Абсолютний екстремум тим паче є відносним екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Сильний відносний екстремум тим паче є слабким екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Надалі, як правило, будемо розглядати слабкий відносний екстремум і слова "слабкий", "відносний" будемо опускати.

Основною задачею варіаційного числення є дослідження функціоналу на екстремум.

Зауваження. На відміну від задачі пошуку екстремуму функції однієї змінної, що відповідно має один ступінь вільності, задача пошуку екстремуму функціоналу має нескінченне число ступенів вільності (пошук лінії $\overline{y}(x)$).

3.5.3. Варіація функції та приріст функціоналу. Неперервність. Лінійний функціонал

Нехай функціонал $I = I[y]$ визначений на класі функцій D, $y(x)$ і $\overline{y}(x)$ – довільні функції даного класу D. Функція, яка дорівнює різниці функцій $\overline{y}(x)$ і $y(x)$, називається ***приростом або варіацією аргументу*** y функціоналу $I[y]$ і позначається δy: $\delta y = \delta y(x) = \overline{y}(x) - y(x)$. Тоді $\overline{y}(x) = y + \delta y$.

Різниця $\Delta I = \Delta I[y, \delta y] = I[y + \delta y] - I[y]$ називається ***приростом функціоналу*** $I[y]$, який відповідає варіації δy аргументу.

Зазначимо, що *похідна варіації функції дорівнює варіації похідної*: $(\delta y)' = \delta y'$.

Дійсно, $(\delta y)' = \left(\overline{y}(x) - y(x)\right)' = \overline{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$.

Якщо нескінченно малому приросту функції δy відповідає нескінченно малий приріст функціоналу ΔI, то такий функціонал $I[y]$ називається ***неперервним***.

Функціонал $I[y]$ називається ***лінійним***, якщо виконуються умови:

1) Функціонал від алгебраїчної суми функцій дорівнює відповідній алгебраїчній сумі функціоналів: $I[y_1 + y_2] = I[y_1] + I[y_2]$;

2) Сталий множник можна виносити за знак функціоналу: $I[Cy]=CI[y]$, $C=const$.

3.5.4. Перша та друга варіації функціоналу

Нехай для довільної малої варіації аргументу δy відповідний приріст функціоналу ΔI можна подати у вигляді суми головної частини $L[y,\delta y]$, лінійної відносно δy, та нескінченно малої $\beta[y,\Delta y]$ вищого порядку порівняно з δy: $\Delta I=L[y,\delta y]+\beta[y,\delta y]$; $\beta[y,\delta y]=\gamma[y,\delta y]\cdot\max|\delta y|$, де $\lim\limits_{\max|\delta y|\to 0}\gamma[y,\delta y]=0$. Тоді функціонал $I[y]$ називається ***варійовним***, а головна лінійна відносно δy частина його приросту $L[y,\delta y]$ називається ***варіацією*** (***диференціалом***) ***функціоналу*** і позначається δI: $\delta I=L[y,\delta y]$, $\Delta I=\delta I+\beta[y,\delta y]$. (***Перше означення варіації*** функціоналу).

<u>Приклад 1</u>. Знайти варіацію функціоналу δI, користуючись першим означенням як головної, лінійної відносно δy, частини його приросту ΔI: $I[y]=\int_a^b y\,(y+\cos x)\,dx$.

□ Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I=\int\limits_a^b(y+\delta y)(y+\delta y+\cos x)dx-\int\limits_a^b y(y+\cos x)\,dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left(y^2+2y\delta y+y\cos x+(\delta y)^2+\cos x\cdot\delta y-y^2-y\cos x\right)dx=$$

$$=\int\limits_a^b(2y+\cos x)\delta y\;dx+\int\limits_a^b(\delta y)^2\,dx.$$

За першим означенням $\delta I=\int_a^b(2y+\cos x)\delta y\,dx$. ■

<u>Зауваження</u>. Роль варіації δI при дослідженні функціоналів аналогічна тій, яку виконує при дослідженні функцій диференціал. У таблиці 1 наведено відповідність понять диференціального та

варіаційного числень для випадку одного аргументу.

Таблиця 1

№ п/п	Диференціальне Числення	Варіаційне числення
1	Аргумент – числова змінна x	Аргумент – числова функція $y(x)$
2	Залежна змінна – числова y	Залежна змінна – числова I
3	Приріст аргументу Δx	Варіація аргументу δy
4	Приріст функції Δy	Приріст функціоналу ΔI
5	Диференціал функції dy	Варіація функціоналу δI
6	Другий диференціал функції $d^2 y$	Друга варіація функціоналу $\delta^2 I$
7	Необхідна умова екстремуму $dy = 0$	Необхідна умова екстремуму $\delta I = 0$
8	Стаціонарна точка функції	Стаціонарна функція (допустима екстремаль) функціоналу
9	Достатня умова екстремуму: $d^2 y > 0$ – min, $d^2 y < 0$ – max	Достатня умова екстремуму: $\delta^2 I > 0$ – min, $\delta^2 I < 0$ – max

Варіацію δI називають також ***варіацією першого порядку*** або ***першою варіацією функціоналу*** $I[y]$. Варіацію другого порядку введемо аналогічно тому, як це робиться для диференціала другого порядку функції.

Візьмемо довільну допустиму функцію $y = y(x)$ і довільну її варіацію $\delta y = \delta y(x)$ таку, що функція $y + \delta y$ є допустимою. Зафіксуємо y та δy і розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $\overline{y} = y + \alpha \delta y$, де α – деяке число (параметр). Функціонал $I[y]$ на вказаній сім'ї є функцією параметра α: $I[y+\alpha\delta y]=\Phi(\alpha)$.

Припустимо, що цю функцію можна розкласти за формулою Тейлора до квадратичного члена включно в околі точки $\alpha=0$:

$$I[y+\alpha\delta y]=I[y]+\left\{\frac{d}{d\alpha}I[y+\alpha\delta y]\right\}\bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2}{d\alpha^2}I[y+\alpha\delta y]\right\}\bigg|_{\alpha=0}\cdot\alpha^2+R_2(y,\delta y,\alpha),$$

де залишковий член $R_2(y,\delta y,\alpha)$ є нескінченно малою вищого порядку порівняно з α^2: $R_2(y,\delta y,\alpha)=o(\alpha^2)$.

Тоді варіаціям першого та другого порядку можна дати такі означення.

Варіацією або ***першою варіацією функціоналу*** δI називається значення першої похідної функції $\Phi(\alpha)=I[y+\alpha\delta y]$ при $\alpha=0$:

$$\boxed{\delta I=\delta I[y,\delta y]=\frac{d}{d\alpha}I[y+\alpha\delta y]\bigg|_{\alpha=0}.}$$

(***Друге означення варіації*** функціоналу).

Можна показати, що це означення першої варіації рівносильне наведеному раніше. На практиці зручніше користуватись останнім означенням.

Другою варіацією функціоналу або ***варіацією другого порядку*** $\delta^2 I$ називається значення другої похідної функції $\Phi(\alpha)=I[y+\alpha\delta y]$ при $\alpha=0$: $\boxed{\delta^2 I=\frac{d^2}{d\alpha^2}I[y+\alpha\delta y]\bigg|_{\alpha=0}.}$

Приклад 2. Знайти варіацію функціоналу δI, користуючись другим означенням як похідної по параметру:

$$I[y]=\int_a^b x(y')^2\sin y\,dx.$$

□ У відповідності з другим означенням варіації функціоналу маємо:

$$\delta I=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b x\left((y+\alpha\delta y)'_x\right)^2\sin(y+\alpha\delta y)\,dx\Bigg|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_a^b \frac{d}{d\alpha}x\left((y+\alpha\delta y)'_x\right)^2\sin(y+\alpha\delta y)\,dx\Bigg|_{\alpha=0}=\int_a^b x\big(2(y'+\alpha\delta y')\times$$

$$\times\delta y'\sin(y+\alpha\delta y)+(y'+\alpha\delta y')^2\cos(y+\alpha\delta y)\cdot\delta y\big)\Big|_{\alpha=0}dx=$$

$$=\int_a^b x\left(2y'\sin y\cdot\delta y'+(y')^2\cos y\cdot\delta y\right)dx\,.\quad\blacksquare$$

3.6. Необхідна умова екстремуму. Диференціальні рівняння екстремалей

3.6.1. Необхідна умова екстремуму функціоналу

Як відомо, необхідна умова екстремуму функції полягає в рівності нулю її диференціала. Аналогічно, для функціонала справедлива

теорема (***необхідна умова екстремуму*** в варіаційній формі). *Якщо функціонал* $I[y]$ *має варіацію* δI *і досягає на деякій функції* $y_0=y_0(x)$ *екстремуму, то його варіація на цій функції дорівнює нулю:* $\boxed{\delta I[y_0,\delta y]=0.}$

□ Розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $y_0+\alpha\delta y$, де α – деяке число. На вказаній сім'ї функціонал $I[y]$ є функцією параметра α: $\delta I[y_0,\delta y]=\Phi(\alpha)$, яка згідно з умовою теореми має екстремум при $\alpha=0$.

У відповідності з необхідною умовою екстремуму функції маємо $\left.\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}=0$, тобто $\left.\frac{d}{d\alpha}I[y_0+\alpha\delta y]\right|_{\alpha=0}=0$. За другим означенням указана похідна є варіацією функціоналу $\delta I[y_0,\delta y]$. Отже, $\delta I[y_0,\delta y]=0.$ ■

Функції, на яких варіація функціоналу існує і дорівнює нулю, називаються ***стаціонарними функціями*** або ***допустимими екстремалями***.

3.6.2. Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями. Рівняння Ейлера

Розглянемо ***найпростішу задачу варіаційного числення***: знайти мінімум (максимум) функціоналу

$$\boxed{I[y]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx}$$

при крайових умовах $\boxed{y(x_1)=y_1;\ y(x_2)=y_2}$

серед неперервно диференційовних на відрізку $[x_1;x_2]$ функцій $y=y(x)$, де x_1,x_2,y_1,y_2 – відомі числа.

Оскільки в даній задачі всі допустимі криві, серед яких шукається та, що доставляє екстремум функціоналу, проходять через дві різні нерухомі точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$, то поставлена задача називається ***варіаційною задачею з закріпленими кінцями***.

<u>Теорема</u>. *Допустимі екстремалі функціоналу з закріпленими кінцями* $I[y]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')\,dx$*;* $y(x_1)=y_1$*;* $y(x_2)=y_2$*, визначаються як розв'язки диференціального рівняння* $\boxed{F'_y-\dfrac{d}{dx}F'_{y'}=0}$ *при крайових умовах* $y(x_1)=y_1$*;* $y(x_2)=y_2$.

Диференціальне рівняння другого порядку $\boxed{F'_y-dF'_{y'}/dx=0}$ називається ***рівнянням Ейлера***. Розв'язки рівняння Ейлера називаються ***екстремалями***, а само рівняння Ейлера – ***диференціальним рівнянням екстремалей***.

