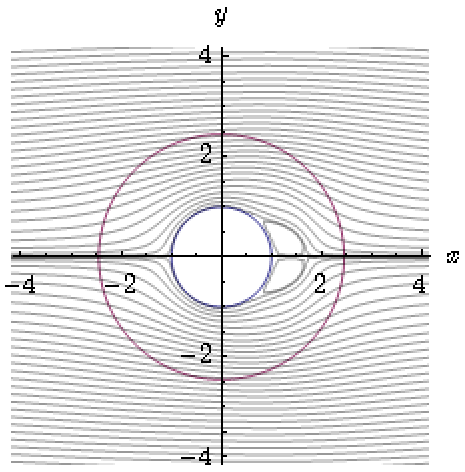

Рис. 3 Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re}=10$

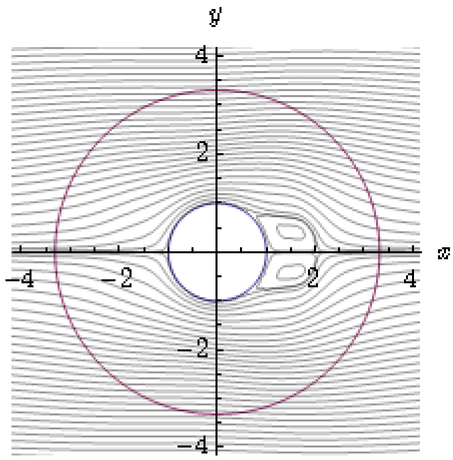

Рис. 4 Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re}=15$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика [Текст] / Г. Ламб. – М. – Л. : ОГИЗ, 1947. – 928 с.
2. Ландау Л. Ф. Теоретическая физика [Текст] : в 10 т. / Л. Ф. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2001 – 2005. – Т. 6 : Гидродинамика. – 736 с.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – М. : Дрофа, 2003. – 840 с.
4. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения [Текст] / В. Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1982. – 552 с.
5. Кутепов А. М. Химическая гидродинамика [Текст] : справочное пособие / А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов [и др.]. – М. : Квантум, 1996. – 336 с.
6. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса [Текст] / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М. : Мир, 1976. – 630 с.
7. Ламтюгова С. Н. Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат [Текст] / С. Н. Ламтюгова // Вісник Запорізького національного університету. Серія : фізико-математичні науки. – 2012. – № 1. – С. 112-122.
8. Шкадов В. Я. Течения вязкой жидкости [Текст] / В. Я. Шкадов, З. Д. Запрянов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 200 с.
9. Бабенко К. И. Расчет стационарного обтекания кругового цилиндра вязкой жидкостью [Текст] / К. И. Бабенко, Н. Д. Введенская, М. Г. Орлова // Журнал вычислит. математики и мат. физики. – 1975. – 15 (№ 1). – С. 183-196.
10. Красносельский М. А. Приближенное решение операторных уравнений [Текст] / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 420 с.

ЛАМТЮГОВА Светлана Николаевна – аспирант кафедры прикладной математики Харьковского национального университета радиоэлектроники.

Научные интересы:

– *математическое моделирование и численные методы,*
– *теория R-функций и ее приложения.*

СИДОРОВ Максим Викторович – к. ф.-м. н., доцент кафедры прикладной математики Харьковского национального университета радиоэлектроники.

Научные интересы:

– *математическое моделирование и численные методы,*
– *теория R-функций и ее приложения,*
– *стохастический анализ и его приложения.*