ВИЩА МАТЕМАТИКА
для електротехніків
у трьох модулях

С.О. Станішевський
А.В. Якунін
В.С. Ситникова

МОДУЛЬ 1

Аналітична геометрія на площині
Вступ до математичного аналізу
Диференціальне числення функцій однієї змінної
Лінійна та векторна алгебра
Площина та пряма у просторі
Комплексні числа та функції

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

ВИЩА МАТЕМАТИКА
для електротехніків

у трьох модулях

Модуль 1

**С.О. Станішевський, А.В. Якунін,
В.С. Ситникова**

**Аналітична геометрія на площині.
Вступ до математичного аналізу.
Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра.
Площина та пряма у просторі.
Комплексні числа та функції**

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник*

Харків ХНАМГ 2009

УДК [514.1+517.1+517.2+517.5](075)
ББК 22.11я7
В 55

Рецензенти:

В.Д. Гордевський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу (Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна);
О.М. Литвин, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики (Українська інженерно-педагогічна академія);
Ю.В. Куліш, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики (Українська державна академія залізничного транспорту);
В.Г. Моторіна, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики (Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів електротехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів
(*лист № 1.4/18-Г-129 від 10.01.2009 р*.)

Вища математика для електротехніків: у 3-х модулях:
В55 навч. посіб. / С.О. Станішевський, А.В. Якунін, В.С. Ситникова та ін.; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2009. –
ISBN 978-966-695-165-9
Модуль 1: Аналітична геометрія на площині. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. Площина та пряма у просторі. Комплексні числа та функції / С.О. Станішевський, А.В. Якунін, В.С. Ситникова. – 2009. – 308 с.
ISBN 978-966-695-123-9

Викладено розділи, що відповідають першому семестру за діючою програмою для електротехнічних спеціальностей. Додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання для самостійної роботи.

УДК [514.1+517.1+517.2+517.5](075)
ББК 22.11я7

ISBN 978-966-695-165-9
ISBN 978-966-695-123-9 (Модуль 1)

Передмова

У навчальному посібнику за модульною технологією навчання викладено розділи, що відповідають першому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів електротехнічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю на застосування до електротехнічних задач. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах, частина з яких розрахована на самостійне опрацювання. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання.

Основою даного посібника є цикли лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті електропостачання і освітлення міст та на факультеті інженерної екології міст Харківської національної академії міського господарства.

Посібник призначений для студентів електротехнічних спеціальностей, а також може використовуватися для самоосвіти електротехніків-практиків.

Змістовий модуль 1. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Аналітичною геометрією називається розділ вищої математики, в якому вивчаються геометричні об'єкти засобами алгебри на основі методу координат.

Математичний аналіз – це сукупність розділів вищої математики, в яких вивчаються властивості змінних величин на основі понять функції, граничного переходу та неперервності.

1.1. Декартова прямокутна система координат на площині

Для визначення положення довільної точки використовується деяка система координат. Її вибір залежить від характеру поставленої задачі. Найбільш поширеною на практиці є декартова прямокутна система координат.

1.1.1. Координатна пряма. Числові проміжки. Модуль дійсного числа

Напрямлена пряма, на якій задано початок відліку O і масштаб $OE = 1$, називається ***координатною прямою*** (***віссю***) (рис. 1).

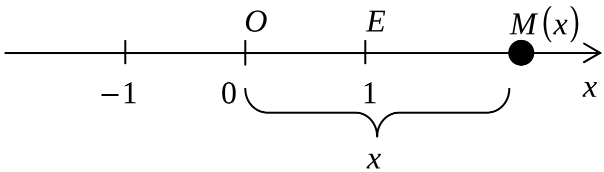

Рис. 1

Довільній точці M координатної прямої Ox відповідає певне дійсне число x – її ***координата***. Навпаки, довільному дійсному числу x відповідає певна точка M координатної прямої Ox. Враховуючи таку взаємно однозначну відповідність, координатну пряму називають ***числовою прямою*** і ототожнюють з множиною дійсних чисел R: $R=(-\infty;\ +\infty)$.

Основні ***числові проміжки*** показані на рис. 2:

$[a;\ b]$ – ***відрізок***; $[a;\ b)$, $(a;\ b]$, $(-\infty;\ a]$, $[a;\ +\infty)$ – ***півінтервали***; $(a;\ b)$, $(-\infty;\ a)$, $(a;\ +\infty)$, $(-\infty;\ +\infty)$ – ***інтервали***, $a<b$.