Таким чином, в даній задачі ***допустимі екстремалі*** виділяються зі всіх екстремалей врахуванням крайових умов.

□ Необхідна умова екстремуму, з якої знаходяться екстремалі, має вигляд $\delta I[y,\delta y]=0$. Оскільки ця умова повинна виконуватись для будь-якої варіації функції δy, то при закріплених кінцях повинні справджуватись рівності $\delta y(x_1)=0,\ \ \delta y(x_2)=0$.

Виразимо варіацію функціоналу через функцію $F(x,y,y')$ та її похідні:

$$\delta I=\frac{d}{d\alpha}I[y_0+\alpha\,\delta y]\Big|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2}[F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\alpha}F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\,dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y+\alpha\delta y,y'+$$

$$+\alpha\delta y')\cdot(y+\alpha\delta y)'_\alpha+F'_{y'}(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\times$$

$$\times(y'+\alpha\delta y')'_\alpha\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot\delta y+$$

$$+F'_{y'}(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot\delta y'\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y,y')\times$$

$$\times\delta y+F'_{y'}(x,y,y')\cdot\delta y'\Big]\,dx=\int_{x_1}^{x_2}F'_y\,\delta y\,dx+\int_{x_1}^{x_2}F'_{y'}\,\delta y'\,dx,$$

де $\quad F'_y=F'_y\,(x,y,y'),\quad F'_{y'}=F'_{y'}\,(x,y,y')$.

До другого доданка останньої рівності застосуємо інтегрування частинами:

$$\int_{x_1}^{x_2}F'_{y'}\,\delta y'\,dx=\left|\begin{array}{c}u=F'_{y'};\quad du=\dfrac{d}{dx}F'_{y'}\cdot dx\\ dv=\delta y'\cdot dx=(\delta y)'dx;\quad v=\int(\delta y)'dx=\delta y\end{array}\right|=$$

$$=F'_{y'}\cdot\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\delta y\cdot\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot dx=F'_{y'}\cdot\delta y(x_2)-F'_{y'}\cdot\delta y(x_1)-$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\cdot dx=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\cdot dx,$$

оскільки $\delta y(x_1)=0$ і $\delta y(x_2)=0$.

Тоді варіацію функціоналу можна подати у вигляді

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2} F'_y \cdot \delta y\,dx-\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}F'_{y'} \cdot \delta y\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y\,dx.$$

На екстремалі варіація функціоналу повинна дорівнювати нулю

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y\,dx=0,$$

причому для довільної варіації функції δy такої, що $\delta y(x_1)=0$ і $\delta y(x_2)=0$. Це можливо лише за умови, що вираз в дужках під знаком інтеграла дорівнює нулю для всіх x із відрізка $[x_1;x_2]$:

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0. \quad \blacksquare$$

Приклад 1. Знайти екстремалі функціоналу:

$$I[y]=\int_0^1\left(12xy-4xy'+(y')^2\right)dx;.$$

□ Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=12xy-4xy'+(y')^2; \quad F'_y=12x; \quad F'_{y'}=-4x+2y';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=\frac{d}{dx}(-4x+2y')=-4+2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-dF'_{y'}/dx=0$ набуває вигляду: $12x-(-4+2y'')=0$; $y''=6x+2$. Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y'=\int(6x+2)\,dx=3x^2+2x+C_1;$$

$$y=\int\left(3x^2+2x+C_1\right)dx=x^3+x^2+C_1x+C_2.$$

Отже, екстремалями служать функції

$y=x^3+x^2+C_1x+C_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі. $\blacksquare$

<u>Приклад 2.</u> Знайти екстремалі функціоналу, що задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

$$I[y]=\int_0^{\pi}\left(6y\sin 2x+2y\,y'+(y')^2-y^2\right)dx;\ y(0)=0;\ y(\pi)=0.$$

□ Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=6y\sin 2x+2y\,y'+(y')^2-y^2;$$

$$F'_y=6\sin 2x+2y'-2y;\ \ F'_{y'}=2y+2y';\ \ \frac{d}{dx}F'_{y'}=2y'+2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-dF'_{y'}\big/dx=0$ набуває вигляду:

$$6\sin 2x+2y'-2y-2y'-2y''=0;\quad y''+y=3\sin 2x.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y''+y=0;\quad k^2+1=0;\ k_{1,2}=\pm i;\quad \overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x;$$

$$y_*=A\cos 2x+B\sin 2x;\quad y'_*=-2A\sin 2x+2B\cos 2x;$$

$$y''_*=-4A\cos 2x-4B\sin 2x;$$

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+A\cos 2x+B\sin 2x=3\sin 2x;$$

$$\begin{matrix}\cos 2x: \\ \sin 2x:\end{matrix}\begin{cases}-3A=0; & A=0;\\ -3B=3; & B=-1;\end{cases}\quad y_*=-\sin 2x;$$

$$y=\overline{y}+y_*=C_1\cos x+C_2\sin x-\sin 2x$$

– екстремалі, де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Крайові умови дають систему алгебраїчних рівнянь для знаходження C_1 і C_2:

$$\begin{cases}C_1\cos 0+C_2\sin 0-0\cdot\sin 0=0;\\ C_1\cos\pi+C_2\sin\pi-\pi\cdot\sin 2\pi=0;\end{cases}\begin{cases}C_1=0; & C_1=0;\\ C_1+C_2\cdot 0=0; & 0\cdot C_2=0.\end{cases}$$

З останньої рівності випливає, що C_2 може набувати довільних значень. Значить, допустимими екстремалями служать функції $y=C_2\sin x-\sin 2x$, де C_2 – довільна стала. Таким чином, дана варіаційна задача має нескінченну множину розв'язків. ■

3.6.3. Система диференціальних рівнянь екстремалей функціоналу, що залежить від кількох функцій

Ставиться задача знаходження мінімуму (максимуму) функціоналу

$$\boxed{I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx}$$

при крайових умовах $\boxed{y_i(x_1) = y_{i1},\ y_i(x_2) = y_{i2},\ i = \overline{1,n}.}$

Із необхідної умови екстремуму $\delta I = 0$ при $\delta y_i(x_1) = 0$ і $\delta y_i(x_2) = 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ випливає, що допустимі екстремалі є розв'язками системи диференціальних рівнянь

$$\boxed{\begin{cases} F'_{y_1} - dF'_{y'_1}/dx = 0; \\ F'_{y_2} - dF'_{y'_2}/dx = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F'_{y_n} - dF'_{y'_n}/dx = 0 \end{cases}}$$

при крайових умовах $\begin{cases} y_i(x_1) = y_{i1}, \\ y_i(x_2) = y_{i2}, \end{cases} i = \overline{1,n}.$

Розв'язки диференціальної системи називаються ***екстремалями***, а сама система – ***системою диференціальних рівнянь екстремалей*** або ***системою рівнянь Ейлера – Лагранжа***.

Приклад 1. Знайти екстремалі функціоналу, що задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

а) $I[y, z] = \int_0^{\pi/2} \left((y')^2 + (z')^2 + 2zz' - 2yz' - 2y'\sin x\right) dx;$

$$y(0) = 0;\quad z(0) = 0;\quad y(\pi/2) = 1;\quad z(\pi/2) = 2;$$

б) $I[y, z] = \int_0^1 \left((y')^2 + 2y'z' + 2yz' + z^2\right) dx;$

$$y(0) = 0;\quad z(0) = -6;\quad y(1) = -2;\quad z(1) = -3.$$

□ а) Знайдемо похідні, що входять в систему рівнянь Ейлера – Лагранжа:

$$F\left(x,y,z,y',z'\right)=(y')^2+(z')^2+2z\,z'-2y\,z'-2y'\sin x\,;$$

$$F'_y=-2z'; \quad F'_{y'}=2y'-2\sin x\,; \quad \frac{d}{dx}F'_{y'}=2y''-2\cos x\,;$$

$$F'_z=2z'; \quad F'_{z'}=2\,z'+2z-2y; \quad \frac{d}{dx}F'_{z'}=2z''+2z'-2y'\,.$$

Тоді система рівнянь Ейлера – Лагранжа

$$\begin{cases} F'_y-dF'_{y'}\big/dx=0; \\ F'_z-dF'_{z'}\big/dx=0 \end{cases}$$

набуває вигляду $\begin{cases} -2z'-2y''+2\cos x=0; \\ 2z'-2z''-2z'+2y'=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y''+z'=\cos x; \\ z''-y'=0. \end{cases}$

Розв'яжемо останню систему зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку:

$$z'=\cos x-y''; \;\; z''=-\sin x-y'''; \;\; -\sin x-y'''-y'=0\,;$$

$$y'''+y'=-\sin x; \quad k^3+k=0; \;\; k\,(k^2+1)=0; \quad k_1=0\,;$$

$$k_{2,3}=\pm i\,; \quad y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x\,;$$

$$z'=\cos x-y'' \quad \Rightarrow \quad z=\int(\cos x-y'')\,dx=\sin x-y'+C_4\,;$$

$$y'=-C_2\sin x+C_3\cos x\,; \;\; z=\sin x+C_2\sin x-C_3\cos x+C_4\,.$$

Використавши крайові умови, знайдемо конкретні значення довільних сталих C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{array}{ll} y(0)=0: & \\ z(0)=0: & \\ y(\pi/2)=2: & \\ z(\pi/2)=1: & \end{array} \begin{cases} C_1+C_2=0; & \\ -C_3+C_4=0; & C_1=1;\, C_2=-1; \\ C_1+C_3=2; & C_3=1;\;\; C_4=1. \\ 1+C_2+C_4=1; & \end{cases}$$

Отже, допустимі екстремалі: $\begin{cases} y=1-\cos x+\sin x; \\ z=1-\cos x. \end{cases}$

(Задачу б) розв’язати самостійно. Відповідь:

$y = x^3 - 3x^2$; $z = 3x^2 - 6$ – допустимі екстремалі.) ■

3.7. Достатні умови екстремуму. Умовний екстремум. Варіаційні принципи

3.7.1. Достатні умови екстремуму

У багатьох варіаційних задачах існування та характер екстремуму очевидні з геометричного чи фізичного змісту. Якщо при цьому допустима екстремаль єдина, то вона і служить розв'язком варіаційної задачі. У загальному випадку для того, щоб встановити наявність і характер екстремуму, треба скористатись достатніми умовами екстремуму.

Нехай функція $y_0(x)$ є допустимою екстремаллю функціоналу $I[y]$ в деякому класі допустимих функцій D_1, тобто на цій кривій виконується необхідна умова екстремуму $\delta I[y_0, \delta y] = 0$. Характер екстремуму (максимум чи мінімум) визначається знаком приросту функціоналу: якщо $\Delta I \geq 0$, то функціонал має мінімум, а якщо $\Delta I \leq 0$, то – максимум. Оскільки на допустимій екстремалі перша варіація дорівнює нулю $\delta I[y_0, \delta y] = 0$, то знак приросту функціоналу ΔI для довільної досить малої варіації аргументу δy визначається знаком другої варіації функціоналу $\delta^2 I$.

