Матеріали XXII-ї відкритої науково-технічної конференції молодих науковців і спеціалістів ФМІ ім. Г.В. Карпенка НАН України

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ R-ФУНКЦІЙ ДО РОЗРАХУНКУ ЗОВНІШНІХ ПОВІЛЬНИХ ТЕЧІЙ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

ЛАМТЮГОВА С.М.[1], СИДОРОВ М.В.[2]

Харківська національна академія міського господарства
Харківський національний університет радіоелектроніки

Розглядається задача розрахунку повільного обтікання тіла в'язкою нестисливою рідиною за наявності в течії осьової симетрії. Для розв'язання цієї задачі використовується метод R-функцій акад. В.Л. Рвачева і метод Гальоркіна-Петрова.
The problem of calculating the slow flow past a body with viscous incompressible fluid in the presence of axial symmetry is treated. The method of R-functions of acad. V.L. Rvachev and Galerkin-Petrov method are used for solving the task.

Розглянемо повільну осесиметричну течію в'язкої нестисливої рідини. В осесиметричних задачах в сферичній системі координат r,θ,φ всі величини не залежать від координати φ і третя компонента швидкості рідини дорівнює нулю: $v_\varphi = 0$.

Рівняння Стокса в сферичній системі координат мають вигляд [1,2]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta) = 0 \text{ ,}$$

$$\mu\left(\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{2v_\theta ctg\theta}{r^2}\right) = \frac{\partial p}{\partial r} \text{ ,} \qquad (1)$$

$$\mu\left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2\theta}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} \text{ ,}$$

де

$$\Delta \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \text{.}$$

Компоненти швидкості рідини можна виразити через функцію течії ψ за формулами:

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} \text{ .}$$

Після виключення з системи Стокса (1) членів, що містять тиск, приходимо до наступного рівняння для функції течії:

$$E^2(E^2\psi)=0 \text{ зовні } \overline{\Omega}, \tag{2}$$

де

$$E^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Якщо у фізичній постановці задачі відсутні сингулярні особливості, то загальний розв'язок рівняння (2) можна подати у вигляді:

$$\psi(r,\theta)=\sum_{n=2}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{1-n} + C_n r^{n+2} + D_n r^{3-n})\,J_n(\cos\theta),$$

де A_n, B_n, C_n, D_n – довільні сталі; $J_n(\zeta)$ – функції Гегенбауера першого роду [2, 3].

Якщо межа тіла непроникна та нерухома, то для функції течії можна поставити такі крайові умови:

$$\psi\big|_{\partial\Omega}=0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=0, \tag{3}$$

де $\mathbf{n}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль; поведінка функції течії на нескінченності задається таким граничним співвідношенням:

$$\lim_{r\to\infty}\psi\cdot r^{-2}=\frac{1}{2}U_\infty\sin^2\theta, \tag{4}$$

де U_∞ – незбурена швидкість рідини на нескінченності.

Для розв'язання задачі (2) – (4) пропонується використовувати метод R-функцій акад. НАНУ В. Л. Рвачева [4].

Нехай зовні Ω відома досить гладка функція $\omega(r,\theta)$, що володіє наступними властивостями:

$$1)\ \omega(r,\theta)>0 \text{ зовні } \Omega;$$

$$2)\ \omega(r,\theta)\big|_{\partial\Omega}=0; \tag{5}$$

$$3)\ \left.\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=-1,$$

де $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$.

Введемо в розгляд досить гладку функцію $y=f_M(x)$, яка задовольняє умовам:

а) $f_M(0)=0$;

б) $f'_M(0)=1$;

$$\text{в) } f_M'(0) \ge 0 \ \ \forall x \ge 0 ; \tag{6}$$

$$\text{г) } f_M(x) \equiv 1 \ \ \forall x \ge M \ \ (M = \text{const} > 0) .$$

Легко перевірити, що умовам (6) задовольняє, наприклад, функція

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 - \exp\dfrac{Mx}{x - M}, & 0 \le x < M; \\ 1, & x \ge M. \end{cases}$$

Помітимо, що така $f_M(x) \in C^{\infty}[0, \infty)$.

Позначимо $\omega_M(r, \theta) = f_M[\omega(r, \theta)]$. Має місце твердження.

Лема. Функція $\omega_M = f_M(\omega)$ задовольняє умовам (5) і умові

$$\omega_M(r, \theta) \equiv 1, \text{ якщо } \omega_M(r, \theta) \ge M .$$

Нами доведено теорему.