Проміжки $[a;\ b]$; $[a;\ b)$, $(a;\ b]$, $(a;\ b)$ називаються ***скінченними***, а всі інші – ***нескінченними***. Числа a і b – їхні ***кінці***, $d=b-a$ – ***довжина***.

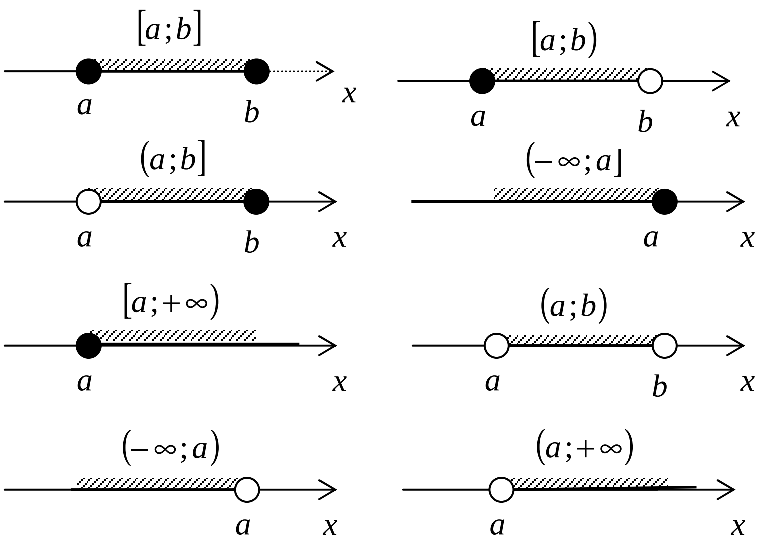

Рис. 2

Модулем (***абсолютною величиною***) дійсного числа x називається невід'ємне число, яке позначається $|x|$ і визначається формулою

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Модуль дійсного числа x дорівнює відстані відповідної точки $M(x)$ від початку відліку O (***геометричний зміст*** модуля).

Відстань між довільними двома точками $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ визначається формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

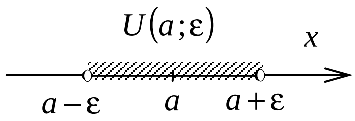

Рис. 3

Інтервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ називається ε***-околом числа*** a і позначається $U(a;\varepsilon)$, де ε – довільне додатне число, $\varepsilon > 0$ (рис. 3).

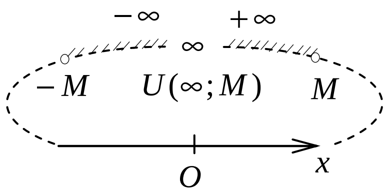

Рис. 4

Зауваження. Координатну пряму Ox умовно можна вважати замкненою в нескінченно віддаленій точці ∞. Тому для довільного додатного числа M, $M > 0$, розглядають $U(\infty;M) = \{x \mid |x| > M\}$ – M ***-окіл символу нескінченності*** ∞ (рис. 4).

1.1.2. Декартова прямокутна система координат на площині. Відстань між двома точками. Ділення відрізка у заданому відношенні

Дві взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox і Oy зі спільним ***початком*** O утворюють ***декартову прямокутну систему координат на площині*** (рис. 5). Ox називається ***віссю абсцис***, а Oy – ***віссю ординат***. Сукупність прямих, що перпендикулярні координатним осям, утворює ***координатну сітку*** на координатній площині Oxy. Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою парою чисел $(x;y)$ – її ***координатами*** (x – ***абсциса***, y – ***ордината***).