Достатня умова екстремуму у варіаційній формі*: якщо на деякому класі допустимих функцій D_1 для довільної досить малої варіації функції δy на допустимій екстремалі $y_0(x)$ друга варіація функціоналу додатна $(\delta^2 I > 0)$, то на цій екстремалі функціонал має мінімум, якщо друга варіація функціоналу від'ємна $(\delta^2 I < 0)$, то – максимум, якщо ж друга варіація функціоналу набуває значень обох знаків, то екстремуму немає.*

При певних умовах знак другої варіації функціоналу $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$ визначається знаком другої похідної

$F''_{y'y'}$. Звідси випливають ***достатні умови Лежандра***:

1. ***Посилені достатні умови Лежандра слабкого екстремуму***: *якщо на допустимій екстремалі* $y_0(x)$ *виконується нерівність* $\boxed{F''_{y'y'}\big|_{y=y_0(x)} > 0}$, *то на цій екстремалі функціонал має слабкий мінімум, а якщо нерівність* $\boxed{F''_{y'y'}\big|_{y=y_0(x)} < 0}$, *то – слабкий максимум.*

2. ***Достатні умови Лежандра сильного екстремуму***: *якщо в усіх точках* $(x;y)$, *які близькі до допустимої екстремалі* $y_0(x)$, *виконується нерівність* $\boxed{F''_{y'y'} \ge 0 \quad \left(F''_{y'y'} \le 0\right)}$ *при довільних значеннях* y', *то ця екстремаль реалізує сильний мінімум (сильний максимум).*

Приклад 1. Користуючись достатніми умовами Лежандра, дослідити на екстремум функціонал при заданих крайових умовах:

а) $I[y] = \int\limits_1^2 \left(16x^3 y + (y')^2 x^2/2\right) dx$; $y(1) = 2$; $y(2) = 16$;

б) $I[y] = \int\limits_0^1 \frac{e^{-y}}{(y')^3} dx$; $y' \ne 0$; $y(0) = 0$; $y(1) = 4\ln 2$.

□ а) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = 16x^3 y + (y')^2 x^2/2 ; \quad F'_y = 16x^3; \quad F'_{y'} = y' x^2 ;$$

$$\frac{d}{dx} F'_{y'} = x^2 y'' + 2x y'$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - dF'_{y'}/dx = 0$ набуває вигляду:

$$16x^3 - x^2 y'' - 2x y' = 0; \quad y'' + (2/x) y' = 16x .$$

Розв'яжемо останнє рівняння зниженням порядку заміною $y' = p; \quad p = p(x)$. Тоді:

$$y'' = p'; \quad p' + (2/x) p = 16x; \quad p = uv; \quad p' = u'v + v'u ;$$

$$u'v+v'u+\frac{2}{x}uv=16x;\quad u'v+u\left(v'+\frac{2}{x}v\right)=16x;\quad v'+\frac{2}{x}v=0;$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{dx}{x};\ \ln|v|=-2\ln|x|;\ v=\frac{1}{x^2};\quad u'\cdot\frac{1}{x^2}=16x;$$

$$u'=16x^3;\quad u=16\int x^3\,dx=4x^4+C_1;$$

$$p=\left(4x^4+C_1\right)\cdot(1/x);\ \ y'=4x^3+C_1\cdot(1/x);$$

$$y=\int\left(4x^3+C_1\cdot(1/x)\right)dx=x^4+C_1\ln|x|+C_2 \text{ – екстремалі.}$$

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{matrix} y(1)=2: \\ y(2)=16: \end{matrix}\quad \begin{cases} 1^4+C_1\ln 1+C_2=2; & C_2=1; \\ 2^4+C_1\ln 2+C_2=16; & C_1=0. \end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $y=x^4+1$.

Оскільки $F''_{y'y'}=\dfrac{d}{dy'}\left(y'x^2\right)=x^2\geq 0$ при $x\in[1;2]$ і довільних значеннях y, то функціонал має сильний мінімум. Знайдемо його значення:

$$y'=4x^3;\quad F\left(x,y,y'\right)=16x^3(x^4+1)+(4x^3)^2x^2/2=$$

$$=16x^7+16x^3+8x^8;\quad I_{\min}=I\left[x^4+1\right]=\int_1^2\left(16x^7+16x^3+\right.$$

$$\left.+8x^8\right)dx=2x^8\Big|_1^2+4x^4\Big|_1^2+\frac{8}{9}\cdot x^9\Big|_1^2=1024\frac{2}{9}.$$

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F\left(x,y,y'\right)=\frac{e^{-y}}{(y')^3};\ F'_y=-\frac{e^{-y}}{(y')^3};\ F'_{y'}=-\frac{3e^{-y}}{(y')^4};$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=-3\cdot\frac{-e^{-y}y'(y')^4-4(y')^3y''e^{-y}}{(y')^8}=$$

$$=3e^{-y}\left((y')^2+4y''\right)/(y')^5.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - dF'_{y'}\big/dx = 0$ набуває вигляду:

$$-e^{-y}\big/(y')^3 - 3e^{-y}\left((y')^2 + 4y''\right)\big/(y')^5 = 0; \;\; (y')^2 + 4y'' = 0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку заміною $y' = p$; $p = p(y)$. Тоді:

$$y'' = p'p; \quad p^2 + 4p'p = 0; \;\; p(p + 4p') = 0; \;\; p = y' \neq 0;$$

$$\frac{p'}{p} = -\frac{1}{4}; \; \int\frac{dp}{p} = -\frac{1}{4}\int dy; \;\; \ln|p| = -\frac{1}{4}y + \ln C_1; \;\; p = C_1 e^{-y/4};$$

$$y' = C_1 e^{-y/4}; \quad \int e^{y/4}dy = C_1\int dx;$$

$4e^{y/4} = C_1 x + C_2$; $\quad y = 4\ln\left(C_1 x/4 + C_2/4\right)$ – екстремалі.

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{array}{rl} y(0) = 0: & \left\{\begin{array}{ll} 4\ln\left(C_2/4\right) = 0; & C_2 = 4; \\ 4\ln\left(C_1/4 + C_2/4\right) = 4\ln 2; & C_1 = 4. \end{array}\right. \\ y(1) = 4\ln 2: & \end{array}$$

Отже, допустима екстремаль $\quad y = 4\ln(x+1)$.

Оскільки друга похідна

$$F''_{y'y'} = \frac{d}{dy'}\left(-3e^{-y}\big/(y')^4\right) = 12e^{-y}\big/(y')^5$$

залежить від y, то скористаємося посиленими достатніми умовами Лежандра слабкого екстремуму.

На допустимій екстремалі $y = 4\ln(x+1)$ маємо:

$$y' = 4/(x+1); \quad F''_{y'y'}\Big|_{y=4\ln(x+1)} = 12e^{-4\ln(x+1)}\big/\left(4/(x+1)\right)^5 =$$

$$= 3(x+1)/256 > 0 \quad \text{при} \quad x \in [0;1].$$

Отже, на цій екстремалі функціонал досягає слабкого мінімуму. Знайдемо його значення:

$$F(x, y, y') = \frac{e^{-y}}{(y')^3} = \frac{e^{-4\ln(x+1)}}{(4/(x+1))^3} = \frac{(x+1)^{-4}}{64(x+1)^{-3}} = \frac{1}{64(x+1)}$$

$$I_{\min} = I[4\ln(x+1)] = \frac{1}{64}\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{64}\cdot\ln(x+1)\Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{64}. \quad \blacksquare$$

3.7.2. Умовний екстремум. Задача Лагранжа. Ізопериметрична задача

Варіаційною ***задачею на умовний екстремум*** називається задача дослідження на екстремум функціоналу, коли на функції, від вибору яких залежить цей функціонал, крім крайових, накладено інші додаткові умови, що звуться ***зв'язками***.

В залежності від їх характеру зв'язки поділяються на: а) ***алгебраїчні*** або ***скінченні (голономні)***; б) ***диференціальні*** або ***неголономні***; в) ***інтегральні*** або ***ізопериметричні***.

За допомогою ***методу множників Лагранжа*** задачі на умовний екстремум зводяться до задач на безумовний екстремум.

Задача Лагранжа: знайти функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, які доставляють мінімум (максимум) функціоналу

$$\boxed{I[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)\, dx}$$

і задовольняють рівнянням зв'язку

$$\boxed{\varphi_j(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n) = 0, \quad j = \overline{1,m},\ m < n,}$$

а також крайовим умовам $\boxed{y_i(x_1) = y_{i1}, \quad y_i(x_2) = y_{i2}, \quad i = \overline{1,n}.}$

Припускається, що рівняння зв'язку незалежні, а крайові умови їх задовольняють.

<u>Теорема</u>. *Якщо функції* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *є допустимими екстремалями сформульованої задачі Лагранжа, то існують такі* <u>*функції*</u> $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x)$, ***(множники Лагранжа)****, що функції* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *служать безумовними допустимими екстремалями для допоміжного функціоналу*

$$\overline{I}[y_1, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)\, dx,$$

де $\overline{F}(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j$ *– допоміжна функція* ***(функція Лагранжа)***.

Правило. Згідно з наведеною теоремою для знаходження допустимих екстремалей задачі Лагранжа необхідно:

1. *Скласти функцію Лагранжа* $\boxed{\overline{F} = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j}$ *і відповідний допоміжний функціонал* $\overline{I} = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F} dx$ *з невизначеними функціями* $\lambda_j(x),\ j = \overline{1,m}$ *– множниками Лагранжа.*

2. *Скласти систему рівнянь Ейлера – Лагранжа для допоміжного функціоналу*:

$$\boxed{\overline{F}'_{y_i} - \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'_i} = 0, \quad i = \overline{1,n},}$$

приєднати до неї рівняння зв'язку

$$\boxed{\varphi_j = 0, \quad j = \overline{1,m}}$$

і з одержаної об'єднаної системи знайти екстремалі $y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n), i = \overline{1,n}$, *де* $C_i, i = \overline{1,n}$ *– довільні сталі, а також, якщо потрібно, визначити множники Лагранжа* $\lambda_j = \lambda_j(x, C_1, \ldots, C_n),\ j = \overline{1,m}$.

3. *Використовуючи крайові умови, знайти конкретні значення* $C_i, i = \overline{1,n}$ *і допустимі екстремалі.*

Приклад 1. Знайти екстремалі функціоналу

$I[y,z] = \int_0^1 (y^2 + 2yz' + z^2)\, dx$ на зв'язку $y' = y - 2z$

при крайових умовах $y(0) = 3,\ \ y(1) = 2e + e^{-1}$.

□ Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\varphi = y' - y + 2z; \quad \overline{F} = F + \lambda\varphi; \quad \overline{F} = y^2 + 2yz' + z^2 + \lambda(y' -$$

$$- y + 2z); \quad \overline{I} = \int_0^1 \overline{F} dx = \int_0^1 \left(y^2 + 2yz' + z^2 + \lambda(y' - y + 2z)\right) dx,$$

де $\lambda = \lambda(x)$.

Складемо систему рівнянь Ейлера – Лагранжа:

$$\overline{F}'_y = 2y + 2z' - \lambda\,;\quad \overline{F}'_z = 2z + 2\lambda\,;\quad \overline{F}'_{y'} = \lambda\,;\quad \overline{F}'_{z'} = 2y\,;$$

$$\begin{matrix} \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = \lambda'; \\ \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'} = 2y'; \end{matrix}\qquad \begin{cases} \overline{F}'_y - \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 0; \\ \overline{F}'_z - \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + 2z' - \lambda - \lambda' = 0; \\ 2z + 2\lambda - 2y' = 0; \end{cases}\qquad \begin{cases} 2y + 2z' - \lambda - \lambda' = 0; \\ \lambda = y' - z. \end{cases}$$

Враховуючи рівняння зв'язку, маємо систему:

$$\begin{cases} 2y + 2z' - \lambda - \lambda' = 0; \\ \lambda = y' - z'; \\ y' = y - 2z. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку:

$$z = y/2 - y'/2;\ z' = y'/2 - y''/2;\quad \lambda = y' - \left(y/2 - y'/2\right) =$$

$$= 3y'/2 - y/2\,;\quad \lambda' = 3y''/2 - y'/2\,;$$

$$2y + 2\left(y'/2 - y''/2\right) - \left(3y'/2 - y/2\right) - \left(3y''/2 - y'/2\right) = 0;$$

$$4y + 2y' - 2y'' - 3y' + y - 3y'' + y' = 0;\quad -5y'' + 5y = 0;$$

$$k^2 - 1 = 0;\ k_{1,2} = \pm 1;\ y = C_1e^x + C_2e^{-x};\ y' = C_1e^x - C_2e^{-x};$$

$$z = \left(C_1e^x + C_2e^{-x}\right)\!/2 - \left(C_1e^x - C_2e^{-x}\right)\!/2 = C_2e^{-x}.$$

Отже, екстремалями служать функції

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x};\quad z = C_2e^{-x}.$$

Знайдемо значення C_1 і C_2 із крайових умов:

$$\begin{matrix} y(0) = 3: \\ y(1) = 2e + e^{-1}: \end{matrix}\ \begin{cases} C_1 + C_2 = 3; \\ C_1e + C_2e^{-1} = 2e + e^{-1}; \end{cases}\quad \begin{matrix} C_1 = 2; \\ C_2 = 1. \end{matrix}$$

Отже, допустимі екстремалі $y = 2e^x + e^{-x};\ \ z = e^{-x}$. ■

Приклад 2. Знайти геодезичну (найкоротшу) лінію, яка сполучає дві задані точки $A(2;-1;-4)$ і $B(4;4;-3)$ поверхні $3x-2y+4z+8=0$. Знайти її довжину $I_{\min}$.

□ Нехай шукана лінія AB визначається рівняннями $y=y(x);\ z=z(x);\ \ x\in[2;4]$.

Тоді $y(2)=-1;\ \ z(2)=-4;\ \ y(4)=4;\ \ z(4)=-3$ – крайові умови; $\varphi(x,y,z)=3x-2y+4z+8=0$ – рівняння зв'язку;

$I[y,z]=\int\limits_2^4\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx$ – функціонал (довжина дуги AB), мінімум якого треба знайти.

Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\overline{F}=F+\lambda\varphi;\ \ \overline{F}=\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(3x-2y+4z+8);$$

$$\overline{I}[y,z]=\int\limits_2^4\overline{F}dx=\int\limits_1^2\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(3x-2y+4z+8)\,dx.$$

Складемо систему рівнянь Ейлера – Лагранжа:

$$\overline{F}'_y=-2\lambda;\ \ \overline{F}'_z=4\lambda;\ \ \overline{F}'_{y'}=y'\Big/\sqrt{1+(y')^2+(z')^2};$$

$$\frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=\frac{y''+y''(z')^2-y'z'z''}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{3/2}};\ \ \overline{F}'_{z'}=\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}};$$

$$\frac{d}{dx}\overline{F}'_{z'}=\left(z''+z''(y')^2-y'y''z'\right)\Big/\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{3/2};$$

$$\begin{cases}\overline{F}'_y-\dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=0;\\ \overline{F}'_z-\dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'}=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}-2\lambda-\dfrac{y''+y''(z')^2-y'z'z''}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{3/2}}=0;\\ 4\lambda-\dfrac{z''+z''(y')^2-y'z'y''}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{3/2}}=0.\end{cases}$$

Вилучивши з останньої системи λ, одержимо

$$2\left(y''+y''(z')^2-y'z'z''\right)+z''+z''(y')^2-y'z'y''=0.$$

Продиференціювавши рівняння зв'язку, маємо:

$$3-2y'+4z'=0; \quad -2y''+4z''=0. \quad y'=3/2+2z'; \quad y''=2z''.$$

Тоді $\quad 2\left(2z''+2z''(z')^2-(3/2+2z')z'z''\right)+$

$$+z''+z''(3/2+2z')^2-(3/2+2z')z'2z''=0;$$

$$4z''+4z''(z')^2-3z'z''-4(z')^2z''+$$

$$+z''+(9/4)z''+6z'z''+4(z')^2z''-3z'z''-4(z')^2z''=0;$$

$$(29/4)z''=0; \quad z''=0; \; z'=C_1; \; z=C_1x+C_2.$$

З рівняння зв'язку $y=(3x+4z+8)/2$ Тоді

$$y=\left(3x+4\left(C_1x+C_2\right)+8\right)/2=(3/2)x+2C_1x+2C_2+4.$$

Отже, $\quad y=(3/2)x+2C_1x+2C_2+4; \quad z=C_1x+C_2$

– екстремалі. Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{array}{l} z(2)=-4: \\ z(4)=-3: \end{array} \begin{cases} 2C_1+C_2=-4; & C_1=1/2; \\ 4C_1+C_2=-3; & C_2=-5. \end{cases}$$

Отже, допустимі екстремалі:

$$y=(3/2)\,x+2\cdot(1/2)\cdot x+2\cdot(-5)+4=(5/2)\,x-6;$$

$$z=(1/2)\,x-5.$$

Таким чином, геодезична лінія визначається рівняннями

$$y=(5/2)\,x-6; \; z=(1/2)\,x-5; \; x\in[2;4].$$

Знайдемо її довжину: $\quad y'=5/2; \; z'=1/2;$

$$I_{\min}=I\left[\frac{5}{2}x-6;\frac{1}{2}x-5\right]=\int_2^4\sqrt{1+(5/2)^2+(1/2)^2}\,dx=\sqrt{30}. \;\blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти екстремалі функціоналу

$I[y,z]=\int_0^1(y'+y)\,z\,dx$ на зв'язку $y'+z'=y+z$

при крайових умовах $y(0)=0, \;\; y(1)=e^{-2}-e$.

□ Розв’язати задачу самостійно.

Відповідь: $y = e^{-2x} - e^{x}$; $z = -e^{-2x} - 2e^{x}$. ■

Найпростіша ***ізопериметрична задача***: знайти функцію $y(x)$, яка доставляє мінімум (максимум) функціоналу

$$\boxed{I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx}$$

і задовольняє інтегральному зв'язку $\boxed{I_*[y] = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, y, y')\, dx = l}$,

а також крайовим умовам $\boxed{y(x_1) = y_1;\ y(x_2) = y_2}$.

Теорема. *Якщо функція $y(x)$ є допустимою екстремаллю сформульованої ізопериметричної задачі, то існує таке число λ* ***(множник Лагранжа)****, що функція $y(x)$ служить безумовною допустимою екстремаллю допоміжного функціоналу*

$$\overline{I}[y] = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F}(x, y, y', \lambda)\, dx,$$

де $\boxed{\overline{F}(x, y, y', \lambda) = F + \lambda\varphi}$ *– допоміжна функція* ***(функція Лагранжа)****.*

Зауваження. На відміну від алгебраїчних чи диференціальних, інтегральні зв'язки не накладають жорстких обмежень на шукані функції, бо з них не можна виразити одні з функцій через інші. Тому число ізопериметричних умов не обов'язково повинно бути меншим числа шуканих функцій.

Приклад 4. Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y] = \int_0^2 \left((y')^2 - xy'\right) dx$$

при крайових умовах $y(0) = 1$, $y(2) = 2$

та ізопериметричному зв'язку $\int_0^2 x^2 y\, dx = 64/15$.

□ Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\overline{F} = F + \lambda\varphi; \quad \overline{F} = (y')^2 - xy' + \lambda x^2 y;$$

$$\overline{I} = \int_0^2 \overline{F}\,dx; \quad \overline{I} = \int_0^2 \left((y')^2 - xy' + \lambda x^2 y\right)dx\,; \quad \lambda = const\,.$$

Складемо рівняння Ейлера:

$$\overline{F}'_y = \lambda x^2; \ \overline{F}'_{y'} = 2y' - x; \ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 2y'' - 1; \ \overline{F}'_y - \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 0;$$

$$\lambda x^2 - 2y'' + 1 = 0; \ y'' = (\lambda/2)\,x^2 + 1/2\,.$$

Звідси $y' = \dfrac{\lambda x^3}{6} + \dfrac{1}{2}x + C_1;\ y = \dfrac{\lambda x^4}{24} + \dfrac{x^2}{4} + C_1 x + C_2\,.$

Використаємо крайові умови:

$$\begin{matrix} y(0) = 1: \\ y(2) = 2: \end{matrix} \begin{cases} C_2 = 1; \\ 2\lambda/3 + 1 + 2C_1 + C_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_2 = 1; \\ \lambda = -3C_1; \end{matrix}$$

$$y = -(1/8)C_1 x^4 + (1/4)\,x^2 + C_1 x + 1\,.$$

З інтегрального зв’язку маємо:

$$\int_0^2 x^2\left(-(1/8)C_1 x^4 + (1/4)\,x^2 + C_1 x + 1\right)dx = \frac{64}{15}\,;$$

$$\left.\left(-(x^7/56)\,C_1 + x^5/20 + (x^4/4)\,C_1 + x^3/3\right)\right|_0^2 = 64/15\,;$$

$$-(16/7)\,C_1 + 8/5 + 4C_1 + 8/3 = 64/15\,; \ C_1 = 0\,.$$

Отже, допустима екстремаль

$$y = -(1/8)\cdot 0\cdot x^4 + (1/4)\,x^2 + 0\cdot x + 1 = (1/4)\,x^2 + 1\,. \quad ■$$

<u>Приклад 5</u>. Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y] = \int_0^1 y'(\ln y' - 1)\,dx$$

при крайових умовах $y(0) = 0, \quad y(1) = 1 - e$

та ізопериметричному зв'язку $\int_0^1 y\,dx = 2 - e\,.$

□ Розв’язати задачу самостійно. Відповідь: $y = 1 - e^x$. ■

3.7.3. Варіаційні принципи

Варіаційні принципи застосовуються до аналізу різноманітних явищ. Суть кожного з них полягає в тому, що зі всіх станів, допустимих для системи, реалізується той, який відповідає екстремуму певного функціоналу (для кожного принципу свого). Розглянемо найбільш відомі принципи.

