$$A-\frac{\varepsilon}{2}=71^\circ,2572222\,; \quad sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0,9469706\,;$$

$$B-\frac{\varepsilon}{2}=29^\circ,8779462\,; \quad sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0,4981540\,;$$

$$C-\frac{\varepsilon}{2}=60^\circ,1219906\,; \quad sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)=0,8670880\,;$$

$$N=0,8863134\,; \quad R_m=41^\circ 551000=41^\circ 33'\,04''\,.$$

Відповідь: $\varepsilon=37^\circ 29'\,08''$; $p=101^\circ 21'\,45''$;

$r_m=20^\circ 00'\,33''$; $R_m=41^\circ 33'\,04''$.

3) Знаходимо площу F сферичного трикутника в км^2:

$F=R^2\cdot\varepsilon$; $\varepsilon=0,6542464$; $F=26,55\cdot 10^6$ км^2. ■

Приклад 6б. Дано катети $b=150^\circ 52'\,40''$ і $c=114^\circ 15'\,54''$ прямокутного сферичного трикутника ABC. Знайти: a, B, C.

□ За правилом Непера (3.3$'$) та (3.3$''$) одержуємо формули для розв'язання трикутника:

– для визначення a: $cos\,a=sin\left(90^\circ-b\right)\cdot sin\left(90^\circ-c\right)$;

– для визначення B: $cos\left(90^\circ-c\right)=ctgB\,ctg\left(90^\circ-b\right)$;

– для визначення C: $cos\left(90^\circ-b\right)=ctgC\,ctg\left(90^\circ-c\right)$.

Звідси: $cos\,a=cos\,b\,cos\,c$; $tgB=\dfrac{tgb}{sin\,c}$; $tgC=\dfrac{tgc}{sin\,b}$.

Шукані величини визначаються за косинусом і тангенсами. Отже, задача завжди має і при тому єдиний розв'язок.

Для контролю обчислень візьмемо формулу:

$$cos\,a=ctgB\cdot ctgC\,.$$

Дано: $b=150^\circ 52'\,40''=150^\circ,8777778$;

$c=114^\circ 15'\,54''=114^\circ,265$.

Проміжні обчислення:

$cos\,b=0,8735835$; $cos\,c=-0,4109575$;

$sin\,b=0,4866742$; $sin\,c=0,9116545$;

$tgb = 0{,}5571010$; $\qquad\qquad tgc = -2{,}2183666$.

Обчислення невідомих:

$$cos\, a = (-0{,}8735835)(-0{,}4109575) = 0{,}3590057;$$

$$a = 68^\circ{,}9608553 = 68^\circ 57' 39'';$$

$$tgB = \frac{-0{,}5571010}{0{,}9116545} = -0{,}6110879;$$

$$B = 148^\circ{,}5801337 = 148^\circ 34' 48'';$$

$$tgC = \frac{-2{,}2183666}{0{,}48667212} = -4{,}558217;$$

$$C = 102^\circ{,}3737509 = 102^\circ 22' 25''.$$

Контроль обчислень:

$$0{,}3590057 = \frac{1}{(-0{,}6110879)} \cdot \frac{1}{(-4{,}558217)} = 0{,}3590057.$$

Контроль зійшовся.

Відповідь: $a = 68^\circ 57' 39''$; $B = 148^\circ 34' 48''$; $C = 102^\circ 22' 25''$. ■

Приклад 6в. Дано гіпотенузу $a = 110^\circ 46' 20''$ та прилеглий до неї кут $C = 153^\circ 58' 28''$ прямокутного сферичного трикутника ABC. Знайти: b, c, B.

□ На основі правила Непера (3.3$'$) та (3.3$''$) запишемо формули:

– для визначення b: $cos\, C = ctga \cdot ctg\left(90^\circ - b\right)$; $cos\, C = ctga \cdot tgb$;

–для визначення c: $cos\left(90^\circ - c\right) = sin\, a \cdot sin\, C$; $sin\, c = sin\, a \cdot sin\, C$;

– для визначення B: $cos\, a = ctgBctgC$

Для розв'язання трикутника маємо три формули:

1. $tgb = tga\, cos\, C$; 2. $sin\, c = sin\, a \cdot sin\, C$; 3. $ctgB = cos\, a\ tgC$.

Для контролю обчислень візьмемо формулу:

$$cos\left(90^\circ - c\right) = ctgBctg\left(90^\circ - b\right),\ sin\, c = ctgB \cdot tgb.$$

Формула (2) визначає c за синусом. Величину для c з двох її значень вибирають таку, щоб вона була в одній чверті з кутом C. Формули (1) і (3) визначають b і B за тангенсами і дають для них по одному значенню. Ці два елементи завжди знаходяться в одній чверті. Отже, трикутник завжди можливий і має єдиний розв'язок.

Дано: $a = 110^\circ 46' 20'' = 110^\circ,7722222$;

$C = 153^\circ 58' 28'' = 153^\circ,9744444$.

Проміжні обчислення:

$sin\,a = 0{,}9349977$; $sin\,C = 0{,}4387720$;
$cos\,a = -0{,}3546537$; $cos\,C = -0{,}8985984$;
$tga = -2{,}6363681$; $tgC = -0{,}4882848$.

Обчислення невідомих:

$$tgb = \left(-2{,}6363681\right)\cdot\left(-0{,}8985984\right) = 2{,}3690362;$$

$$b = 67^\circ,1147794 = 67^\circ 06' 53'';$$

$$sin\,c = 0{,}9349977 \cdot 0{,}4387720 = 0{,}4102508;$$

$$c = 24^\circ,2205913 = 24^\circ 13' 14''; \ c_2 = 155^\circ,7794087 = 155^\circ 46' 46''.$$

В одній чверті з кутом C буде c_2, отже за розв'язок беремо $c = 155^\circ 46' 46''$.

$$ctgB = \left(-0{,}3546537\right)\cdot\left(-0{,}4882848\right) = 0{,}1731720;$$

$$B = 80^\circ,1754098 = 80^\circ 10' 31'';$$

Контроль обчислень:

$$0{,}4102508 = 0{,}1731720 \cdot 2{,}3690362 = 0{,}4102507.$$

Контроль зійшовся.

Відповідь: $b = 67^\circ 06' 53''$; $c = 155^\circ 46' 46''$;

$B = 80^\circ 10' 31''$. ■

<u>Приклад 6г</u>. Дано катет $b = 37^\circ 52' 09''$ та прилеглий до нього кут $C = 45^\circ 34' 35''$. Знайти: a, c, B.

□ За правилом Непера (3.3$'$) і (3.3$''$) маємо такі співвідношення:

– для визначення a: $cos\,C = ctg\left(90^\circ - b\right)ctga$,

$cos\,C = tgbctga$;

– для визначення c: $cos\left(90^\circ - b\right) = ctg\left(90^\circ - c\right)ctgC$,

$$\sin b = tgc\,ctgC ;$$

– для визначення B: $\cos B = \sin\left(90^\circ - b\right)\sin C$,

$$\cos B = \cos b \cdot \sin C .$$

Звідси одержимо для визначення невідомих елементів наступні три формули:

1. $tga = \dfrac{tgb}{\cos C}$; 2. $tgc = \sin b \cdot tgC$; 3. $\cos B = \cos b \cdot \sin C$.

Елементи a і c визначаються за тангенсами і мають по одному значенню. Кут B визначається за косинусом і теж має одне значення. Що стосується знаку косинуса B, то $\cos B$ має той же знак, що і косинус b. Отже трикутник завжди можливий і задача має єдиний розв'язок.

Для контролю обчислень візьмемо формулу:

$$\cos B = ctga \cdot tgc = \frac{tgc}{tga} .$$

Дано: $b = 37^\circ 52' 09'' = 37^\circ,8691666$;

$$C = 45^\circ 34' 35'' = 45^\circ,5763888 .$$

Проміжні обчислення:

$\sin b = 0,6138605$; $\sin C = 0,7141843$;

$\cos b = 0,7894145$; $\cos C = 0,6999577$;

$tgb = 0,7776148$; $tgC = 1,0203249$.

Обчислення невідомих:

$$tga = \frac{0,7776148}{0,6999577} = 1,1109454 ; \quad a = 48^\circ,0085387 = 48^\circ 00' 31'' ;$$

$$tgc = 0,6138605 \cdot 1,0203249 = 0,6263372 ;$$

$$c = 32^\circ,0604428 = 32^\circ 03' 38'' ;$$

$$\cos B = 0,7894145 \cdot 0,7141843 = 0,5637874 ;$$

$$B = 55^\circ,6818686 = 55^\circ 40' 55'' .$$

Контроль обчислень:

$$0,5637874 = \frac{0,6263372}{1,1109454} = 0,5637875 .$$

Контроль зійшовся.

Відповідь: $a = 48^\circ 00' 31''$, $C = 32^\circ 03' 38''$,

$B = 55^\circ 40' 55''$. ■

Приклад 6д. Дано кути: $B = 80^\circ 10' 32''$; $C = 154^\circ 58' 28''$. Знайти: b, c, a.

□ Користуючись правилом Непера (3.3′) і (3.3″), маємо:

– для визначення b: $\cos B = \sin\left(90^\circ - b\right)\sin C$;

– для визначення c: $\cos C = \sin\left(90^\circ - c\right)\sin B$;

– для визначення a: $\cos a = ctgB ctgC$.

Звідси дістаємо для розв'язання трикутника наступні співвідношення:

$$\cos a = ctgB \cdot ctgC; \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}; \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

Для контролю обчислень візьмемо сферичну формулу Піфагора:

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Розв'язок матиме одне значення, тому що всі елементи трикутника визначаються за косинусами.

Трикутник можливий тільки тоді, коли сума даних кутів знаходиться між 90° і 270°, а різниця їх між -90° і 90°.

Насправді: уявимо для даного сферичного прямокутного трикутника полярний, у нього будуть сторони: 90°, $180^\circ - B$ і $180^\circ - C$.

Зважаючи на те, що сума сторін сферичного трикутника повинна бути менша за 360°, а кожна з них менша за суму двох інших, маємо чотири наступні нерівності:

1) $450^\circ - \left(B + C\right) < 360^\circ$; $\quad 90^\circ < B + C$;

2) $90^\circ < 360^\circ - \left(B + C\right)$; $\quad 270^\circ > B + C$;

3) $180^\circ - B < 270^\circ - C$; $\quad -90^\circ < B - C$;

4) $180^\circ - C < 270^\circ - B$; $\quad 90^\circ > B - C$.

Об'єднавши першу нерівність з другою, а третю з четвертою, одержимо:

$$90^\circ < B + C < 270^\circ; \quad -90^\circ < B - C < 90^\circ.$$

Дано: $B = 80^\circ 10' 32'' = 80^\circ,1755556$;

$$C = 154^\circ 58' 28'' = 154^\circ,9744444.$$

Проміжні обчислення:

$sin\,B = 0{,}9853352$; $sin\,C = 0{,}4230225$;

$cos\,B = 0{,}1706299$; $cos\,C = -0{,}9061192$;

$tgB = 5{,}7746926$; $tgC = -0{,}4668508$.