З прямокутного ΔM_1NM_2 (рис. 6) за теоремою Піфагора випливає, що ***відстань між*** довільними ***двома точками*** $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ визначається формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \ .$$

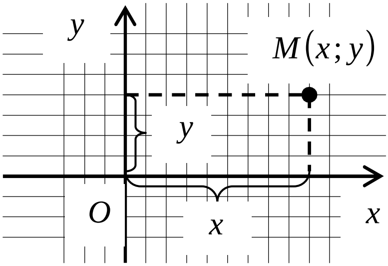

Рис. 5

Нехай задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і відношення $\lambda = M_1M / MM_2$, у якому точка $M(x, y)$ ділить відрізок M_1M_2, починаючи від точки M_1 (рис. 7). З подібності прямокутних трикутників $\Delta M_1NM \sim \Delta MPM_2$ випливає, що

$$\frac{NM}{PM_2} = \frac{M_1N}{MP} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda \ ; \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda \ .$$

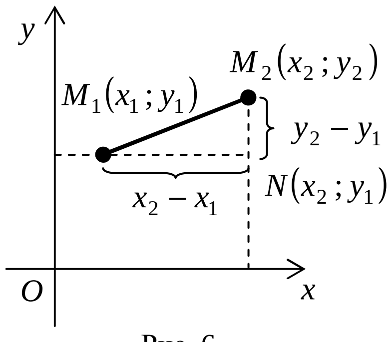

Рис. 6

Звідси ***координати точки*** $M(x, y)$***, яка ділить заданий відрізок у заданому відношенні***, обчислюються за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \ ;$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \ .$$

<u>Зауваження 1</u>. Якщо точка M лежить між точками M_1 і M_2, то $\lambda > 0$ (***ділення внутрішнім способом***); якщо точка M не належить відрізку M_1M_2, то $\lambda < 0$ (***ділення зовнішнім способом***).

Зауваження 2. Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$. Тоді ***координати середини відрізка*** визначаються за формулами

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \; ; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \; .$$

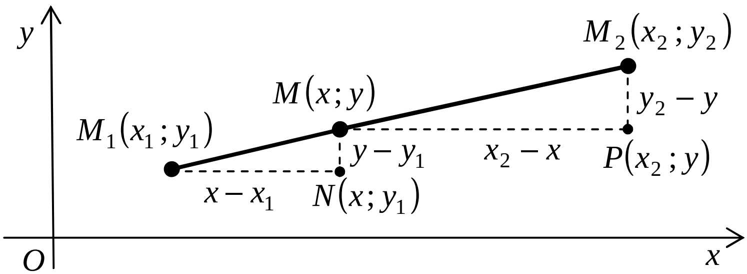

Рис. 7

Приклад. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(-3;4)$, $B(7;-2)$, $C(5;6)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти: а) довжину медіани AM; б) точку E перетину медіан.

□ M – середина сторони BC:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7+5}{2} = 6 \; ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2 \; ; \quad M(6;\, 2) \; .$$

$$AM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-(-3))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{85} \; .$$

За властивістю точки перетину медіан трикутника

$$\lambda = AE/EM = 2/1 = 2 \; .$$

Тоді E: $\quad x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{-3 + 2\cdot 6}{1+2} = 3 \; ;$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{4 + 2\cdot 2}{1+2} = 2\frac{2}{3} \; ; \quad E\left(3;\, 2\frac{2}{3}\right) . \; ■$$

1.2. Пряма на площині. Основні типи рівняння прямої

1.2.1. Рівняння з двома змінними як рівняння лінії

Співвідношення

$$F_1(x, y) = F_2(x, y)$$

називається ***рівнянням з двома змінними***. Його можна подати у ***стандартному вигляді***

$$F(x, y) = 0\,.$$

Тут $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ і $F(x, y)$ – деякі вирази.

Зображення множини розв'язків даного рівняння на координатній площині Oxy називається ***графіком*** цього рівняння.

Звичайно графіком рівняння служить деяка лінія. Наприклад, а) графіком рівняння $x^2 + y^2 = 1$ є коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом $R = 1$ (***дійсна лінія***); б) графіком рівняння $x^2 + y^2 = 0$ є одна точка – початок координат $O(0;0)$ (***вироджена лінія***); в) рівняння $x^2 + y^2 = -1$ ніякого графіка не має (***уявна лінія***).

Зауваження 1. Вигляд рівняння лінії залежить як від самої лінії, так і від вибору системи координат.

Зауваження 2. Говорять, що лінія ***задана неявно***, якщо її рівняння має вигляд $F(x, y) = 0$ або $F_1(x, y) = F_2(x, y)$. Якщо рівняння лінії розв'язане відносно змінної y, то говорять, що лінія ***задана явно*** рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ – деякий вираз. Лінія може задаватись системою рівнянь $x = x(t)$ і $y = y(t)$, де t – допоміжна змінна (параметр), $x(t)$ і $y(t)$ – деякі вирази. Тоді говорять, що лінія ***задана параметрично***. Наприклад, траєкторія руху матеріальної точки в механіці часто задається в параметричній формі, при цьому роль параметра t відіграє час.