Принцип Ферма в оптиці: *зі всіх можливих шляхів, які сполучають точки A і B, світло вибирає той, що відповідає найменшому часу руху*:

$$I = \frac{1}{c} \int_{\cup AB} n\,dt \to \min.$$

Тут c – швидкість світла у вакуумі, n – показник заломлення світла в даному середовищі, t – час.

Форма кривої AB визначається мінімумом вказаного функціоналу. В оптично однорідному середовищі $(n = const)$ – це пряма лінія.

Принцип найменшої дії в механіці: *дійсний рух системи виділяється зі всіх допустимих рухів тим, що функціонал, який називається **дією**, $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ досягає при цьому мінімуму*.

Тут L – ***функція Лагранжа***, що є різницею кінетичної T і потенціальної U енергій: $L = T - U$; $[t_1; t_2]$ – проміжок часу руху.

Зауваження 1. Принцип найменшої дії – це узагальнення на задачі динаміки ***принципу мінімуму потенціальної енергії***, що застосовується у статиці.

Зауваження 2. Закони збереження імпульсу та енергії виступають наслідками варіаційного принципу найменшої дії.

3.8. Контрольні запитання

1. Яка функція називається оригіналом? Наведіть приклади оригіналів і функцій, що не є оригіналами.
2. Дайте означення перетворення (оператора) Лапласа. Що таке зображення оригіналу?
3. У чому полягає властивість лінійності оператора Лапласа?
4. Як веде себе будь-яке зображення на нескінченності?
5. Що таке одинична ступінчаста функція Хевісайда? Яке її зображення?
6. У чому полягає теорема про затухання оригіналу?
7. Сформулюйте теорему про зсув аргументу в оригіналі.
8. Який зв’язок між похідною зображення й оригіналом?
9. Як знаходиться зображення похідних оригіналу?
10. Сформулюйте правило знаходження оригіналу для зображення у вигляді раціонального дробу на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень.
11. За якою схемою здійснюється розв’язування диференціальних рівнянь та їх систем?
12. Як знаходиться зображення інтеграла від оригіналу?
13. Що таке одинична імпульсна дельта-функція Дірака? Яке її зображення?
14. Який зв’язок між одиничними функціями Дірака і Хевісайда?
15. Наведіть приклади розрахунку перехідних процесів у електричних ланцюгах за допомогою операційного числення.
16. Що називається функціоналом?
17. Який функціонал називається лінійним?
18. Що називається відстанню нульового порядку між функціями? Відстанню першого порядку?
19. Що таке відносний (абсолютний) екстремум функціоналу?
20. Що таке сильний (слабкий) екстремум функціоналу?
21. Сформулюйте перше і друге означення варіації функціоналу.
22. Що називається другою варіацією функціоналу?
23. Як ставиться найпростіша задача варіаційного числення – задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями?
24. У чому полягає необхідна умова екстремуму функціоналу у варіаційній формі?
25. Запишіть рівняння Ейлера. Який його порядок?

26. Як ставиться найпростіша задача варіаційного числення для функціоналів, що залежать від кількох функцій?
27. Запишіть систему рівнянь Ейлера – Лагранжа.
28. У чому полягає достатня умова екстремуму функціоналу у варіаційній формі?
29. Сформулюйте посилені достатні умови Лежандра слабкого екстремуму функціоналу.
30. Сформулюйте достатні умови Лежандра сильного екстремуму функціоналу.
31. Як ставиться задача Лагранжа на умовний екстремум?
32. Що таке алгебраїчні (скінченні або голономні), диференціальні (неголономні) та інтегральні (ізопериметричні) зв'язки?
33. У чому полягає метод множників Лагранжа стосовно розв'язування задачі Лагранжа на умовний екстремум?
34. Сформулюйте правило знаходження допустимих екстремалей задачі Лагранжа на умовний екстремум.
35. Що таке ізопериметрична задача на умовний екстремум?
36. Чому кількість інтегральних зв'язків може бути більшою, ніж число шуканих функцій?
37. У чому полягає метод множників Лагранжа стосовно розв'язування ізопериметричної задачі?
38. У чому полягає принцип Ферма в оптиці?
39. Сформулюйте принцип найменшої дії.
40. Як зв'язані фізичні закони збереження з варіаційними принципами?

3.9. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Використовуючи тотожні перетворення оригіналів і властивість лінійності, на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень знайти зображення $F(p)$ вказаної функції $f(t)$. Результат записати у вигляді єдиного дробу.

№ в-та	Завдання
1	$f(t) = t\,e^{-2t} - 2\cos 3t - 3$
2	$f(t) = 3t\,\sin 2t - e^{3t} - 3$
3	$f(t) = e^{2t}\cos 2t - 3t\sin 2t$

4	$f(t)=2e^{2t}\sin t-3\cos 2t$
5	$f(t)=4te^{-2t}-sh4t-1$
6	$f(t)=2e^{-t}\cos t-t\cdot sh2t$
7	$f(t)=e^{-2t}\sin t-2t\cdot sh3t$
8	$f(t)=2e^{3t}\cos t-3\sin 2t$
9	$f(t)=3e^{-3t}\sin 2t-2t+2$
10	$f(t)=2e^{-t}\sin 4t-t\cdot sht$
11	$f(t)=2t\sin 3t-3\cos t$
12	$f(t)=2t\cos 3t-2t+2$
13	$f(t)=e^{2t}\cos 2t-t\cdot sh2t$
14	$f(t)=e^{-2t}\cos t+4t\cdot ch2t$
15	$f(t)=3e^{-2t}\cos 3t-4t^2$
16	$f(t)=ch^2 3t$
17	$f(t)=sh2t\cdot\cos 6t$
18	$f(t)=ch2t\cdot\cos 4t$
19	$f(t)=\cos 3t\cdot\cos 7t$
20	$f(t)=4t\sin t-t\cdot ch2t$
21	$f(t)=sh2t\cdot\sin 6t$
22	$f(t)=ch3t\cdot\sin 4t$
23	$f(t)=\cos^2 3t$
24	$f(t)=sh^2 2t$
25	$f(t)=\sin 3t\cdot\sin 5t$
26	$f(t)=\sin 5t\cdot\cos 7t$
27	$f(t)=\sin^2 4t$
28	$f(t)=sh5t\cdot ch3t$
29	$f(t)=2te^{3t}-\sin 4t+3$
30	$f(t)=3t\cos 2t-\sin 3t$

Завдання 2. Розкладаючи спочатку правильний раціональний дріб у суму елементарних дробів, а потім застосовуючи лінійність перетворення Лапласа і таблицю відповідності оригіналів та їх зображень, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$F(p)=\dfrac{p+1}{p(p^2-4p+13)}$	16	$F(p)=\dfrac{p}{(p^2+9)(p^2+1)}$
2	$F(p)=\dfrac{p-2}{p(p^2-6p+25)}$	17	$F(p)=\dfrac{1}{(p-2)(p^2+9)}$
3	$F(p)=\dfrac{p+4}{p(p^2-8p+17)}$	18	$F(p)=\dfrac{p}{(p-3)(p^2+16)}$
4	$F(p)=\dfrac{p^2-4}{p(p^2+8p-9)}$	19	$F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$
5	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-4p-5)}$	20	$F(p)=\dfrac{p^2}{(p+2)(p^2+25)}$
6	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-12p+40)}$	21	$F(p)=\dfrac{p^2-4p}{p^3-8}$
7	$F(p)=\dfrac{p^2+6}{p(p^2+6p+18)}$	22	$F(p)=\dfrac{p^3}{p^4-5p^2-36}$
8	$F(p)=\dfrac{p+3}{p(p^2-6p+10)}$	23	$F(p)=\dfrac{p^3+p}{p^4-16}$
9	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+7p-8)}$	24	$F(p)=\dfrac{p^2}{p^4+5p^2+4}$
10	$F(p)=\dfrac{p^2+1}{p(p^2-9p-10)}$	25	$F(p)=\dfrac{p^2-3p+6}{p^3+27}$
11	$F(p)=\dfrac{p}{(p-5)(p^2+9)}$	26	$F(p)=\dfrac{p^2-8p}{p^3+8}$

12	$F(p)=\dfrac{p^2-1}{(p^2+4)(p^2+25)}$	27	$F(p)=\dfrac{p^3-p^2}{p^4-81}$
13	$F(p)=\dfrac{p-1}{(p^2+1)(p^2+64)}$	28	$F(p)=\dfrac{p^2+9}{p(p^2+2p-3)}$
14	$F(p)=\dfrac{p^3+2}{(p^2+4)(p^2+36)}$	29	$F(p)=\dfrac{p^3-2p^2}{(p+2)^2(p^2+4)}$
15	$F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+1)(p^2+49)}$	30	$F(p)=\dfrac{4p^3-3p^2}{p^4-3p^2-4}$

Завдання 3. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку (знайти частинний розв'язок заданого диференціального рівняння, який задовольняє вказаним початковим умовам).