Обчислення невідомих:

$$cos\,a = \frac{-1}{5{,}7746926 \cdot 0{,}4668508} = -0{,}3709309;$$

$$a = 111^\circ,7730402 = 111^\circ 46' 23'';$$

$$cos\,b = \frac{0{,}1706299}{0{,}4230225} = 0{,}40335894;$$

$$b = 66^\circ,2116955 = 66^\circ 12' 42'';$$

$$cos\,c = -\frac{0{,}9061192}{0{,}9853352} = -0{,}9196050;$$

$$c = 156^\circ,8684086 = 156^\circ 52' 06''.$$

Контроль обчислень:

$$-0{,}3709309 = 0{,}40335894 \cdot \left(-0{,}9196050\right) = -0{,}3709490.$$

Контроль хороший.

Відповідь: $a = 111^\circ 46' 23''$; $b = 66^\circ 12' 42''$;

$c = 156^\circ 52' 06''$. ■

Приклад 6е. Дано катет $b = 38^\circ 27' 50''$ і протилежний йому кут $B = 56^\circ 00' 34''$. Знайти: a, c, C.

□ За правилом Непера одержуємо:

– для визначення a: $cos\left(90^\circ - b\right) = sin\,B\,sin\,a$;

$$sin\,b = sin\,B\,sin\,a;$$

– для визначення c: $cos\left(90^\circ - c\right) = ctgBctg\left(90^\circ - b\right)$;

$$sin\,c = ctgBtgb;$$

– для визначення C: $\quad cos\,B = sin\left(90^\circ - b\right) sin\,C$;

$$cos\,B = cos\,b\,sin\,C \ .$$

Звідси невідомі елементи визначають за наступними формулами:

$$sin\,a = \frac{sin\,b}{sin\,B}; \ sin\,c = \frac{tgb}{tgB}; \ sin\,C = \frac{cos\,B}{cos\,b} \ .$$

Для контролю обчислень візьмемо формулу з (3.3′):

$$cos\left(90^\circ - c\right) = sin\,a\,sin\,C; \quad sin\,c = sin\,a\,sin\,C \ .$$

Для існування трикутника необхідно, щоб $sin\,a$, $sin\,c$ і $sin\,C$ були додатні та менші одиниці. Тобто, щоб b та B були однорідними – обидва або більші за 90°, або менші за 90°. Для виконання нерівності $sin\,a < 1$, потрібно, щоб $sin\,b$ був менше за $sin\,B$. Виходячи з того, що b та B повинні знаходитись в одній чверті, то при $b < 90^\circ$ повинно виконуватися $b < B < 90^\circ$, а при $b > 90^\circ$ – відповідно $90^\circ < B < b$.

Якщо задача можлива, то дістанемо два розв’язки, тобто два сферичних трикутники. Сторони a_1, c_1 і кут C_1 першого трикутника будуть доповненнями відповідних сторін a_2, c_2 і кута C_2 другого трикутника до 180°. Ці трикутники матимуть спільний катет b, а протилежні цьому катету кути будуть рівні B.

Дано: $\quad b = 38^\circ 27' 50'' = 38^\circ,4638889$;

$$B = 56^\circ 00' 34'' = 56^\circ,0094444 \ .$$

Проміжні обчислення:

$sin\,b = 0{,}6220213$;	$sin\,B = 0{,}8291297$;
$cos\,b = 0{,}7830003$;	$cos\,B = 0{,}5590562$;
$tgb = 0{,}7944074$;	$tgB = 1{,}4830882$.

Обчислення невідомих:

$$sin\,a = \frac{0{,}6220213}{0{,}8291297} = 0{,}7502099;$$

$$a_1 = 48^\circ,6085624 = 48^\circ 36' 31'';$$

$$a_2 = 131^\circ,3914376 = 131^\circ 23' 29'';$$

$$sin\,c = \frac{0{,}7944074}{1{,}4830882} = 0{,}5356441;$$

$$c_1 = 32^\circ{,}3876012 = 32^\circ 23' 15'';$$

$$c_2 = 147^\circ{,}6123988 = 147^\circ 36' 45'';$$

$$sin\,C = \frac{0{,}5590562}{0{,}7830003} = 0{,}7139923;$$

$$C_1 = 45^\circ{,}5606768 = 45^\circ 33' 38'';$$

$$C_2 = 134^\circ{,}4393232 = 134^\circ 26' 22''.$$

Контроль обчислень:

$$0{,}5356441 = 0{,}7502099 \cdot 0{,}789923 = 0{,}5356441.$$

Контроль зійшовся.

Відповідь 1:	Відповідь 2:
$a_1 = 48^\circ 36' 31''$;	$a_2 = 131^\circ 23' 29''$;
$c_1 = 32^\circ 23' 15''$;	$c_2 = 147^\circ 36' 45''$;
$C_1 = 45^\circ 33' 38''$;	$C_2 = 134^\circ 26' 22''$. ■

- **Розв'язання косокутних сферичних трикутників**

Приклад 7а. Розв'язання сферичного трикутника за трьома сторонами. Дано: $a = 60^\circ 31' 42''$; $b = 117^\circ 28' 19''$; $c = 78^\circ 42' 23''$. Знайти: 1) A, B, C; 2) ε, r_{m_1}, R_m; 3) F, якщо $R = 6370$ км.

□ 1) Обчислення виконаємо за формулами (4.5):

$$tg\frac{A}{2} = \frac{M}{sin(p-a)};\ tg\frac{B}{2} = \frac{M}{sin(p-b)};\ tg\frac{C}{2} = \frac{M}{sin(p-c)},$$

де $M = \sqrt{\dfrac{sin(p-a)\,sin(p-b)\,sin(p-c)}{sin\,p}}$.

Для контролю обчислення скористаємося співвідношенням (4.6):

$$tg\frac{A}{2} \cdot tg\frac{B}{2}\,tg\frac{C}{2} = \frac{M}{sin\,p}.$$

Для можливості задачі необхідно, щоб синуси, що входять під радикал, були додатні. Для цього необхідно, щоб виконувались нерівності: $p<180^\circ$; $p-a>0^\circ$; $p-b>0^\circ$; $p-c>0$, або $a+b+c<360^\circ$, $c+b>a$; $a+c>b$, $a+b>c$. Всі нерівності є загальними для існування кожного сферичного трикутника.

Задача допускає єдиний повністю визначений розв'язок, оскільки невідомі елементи знаходяться за тангенсами аргументів $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ та $\frac{C}{2}$, які менші за 90°.

Дано: $a=60^\circ 31' 42''=60^\circ,5283333$;

$$b=117^\circ 28' 19''=117^\circ,4719444;$$

$$c=78^\circ 42' 23''=78^\circ,7063889.$$

Розглянувши дані величини, приходимо до висновку, що завдання відповідає умовам існування сферичного трикутника, а тому розв'язок задачі можливий.

Проміжні обчислення:

$$2p=256^\circ,7066667;$$

$$p=128^\circ,3533333; \qquad \sin p=0{,}7841991;$$

$$p-a=67^\circ,825; \quad \sin(p-a)=0{,}9260354;$$

$$p-b=10^\circ,8813889; \quad \sin(p-b)=0{,}1887765;$$

$$p-c=49^\circ,6469444; \quad \sin(p-c)=0{,}7620691;$$

$$M=\sqrt{\frac{0{,}9260354\cdot 0{,}1887765\cdot 0{,}7620691}{0{,}7841991}}=0{,}4121656.$$

Обчислення невідомих:

$$tg\frac{A}{2}=\frac{0{,}4121656}{0{,}9260354}=0{,}4450862; \quad \frac{A}{2}=23^\circ,9931876;$$

$$A=47^\circ,9863752=47^\circ 59' 11'';$$

$$tg\frac{B}{2}=\frac{0{,}4121656}{0{,}1887765}=2{,}1833523; \quad \frac{B}{2}=65^\circ,3916854;$$

$$B=130^\circ,7833707=130^\circ 47' 00'';$$

$$tg\frac{C}{2}=\frac{0{,}4121656}{0{,}7620691}=0{,}5408507; \quad \frac{C}{2}=28^\circ,4067698;$$

$$C = 56^\circ,8135397 = 56^\circ,48'\,49''\,.$$

Контроль обчислень:

$$0,4450862 \cdot 2,1833523 \cdot 0,5408507 = \frac{0,4121656}{0,7841991}\,;$$

$$0,5255879 = 0,5255879\,.$$

Контроль зійшовся.

Відповідь: $A = 47^\circ 59'\,11''$; $B = 130^\circ 47'\,00$;

$C = 56^\circ 48'\,49''$.

2) Ексцес знайдемо за формулою Люільє (4.22):

$$tg\,\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{tg\,\frac{p}{2}\,tg\,\frac{p-a}{2}\,tg\,\frac{p-b}{2}\,tg\,\frac{p-c}{2}}\;;$$

$$\frac{p}{2} = 64^\circ,1766666\,;\; tg\,\frac{p}{2} = 2,0664513\,;$$

$$\frac{p-a}{2} = 33^\circ,9125000\,;\; tg\,\frac{p-a}{2} = 0,6722888\,;$$

$$\frac{p-b}{2} = 5^\circ,4406946\,;\; tg\,\frac{p-b}{2} = 0,0952444\,;$$

$$\frac{p-c}{2} = 24^\circ,8234722\,;\; tg\,\frac{p-c}{2} = 0,4625621\,;$$

$$tg\,\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{2,0664513 \cdot 0,6722888 \cdot 0,0952444 \cdot 0,4625621} =$$

$$= 0,2473975$$

$$\frac{\varepsilon}{4} = 13^\circ,8958157\,;\; \varepsilon = 55^\circ,5832629 = 55^\circ 34'\,59''\,.$$

Радіус вписаного кола r_m знайдемо за формулою:

$$tgr_m = M = 0,4121656\,;\quad r_m = 22^\circ,3997719 = 22^\circ 23'\,59''\,.$$

Радіус описаного кола R_m знайдемо за формулою (4.14):

$$tg\,\frac{a}{2}\,tg\,\frac{b}{2}\,tg\,\frac{c}{2} = N\,sin\,\frac{\varepsilon}{2}\text{, звідки}\quad tgR_m = N = \frac{tg\,\frac{a}{2}\,tg\,\frac{b}{2}\,tg\,\frac{c}{2}}{sin\,\frac{\varepsilon}{2}}\,.$$

$$tg\frac{a}{2}=0{,}5835142; \quad tg\frac{b}{2}=1{,}6470396; \quad tg\frac{c}{2}=0{,}8200421;$$

$$sin\frac{\varepsilon}{2}=0{,}4662574;$$

$$tgR_m=N=\frac{0{,}5835142\cdot 1{,}6470396\cdot 0{,}8200421}{0{,}4662574}=1{,}6903081;$$

$$R_m=59^\circ{,}3910968=59^\circ 23' 28''.$$

Відповідь: $\varepsilon=55^\circ 34' 59''$; $r_m=22^\circ 23' 59''$;

$$R_m=59^\circ 23' 28''.$$

3) Площа сферичного трикутника визначається за формулою (1.19): $F=R^2\varepsilon$. За умовою $R=6370$ км і знайдено вище, що

$$\varepsilon=55^\circ 34' 59''=55^\circ{,}5832629.$$

У радіанах $\varepsilon=0{,}9700$. Тоді

$$F=(6370)^2\cdot 0{,}97=3{,}94\cdot 10^7 \text{ (км)}^2. \quad \blacksquare$$

Приклад 7б. Розв’язання сферичного трикутника за трьома його кутами. Дано: $A=47^\circ 59' 12''$; $B=130^\circ 46' 58''$; $C=56^\circ 48' 52''$. Знайти: a, b, c.