Теорема. При будь-якому виборі досить гладких функцій Φ_1 і Φ_2 ($\Phi_1 = o(r^2)$ при $r \to \infty$, тобто $\Phi_1 \cdot r^{-2} \to 0$ при $r \to +\infty$) крайовим умовам (3) і умові на нескінченності (4) точно задовольняє функція вигляду

$$\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1 - \omega_M)\Phi_2 , \tag{7}$$

де

$$\psi_0 = \frac{1}{4} U_{\infty}(r - R)^2 \left(2 + \frac{R}{r}\right) \sin^2 \theta$$

– розв'язок Стоксу для задачі про обтікання сфери радіусу R (вважаємо, що сфера радіусу R цілком лежить в середині $\overline{\Omega}$).

Для рівняння (2) відома повна система часткових розв'язків відносно зовнішності сфери скінечного радіусу. Вона має вигляд [2, 3]:

$$\{\varphi_k(r, \theta)\} = \left\{ r^{1-k} J_k(\cos\theta),\ k = 2, 3, \ldots;\ r^{3-k} J_k(\cos\theta),\ k = 4, 5, \ldots \right\}.$$

Тоді $\Phi_1 = \sum\limits_k \alpha_k \varphi_k(r, \theta)$.

Помітимо, що згідно з лемою $\omega_M(r, \theta) \equiv 1$, якщо $\omega(r, \theta) \ge M$. Отже, в точках області $\omega(r, \theta) \ge M$ функція ψ, що має вигляд (7), набуває вигляду

$$\psi = \psi_0 + \Phi_1 . \tag{8}$$

Враховуючи вид (8) функції ψ, який вона приймає поза областю, помічаємо, що для вказаної області функція ψ точно задовольняє рівнянню (2) незалежно від значень сталих α_k і вибору довільної функції

Φ_2. Невизначеністю функції Φ_2 і сталих α_k скористаємося так, щоб якнайкраще задовольнити рівнянню (2) усередині області $\{0 \le \omega(r,\theta) < M\}$.

Для апроксимації невизначених компонент Φ_1 і Φ_2 скористаємося проекційним методом Гальоркіна-Петрова. Функції Φ_1 і Φ_2 представимо у вигляді:

$$\Phi_1 \approx \Phi_1^{m_1} = \sum_{k=1}^{m_1} a_k \varphi_k \text{ , } \Phi_2 \approx \Phi_2^{m_2} = \sum_{j=1}^{m_2} b_j \tau_j \text{ ,}$$

де

$$\{\varphi_k(r,\theta)\} = \left\{ r^{1-k} J_k(\cos\theta),\ k = 2,3,...;\ r^{3-k} J_k(\cos\theta),\ k = 4,5,... \right\}$$

– повна система часткових розв'язків рівняння (2) відносно зовнішності сфери кінцевого радіусу;

$$\left\{\tau_j(r,\theta)\right\} = \left\{ rJ_2(\cos\theta), J_3(\cos\theta), r^j J_j(\cos\theta),\ r^{j+2} J_j(\cos\theta),\ j = 2,3,... \right\}$$

– повна система часткових розв'язків рівняння (2) відносно області $\{\omega(r,\theta) < M\}$.

Задамося повною відносно усієї площини послідовністю функцій

$$\{\omega_M^2(r,\theta) r^{1-k} J_k(\cos\theta), k = 2,3,...; \omega_M^2(r,\theta) r^{3-k} J_k(\cos\theta), k = 4,5,...;$$

$$\omega_M^2(r,\theta) r J_2(\cos\theta),\ \omega_M^2(r,\theta) J_3(\cos\theta), \tag{9}$$

$$\omega_M^2(r,\theta) r^j J_j(\cos\theta),\ \omega_M^2(r,\theta) r^{j+2} J_j(\cos\theta), j = 2,3,...\} .$$

Значення коефіцієнтів a_k $(k = 1,2,...,m_1)$ і b_j $(j = 1,2,...,m_2)$ знайдемо з умови ортогональності відхилу першим $m_1 + m_2$ елементам послідовності (9).

Обчислювальний експеримент був проведений для задачі про обтікання еліпсоїда обертання ($U_\infty = 1,\ a = 2,\ b = 1,\ m_1 = 3,\ m_2 = 3,$ $M = 0{,}7$). Відносна похибка наближеного розв'язку склала 7%.

1. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа: Учеб для вузов. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
2. *Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А.* Химическая гидродинамика: Справочное пособие. – М.: Квантум, 1996. – 336 с.
3. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
4. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.