№ в-та	Завдання
1	$x''+4x'+4x=3e^{-2t}\cos t$; $x(0)=3$; $x'(0)=0$
2	$x''+2x'-3x=\sin 2t$; $x(0)=2$; $x'(0)=0$
3	$x''+6x'+10x=6te^{-2t}$; $x(0)=-2$; $x'(0)=0$
4	$x''+5x'+6x=2\sin 2t$; $x(0)=0$; $x'(0)=4$
5	$x''+2x'=4e^{-2t}\cos t$; $x(0)=0$; $x'(0)=2$
6	$x''+4x'+13x=2te^{-2t}$; $x(0)=-3$; $x'(0)=1$
7	$x''+4x'+20x=6t$; $x(0)=4$; $x'(0)=-2$
8	$x''-4x'-5x=4e^{-t}\cos 2t$; $x(0)=-2$; $x'(0)=-4$
9	$x''-9x=4e^{-3t}\sin 3t$; $x(0)=4$; $x'(0)=0$
10	$x''-3x'-10x=6e^{2t}\cos 3t$; $x(0)=-4$; $x'(0)=2$
11	$x''-5x'+6x=2e^{2t}\sin 2t$; $x(0)=6$; $x'(0)=3$
12	$x''-6x'+10x=6te^{3t}$; $x(0)=-2$; $x'(0)=0$
13	$x''+2x'+17x=8\sin 4t$; $x(0)=2$; $x'(0)=6$

14	$x'' - 2x' - 3x = 6e^{3t}\sin 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -2$
15	$x'' + 4x = 4t^2$; $x(0) = -3$; $x'(0) = 2$
16	$x'' - 4x' - 5x = 4e^{-t}\sin t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = 1$
17	$x'' - 4x = 12\cos 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -2$
18	$x'' - x' - 6x = 12e^{-2t}\cos 2t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = 0$
19	$x'' - 9x = 4\sin 3t$; $x(0) = 4$; $x'(0) = 0$
20	$x'' + 4x' + 5x = 2te^{t}$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -1$
21	$x'' - 4x' + 13x = 12\cos 2t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = 3$
22	$x'' + 2x' = 4e^{-2t}\cos 2t$; $x(0) = -3$; $x'(0) = 2$
23	$x'' + 4x' - 12x = e^{-2t}\sin 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -3$
24	$x'' + 5x' - 14x = 2te^{2t}$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -1$
25	$x'' - 4x = 12e^{-2t}\sin 2t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = -4$
26	$x'' - x' - 6x = 12e^{3t}\cos 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -5$
27	$x'' + 2x' - 24x = 12t^2$; $x(0) = 1$; $x'(0) = 4$
28	$x'' - 4x' + 29x = 10e^{2t}$; $x(0) = 2$; $x'(0) = -2$
29	$x'' + 6x' - 7x = 6e^{-t}\sin 2t$; $x(0) = -2$; $x'(0) = 6$
30	$x'' + 9x = 4e^{-3t}\sin 3t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -4$

Завдання 4. Методом операційного числення розв‘язати задачу Коші для неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь (знайти частинний розв’язок заданої диференціальної системи, який задовольняє вказаним початковим умовам).

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y + \cos 2t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 3$	16	$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -x - 2\cos 3t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 0$

2	$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 3x - y + \sin 3t \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 0$	17	$\begin{cases} x' = 6x - 10y \\ y' = x - y + 5\cos t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = -6$
3	$\begin{cases} x' = x + 4y + 3e^{-2t} \\ y' = x - 2y \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 5$	18	$\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^{-t} \\ y' = x + 2y - 3e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = 2$
4	$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = -2x - y + 6t \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 0$	19	$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = 5x - y + 6e^{-2t} \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 2$
5	$\begin{cases} x' = -x + 3y - e^{t} \\ y' = x + y - 3e^{t} \end{cases}$ $x(0) = 3;\ y(0) = -2$	20	$\begin{cases} x' = 4x + y + 3\cos 2t \\ y' = -2x + 3y - \sin 2t \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 0$
6	$\begin{cases} x' = 7x + 2y - 2\sin t \\ y' = -9x - 2y + \cos t \end{cases}$ $x(0) = 4;\ y(0) = 0$	21	$\begin{cases} x' = 4x - 5y - 2t \\ y' = 2x - 2y + 3t \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 0$
7	$\begin{cases} x' = -2x - 6y \\ y' = -x - y + 6t \end{cases}$ $x(0) = 4;\ y(0) = 1$	22	$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 7x - 3y - 4t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = -2$
8	$\begin{cases} x' = -3x - 4y \\ y' = x + y + 6e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = -1$	23	$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 4x + y - 4\cos 2t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 7$
9	$\begin{cases} x' = -5x + 2y + 4e^{2t} \\ y' = 4x - 3y - 2e^{2t} \end{cases}$ $x(0) = 3;\ y(0) = -2$	24	$\begin{cases} x' = x + 2y + 2e^{-t} \\ y' = 2x + y - 4e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 1$
10	$\begin{cases} x' = 2x + 4y + 4t \\ y' = 3x + 6y - 3t \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 6$	25	$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y + 4t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 1$

11	$\begin{cases} x' = x + 5y - 2e^{2t} \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = -1$	26	$\begin{cases} x' = 4x + 6y + 4\cos 2t \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 5$
12	$\begin{cases} x' = 7x - 2y \\ y' = 4x - 2y - \sin 2t \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = 0$	27	$\begin{cases} x' = -x + y - e^{-2t} \\ y' = x - y + 2e^{-2t} \end{cases}$ $x(0) = 5;\ y(0) = 1$
13	$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5t \\ y' = 3x + 2y - 3 \end{cases}$ $x(0) = 0;\ \ y(0) = 1$	28	$\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t \\ y' = 5x - y - \cos t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 5$
14	$\begin{cases} x' = 2x - y - 3e^{-t} \\ y' = x + 2y \end{cases}$ $x(0) = -2;\ y(0) = 1$	29	$\begin{cases} x' = 6x - 2y - e^{2t} \\ y' = 5x - y - 3e^{2t} \end{cases}$ $x(0) = 4;\ \ y(0) = 0$
15	$\begin{cases} x' = 2x - y + 2\sin 2t \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$ $x(0) = -4;\ \ y(0) = 3$	30	$\begin{cases} x' = -x + 5y + 4e^{3t} \\ y' = -x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = -4$

Завдання 5. Обчислити заданий функціонал при вказаному значенні аргументу.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$I[y] = \int_1^e xy\,(y'')^2\,dx;$ $y = \ln x$	16	$I[y] = \int_0^{\pi} y\,y''\,dx;$ $y = \cos(x/3)$
2	$I[y] = \int_0^{\pi} \left(y^2 + (y'')^2\right)\times$ $\times \sin x\ dx;\ \ y = \cos x$	17	$I[y] = \int_0^{\pi/2} y''\,y^2\,dx;$ $y = \sin x$

3	$I[y]=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{y''\sin x}{(y')^3}dx$; $y=\ln x$	18	$I[y]=\int\limits_0^1(y+xy')dx$; $y=\sin\pi x$
4	$I[y]=\int\limits_0^1 x\left(y^2+(y')^2\right)dx$; $y=\cos x$	19	$I[y]=\int\limits_0^1 y''(1+x^2)\,dx$; $y=\ln(1+x^2)$
5	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/8}\left(y^2-(y')^2\right)\times$ $\times\sin 2x\;dx$; $y=\cos x$	20	$I[y]=\int\limits_0^1 y^2\,dx$; $y=\sqrt{x}\,e^{-x}$
6	$I[y]=\int\limits_0^1 x(y')^2dx$; $y=arctg\;x$	21	$I[y]=\int\limits_1^2\frac{x^2}{y''(1+x^2)}\,dx$; $y=arctg\;x$
7	$I[y]=\int\limits_e^{e^2}\frac{dx}{y''y^2}$; $y=x\ln x$	22	$I[y]=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{y\,dx}{y'}$; $y=ctg\;x$
8	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{xy}{y'\cos x}\,dx$; $y=tg\;x$	23	$I[y]=\int\limits_0^1 x(y+y'')\,dx$; $y=e^{-3x}$
9	$I[y]=\int\limits_0^{3/5}\frac{x}{y'(1-x^2)}\,dx$; $y=\arcsin x$	24	$I[y]=\int\limits_0^{3/5}\frac{xy'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; $y=\arcsin x$
10	$I[y]=\int\limits_1^2\frac{y''}{xy'}dx$; $y=xe^{-x}$	25	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/4}y''e^{-x}dx$; $y=e^x\cos 2x$
11	$I[y]=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{y''}{y}\cos^2 x\,dx$; $y=e^x\cos x$	26	$I[y]=\int\limits_1^2\frac{yy''e^{-x}}{xy'}dx$; $y=x^2e^x$

12	$I[y]=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{y''}{y}\sin 2x\,dx$; $y=e^{-x}\sin x$	27	$I[y]=\int\limits_{e}^{e^2}\frac{yy''}{(y')^2}\,dx$; $y=\ln^2 x$
13	$I[y]=\int\limits_{1}^{e}\frac{\cos x\,dx}{y''+y-2\sin x}$; $y=x^2\sin x$	28	$I[y]=\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{y^2}{y'}\,dx$; $y=tg\,x$
14	$I[y]=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{y^2\,dx}{y''-2\cos x}$; $y=x\sin x$	29	$I[y]=\int\limits_{e}^{e^2}\frac{y^2}{x^3y''+3}\,dx$; $y=\ln x/x$
15	$I[y]=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos^2 x\,dx}{y''+2\sin x}$; $y=x\cos x$	30	$I[y]=\int\limits_{e}^{e^3}\frac{y^2}{xy''}\,dx$; $y=\sqrt{x}\ln x$

Завдання 6. Знайти відстань нульового порядку між заданими кривими на вказаних відрізках.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y_1(x)=x^3e^{-x}$; $y_2(x)=0$; $[0;2]$	16	$y_1(x)=\sin 2x$; $y_2(x)=\sin x$; $[0;\pi/2]$
2	$y_1(x)=\sqrt{x}\ln x$; $y_2(x)=\sqrt{x}$; $[e^{-2};1]$	17	$y_1(x)=\ln x$; $y_2(x)=x$; $[e^{-1};e]$
3	$y_1(x)=2arctg\,x$; $y_2(x)=x$; $[0;\sqrt{3}]$	18	$y_1(x)=8\ln x$; $y_2(x)=x^2$; $[1;e]$
4	$y_1(x)=4/(x+2)^2$; $y_2(x)=-x$; $[-1;2]$	19	$y_1(x)=-108/x$; $y_2(x)=2x^2$; $[2;4]$

5	$y_1(x)=4\sqrt{x+2}$; $y_2(x)=x$; $[-1;7]$	20	$y_1(x)=2x^3-3x^2$; $y_2(x)=12x$; $[-2;3]$
6	$y_1(x)=-16/x$; $y_2(x)=x^2$; $[1;4]$	21	$y_1(x)=6-x$; $y_2(x)=4/x^2$; $[1;4]$
7	$y_1(x)=x^4/4-2x^3/3$; $y_2(x)=3x^2/2$; $[-2;4]$	22	$y_1(x)=x^4$; $y_2(x)=8x^3$; $[-1;2]$
8	$y_1(x)=x^2/2$; $y_2(x)=8/x$; $[-4;-1]$	23	$y_1(x)=15\sqrt[3]{x^2}$; $y_2(x)=x\sqrt[3]{x^2}$; $[-1;4]$
9	$y_1(x)=108x-60$; $y_2(x)=x^4$; $[-1;4]$	24	$y_1(x)=2\sqrt{x-1}$; $y_2(x)=x$; $[1;5]$
10	$y_1(x)=-16/(x-1)$; $y_2(x)=x^2-2x$; $[2;5]$	25	$y_1(x)=\ln x/x$; $y_2(x)=1/x$; $[e^{-1};e]$
11	$y_1(x)=x^2/2-2x$; $y_2(x)=8/(x-2)$; $[-2;1]$	26	$y_1(x)=2\ln x$; $y_2(x)=x$; $[1;e]$
12	$y_1(x)=3e^{-x}$; $y_2(x)=xe^{-x}$; $[0;5]$	27	$y_1(x)=-4/x^2$; $y_2(x)=8x$; $[1/2;2]$
13	$y_1(x)=x^2e^x$; $y_2(x)=8e^x$; $[0;3]$	28	$y_1(x)=3/x^2$; $y_2(x)=2/x^3$; $[1/2;2]$
14	$y_1(x)=-2/(x-1)$; $y_2(x)=x^2-2x$; $[-3;0]$	29	$y_1(x)=xe^{-x}$; $y_2(x)=e^{-x}$; $[0;3]$
15	$y_1(x)=x^5-5x^4$; $y_2(x)=-5x^3$; $[-1;2]$	30	$y_1(x)=2x^5+5x^4$; $y_2(x)=10x^3$; $[-1;2]$