□ Обчислення виконаємо за формулами (4.13):

$$tg\frac{a}{2}=N\,sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right); \; tg\frac{b}{2}=N\,sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right);$$

$$tg\,(c/2)=N\sin\,(C-\varepsilon/2),$$

де $N=\sqrt{\dfrac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin(A-\varepsilon/2)\sin(B-\varepsilon/2)\sin(C-\varepsilon/2)}}$.

Контроль обчислень проведемо за формулою (4.14):

$$tg\frac{a}{2}tg\frac{b}{2}tg\frac{c}{2}=N\,sin\frac{\varepsilon}{2}.$$

При розв’язанні задачі одержимо єдиний повністю визначений розв’язок.

Трикутник можливий, оскільки дані відповідають умовам (1.12) і (1.13) з пункту 1.3.

Дано: $A = 47^\circ 59' 12'' = 47^\circ,9866667$;

$B = 130^\circ 46' 58'' = 130^\circ,7827778$;

$C = 56^\circ 48' 52'' = 56^\circ,8144444$.

Проміжні обчислення:

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ = 55^\circ,5838889 = 55^\circ 35' 02'';$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = 27^\circ,7919445 = 27^\circ 47' 31''; \; sin\frac{\varepsilon}{2} = 0,4662623;$$

$$A - \frac{\varepsilon}{2} = 20^\circ,1947222; \; sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0,3452117;$$

$$B - \frac{\varepsilon}{2} = 102^\circ,9908333; \; sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0,9744060;$$

$$C - \frac{\varepsilon}{2} = 29^\circ,0224999; \; sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0,4851530;$$

$$N = \sqrt{\frac{0,4662623}{0,3452117 \cdot 0,9744060 \cdot 0,4851530}} = 1,6902972.$$

Обчислення невідомих:

$$tg\frac{a}{2} = 1,6902972 \cdot 0,3452117 = 0,5835104; \; \frac{a}{2} = 30^\circ,2640048;$$

$$a = 60^\circ,5280095 = 60^\circ 31' 41'';$$

$$tg\frac{b}{2} = 1,6902972 \cdot 0,9744060 = 1,6470336; \; \frac{b}{2} = 58^\circ,7359120;$$

$$b = 117^\circ,471824 = 117^\circ 28' 18'';$$

$$tg\frac{c}{2} = 1,6902972 \cdot 0,4851530 = 0,8200528; \; \frac{c}{2} = 39^\circ,3535600;$$

$$c = 78^\circ 707112 = 78^\circ 42' 26''.$$

Контроль обчислень:

$$0,5835104 \cdot 1,6470336 \cdot 0,8200528 = 1,6902972 \cdot 0,4662623;$$

$$0,78812096 = 0,78812186;$$

Контроль хороший.

Відповідь: $a = 60^\circ 31' 41''$; $b = 117^\circ 28' 18''$;

$c = 78^\circ 42' 26''$. ■

Приклад 7в. Розв'язання сферичного трикутника за двома сторонами та кутом між ними. Дано: $a = 40^\circ 28' 36''$; $b = 110^\circ 18' 32''$; $C = 56^\circ 40' 54''$. Знайти: A, B, c.

□ Для обчислення кутів A і B застосуємо аналогії Непера (4.17):

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \ tg\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{a-b}{2}\ ctg\dfrac{C}{2}\Big/\cos\dfrac{a+b}{2} \\ 2)\ \ tg\dfrac{A-B}{2} = \sin\dfrac{a-b}{2}\ ctg\dfrac{C}{2}\Big/\sin\dfrac{a+b}{2} \end{array}\right\},$$

а для обчислення сторони c скористаємося третьою формулою з (2.3):

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\ .$$

Контроль за обчисленням виконаємо за третім співвідношенням з (2.4):

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c\ .$$

Аналіз вихідних даних задачі показує, що вони відповідають умовам існування сферичного трикутника. Використані для обчислення невідомих формули дають єдиний повністю визначений розв'язок.

Дано: $a = 40^\circ 28' 36'' = 40^\circ{,}4766667$;

$b = 110^\circ 18' 32'' = 110^\circ{,}3088889$;

$C = 56^\circ 40' 54'' = 56^\circ{,}6816667$.

Проміжні обчислення:

$\cos a = 0{,}7606704$; $\sin a = 0{,}6491383$;

$\cos b = -0{,}3470812$; $\sin b = 0{,}9378351$;

$\dfrac{a-b}{2} = -34^\circ{,}9161112$; $\cos\dfrac{a-b}{2} = 0{,}8199910$;

$\sin\dfrac{a-b}{2} = -0{,}5723765$; $tg\dfrac{a-b}{2} = -0{,}6980278$;

$\dfrac{a+b}{2} = 75^\circ{,}3927778$; $\cos\dfrac{a+b}{2} = 0{,}2521913$;

$\sin\dfrac{a+b}{2} = 0{,}9676774$; $tg\dfrac{a+b}{2} = 3{,}8370762$;

$$\cos C = 0{,}5492902\,; \qquad ctg\,\frac{C}{2} = 1{,}8540349\,.$$

Обчислення невідомих:

$$tg\,\frac{A+B}{2} = \frac{0{,}8199910}{0{,}2521913}\cdot 1{,}8540349 = 6{,}0283282\,;$$

$$\frac{A+B}{2} = 80^\circ{,}5813444\,;$$

$$tg\,\frac{A-B}{2} = \frac{-0{,}5723765}{0{,}9676776}\cdot 1{,}8540349 = -1{,}0966524\,;$$

$$\frac{A-B}{2} = -47^\circ{,}6393785\,;$$

$$+\begin{cases} \dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2} = 80^\circ{,}5813444 \\ \dfrac{A}{2}-\dfrac{B}{2} = -47^\circ{,}6393785 \end{cases} \qquad -\begin{cases} \dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2} = 80^\circ{,}5813444 \\ \dfrac{A}{2}-\dfrac{B}{2} = -47^\circ{,}6393785 \end{cases}$$

$$A = 32^\circ{,}9419659 = \qquad B = 128^\circ{,}2207229 =$$

$$= 32^\circ 56' 32'' \qquad = 128^\circ 13' 15''$$

$$\cos c = 0{,}7606704\left(-0{,}3470812\right) + 0{,}6491383\cdot 0{,}9378351\times$$

$$\times 0{,}5492902 = 0{,}0703808$$

$$c = 85^\circ{,}9641415 = 85^\circ 57' 51''\,.$$

Контроль обчислень:

$$0{,}5492902 = -\cos A\cdot\cos B + \sin A \sin B \cos c\,;$$

$$\cos A = 0{,}8392218\,; \qquad \sin A = 0{,}5437889\,;$$

$$\cos B = -0{,}6200628\,; \qquad \sin B = 0{,}7845521;$$

$$0{,}5492902 = -0{,}8392218\left(-0{,}6186941\right) + 0{,}5437899\times$$

$$\times 0{,}7845521\cdot 0{,}0703808$$

$0{,}549202 = 0{,}549248\,.$ Контроль хороший.

Відповідь: $A = 32^\circ 56' 31''\,;$ $B = 128^\circ 13' 15''\,;$

$c = 85^\circ 57' 51''\,.$ ■

Приклад 7г. Розв'язання сферичного трикутника за стороною та двома прилеглими кутами. Дано: $A = 59^\circ 32' 16''$; $B = 77^\circ 18' 20''$ і $c = 31^\circ 29' 34''$. Знайти: a, b, C.

□ Задача розв'язується безпосередньо за третьою і четвертою аналогіями Непера (4.18):

$$tg\frac{a+b}{2} = tg\frac{c}{2}\cdot\frac{cos\dfrac{A-B}{2}}{cos\dfrac{A+B}{2}}; \quad tg\frac{a-b}{2} = tg\frac{c}{2}\cdot\frac{sin\dfrac{A-B}{2}}{sin\dfrac{A+B}{2}}.$$

Дано: $A = 59^\circ 32' 16'' = 59^\circ,537778$;

$B = 77^\circ 18' 20'' = 77^\circ,3055556$;

$c = 31^\circ 29' 34'' = 31^\circ,4927778$.

Проміжні обчислення:

$$\frac{A-B}{2} = -8,8838889; \quad cos\frac{A-B}{2} = 0,9880033;$$

$$sin\frac{A-B}{2} = -0,1544325; \quad tg\frac{A-B}{2} = -0,1563077;$$

$$\frac{A+B}{2} = 68^\circ,4216668; \quad cos\frac{A+B}{2} = 0,3677729;$$

$$sin\frac{A+B}{2} = 0,9299156; \quad tg\frac{A+B}{2} = 2,5285049;$$

$$\frac{c}{2} = 15^\circ,7463889; \quad tg\frac{c}{2} = 0,2819611.$$

Обчислення невідомих:

$$tg\frac{a+b}{2} = 0,2819611\cdot\frac{0,9880033}{0,3677729} = 0,7574743;$$

$$\frac{a+b}{2} = 37^\circ,1429939;$$

$$tg\frac{a-b}{2} = 0,2819611\cdot\frac{(-0,1544325)}{0,9299156} = -0,0468257;$$

$$\frac{a-b}{2} = -2^\circ,6809572;$$

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a=34^{\circ},4534222=34^{\circ}27'12'';$$

$$\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b=39^{\circ},8239511=39^{\circ}49'26''.$$

Контроль обчислень при визначенні сторін a і b виконаємо за формулою Гаусса (4.19):

$$\frac{tg\,\frac{a+b}{2}}{tg\,\frac{a-b}{2}}=\frac{tg\,\frac{A+B}{2}}{tg\,\frac{A-B}{2}};\quad \frac{0,7574743}{-0,0468257}=\frac{2,5285049}{-0,1563077};$$

$-16,1764651=-16,1764575$. Контроль хороший.

Для визначення кута C візьмемо першу та другу аналогії Непера (4.17):

$$ctg\,\frac{C}{2}=\frac{tg\,\frac{A+B}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}};\quad ctg\,\frac{C}{2}=\frac{tg\,\frac{A-B}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}.$$

Проміжні обчислення:

$$\cos\frac{a+b}{2}=0,7971311;\qquad \cos\frac{a-b}{2}=0,9989055;$$

$$\sin\frac{a+b}{2}=0,6038063;\qquad \sin\frac{a-b}{2}=-0,0467746.$$

Обчислення невідомого:

$$ctg\,\frac{C}{2}=\frac{2,5285049\cdot 0,7971311}{0,9989055}=2,0177583;$$

$$\frac{C}{2}=26^{\circ},3629922;\qquad C=52^{\circ},7259844=52^{\circ}43'34'';$$

$$ctg\,\frac{C}{2}=\frac{-0,1563077\cdot 0,6038063}{-0,0467746}=2,0177567;$$

$$\frac{C}{2}=26^{\circ},3630558;\qquad C=52^{\circ},7261116=52^{\circ}43'34''.$$

Контролем точності при знаходженні кута C є обчислення його за двома різними формулами. Одержані результати співпадають.