Правило 1. *Щоб встановити, чи лежить указана точка* $M_0(x_0, y_0)$ *на даній лінії* l: $F(x, y) = 0$, *треба перевірити, чи* *задовольняють координати точки рівняння лінії*:

$$F(x_0, y_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; M_0 \in l \;; \quad F(x_0, y_0) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; M_0 \notin l\,.$$

<u>Правило 2</u>. *Щоб встановити, чи перетинаються дві дані лінії* $l_1\colon\ F_1(x, y) = 0$, $l_2\colon\ F_2(x, y) = 0$ *і знайти точки перетину (спільні точки), треба скласти систему рівнянь*

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

і розв'язати її.

<u>Правило 3</u>. *Щоб скласти рівняння даної лінії треба:*

1) *ввести систему координат;*

2) *знайти співвідношення між координатами довільної (поточної, бігучої) точки* $M(x, y)$ *цієї лінії та відомими сталими величинами, що визначають саме цю лінію, на основі характеристичної властивості даної лінії;*

3) *за допомогою рівносильних перетворень звести одержане рівняння до найбільш простого вигляду*.

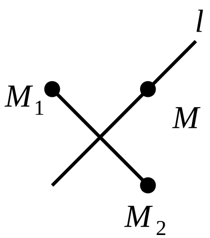

Рис. 8

<u>Зауваження 3</u>. Тип лінії визначають, зводячи її рівняння до відповідного стандартного вигляду.

<u>Приклад</u>. Скласти рівняння серединного перпендикуляра l до відрізка M_1M_2, де $M_1(-3;4)$, $M_2(3;-1)$ (рис. 8).

□ Довільна точка $M(x, y)$ шуканої лінії рівновіддалена від кінців відрізка M_1M_2: $M_1M = M_2M$;

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \;;$$

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 1)^2} \quad \Big|\uparrow 2\,;$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 \;;$$

$l\colon\quad 12x - 10y + 15 = 0$ – пряма лінія. ■

1.2.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай ***похила пряма*** l утворює кут α з віссю Ox і перетинає вісь Oy у точці $B(0;\, b)$ (рис. 9). Тангенс кута нахилу α називають ***кутовим коефіцієнтом*** k прямої l: $k = tg\ \alpha$. Число b називають ***початковою ординатою*** прямої l.

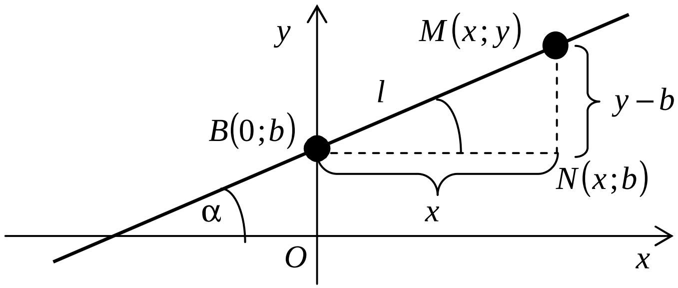

Рис. 9

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка прямої l. У прямокутному ΔBNM $\angle MBN = \alpha$. Тоді

$$\frac{NM}{BN} = tg\ \angle MBN \ ; \quad \frac{y-b}{x} = tg\ \alpha = k \ ; \quad y - b = kx \ .$$

Звідси маємо ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом***

$$y = kx + b \ .$$

<u>Зауваження 1</u>. Якщо $b = 0$, то пряма $y = kx$ проходить через початок координат $O(0;0)$. Якщо $k = 0$, то пряма $y = b$ паралельна осі Ox (***горизонтальна***).

<u>Зауваження 2</u>. Якщо пряма паралельна осі Oy $\left(\alpha = 90^\circ\right)$, то її кутовий коефіцієнт не існує $\left(k = tg\ 90^\circ = \infty\right)$, отже її рівняння не можна подати у відповідному вигляді. ***Рівняння вертикальної прямої*** має вигляд $x = a$, де a – абсциса точки перетину $A(a;\, 0)$ з віссю Ox.