Завдання 7. Знайти варіацію δI заданого функціоналу.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(x\cos y+(y')^3\right)dx$	16	$I[y]=\int\limits_0^{1}y\left(y'+e^{xy}\right)dx$
2	$I[y]=\int\limits_0^{\pi}(x\sin y+y'\ln y)\,dx$	17	$I[y]=\int\limits_{-2}^{1}\left(xy-(y')^2\right)dx$
3	$I[y]=\int\limits_0^{1}y'\,arctg\,(x+y)\,dx$	18	$I[y]=\int\limits_1^{4}\left(\ln y-(y')^3\right)dx$
4	$I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(x\sin y+(y')^2\right)dx$	19	$I[y]=\int\limits_1^{e}\left(x\ln y'+y^4\right)dx$
5	$I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(y^2\cos x-(y')^2\right)dx$	20	$I[y]=\int\limits_0^{1}\left(xy'+ye^{y'}\right)dx$
6	$I[y]=\int\limits_1^{2}\left(\sqrt{xy}+\ln y'\right)dx$	21	$I[y]=\int\limits_0^{1}\left((y')^2-xe^{y}\right)dx$
7	$I[y]=\int\limits_{-2}^{1}\left(x^3(y')^2-e^{y}\right)dx$	22	$I[y]=\int\limits_0^{1}\left(yy'+xe^{y'}\right)dx$
8	$I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(x\cos y+y\sqrt{y'}\right)dx$	23	$I[y]=\int\limits_1^{3}y\sqrt{x+(y')^2}\,dx$
9	$I[y]=\int\limits_1^{2}y'\arcsin\sqrt{xy}\,dx$	24	$I[y]=\int\limits_1^{4}y'\,arctg\,\sqrt{xy}\,dx$
10	$I[y]=\int\limits_0^{1}(x^2+y')\arcsin y\,dx$	25	$I[y]=\int\limits_2^{5}\left(x^2-y\right)(y')^3\,dx$

11	$I[y]=\int_0^1 (x-y')\,arctg\, y\,dx$	26	$I[y]=\int_{-1}^1 \left(y^3-3x^4y'\right)dx$
12	$I[y]=\int_0^1 y\,arctg\,(y'+x)\,dx$	27	$I[y]=\int_1^e x^2\ln\left(y'+y\right)dx$
13	$I[y]=\int_0^\pi \left(y'\cos y+x(y')^2\right)dx$	28	$I[y]=\int_1^2 y'\sqrt{x^2+y^2}\,dx$
14	$I[y]=\int_1^e \left(x\ln y+(y')^2\right)dx$	29	$I[y]=\int_0^4 y\sqrt{xy+y'}\,dx$
15	$I[y]=\int_0^1 y'\arcsin(x+y)\,dx$	30	$I[y]=\int_1^2 y'\sqrt{\ln xy}\,dx$

Завдання 8. Знайти екстремалі заданого функціоналу, що задовольняють указаним крайовим умовам (допустимі екстремалі). Дослідити на виконання достатніх умов екстремуму.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$I[y]=\int_0^1 \left(\sin y'+2(y')^2\right)dx;$ $y(0)=3;\ y(1)=1$	16	$I[y]=\int_{-1}^0 \left(12xy-(y')^2\right)dx;$ $y(-1)=1;\ y(0)=0$
2	$I[y]=\int_0^1 \left((y')^2-y^2-y\right)e^{2x}dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=e^{-1}$	17	$I[y]=\int_0^1 \left(x+(y')^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=2$
3	$I[y]=\int_1^2 \left((y')^2+2yy'+y^2\right)dx;$ $y(1)=1;\ y(2)=0$	18	$I[y]=\int_0^{2\pi} \left((y')^2-y^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(2\pi)=1$

4	$I[y]=\int_1^e \left(x(y')^2+yy'\right)dx;$ $y(1)=0;\ y(e)=1$	19	$I[y]=\int_1^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx;$ $y(1)=3;\ y(2)=5$
5	$I[y]=\int_0^1 \left((y')^2+y^2-4y\times\right.$ $\left.\times\sin x\right)dx;\ y(0)=0;\ y(1)=1$	20	$I[y]=\int_0^1 (y+\ln y')dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=3$
6	$I[y]=\int_0^1 (y+2xy'+(y')^2)dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=2$	21	$I[y]=\int_0^1 (xy'-(y')^2)\ dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=1/4$
7	$I[y]=\int_0^{3\pi/2} (y^2-2(y')^2)e^{-x}dx;$ $y(0)=0;\ y(3\pi/2)=e^{3\pi/4}$	22	$I[y]=\int_{-1}^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx;$ $y(-1)=1;\ y(2)=4$
8	$I[y]=\int_0^1 ((y')^2+yy'+12xy)\ dx;$ $y(0)=y(1)=0$	23	$I[y]=\int_0^1 \ln(yy')dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=3$
9	$I[y]=\int_1^2 \left(x^2(y')^2+2yy'+\right.$ $\left.+2xy\right)dx;\ \ y(1)=1;\ y(2)=8$	24	$I[y]=\int_0^2 \left(xy'+(y')^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(2)=0$
10	$I[y]=\int_0^2 \left(y'+(y')^2e^x-x^3\right)dx;$ $y(0)=2;\ y(2)=-1$	25	$I[y]=\int_0^1 \frac{e^y}{y'}dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=-\ln 2$
11	$I[y]=\int_0^{\pi} \left(4y\cos x+(y')^2-\right.$ $\left.-y^2\right)dx;\ y(0)=y(\pi)=0$	26	$I[y]=\int_0^1 \frac{dx}{(y')^2};$ $y(0)=0;\ y(1)=1$

12	$I[y]=\int_1^2 (x^2(y')^2+12y^2)\,dx$; $y(1)=1;\ y(2)=8.$	27	$I[y]=\int_0^1 (x+y^2(y')^2)\,dx$; $y(0)=1;\ y(1)=3$
13	$I[y]=\int_0^1 \left((y')^2+y^2+6y\times\right.$ $\left.\times sh2x\right)dx$; $y(0)=0; y(1)=1$	28	$I[y]=\int_{-1}^1 \left(4xy'-(y')^2\right)dx$; $y(-1)=0;\ y(1)=1/2$
14	$I[y]=\int_{-1}^1 \left(2y'/(1+x^2)-\right.$ $\left.-(y')^2\right)dx;\ y(-1)=0; y(1)=3$	29	$I[y]=\int_0^1 \left(x+4y+(y')^2\right)dx$; $y(0)=0; y(1)=0$
15	$I[y]=\int_1^3 \left((y')^2-y'\ln x+\right.$ $\left.+2x\right)dx; y(1)=2; y(3)=-1$	30	$I[y]=\int_0^1 (y/y')\,dx$; $y(0)=1;\ y(1)=e$

Завдання 9. Знайти екстремалі заданого функціоналу, що задовольняють указаним крайовим умовам (допустимі екстремалі).

№ в-та	Завдання
1	$I[y,z]=\int_0^1 \left((y')^2+(z')^2+2xy\right)dx$; $y(0)=1;\ z(0)=0;\ y(1)=0;\ z(1)=1$
2	$I[y,z]=\int_1^2 \left((y')^2+z^2+(z')^2-2xy\right)dx$; $y(1)=1;\ z(1)=0;\ y(2)=2;\ z(2)=1$
3	$I[y,z]=\int_0^\pi \left(2yz-2y^2+(y')^2-(z')^2\right)dx$; $y(0)=0;\ z(0)=0;\ y(\pi)=1;\ z(\pi)=1$

4	$I[y,z]=\int_{-1}^{1}\left(6xy-3(y')^2+(z')^2\right)dx;$ $y(-1)=2;\ z(-1)=-1;\ y(1)=0;\ z(1)=1$
5	$I[y,z]=\int_{0}^{1}\left((y')^2-2xyz'\right)dx;$ $y(0)=2;\ z(0)=0;\ y(1)=1;\ z(1)=-1$
6	$I[y,z]=\int_{1}^{2}\left((z')^2-xy'z\right)dx;$ $y(1)=1;\ z(1)=1;\ y(2)=0;\ z(2)=1$
7	$I[y,z]=\int_{0}^{\pi/2}\left(y^2+z^2+y'z-yz'-2xz\right)dx;$ $y(0)=1;\ z(0)=-2;\ \ y(\pi/2)=0;\ \ z(\pi/2)=1.$
8	$I[y,z]=\int_{0}^{\pi/2}\left((y')^2+(z')^2+2yz-4y\sin x\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=2;\ \ y(\pi/2)=0;\ \ z(\pi/2)=0$
9	$I[y,z]=\int_{0}^{1}\left(2y'z'-y^2+z^2-6ye^x\right)dx;$ $y(0)=-2;\ z(0)=1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
10	$I[y,z]=\int_{0}^{1}\left((y+z)^2+(y')^2+(z')^2+4xy\right)dx;$ $y(0)=1;\ z(0)=-2;\ y(1)=0;\ z(1)=0$
11	$I[y,z]=\int_{0}^{\pi/2}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-6z\cos x\right)dx;$ $y(0)=-1; z(0)=0; y(\pi/2)=0; z(\pi/2)=-2$
12	$I[y,z]=\int_{0}^{\pi/4}\left(2y'z'-y^2+z^2-6y\sin 2x\right)dx;$ $y(0)=1;\ z(0)=0;\ \ y(\pi/4)=0;\ \ z(\pi/4)=-4$