При розв’язуванні цієї задачі дістаємо дійсні та цілком певні значення шуканих елементів за умови, що величини кожного з даних елементів розташовані між 0° та 180°. Розв’язок задачі завжди існує і при цьому єдиний.

Відповідь: $a = 34^\circ 27' 13''$; $b = 39' 49' 26''$;

$C = 52^\circ 43' 34''$. ■

<u>Приклад 7д</u>. Розв’язання сферичного трикутника за двома сторонами та кутом, що лежить проти однієї з них. Дано: $a = 57^\circ 41' 13''$; $b = 76^\circ 34' 42''$; $A = 40^\circ 23' 28''$. Знайти: B, C та c.

□ Кут B визначимо за формулою синусів (25):

$$sin\,B = sin\,A \cdot \frac{sin\,b}{sin\,a}.$$

Кут C та сторону c визначимо за формулами, що випливають з аналогій Непера (4.17) і (4.18):

$$tg\frac{C}{2} = ctg\frac{A+B}{2} \cdot \frac{cos\frac{a-b}{2}}{cos\frac{a+b}{2}}; \quad tg\frac{C}{2} = ctg\frac{A-B}{2} \cdot \frac{sin\frac{a-b}{2}}{sin\frac{a+b}{2}};$$

$$tg\frac{c}{2} = tg\frac{a+b}{2} \cdot \frac{cos\frac{A+B}{2}}{cos\frac{A-B}{2}}; \quad tg\frac{c}{2} = tg\frac{a-b}{2} \cdot \frac{sin\frac{A+B}{2}}{sin\frac{A-B}{2}}.$$

Контролем знаходження величин C та c служить обчислення кожної з них за двома різними співвідношеннями. Обчислення кута B перевіримо за формулою Гаусса (4.19):

$$tg\frac{A+B}{2} \Big/ tg\frac{A-B}{2} = tg\frac{a+b}{2} \Big/ tg\frac{a-b}{2}.$$

При обчисленні кута B за формулою синусів можливі три випадки:

а) $sin\,B > 1$, при цьому розв’язок задачі не існує;

б) $sin\,B = 1$, тоді кут $B = 90^\circ$ і задача має єдиний розв’язок;

в) $sin\,B < 1$, тоді для кута B дістанемо два значення: перше менше за 90°, а друге більше за 90°. Задача матиме два розв'язки.

Оскільки в трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут і навпаки, то шуканий кут мусить задовольняти умові, щоб різниці $A-B$ і $a-b$ мали один і той же знак. Якщо ця умова не справджується, то сферичний трикутник не можливий. Якщо ж ця умова виконана одним або двома одержаними значеннями кута B, то дістанемо один або два розв'язки трикутника. Справді, при кожному певному значенні кута B, що задовольняє попередній умові, за формулами Непера для кута C і сторони c отримаємо єдині цілком певні значення.

З того, що різниці $A-B$ і $a-b$ мають однакові знаки, спираючись на умову: якщо $A+B \lesseqgtr 180^\circ$, то і $a+b \lesseqgtr 180^\circ$, маємо: $0^\circ < \dfrac{C}{2} < 90^\circ$; $0^\circ < \dfrac{c}{2} < 90^\circ$, або $C < 180^\circ$, $c < 180^\circ$. Звідси очевидно, що знаходження кута C і сторони c за тангенсами $\dfrac{C}{2}$ і $\dfrac{c}{2}$ для кожного значення B буде однозначним.

Дано: $a = 57^\circ 41' 13'' = 57^\circ,6869444$;

$b = 76^\circ 34' 42'' = 76^\circ,5783333$;

$A = 40^\circ 23' 28'' = 40^\circ,3911111$.

Проміжні обчислення:

$sin\, a = 0,8451400$; $sin\, b = 0,97268817$; $sin\, A = 0,6480017$;

$$sin\, B = 0,6480017 \frac{0,97268817}{0,8451400} = 0,7457929;$$

$$B_1 = 48^\circ,2272247; \qquad B_2 = 131^\circ,7727534;$$

$$B_1 = 48^\circ 13' 38''; \qquad B_2 = 131^\circ 46' 22'';$$

$$a+b = 134^\circ,2652777 < 180^\circ; \qquad A+B_1 = 88^\circ,6183358 < 180^\circ;$$

$$A+B_2 = 172^\circ,1638645 < 180^\circ; \quad a-b = -18^\circ,8913889;$$

$$A-B_1 = -7,8361136; \quad A-B_2 = -91^\circ,3816423.$$

Оскільки $a-b<0$, $A-B_1<0$ і $A-B_2<0$, то обидва розв'язки задачі можливі.

1) $\frac{A+B_1}{2}=44^\circ,3091679$; $\quad cos\frac{A+B_1}{2}=0,715581$;

$sin\frac{A+B_1}{2}=0,6985298$; $\quad tg\frac{A+B_1}{2}=0,9761716$;

$ctg\frac{A+B_1}{2}=1,0244101$; $\quad \frac{A-B_1}{2}=-3,9180568$;

$cos\frac{A-B_1}{2}=0,9976628$; $\quad sin\frac{A-B_1}{2}=-0,0683297$;

$tg\frac{A-B_1}{2}=-0,0684898$; $\quad ctg\frac{A-B_1}{2}=-14,6007179$;

$\frac{a+b}{2}=67^\circ,1326388$; $\quad cos\frac{a+b}{2}=0,3885991$;

$sin\frac{a+b}{2}=0,9214069$; $\quad tg\frac{a+b}{2}=2,3710988$;

$\frac{a-b}{2}=-9,4456944$; $\quad cos\frac{a-b}{2}=0,9864416$;

$sin\frac{a-b}{2}=-0,1641127$; $\quad tg\frac{a-b}{2}=-0,1663684$;

2) $\frac{A+B_2}{2}=86^\circ,0819322$; $\quad cos\frac{A+B_2}{2}=0,0683299$;

$sin\frac{A+B_2}{2}=0,9976628$; $\quad tg\frac{A+B_2}{2}=14,600677$;

$ctg\frac{A+B_2}{2}=0,0684899$; $\quad \frac{A-B_2}{2}=-45,6908212$;

$cos\frac{A-B_2}{2}=0,6985299$; $\quad sin\frac{A-B_2}{2}=-0,7155808$;

$tg\frac{A-B_2}{2}=-1,0244097$; $\quad ctg\frac{A-B_2}{2}=-0,9761719$.

Контроль обчислення кута $B_{1,2}$:

B_1: $\quad tg\frac{A+B_1}{2}\Big/tg\frac{A-B_1}{2}=tg\frac{a+b}{2}\Big/tg\frac{a-b}{2}$;

$$\frac{0{,}9761716}{-0{,}0684898}=\frac{2{,}3710988}{-0{,}1663684}; \quad -14{,}2528026=-14{,}2520984;$$

$$B_2: \qquad tg\,\frac{A+B_2}{2}\Big/ tg\,\frac{A-B_2}{2}=tg\,\frac{a+b}{2}\Big/ tg\,\frac{a-b}{2};$$

$$\frac{14{,}600677}{-1{,}0244097}=\frac{2{,}3710988}{-0{,}1663684}; \quad -14{,}2527711=-14{,}2520984.$$

Узгодженість хороша.

Обчислення кута С:

$$C_1: tg\,\frac{C_1}{2}=ctg\,\frac{A+B_1}{2}\cdot\frac{cos\,\frac{a-b}{2}}{cos\,\frac{a+b}{2}}=$$

$$=1{,}0244101\cdot\frac{0{,}9864416}{0{,}3885991}=2{,}6004197$$

$$\frac{C_1}{2}=68^{\circ}{,}9655871=68^{\circ}57'56'';$$

$$tg\,\frac{C_1}{2}=ctg\,\frac{A-B_1}{2}\cdot\frac{sin\,\frac{a-b}{2}}{sin\,\frac{a+b}{2}}=-14{,}6007179\times$$

$$\times\frac{-0{,}1641127}{0{,}9214069}=2{,}6005484$$

$$\frac{C_1}{2}=68^{\circ}{,}9665373=68^{\circ}57'59''.$$

Візьмемо C_1 як середнє з двох розрахунків:

$$C_1=137^{\circ}{,}9321244=137^{\circ}55'56''.$$

$$C_2: tg\,\frac{C_2}{2}=ctg\,\frac{A+B_2}{2}\cdot\frac{cos\,\frac{a-b}{2}}{cos\,\frac{a+b}{2}}=$$

$$=0{,}0684899\cdot\frac{0{,}9864416}{0{,}3885991}=0{,}1738586$$

$$\frac{C_2}{2}=9^{\circ},8627778=9^{\circ}51'46'';$$

$$tg\frac{C_2}{2}=ctg\frac{A-B_2}{2}\cdot\frac{sin\dfrac{a-b}{2}}{sin\dfrac{a+b}{2}}=-0,9761719\times$$

$$\times\frac{-0,1641127}{0,9214069}=0,1738669$$

$$\frac{C_2}{2}=9^{\circ},8632434=9^{\circ}51'48''.$$

Візьмемо C_2 як середнє з двох розрахунків:

$$C_2=19^{\circ},7260212=19^{\circ}43'34''.$$

Обчислення сторони c:

$$c_1: tg\frac{c_1}{2}=tg\frac{a+b}{2}\cdot\frac{cos\dfrac{A+B_1}{2}}{cos\dfrac{A-B_1}{2}}=$$

$$=2,3710988\cdot\frac{0,715581}{0,9976628}=1,7373178$$

$$\frac{c_1}{2}=60^{\circ},0752730=60^{\circ}04'31'';$$

$$tg\frac{c_1}{2}=tg\frac{a-b}{2}\frac{sin\dfrac{A+B_1}{2}}{sin\dfrac{A-B_1}{2}}=-0,1663684\times$$

$$\times\frac{0,6985298}{-0,0683297}=1,7007726$$

$$\frac{c_1}{2}=59^{\circ},5458316=59^{\circ}32'45''.$$

Візьмемо c_1 як середнє з двох розрахунків:

$$c_1=119^{\circ},6211046=119^{\circ}37'16''.$$

$$c_2: tg\frac{c_2}{2} = tg\frac{a+b}{2}\frac{cos\frac{A+B_2}{2}}{cos\frac{A-B_2}{2}} =$$

$$= 2,3710988 \cdot \frac{0,0683299}{0,6985299} = 0,23193988$$

$$\frac{c_2}{2} = 13^\circ,0582826 = 13^\circ 03' 30'';$$

$$tg\frac{c_2}{2} = tg\frac{a-b}{2}\frac{sin\frac{A+B_2}{2}}{sin\frac{A-B_2}{2}} = -0,1663684 \times$$

$$\times \frac{0,9976628}{-0,7155808} = 0,2319508$$

$$\frac{c_2}{2} = 13^\circ,0588780 = 13^\circ 05' 20''.$$

Візьмемо c_2 як середнє з двох розрахунків

$$c_2 = 26^\circ,1470622 = 26^\circ 08' 49''.$$

Відповідь: $B_1 = 48^\circ 13' 48''$; $C_1 = 137^\circ 55' 56''$; $c_1 = 119^\circ 37' 16''$;

$B_2 = 131^\circ 46' 22''$; $C_2 = 19^\circ 43' 34''$; $c_2 = 26^\circ 08' 49''$. ■

Приклад 7е. Розв'язання сферичного трикутника за двома кутами та стороною, що лежить проти одного з них. Дано: $A = 60^\circ 57' 33''$; $B = 72^\circ 40' 32''$; $a = 57^\circ 17' 28''$ Знайти: b, c та C.