<u>Приклад</u>. Побудувати пряму l за її рівнянням:

а) $y = 3x - 2$; б) $y = -3x$; в) $y = 2$; г) $x = -3$.
(Розв'язати самостійно).

1.2.3. Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку. Пучок прямих

Нехай пряма l проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k. Тоді для прямої l маємо

$$y = kx + b \ ; \quad M_0(x_0, y_0) \in l \ \Rightarrow \ y_0 = kx_0 + b \ ;$$

$$b = y_0 - kx_0 \ ; \qquad y = kx + y_0 - kx_0 \ .$$

Звідси отримуємо ***рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку***

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Зауваження. ***Пучок прямих*** з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ задається сукупністю рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} y - y_0 = k(x - x_0), \ k \in (-\infty; +\infty) \\ \qquad\qquad x = x_0 \ . \end{array}\right.$$

Приклад. Написати рівняння і побудувати пряму, що належить пучку з центром у точці $M_1(-3; 1)$, якщо: а) пряма паралельна осі Ox; б) пряма паралельна осі Oy; в) пряма нахилена до осі Ox під кутом $\alpha = 60^\circ$. (Розв'язати самостійно).

1.2.4. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма l проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Оскільки пряма l проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, то $y - y_1 = k(x - x_1)$. Тоді

$$M_2(x_2, y_2) \in l \ \Rightarrow \ y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \ ;$$

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ ;\quad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)\ .$$

Звідси маємо ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ .$$

Приклад. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(1;-2)$, $B(-5;1)$, $C(3;-1)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти рівняння бісектриси AL.

□ $$AB=\sqrt{(-5-1)^2+(1-(-2))^2}=3\sqrt{5}\ ;$$

$$AC==\sqrt{(3-1)^2+(-1-(-2))^2}=\sqrt{5}\ .$$

За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника

$$\lambda=\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=3\ .$$

Тоді

$$L:\quad x=\frac{-5+3\cdot 3}{1+3}=1;\quad y=\frac{1+3\cdot(-1)}{1+3}=-\frac{1}{2};\quad L\left(1;-\frac{1}{2}\right);$$

$$AL:\ \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\ ;\quad \frac{y-(-1)}{-1/2-(-1)}=\frac{x-1}{1-1}\ ;\quad x=1\,.\ ■$$

1.2.5. Загальне рівняння прямої та його окремі випадки

Кожна пряма описується деяким рівнянням першого степеня. Навпаки, кожне рівняння першого степеня є рівнянням деякої прямої.

Загальним рівнянням прямої називається рівняння першого степеня вигляду

$$Ax+By+C=0\ ,$$

де A, B і C – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел A, B відмінне від нуля, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$.

Зауваження 1. Загальне рівняння прямої записується з точністю до сталого множника. По можливості його зводять до вигляду, де всі коефіцієнти – цілі числа, причому перший ненульовий коефіцієнт додатний.

Зауваження 2. У залежності від значень сталих A, B і C можливі наступні окремі випадки:

$C = 0$, тоді пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат;

$A = 0$, тоді пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox. Її рівняння можна подати у вигляді $y = b$, де $b = -C/B$;

$B = 0$, тоді пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy. Її рівняння можна подати у вигляді $x = a$, де $a = -C/A$;

$A = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $y = 0$ співпадає з віссю Ox;

$B = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $x = 0$ співпадає з віссю Oy.

Приклад 1. У трикутнику ABC задано рівняння сторін AB: $3x - 4y - 2 = 0$ і AC: $2x + 5y - 9 = 0$. Знайти координати вершини A. (Розв'язати самостійно).

Приклад 2. Побудувати пряму l за її рівнянням:

а) $3x - 4y + 12 = 0$ (знайти точки перетину з осями координат); б) $x = 2$ (знайти точку перетину з віссю абсцис); в) $y = -4$ (знайти точку перетину з віссю ординат).

(Розв'язати самостійно).