13	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/2}\left(2y'z'+y^2+z^2+6y\sin x\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=-1;\ y(\pi/2)=0;\ z(\pi/2)=2$
14	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2-6xz\right)dx;$ $y(0)=1;\ z(0)=-2;\ y(1)=-2;\ z(1)=0$
15	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/4}\left(2y'z'-y^2+z^2+2z\cos 2x\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=0;\ y(\pi/4)=2;\ z(\pi/4)=0$
16	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y')^2+(z')^2+y^2+z^2+4yz+2xy\right)dx;$ $y(0)=4;\ z(0)=-1;\ y(1)=0;\ z(1)=-2$
17	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left(2y'z'+y^2+z^2+6ye^{-2x}\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=-2;\ y(1)=-1;\ z(1)=0$
18	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/2}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-6z\sin x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=0;\ y(\pi/2)=3;\ z(\pi/2)=0$
19	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left(2y'z'+y^2+z^2+4ye^{x}\right)dx;$ $y(0)=1;\ z(0)=0;\ y(1)=-1;\ z(1)=0$
20	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/4}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-2y\sin 2x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=1;\ y(\pi/4)=0;\ z(\pi/4)=0$
21	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y')^2+(z')^2-y^2-z^2-4yz+2ye^{3x}\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=-3;\ y(1)=1;\ z(1)=0$

22	$I[y,z]=\int_0^{\pi/4}\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2-2y\cos 2x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=2;\ \ y(\pi/4)=0;\ \ z(\pi/4)=0$
23	$I[y,z]=\int_0^{1}\left((y')^2+(z')^2+y^2+z^2+4yz+2ye^x\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=-1;\ y(1)=2;\ z(1)=-2$
24	$I[y,z]=\int_0^{1}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-6xy\right)dx;$ $y(0)=3;\ z(0)=0;\ \ y(1)=0;\ \ z(1)=-1$
25	$I[y,z]=\int_0^{1}\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2+8ze^{-2x}\right)dx;$ $y(0)=-2;\ z(0)=-1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
26	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2}\left(2y'z'-y^2+z^2-12y\cos x\right)dx;$ $y(0)=1;\ z(0)=-4;\ \ y(\pi/2)=0;\ \ z(\pi/2)=0.$
27	$I[y,z]=\int_0^{1}\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2+4ye^{2x}\right)dx;$ $y(0)=2;\ z(0)=-2;\ y(1)=0;\ z(1)=1$
28	$I[y,z]=\int_0^{\pi/4}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-2z\cos 2x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=0;\ \ y(\pi/4)=0;\ \ z(\pi/4)=0$
29	$I[y,z]=\int_0^{1}\left(2y'z'-y^2+z^2-6ye^x\right)dx;$ $y(0)=-2;\ z(0)=1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
30	$I[y,z]=\int_0^{1}\left((y')^2+(z')^2-y^2-z^2-4yz+2xz\right)dx;$ $y(0)=3;\ z(0)=-1;\ y(1)=1;\ z(1)=0$

Завдання 10. Розв'язати наступні задачі на умовний екстремум.
Варіанти №1–№17: Знайти допустимі екстремалі задачі Лагранжа.
Варіанти №18–№30: Знайти допустимі екстремалі ізопериметричної задачі.

№ В-та	Завдання
1	$I[y,z]=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;$ $y(0)=-1; z(0)=1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1;\ x+y+z=0$
2	$I[y,z]=\int_0^1\left((y')^2+z\right)dx;$ $y(0)=1; z(0)=1;\ y(1)=e;\ z(1)=e^2+1;\ z-y^2-x=0$
3	$I[y,z]=\int_0^1\left((y')^2+z^2\right)dx;$ $y(0)=0; z(0)=1;\ y(1)=1;\ z(1)=\sqrt{2};\ y-z^2+1=0$
4	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2}\left(2yz+z^2\right)dx;\ \ y'=y+z;$ $y(0)=0;\ \ z(0)=1;\ y(\pi/2)=1;\ z(\pi/2)=-1$
5	$I[y,z]=\int_0^1 y'z'\,dx;\quad y'+y+z-x^2=0;$ $y(0)=0;\ \ z(0)=-1;\ y(1)=3/2;\ \ z(1)=-5/2$
	$I[y,z]=\int_0^1\left(y^2+2yz'+z^2\right)dx;\quad y'=-y-2z;$ $y(0)=1,\ \ y(1)=0$
7	$I[y,z]=\int_0^1\left((y')^2+(z')^2+x^3\right)dx;\ \ 3x+y-2z=0;$ $y(0)=2;\ \ z(0)=1;\ y(1)=1;\ \ z(1)=2$

8	$I[y,z]=\int_0^1\left((y')^2+z^2\right)dx;\quad y'=z;$ $y(0)=0;\ z(0)=1;\ y(1)=1;\ z(1)=0$
9	$I[y,z]=\int_0^1\left(y^2+2yz'+z^2\right)dx;\quad y'=4y-2z;$ $y(0)=0,\quad y(1)=2$
10	$I[y,z]=\int_{-2}^1\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;\ 3z=2x-5y-3;$ $y(-2)=-2;\ z(-2)=1;\ y(1)=-2;\ z(1)=3$
11	$I[y,z]=\int_1^4\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;\ 5y=2x+2z+14;$ $y(1)=2;\ z(1)=-3;\ y(4)=4;\ z(4)=-1$
12	$I[y,z]=\int_0^1\left(y+z+(z')^2\right)dx;\quad y'+z'-1=0;$ $y(0)=0;\ z(0)=1;\ y(1)=1;\ z(1)=2$
13	$I[y,z]=\int_{-1}^3\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;\ 3z=2x+2y+2;$ $y(-1)=3;\ z(-1)=2;\ y(3)=5;\ z(3)=6$
14	$I[y,z]=\int_2^4\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;\ 3z=3x-4y-2;$ $y(2)=-2;\ z(2)=4;\ y(4)=1;\ z(4)=2$
15	$I[y,z]=\int_0^1\left(y^2+2yz'+z^2\right)dx;\quad y'=-4y-2z;$ $y(0)=1,\quad y(1)=2$
16	$I[y,z]=\int_0^1\left((y')^2+z^2+1\right)dx;\ y+z-2x^2=0;$ $y(0)=0;\ z(0)=0;\ y(1)=2;\ z(1)=0$

17	$I[y,z]=\int_0^{\pi}\left((y')^2-(z')^2\right)dx\,;\quad y'-z+\cos x=0\,;$ $y(0)=0;\ \ z(0)=0;\ y(\pi)=2;\ \ z(\pi)=\pi/2$
18	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+4x^3\right)dx;\quad \int_0^1 ydx=2\,;$ $y(0)=0;\ \ y(1)=0$
19	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2-3x^2\right)dx;\quad \int_0^1 xydx=1\,;$ $y(0)=2;\ y(1)=0$
20	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+2x\right)dx\,;\quad \int_0^1 x^2y\,dx=0\,;$ $y(0)=0,\quad y(1)=1$
21	$I[y]=\int_0^{\pi}\left((y')^2+\cos x\right)dx\,;\quad \int_0^{\pi} y\sin x\,dx=0\,;$ $y(0)=0,\quad y(\pi)=1$
22	$I[y]=\int_0^{\pi/4}\left((y')^2-4y^2-8y\cos 4x+6\sin 2x\right)dx\,;$ $\int_0^{\pi/4}(4\cos 2x+y-y')\ dx=5\,;\quad y(0)=1,\quad y(\pi/4)=3$
23	$I[y]=\int_0^{\pi}(y\sin x-\cos x)\,dx\,;\quad \int_0^{\pi}(y')^2\,dx\ =3\pi/2\,;$ $y(0)=0,\quad y(\pi)=\pi$
24	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+4y^2+4y\,e^{-2x}-4x^3\right)dx\,;$ $\int_0^1\left(3x^2-y+y'\right)dx=6\,;\quad y(0)=2,\quad y(1)=0$

25	$I[y]=\int_0^{\pi/6}\left((y')^2-9y^2+12y\sin 6x+6\cos 3x\right)dx$; $\int_0^{\pi/6}(6\sin 3x+y+y')\,dx=4$; $y(0)=3$, $y(\pi/6)=0$
26	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+3x^2\right)dx$; $\int_0^1 y^2dx=2$; $y(0)=0$; $y(1)=0$
27	$I[y]=\int_0^1(y')^2dx$; $\int_0^1\left(y-(y')^2\right)dx=1/12$; $y(0)=0$; $y(1)=1/4$
28	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+4y^2+4ye^{2x}-3x^2\right)dx$; $\int_0^1(6x-y-y')\,dx=4$; $y(0)=3$, $y(1)=0$
29	$I[y]=\int_0^{\pi/8}\left((y')^2-16y^2+4y\cos 8x-8\sin 4x\right)dx$; $\int_0^{\pi/8}(8\cos 8x-y+y')\,dx=6$; $y(0)=1$, $y(\pi/8)=3$
30	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+9y^2-18xy-3x^2\right)dx$; $\int_0^1(2x+y-y')\,dx=2$; $y(0)=2$, $y(1)=0$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бізюк В.В., Якунін А.В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 300 с.

2.Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Операційне числення та його застосування. – К.: КНЕУ, 2003. – 295 с.

3. Вища математика / В.А. Домбровський, І.М. Крижанівський, Р.С. Мацьків та ін. За ред. М.І. Шинкарик. – Тернопіль: Вид-во Карп'юка, 2003. – 478 с.

4. Вища математика: Загальний курс. Ч.2. Математичний аналіз і диференціальні рівняння / В.П. Лавренчук, О.В. Мартинюк, П.П. Настасієв. – Чернівці: Рута, 2006. – 319 с.

5. Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. За ред. В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2003. – 479 с.

6. Вища математика: Збірник задач: У 2 ч. / За заг. ред. П.П. Овчинников. – К.: Техніка, 2003. Ч.1 / Х.Г, Гаврильченко, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін. – 2003. – 279 с. Ч.2 / П.П. Овчинников, П.С. Кропив'янський, С.П. Полушкін та ін. – 2003. – 375 с.

7. Вища математика. У 2 ч. / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. За заг. ред. П.П. Овчинников. – К.: Техніка, 2003-2004. Ч.1. – 2003. – 600 с.; Ч.2. – 2004. – 791 с.

8. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

9. Иглин С.П. Вариационное исчисление с применением MATLAB. –Харьков: НТУ "ХПИ", 2001. – 108 с.

10. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Збірник прикладних задач з вищої математики. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.

11. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 495 с.

12. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.

13. Петрук В.А. Вища математика з прикладними задачами для ігрових занять. – Вінниця: Універсум-Вінниця, 2006. – 130 с.

14. Рогачев А.И. Вариационное исчисление в примерах и задачах. –Харьков: НТУ "ХПИ", 2008. – 92 с.

15. Станішевський С.О. Вища математика.– Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.

З М І С Т

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

В И Щ А   М А Т Е М А Т И К А

д л я   е л е к т р о т е х н і к і в

у трьох модулях

Навчальний посібник

Модуль 2

Станішевський Степан Олександрович,
Якунін Анатолій Вікторович,
Володченко Анна Олександрівна

Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення

Відповідальний за випуск *М.Й. Кадець*
Редактор *М.З. Аляб'єв*

Підп. до друку 23.03.2010   Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі   Ум. друк. арк. 20,0
Тираж 500 пр.   Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №731
від 19.12.2001