□ Для розв'язання даної задачі скористаємося методом безпосереднього обчислення за допомогою основних формул і аналогій Непера.

Визначимо сторону b за формулою синусів:

$$\sin b = \sin B \sin a / \sin A.$$

Перевірку обчислення виконаємо за контрольною формулою Гаусса:

$$tg\frac{A+B}{2} \Big/ tg\frac{A-B}{2} = tg\frac{a+b}{2} \Big/ tg\frac{a-b}{2}.$$

Кут C та сторону c, як і у прикладі 7д, обчислимо за аналогіями Непера:

$$tg\frac{C}{2}=ctg\frac{A+B}{2}\cdot\frac{cos\frac{a-b}{2}}{cos\frac{a+b}{2}};\quad tg\frac{c}{2}=tg\frac{a+b}{2}\cdot\frac{cos\frac{A+B}{2}}{cos\frac{A-B}{2}};$$

$$tg\frac{C}{2}=ctg\frac{A-B}{2}\cdot\frac{sin\frac{a-b}{2}}{sin\frac{a+b}{2}};\quad tg\frac{c}{2}=tg\frac{a-b}{2}\cdot\frac{sin\frac{A+B}{2}}{sin\frac{A-B}{2}}.$$

Контролем точності знаходження C та c є подвійне обчислення кожної величини за двома різними формулами.

Дано: $A=60^\circ57'33''=60^\circ,9591667$;

$$B=72^\circ40'32''=72^\circ,6755556;\quad a=57^\circ17'28''=57^\circ,2911111.$$

Обчислення сторони b:

$$\sin b=\sin B\sin a/\sin A;\quad sin\,B=0,9546338;$$

$$sin\,a=0,8414270;\qquad sin\,A=0,8742740;$$

$$sin\,b=\frac{0,9546338\cdot 0,8414270}{0,8742740}=0,9187677;$$

$b_1=66^\circ,7465823=$ $=67^\circ44'48''$ $\qquad b_2=113^\circ,2534177=$ $=113^\circ15'12''$

Різниці $A-B<0$ та $a-b_1<0$ і, відповідно, $A-B<0$ та $a-b_2<0$ мають однакові знаки, а тому існують два розв'язки:

$$b_1=67^\circ44'48''\text{ та }b_2=113^\circ15'12''.$$

Обчислення C та c:

$$\frac{A+B}{2}=66^\circ,8773612;\quad ctg\frac{A+B}{2}=0,4282419;$$

$$cos\frac{A+B}{2}=0,3936634;\quad sin\frac{A+B}{2}=0,9192547;$$

$$\frac{A-B}{2}=-5^\circ,8581944;\quad ctg\frac{A-B}{2}=-9,7463449;$$

$$cos\frac{A-B}{2}=0{,}9947776; \quad sin\frac{A-B}{2}=-0{,}1020667;$$

$$\frac{a+b_1}{2}=62^\circ{,}0188467; \quad cos\frac{a+b_1}{2}=0{,}4691811;$$

$$sin\frac{a+b_1}{2}=0{,}8831020; \quad tg\frac{a+b_1}{2}=1{,}8822198;$$

$$\frac{a-b_1}{2}=-4^\circ{,}7273559; \quad cos\frac{a-b_1}{2}=0{,}9965982;$$

$$sin\frac{a-b_1}{2}=-0{,}0824143; \quad tg\frac{a-b_1}{2}=-0{,}0826957;$$

$$\frac{a+b_2}{2}=85^\circ{,}2722644; \quad cos\frac{a+b_2}{2}=0{,}0824209;$$

$$sin\frac{a+b_2}{2}=0{,}9965976; \quad tg\frac{a+b_2}{2}=12{,}0915571;$$

$$\frac{a-b_2}{2}=-27^\circ{,}9811533; \quad cos\frac{a-b_2}{2}=0{,}8831020;$$

$$sin\frac{a-b_2}{2}=-0{,}4691811; \quad tg\frac{a-b_2}{2}=-0{,}5312876.$$

Кут C_1: $$tg\frac{C_1}{2}=ctg\frac{A+B}{2}\cos\frac{a-b_1}{2}\Big/\cos\frac{a+b_1}{2}=$$

$$=0{,}4282419\cdot\frac{0{,}9864136}{0{,}4691811}=0{,}9003424;$$

$$\frac{C_1}{2}=41^\circ{,}9980491=41^\circ 59'59''; \quad C_1=83^\circ{,}9996098=83^\circ 59'59'';$$

$$tg\frac{C_1}{2}=ctg\frac{A-B}{2}\cdot\frac{sin\frac{a-b_1}{2}}{sin\frac{a+b_1}{2}}=$$

$$=-9{,}7463449\cdot\frac{-0{,}0824143}{0{,}8831020}=0{,}9095649$$

$$\frac{C_1}{2} = 42^\circ,2885564\,;\; C_1 = 84^\circ,5771129 = 84^\circ 34' 38''\,.$$

C_1 беремо як середнє за двома розрахунками:

$$C_1 = 84^\circ,2883614 = 84^\circ 17' 18''\,.$$

Кут C_2: $$tg\frac{C_2}{2} = ctg\frac{A+B}{2}\cos\frac{a-b_2}{2}\Big/\cos\frac{a+b_2}{2} =$$

$$= 0,4282419\cdot\frac{0,8831020}{0,0824209} = 4,5884148\,;$$

$$\frac{C_2}{2} = 74^\circ,7052000\,;\qquad C_2 = 155^\circ,4104 = 155^\circ 24' 37''\,;$$

$$tg\frac{C_2}{2} = ctg\frac{A-B}{2}\frac{sin\dfrac{a-b_2}{2}}{sin\dfrac{a+b_2}{2}} =$$

$$= -9,7463449\cdot\frac{-0,4691811}{0,9965976} = 4,5884124$$

$$\frac{C_2}{2} = 77^\circ,7051938\,;\qquad C_2 = 155^\circ,4103876 = 155^\circ 24' 37''\,.$$

C_2 беремо як середнє за двома розрахунками:

$$C_2 = 155^\circ 24' 37''\,.$$

Сторона c_1: $$tg\frac{c_1}{2} = tg\frac{a+b_1}{2}\cdot\frac{\cos\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}} =$$

$$= 1,8822198\cdot\frac{0,3936634}{0,9947776} = 0,7448510\,;$$

$$\frac{c_1}{2} = 36^\circ,6806187\,;\qquad c_1 = 73^\circ,3612374 = 73^\circ 21' 40''\,;$$

$$tg\frac{c_1}{2}=tg\frac{a-b_1}{2}\cdot\frac{sin\dfrac{A+B}{2}}{sin\dfrac{A-b}{2}}=$$

$$=-0{,}0826957\cdot\frac{0{,}9192547}{-0{,}1020667}=0{,}7447915$$

$$\frac{c_1}{2}=36^\circ{,}6784277\,;\quad c_1=73^\circ{,}3568555=73^\circ21'25''\,.$$

c_1 беремо як середнє за двома розрахунками: $c_1=73^\circ21'33''$.

Сторона c_2: $$tg\frac{c_2}{2}=tg\frac{a+b_2}{2}\cdot\frac{\cos\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A-B}{2}}=$$

$$=12{,}0915571\cdot\frac{0{,}3936634}{0{,}9947776}=4{,}7849926\,;$$

$$\frac{c_2}{2}=78^\circ{,}1958357\,;\quad c_2=156^\circ{,}3916714=156^\circ23'30''\,;$$

$$tg\frac{c_2}{2}=tg\frac{a-b_2}{2}\cdot\frac{sin\dfrac{A+B}{2}}{sin\dfrac{A-B}{2}}=$$

$$=-0{,}5312876\cdot\frac{0{,}9192547}{-0{,}1020667}=4{,}7849947$$

$$\frac{c_2}{2}=78^\circ{,}1958408\,;\quad c_2=156^\circ{,}3916816=156^\circ23'30''\,.$$

Середнє значення c_2 за двома розрахунками:

$$c_2=156^\circ23'30''\,.$$

Відповідь: $b_1=67^\circ44'48''$; $c_1=73^\circ21'33''$; $C_1=84^\circ17'18''$;

$b_2=113^\circ15'12''$; $c_2=156^\circ23'30''$; $C_2=155^\circ24'37''$. ■

Контрольні запитання та вправи

1. Що вивчає сферична геометрія?
2. Які задачі розв'язує сферична тригонометрія?
3. Що таке ортодромія та локсодромія?
4. Яким співвідношенням задається зв'язок кутової (градусної, радіанної) та лінійної мір дуги великого кола?
5. Що таке полюс і поляра?
6. У чому полягає принцип двоїстості?
7. Що таке "сферичний центр" і "сферичний радіус" малого кола?
8. Як визначають положення точки в географічній сферичній системі координат?
9. За якими формулами обчислюють лінійну величину дуги великого та малого кіл?
10. Що таке "сферичний кут" і як він вимірюється?
11. Дайте означення вертикальних і суміжних сферичних кутів.
12. Подайте у звичайному вигляді градусної міри (градус – мінута – секунда, з точністю до секунд) сферичний кут, виміряний тільки в градусах: $\varphi_1 = 40^\circ,3876057$, $\varphi_2 = 132^\circ,9152183$.

(Відповідь: $\varphi_1 = 40^\circ 23' 15''$, $\varphi_2 = 132^\circ 54' 55''$)

13. Подайте у звичайному вигляді градусної міри (градус – мінута – секунда, з точністю до секунд) сферичний кут, виміряний у радіанах: $\varphi_1 = 0{,}58420$, $\varphi_2 = 2{,}32598$.

(Відповідь: $\varphi_1 = 33^\circ 28' 20''$, $\varphi_2 = 133^\circ 16' 8''$)

14. Подайте у радіанах (з точністю до сьомого знака після коми) сферичний кут, виміряний у градусній мірі: $\varphi_1 = 42^\circ 54' 6''$, $\varphi_2 = 160^\circ 9' 47''$.

