ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И R-ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА

Ламтюгова С. Н.
Научный руководитель: к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
61166, Харьков, пр. Ленина, 14, каф. Прикладной математики,
тел.: +38 (057) 702-1436, E-mail: maliatko@gmail.com

Рассматривается задача обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью. Течение описывается нелинейным уравнением

$$\Delta^2\psi = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\right) \text{ вне } \overline{\Omega}, \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, Re – число Рейнольда, $\psi = \psi(x, y)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\ v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Если граница тела непроницаема и неподвижна, то

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0 \text{ и } \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Поведение функции тока на бесконечности задается в виде

$$\psi \sim U_\infty y \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty, \quad (3)$$

где U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Задача (1) – (3) была решена методом последовательных приближений. В качестве начального приближения $\psi^{(0)}$ было взято решение соответствующей линейной задачи. Если приближение $\psi^{(i)}$ известно, то следующее приближение $\psi^{(i+1)}$ находим как решение линейной задачи

$$\Delta^2\psi^{(i+1)} = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi^{(i)}}{\partial y}\right) \text{ вне } \overline{\Omega}, \quad (4)$$

$$\psi^{(i+1)}\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \left.\frac{\partial\psi^{(i+1)}}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5)$$

$$\psi^{(i+1)} \sim U_\infty y \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty,\ i = 0, 1, 2, \ldots \quad (6)$$

Для решения задачи (4) – (6) используем метод R-функций акад. НАН Украины В.Л. Рвачева.

На каждом шаге итерационного процесса приближенное решение задачи (4) – (6) ищем в виде функции

$$\psi^{(i+1)} = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1^{(i+1)}) + \omega_M^2(1 - \omega_M)\Phi_2^{(i+1)},$$

которая при любом выборе достаточно гладких функций $\Phi_1^{(i+1)}$ и $\Phi_2^{(i+1)}$ ($\frac{\Phi_1^{(i+1)}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to 0$ при $\sqrt{x^2 + y^2} \to +\infty$) точно удовлетворяет краевым условиям (5) и условию на бесконечности (6), $\psi_0 = U_\infty\, y\left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right)$ – решение задачи обтекания идеальной жидкостью кругового цилиндра радиуса R (цилиндр радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела), $\omega_M = f_M(\omega)$,

$$f_M(\omega) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{M\omega}{\omega - M}}, \ 0 \le \omega < M, \\ 1, \qquad \omega \ge M, \end{cases}$$

а ω – функция, обладающая свойствами: 1) $\omega > 0$ вне $\overline{\Omega}$; 2) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$; 3) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$ – строится с использованием конструктивного аппарата теории R-функций.

Для аппроксимации неопределенных компонент $\Phi_1^{(i+1)}$ и $\Phi_2^{(i+1)}$ используется проекционный метод Галеркина-Петрова. Функции $\Phi_1^{(i+1)}$ и $\Phi_2^{(i+1)}$ аппроксимируются выражениями вида

$$\Phi_1^{(i+1)} = \sum\nolimits_{k=1}^{m_1} a_k^{(i+1)} \varphi_k \ , \ \Phi_2^{(i+1)} = \sum\nolimits_{j=1}^{m_2} \beta_j^{(i+1)} \tau_j \ ,$$

где $\{\varphi_k\} = \left\{ \rho^{2-k} \begin{matrix} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{matrix}, \ k = 3, 4, ...; \ \rho^{-k} \begin{matrix} \cos k\varphi \\ \sin k\varphi \end{matrix}, \ k = 1, 2, ... \right\}$ – полная система частных решений уравнения $\Delta^2\psi = 0$ относительно внешности цилиндра конечного радиуса; $\{\tau_j\} = \left\{ \cos 2\varphi, \ \sin 2\varphi, \ \rho^{j+2} \begin{matrix} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{matrix}, \ \rho^{j} \begin{matrix} \cos j\varphi \\ \sin j\varphi \end{matrix}, \ j = 1, 2, ... \right\}$ – полная система частных решений уравнения $\Delta^2\psi = 0$ относительно области $\{\omega(x, y) < M\}$.

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания цилиндрического тела $x^8 + y^8 = 1$ при $U_\infty = 1$, $M = 10$ и $\mathrm{Re} = 20$. На рис. 1 приведены линии уровня функции тока течения.

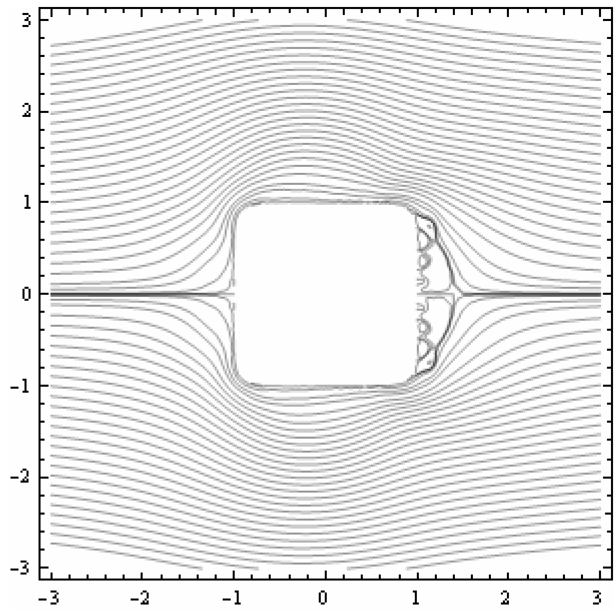

Рис. 1