(Відповідь: $\varphi_1 = 0{,}7487753$, $\varphi_2 = 2{,}7953727$)

15. Подайте у лінійній мірі (з точністю до км) дугу S великого кола земної кулі ($R = 6370$ км), виміряну в градусній мірі: $\varphi_1 = 63^\circ 0' 42''$, $\varphi_2 = 154^\circ 28' 7''$.

(Відповідь: $S_1 = 7006$ км; $S_2 = 17173$ км)

16. Подайте у лінійній мірі (з точністю до км) дугу S великого кола земної кулі ($R = 6370$ км), виміряну в радіанній мірі: $\varphi_1 = 1{,}73924$, $\varphi_2 = 0{,}82107$.

(Відповідь: $S_1 = 11079$ км; $S_2 = 5230$ км)

17. Подайте у лінійній мірі (з точністю до км) довжину дуги l паралелі земної кулі ($R = 6370$ км) на широті $\varphi = 16^\circ 52' 14''$, якщо її кутова величина (різниця довгот) $\alpha = \Delta\lambda = 124^\circ 48' 27''$.

(Відповідь: $l = 13279$ км)

18. Що таке “сферичний двокутник”? Які в нього елементи?

19. Що таке “сферичний трикутник”? Які в нього елементи?

20. У чому полягають обмеження Ейлера?

21. Дайте означення висоти, медіани, бісектриси та серединного перпендикуляра сферичного трикутника.

22. Яке перетворення називають рухом на сфері? Композицією яких простих рухів можна його подати?

23. У чому полягає рівність сферичних трикутників?

24. Що таке “спряжені сферичні трикутники”?

25. Що таке “взаємополярні сферичні трикутники”? Наведіть їх властивості.

26. Як класифікують сферичні трикутники за сторонами та кутами?

27. Наведіть співвідношення між сторонами та кутами сферичного трикутника.

28. Чи може сферичний трикутник ABC бути заданим наступними значеннями його елементів? Якщо не може, то чому?

а) $A = 59^\circ 24'$; $B = 70^\circ 56'$; $C = 81^\circ 40'$;

б) $A = 37^\circ 16'$; $B = 51^\circ 27'$; $C = 75^\circ 17'$;

в) $A = 171^\circ 46'$; $B = 151^\circ 19'$; $C = 87^\circ 55'$;

г) $a = 116^\circ 12'$; $b = 44^\circ 30'$; $c = 64^\circ 18'$;

д) $a = 116^\circ 8'$; $b = 129^\circ 2'$; $c = 114^\circ 50'$.

29. Що таке “сферичний надлишок”? Які межі його зміни?

30. Як обчислюють площу сферичного двокутника?

31. Як обчислюють площу сферичного трикутника?

32. Що таке “сферичний многокутник”?

33. Який сферичний многокутник називають опуклим?

34. Як зв’язані сферичний многокутник і відповідний многогранний кут?

35. Як обчислюють площу сферичного многокутника?

36. У чому полягає метод перестановки елементів по колу?

37. Як читають формулу косинуса сторони сферичного трикутника? Формулу косинуса кута сферичного трикутника?

38. Яка залежність визначається сферичною теоремою синусів?

39. Як читають формулу добутку синуса сторони на косинус прилеглого кута (формулу п’яти елементів)?

40. Як читають формулу добутку синуса кута на косинус прилеглої сторони (змінену формулу п’яти елементів)?

41. Як читають формулу котангенсів (формулу чотирьох елементів)?

42. Чи можливий сферичний трикутник ABC при наступних значеннях його елементів?

а) $a = 35^\circ 32'$; $b = 38^\circ 56'$; б) $a = 41^\circ 18'$; $b = 20^\circ 15'$;

в) $a = 20^\circ 33'$; $b = 68^\circ 10'$; г) $A = 25^\circ 27'$; $B = 64^\circ 9'$;

д) $A = 35^\circ 21'$; $B = 46^\circ 10'$; е) $A = 43^\circ 7'$; $B = 47^\circ 35'$;

є) $c = 80^\circ 15'$; $A = 17^\circ 22'$; ж) $C = 101^\circ 6'$; $a = 21^\circ 43'$.

43. Що таке “прямокутний сферичний трикутник”? Які його елементи?

44. Сформулюйте мнемонічне правило Непера та умови його застосування.

45. Наведіть усі шість випадків розв’язання прямокутних сферичних трикутників.

46. Чи можливий прямокутний сферичний трикутник ABC при наступних значеннях його елементів?

а) $a = 150^\circ 25'$; $b = 110^\circ 12'$; $c = 136^\circ 43'$;

б) $a = 71^\circ 23'$; $b = 140^\circ 54'$; $c = 114^\circ 16'$;

в) $b = 33^\circ 18'$; $B = 60^\circ 24'$; $C = 37^\circ 5'$.

47. Складіть схеми обчислень для кожного випадку розв'язання прямокутних сферичних трикутників.

48. Як розв'язують прямосторонні сферичні трикутники?

49. Що таке "косокутний сферичний трикутник"?

50. Наведіть усі шість випадків розв'язання косокутних сферичних трикутників.

51. У яких випадках неможливо розв'язати косокутний сферичний трикутник?

52. Складіть схеми безпосереднього обчислення шуканих елементів косокутного сферичного трикутника для кожного випадку його розв'язання.

53. За якими формулами розв'язують косокутний сферичний трикутник, якщо задані три сторони?

54. За якими формулами розв'язують косокутний сферичний трикутник, якщо задані три кути?

55. Коли краще застосовувати формули синусів, а коли – формули косинусів половини кутів?

56. Наведіть формули Даламбера – Гаусса.

57. Що виражають аналогії Непера?

58. За якими формулами розв'язується косокутний сферичний трикутник, якщо задані дві сторони та кут між ними?

59. За якими формулами розв'язують косокутний сферичний трикутник, якщо задані сторона та два прилеглих до неї кути?

60. Наведіть формули для обчислення сферичного надлишку.

61. Як обчислюють сферичний радіус малого кола, вписаного в даний сферичний трикутник?

62. Як обчислюють сферичний радіус малого кола, описаного навколо даного сферичного трикутника?

63. Як записують контрольну формулу Гаусса?

64. У чому полягають формули Каньйолі та Люільє? Для чого їх застосовують?

65. Як контролюють хід розв'язування сферичних трикутників?

66. Що таке "малі сферичні трикутники"?

67. Сформулюйте теорему Лежандра. У чому її значення?

68. За якими спрощеними формулами обчислюють ексцес малого сферичного трикутника?

69. Як розв'язують малі сферичні трикутники за теоремою Лежандра?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Борисенко О.А., Ушакова Л.М. Аналітична геометрія. – Х.: Основа, 1993. – 192 с.

2. Волынский Б.А. Сферическая тригонометрия. – М.: Наука, 1977. – 135 с.

3. Кашкаха В.Е., Откидач В.В. Сферическая тригонометрия и вычислительные методы в маркшейдерском деле. – Донецк: ДонГУ, 1984. – 112 с.

4. Кранц П. Сферическая тригонометрия. – М.: URSS.ЛКИ, 2007. – 93 с.

5. Матвиевская Г.П. Становление плоской и сферической тригонометрии. Из истории математических идей. – М.: Знание, 1982. – 64 с.

6. Пандул И.С. Сферическая тригонометрия и сферическая астрономия применительно к решению инженерно-геодезических задач. – Л.: ЛГИ, 1982. – 99 с.

7. Сандраков П.В. Решение сферических треугольников. – Пермь: ПермПИ, 1970. – 81 с.

8. Тарасенкова Н.А., Петрова Є.В. Вступ до сферичної геометрії. – Черкаси: ЧНУ, 2008. – 80 с.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити довжину дуги l паралелі земної кулі ($R = 6370$ км) на широті φ, якщо різниця довгот дорівнює $\Delta\lambda$.

№	$\Delta\lambda$	φ	№	$\Delta\lambda$	φ
1	1°10'15"	55°45'00"	11	17°19'21"	31°45'17"
2	5°12'17"	54°31'25"	12	20°17'18"	35°40'01"
3	2°11'18"	56°29'30"	13	26°30'17"	40°31'02"
4	25°17'19"	56°50'40"	14	11°29'11"	43°17'07"
5	5°20'30"	89°10'10"	15	9°33'18"	45°18'19"
6	4°31'49"	45°10'02"	16	7°41'35"	46°19'17"
7	10°29'03"	40°21'05"	17	6°31'17"	80°20'03"
8	11°30'41"	39°31'42"	18	15°17'13"	82°17'07"
9	30°10'29"	49°27'12"	19	19°21'34"	85°20'20"
10	26°11'30"	44°31'11"	20	13°31'11"	81°30'15"

2. Довжина дуги AB паралелі земної кулі ($R = 6370$ км) на широті φ дорівнює l. Визначити довжину дуги S екватора між меридіанами, що проходять через точки A та B.

№	l (км)	φ	№	l (км)	φ
1	73. 26	55°45'00"	11	1637.04	31°45'17"
2	335.83	54°31'25"	12	1832.50	35°40'01"
3	134.31	56°29'30"	13	2240.13	40°31'02"
4	1537.65	56°50'40"	14	929.61	43°17'07"
5	8.61	89°10'10"	15	747.15	45°18'19"
6	355.10	45°10'02"	16	590.67	46°19'17"
7	886.88	40°21'05"	17	121.73	80°20'03"
8	987.13	39°31'42"	18	228.15	82°17'07"
9	2180.82	49°27'12"	19	174.95	85°20'20"
10	2076.23	44°31'11"	20	222.07	81°30'15"

3. Різні задачі

3.1. Знайти довжину дуги S великого кола земної кулі ($R = 6370$ км), на яку спирається центральний кут $\alpha = 40^\circ 10'$.

3.2. Довжина дуги S великого кола земної кулі ($R = 6370$ км) дорівнює 1132 км. Знайти центральний кут α, що спирається на цю дугу.

3.3. Визначити різницю довгот $\Delta\lambda$, якщо довжина дуги паралелі $l = 102{,}5$ км на широті $\varphi = 55^\circ 45'$. Взяти $R = 6370$ км.

3.4. Визначити відстань S від Москви ($\varphi = 55^\circ 45'$) до Північного полюса. Взяти $R = 6370$ км.

3.5. Визначити радіус сфери R, якщо площа сферичного трикутника $F = 288{,}39$ кв. од., а його кути $A = 49^\circ 19' 32''$, $B = 81^\circ 30' 12''$ та $C = 53^\circ 27' 56''$.

3.6. Довжина дуги паралелі $l = 1000$ км на широті $\varphi = 55^\circ 45'$. Визначити різницю довгот $\Delta\lambda$. Взяти $R = 6370$ км.

3.7. Визначити центральний кут α, що спирається на дугу великого кола земної кулі ($R = 6370$ км) довжиною $S = 23286$ км.

3.8. Знайти довжину дуги S великого кола, на яку спирається центральний кут $\alpha = 42^\circ 54' 50''$. Взяти $R = 6370$ км.

3.9. Визначити площу F сферичного трикутника з кутами $A = 46^\circ 29' 24''$, $B = 69^\circ 55' 23''$ та $C = 74^\circ 41' 46''$ та $R = 10$ м.

3.10. Визначити площу F двокутника, якщо довжина дуги малого кола $l = 200$ м, обмежена сторонами двокутника на широті $\varphi = 30^\circ$, а $R = 3180$ м.

3.11. Визначити радіус сфери R, якщо площа сферичного трикутника $F = 729843$ кв. од., а його кути $A = 52^\circ 09' 47''$, $B = 74^\circ 27' 19''$ та $C = 84^\circ 52' 56''$.

3.12. Центральний кут великого кола земної кулі ($R = 6370$ км) $\alpha = 160^\circ 08' 35''$. Визначити довжину дуги S, на яку спирається цей кут.

3.13. Довжина дуги S великого кола земної кулі ($R = 6370$ км) дорівнює 10000 км, визначити величину відповідного центрального кута α.

3.14. Довжина дуги паралелі $l = 111$ км на широті $\varphi = 30^\circ$ земної поверхні ($R = 6370$ км). Визначити різницю довгот $\Delta\ell$.

3.15. Визначити площу F двокутника, якщо довжина дуги малого кола $l = 57$ км, що обмежена сторонами двокутника на широті $\varphi = 60^\circ 10'$, а $R = 6370$ км.

3.16. Визначити радіус сфери R, якщо площа сферичного трикутника $F = 23684388$ км^2, а кути $A = 80^\circ 17' 13''$, $B = 100^\circ 17' 10''$ та $C = 32^\circ 52' 12''$.

3.17. Визначити площу F сферичного трикутника, якщо $A = 37^\circ 12' 17''$, $B = 120^\circ 17' 37''$, $C = 33^\circ 17' 19''$ і $R = 100$ см.

3.18. Знайти центральний кут α великого кола земної кулі ($R = 6370$ км), що спирається на дугу $S = 23286$ км.

3.19. Визначити площу двокутника F, якщо довжина дуги малого кола $l = 111$ км, що обмежена сторонами двокутника на широті $\varphi = 55^\circ 45'$, а $R = 6370$ км.

3.20. Визначити довжину дуги S великого кола земної кулі ($R = 6370$ км), на яку спирається центральний кут $\alpha = 208^\circ 42' 17''$.

4. Визначити найкоротшу (ортодромічну) відстань M_1M_2 між двома точками M_1 та M_2 земної кулі ($R = 6370$ км), що задані їх географічними координатами (φ, λ)*. Знайти азимут μ_{21} точки M_2 відносно точки M_1. Знайти довжину S та кут K локсодромії між точками M_1 та M_2.

№	M_1	M_2	№	M_1	M_2
1	(55°50'; 60°35')	(56°45'; 37°30')	11	(59°56'; 30°17')	(56°52'; 35°53')
2	(53°20'; 61°31')	(50°30'; 41°31')	12	(37°16'; 42°18')	(45°27'; 61°30')
3	(45°11'; 60°29')	(56°45'; 37°30')	13	(41°18'; 60°17')	(51°19'; 62°18')
4	(51°12'; 45°30')	(51°12'; 62°11')	14	(44°19'; 64°23')	(52°21'; 65°19')
5	(41°39'; 81°20')	(60°14'; 69°13')	15	(47°20'; 62°20')	(54°37'; 63°11')
6	(49°18'; 72°31')	(30°28'; 80°17')	16	(49°21'; 61°31')	(52°41'; 64°15')
7	(31°21'; 10°37')	(45°30'; 60°17')	17	(52°31'; 60°47')	(61°13'; 80°16')
8	(48°31'; 21°45')	(60°42'; 45°18')	18	(54°11'; 49°30')	(58°17'; 72°13')
9	(51°39'; 32°16')	(62°17'; 41°19')	19	(56°27'; 48°31')	(60°17'; 70°01')
10	(55°46'; 37°30')	(59°56'; 30°17')	20	(62°17'; 45°30')	(70°18'; 50°11')

* Скрізь λ – східна довгота, φ – північна широта.

5. За даними елементами прямокутного сферичного трикутника ($A = 90^\circ$) знайти:

1) невідомі елементи та дослідити їх на існування трикутника;

2) ε (сферичний надлишок), p (півпериметр), r_m та R_m (сферичні радіуси вписаного та описаного малих кіл) даного трикутника;

3) площу F трикутника в км^2, за радіус сфери взяти $R = 6370$ км.

Завдання 2) і 3) виконати тільки для випадку а).

а) Дано гіпотенузу та катет:

№	a	b	№	a	b
1	61°07'08"	33°18'17"	11	61°07'08"	54°41'47"
2	32°08'00"	23°50'48"	12	32°08'00"	22°12'00"
3	64°03'10"	40°04'16"	13	64°03'10"	55°07'35"
4	107°17'00"	143°12'03"	14	107°17'00"	68°13'15"
5	83°01'04"	73°02'12"	15	83°01'04"	65°22'56"
6	58°40'13"	15°15'42"	16	58°40'13"	12°22'39"
7	78°21'49"	13°02'17"	17	78°21'49"	78°03'04"
8	83°01'04"	73°02'12"	18	83°01'04"	65°22'56"
9	115°56'50"	124°52'25"	19	58°40'13"	15°15'42"
10	80°52'27"	72°13'48"	20	64°03'10"	40°04'16"

б) Дано два катета:

№	b	c	№	b	c
1	48°27'21"	33°07'37"	11	50°00'00"	52°55'26"
2	51°02'48"	12°16'42"	12	57°13'00"	98°47'00"
3	48°54'54"	12°16'42"	13	108°07'00"	39°03'05"
4	50°00'00"	52°55'26"	14	43°18'02"	118°53'58"
5	2°44'00"	11°38'11"	15	75°18'12"	118°09'21"
6	43°18'02"	118°53'58"	16	98°47'00"	57°13'00"
7	75°18'12"	118°09'21"	17	52°55'26"	50°00'00"
8	47°15'00"	56°25'00"	18	56°25'00"	47°15'00"
9	63°31'26"	58°40'30"	19	58°40'30"	63°31'26"
10	2°44'00"	11°38'11"	20	12°16'42"	48°54'54"

в) Дано гіпотенузу та прилеглий кут:

№	*a*	*B*	№	*a*	*B*
1	40°33'40"	65°58'47"	11	120°38'43"	116°56'17"
2	127°32'26"	21°08'18"	12	115°17'20"	19°13'50"
3	120°38'43"	44°54'44"	13	60°21'19"	32°39'23"
4	115°17'20"	98°28'30"	14	87°16'00"	76°57'43"
5	60°21'19"	72°24'40"	15	44°44'18"	47°37'21"
6	87°16'00"	78°21'49"	16	60°22'25"	38°57'12"
7	44°44'18"	52°05'54"	17	87°16'00"	78°21'49"
8	60°22'25"	68°12'58"	18	120°38'43"	116°56'17"
9	40°33'40"	30°23'50"	19	115°17'20"	19°13'50"
10	127°32'26"	103°15'23"	20	60°16'00"	78°03'04"

г) Дано катет і прилеглий кут:

№	*b*	*C*	№	*b*	*C*
1	54°06'20"	73°11'06"	11	118°12'48"	55°30'20"
2	60°38'07"	40°56'23"	12	74°21'53"	52°05'54"
3	50°00'00"	59°56'10"	13	54°08'20"	73°11'06"
4	28°07'10"	8°19'25"	14	37°52'18"	49°21'45"
5	64°30'09"	132°44'57"	15	60°38'07"	40°56'23"
6	37°52'18"	49°21'45"	16	38°25'51"	47°30'18"
7	50°00'00"	59°56'10"	17	28°07'10"	8°19'25"
8	2°44'00"	78°21'49"	18	64°30'09"	132°44'57"
9	28°07'10"	8°19'25"	19	54°06'20"	73°11'06"
10	64°30'09"	132°44'57"	20	60°38'07"	40°56'23"

д) Дано два кута:

№	*B*	*C*	№	*B*	*C*
1	58°27'40"	53°43'14"	11	53°43'14"	58°27'40"
2	32°14'03"	64°59'40"	12	64°59'40"	32°14'13"
3	42°38'51"	63°13'22"	13	63°13'22"	42°38'51"
4	11°56'56"	87°16'00"	14	66°20'00"	74°30'00"
5	77°43'18"	52°05'51"	15	87°16'00"	11°56'56"
6	74°30'00"	66°20'00"	16	52°30'00"	48°12'17"
7	48°12'47"	52°30'00"	17	140°10'04"	70°05'02"
8	13°19'00"	87°16'00"	18	87°16'00"	13°19'00"
9	70°05'02"	140°10'04"	19	58°27'40"	53°43'14"
10	87°16'00"	13°19'00"	20	42°38'51"	63°13'22"

е) Дано катет і протилежний кут:

№	b	B	№	b	B
1	29°31'40"	60°28'05"	11	18°42'58"	34°30'20"
2	38°29'00"	55°34'00"	12	33°01'24"	46°14'48"
3	35°03'00"	49°07'00"	13	37°23'43"	53°05'00"
4	108°41'36"	102°35'40"	14	41°19'28"	42°52'09"
5	4°33'27"	71°26'24"	15	1°32'06"	18°38'15"
6	162°37'18"	111°17'43"	16	7°00'26"	22°22'04"
7	51°02'48"	80°14'41"	17	12°16'42"	15°38'07"
8	108°41'36"	102°35'40"	18	41°19'28"	42°52'09"
9	138°40'32"	137°07'57"	19	161°17'02"	145°20'40"
10	146°58'36"	133°45'12"	20	142°58'36"	126°55'00"

6. За даними елементами косокутного сферичного трикутника знайти:

1) невідомі елементи та дослідити їх на існування трикутника;

2) ε (сферичний надлишок), p (півпериметр), r_m та R_m (сферичні радіуси вписаного та описаного малих кіл) даного трикутника;

3) площу F сферичного трикутника в км^2, якщо радіус сфери $R = 6370$ км.

Завдання 2) і 3) виконати тільки для випадку а).

а) Дано три сторони:

№	a	b	c	№	a	b	c
1	34°12'48"	42°55'12"	51°02'30"	11	109°14'32"	65°46'04"	80°38'18"
2	59°46'20"	83°17'38"	96°04'22"	12	129°16'54"	45°09'46"	112°58'04"
3	82°11'17"	64°19'21"	31°31'30"	13	39°01'40"	77°18'34"	69°32'35"
4	69°34'26"	57°49'22"	114°16'14"	14	60°31'41"	117°28'18"	78°42'26"
5	60°31'42"	117°28'19"	78°42'23"	15	142°47'00"	118°48'00"	83°17'00"
6	171°18'12"	54°07'16"	133°09'24"	16	51°12'26"	75°03'10"	45°55'52"
7	42°18'00"	17°12'00"	58°30'00"	17	42°55'12"	34°12'48"	51°02'30"
8	79°33'20"	65°28'20"	37°51'40"	18	64°19'12"	82°11'17"	31°31'30"
9	30°04'56"	27°32'22"	32°15'48"	19	117°27'59"	60°32'00"	78°42'23"
10	69°30'36"	62°20'54"	39°46'43"	20	65°28'20"	37°51'40"	79°33'20"

б) Дано три кути:

№	*A*	*B*	*C*	№	*A*	*B*	*C*
1	62°05'40"	54°36'10"	70°14'30"	11	132°54'22"	44°08'36"	36°17'49"
2	90°40'16"	71°00'36"	43°04'39"	12	112°56'18"	70°56'10"	57°54'54"
3	116°08'04"	60°07'25"	69°45'17"	13	118°19'56"	31°16'39"	48°37'53"
4	123°15'06"	50°00'20"	84°07'18"	14	32°56'31"	128°13'15"	56°40'54"
5	40°00'48"	95°02'16"	73°04'34"	15	36°28'26"	111°50'54"	52°14'16"
6	47°59'12"	130°46'58"	56°48'52"	16	106°59'00"	56°55'00"	100°40'00"
7	148°14'00"	130°18'00"	120°12'00"	17	121°15'13"	81°36'20"	34°15'36"
8	49°54'13"	108°30'47"	44°50'42"	18	64°40'30"	22°48'09"	106°43'40"
9	83°42'39"	54°16'13"	55°05'54"	19	120°26'21"	39°04'28"	57°46'10"
10	132°54'22"	44°08'36"	36°17'49"	20	74°32'10"	49°10'18"	61°09'50"

в) Дано дві сторони та кут між ними:

№	*a*	*b*	*C*	№	*a*	*b*	*C*
1	48°12'36"	37°30'42"	55°05'54"	11	40°28'36"	110°18'32"	56°40'54"
2	104°23'15"	67°04'28"	36°17'49"	12	38°15'06"	75°10'08"	52°14'16"
3	105°40'00"	62°21'14"	70°56'10"	13	118°31'00"	50°20'00"	100°40'00"
4	35°00'28"	56°01'25"	118°19'26"	14	50°10'30"	40°00'10"	121°36'20"
5	30°04'56"	27°32'22"	70°14'04"	15	45°09'46"	112°58'04"	123°15'06"
6	62°20'54"	39°46'43"	90°40'16"	16	39°01'40"	77°18'34"	73°04'34"
7	69°30'36"	62°20'54"	43°04'39"	17	69°32'35"	39°01'40"	95°02'16"
8	109°14'32"	65°46'04"	69°45'17"	18	60°31'41"	117°28'18"	56°48'52"
9	65°46'04"	80°38'18"	116°08'04"	19	78°42'26"	60°31'41"	130°46'58"
10	129°16'54"	45°09'46"	84°07'18"	20	118°48'00"	83°17'00"	148°14'00"

г) Дано сторону та прилеглі до неї кути:

№	*a*	*B*	*C*	№	*a*	*B*	*C*
1	64°02'41"	22°48'09"	106°43'40"	11	55°25'20"	36°28'26"	111°50'54"
2	100°00'00"	39°04'28"	57°46'10"	12	85°57'50"	32°56'31"	128°13'15"
3	22°04'47"	74°32'10"	61°09'50"	13	76°34'55"	31°16'39"	48°37'53"
4	118°50'00"	49°18'00"	61°40'00"	14	81°10'58"	112°56'18"	57°54'54"
5	34°29'34"	59°32'16"	77°18'20"	15	51°31'20"	132°54'22"	44°08'36"
6	68°12'58"	56°52'23"	76°00'32"	16	37°58'00"	83°42'39"	54°16'13"
7	68°50'00"	114°35'00"	30°19'00"	17	30°04'56"	54°36'10"	70°14'30"
8	66°32'00"	111°32'00"	75°51'00"	18	62°20'54"	90°40'16"	43°20'39"
9	76°56'00"	42°15'13"	34°15'36"	19	39°46'43"	90°40'16"	71°00'13"
10	115°28'00"	106°59'00"	56°55'00"	20	45°09'46"	123°15'06"	84°07'18"

д) Дано дві сторони та кут, що лежить проти однієї з них:

№	a	b	A	№	a	b	A
1	47°04'46"	36°39'51"	56°16'50"	11	28°36'22"	20°04'47"	49°10'18"
2	54°33'51"	97°12'25"	51°18'13"	12	28°36'22"	25°47'46"	74°32'10"
3	63°22'30"	81°14'20"	54°39'10"	13	58°54'43"	83°51'23"	49°18'00"
4	112°40'26"	58°27'42"	98°22'40"	14	36°52'33"	42°46'04"	59°32'16"
5	82°33'51"	27°16'09"	26°31'57"	15	52°05'54"	66°06'04"	56°52'23"
6	57°41'13"	76°34'42"	40°23'28"	16	85°03'00"	33°34'00"	114°35'00"
7	66°02'00"	108°49'00"	64°28'00"	17	107°16'00"	84°30'00"	111°32'00"
8	113°03'00"	82°39'00"	116°20'00"	18	72°17'58"	22°40'34"	106°43'40"
9	22°40'34"	72°17'58"	22°48'09"	19	100°00'00"	75°04'07"	120°26'21"
10	46°31'13"	75°04'07"	39°03'13"	20	22°04'47"	25°47'46"	49°10'18"

е) Дано сторону та два кути, один з яких лежить проти даної сторони:

№	a	A	B	№	a	A	B
1	54°12'28"	66°10'42"	41°00'24"	11	113°15'13"	72°40'32"	60°57'47"
2	124°10'48"	96°48'12"	46°07'06"	12	66°44'47"	72°40'32"	155°24'40"
3	52°35'25"	54°42'20"	81°26'35"	13	103°27'00"	73°13'22"	143°30'11"
4	26°50'14"	39°37'09"	69°25'27"	14	76°33'00"	73°13'22"	100°23'23"
5	61°05'12"	59°30'40"	73°13'22"	15	92°55'30"	100°23'23"	59°30'40"
6	57°17'28"	60°57'33"	72°40'32"	16	155°47'40"	144°36'36"	69°25'27"
7	51°24'00"	50°32'00"	109°51'00"	17	138°29'08"	69°25'27"	39°37'09"
8	44°55'05"	100°02'04"	152°03'10"	18	44°21'16"	81°02'25"	69°25'27"
9	160°21'47"	152°03'10"	169°21'35"	19	105°46'00"	81°26'35"	54°42'20"
10	122°24'00"	109°51'00"	103°25'00"	20	74°57'51"	82°54'46"	81°26'35"

ДОДАТОК

Основні необхідні формули геометрії та тригонометрії на площині

Довільний трикутник (a, b, c − сторони; α, β, γ − протилежні їм кути, R − радіус описаного кола; S − площа).

$$S=\frac{1}{2}bc\,sin\,\alpha; \qquad (1)$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\,cos\,\alpha \text{ (теорема косинусів);} \qquad (2)$$

$$\frac{a}{sin\,\alpha}=\frac{b}{sin\,\beta}=\frac{c}{sin\,\gamma}=2R \text{ (теорема синусів).} \qquad (3)$$

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу (Z − множина всіх цілих чисел)

$$sin^2 x+cos^2 x=1; \qquad (4)$$

$$tgx=\frac{sin\,x}{cos\,x},\ x\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z; \qquad (5)$$

$$ctgx=\frac{cos\,x}{sin\,x},\ x\neq\pi n,\ n\in Z; \qquad (6)$$

$$tgx\cdot ctgx=1;\ x\neq\frac{\pi n}{2};\ n\in Z; \qquad (7)$$

$$1+tg^2x=\frac{1}{cos^2 x},\ x\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z; \qquad (8)$$

$$1+ctg^2x=\frac{1}{sin^2 x};\ x\neq\pi n,\ n\in Z. \qquad (9)$$

Формули додавання

$$sin(x+y)=sin\,x\,cos\,y+cos\,x\,sin\,y; \qquad (10)$$

$$sin(x-y)=sin\,x\,cos\,y-cos\,x\,sin\,y; \qquad (11)$$

$$cos(x+y)=cos\,x\,cos\,y-sinx\,sin\,y; \qquad (12)$$

$$cos(x-y)=cos\,x\,cos\,y+sinx\,sin\,y; \qquad (13)$$

$$tg\left(x+y\right)=\frac{tgx+tgy}{1-tgxtgy},\ x,\ y,\ x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z; \tag{14}$$

$$tg\left(x-y\right)=\frac{tgx-tgy}{1-tgxtgy},\ x,\ y,\ x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z. \tag{15}$$

Формули подвійного аргументу

$$sin\,2x=2\,sin\,x\,cos\,x; \tag{16}$$

$$cos\,2x=cos^2 x-sin^2 x=2\,cos^2 x-1=1-2\,sin^2 x; \tag{17}$$

$$tg\,2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x},\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z;\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z. \tag{18}$$

Формули половинного аргументу (для функцій sin і cos – формули зниження степеня)

$$sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-cos\,x}{2}; \tag{19}$$

$$cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+cos\,x}{2}; \tag{20}$$

$$tg\frac{x}{2}=\frac{sin\,x}{1+cos\,x}=\frac{1-cos\,x}{sin\,x},\ x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z. \tag{21}$$

Формули перетворення суми в добуток

$$sin\,x+sin\,y=2\,sin\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}; \tag{22}$$

$$sin\,x-sin\,y=2\,cos\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2}; \tag{23}$$

$$cos\,x+cos\,y=2\,cos\frac{x+y}{2}cos\frac{x-y}{2}; \tag{24}$$

$$cos\,x-cos\,y=-2\,sin\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2}. \tag{25}$$

$$tgx+tgy=\frac{sin\left(x+y\right)}{cos\,x\,cos\,y},\ x,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z; \tag{26}$$

$$tgx-tgy=\frac{sin\left(x-y\right)}{cos\,x\,cos\,y},\ x,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z. \tag{27}$$

Формули перетворення добутку в суму

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos\left(x-y\right)-\cos\left(x+y\right)\right); \qquad (28)$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)\right); \qquad (29)$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin\left(x-y\right)+\sin\left(x+y\right)\right). \qquad (30)$$

Співвідношення між $\sin x$, $\cos x$ і $tg\,\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}},\ x \neq \left(2n+1\right)\pi,\ n \in Z; \qquad (31)$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\,\frac{x}{2}},\ x \neq \left(2n+1\right)\pi,\ n \in Z. \qquad (32)$$

Формули зведення

Функ-ція u	Назва функції не змінюється			Назва функції змінюється на схожу			
	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$
	$\alpha \neq \pi(2n+1)/2$, $n \in Z$			$\alpha \neq \pi n$, $n \in Z$			
ctg	$-ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$
	$\alpha \neq \pi n$, $n \in Z$			$\alpha \neq \pi(2n+1)/2$, $n \in Z$			

З М І С Т

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Данилевський Микола Прокопович,
Колосов Анатолій Іванович,
Якунін Анатолій Вікторович

ОСНОВИ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ та ТРИГОНОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

Редактор *Д. Ф. Курильченко*

Підп. до друку 22.06.2011 Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 5,5
Тираж 500 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК №4064 від 12.05.2011