1.2.6. Рівняння прямої у відрізках на осях

Нехай похила пряма l відтинає на осях координат Ox і Oy відповідно відрізки a і b, тобто перетинає осі координат у двох заданих точках $A(a; 0)$ і $B(0; b)$ (рис. 10). Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, отримаємо

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}\ ; \quad \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1\ .$$

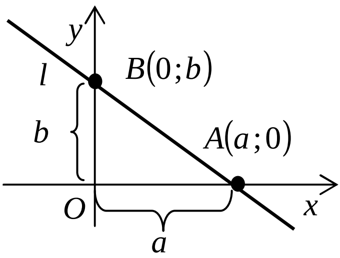

Рис. 10

Звідси маємо ***рівняння прямої у відрізках на осях***

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ .$$

Зауваження. У відрізках на осях не можна подати рівняння прямих, які паралельні осям координат.

Приклад. Пряма l задана своїм загальним рівнянням $3x-4y-8=0$. Записати її рівняння: а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях.

□ а) $3x-4y-8=0$; $-4y=-3x+8$;

$$y=\frac{3}{4}x-2\ ; \quad k=\frac{3}{4}\ ; \quad b=-2\ ;$$

б) $3x-4y-8=0$; $3x-4y=8$;

$$\frac{3x}{8}-\frac{4y}{8}=1\ ; \quad \frac{x}{8/3}+\frac{y}{-2}=1\ ; \quad a=\frac{8}{3}\ ; \quad b=-2\ . \ \blacksquare$$

1.2.7. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2, що зображені на рис. 11, мають задані кутові коефіцієнти відповідно k_1 і k_2. Тоді для кута φ між ними маємо

$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1\ ; \qquad tg\ \varphi=\frac{tg\ \alpha_2-tg\ \alpha_1}{1+tg\ \alpha_1\cdot tg\ \alpha_2}\ .$$

Оскільки $tg\ \alpha_1=k_1$; $tg\ \alpha_2=k_2$, то ***тангенс кута між прямими*** знаходиться за формулою

$$tg\ \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \ .$$

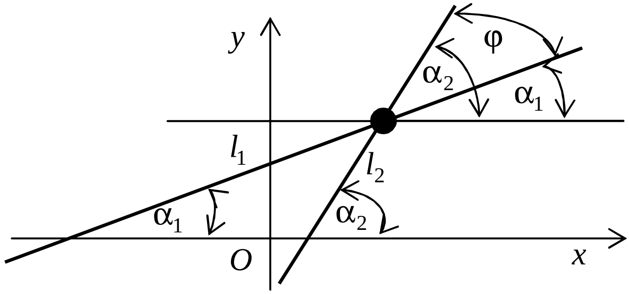

Рис. 11

Для паралельних прямих $\varphi = 0$, $tg\ \varphi = 0$, а для перпендикулярних прямих $\varphi = 90^\circ$, $tg\ \varphi \to \infty$. З одержаної формули випливає, що

1) ***необхідною і достатньою умовою паралельності*** невертикальних прямих l_1 і l_2 є рівність $k_1 = k_2$;

2) ***необхідною і достатньою умовою перпендикулярності*** похилих прямих l_1 і l_2 є рівність $k_1 k_2 = -1$.

Зауваження. Кут між прямими φ розуміється як кут повороту. ***Гострий кут*** між прямими знаходиться за формулою

$$\varphi_г = arctg\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| \ .$$

Приклад. У тупокутному ΔABC ($\angle A$ – тупий) задано рівняння сторін AB: $y = -3x + 5$, AC: $y = 2x - 10$ і координати вершини $C(2; 3)$. Знайти: а) $\angle A$; б) рівняння висоти CN; в) рівняння середньої лінії ML, що паралельна AB, де M – середина сторони AC.

□ а) Знайдемо гострий кут між прямими AB і AC:

$$k_{AB} = -3\,;\; k_{AC} = 2\,;\;\; \varphi_г = arctg\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = arctg\left|\frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}\right| =$$

$$= arctg\,1 = \pi/4\;.$$

$= arctg\,1 = \pi/4$. Тоді $\angle A = \pi - \varphi_г = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

б) $CN \perp AB \;\Leftrightarrow\; k_1 k_2 = -1\,;\; k_{AB} = -3\,;$

$$k_{CN} = -1/k_{AB} = 1/3\,;\;\; C \in CN\,;\;\; CN:\quad y - y_0 = k\,(x - x_0)\;;$$

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x-2)\;;\quad y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}\;.$$

в) $A = AB \cap AC$: $\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = 2x - 10 \end{cases}$; $\;A(3;-4)$.

M – середина сторони AC: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{5}{2}$;

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}\,;\;\; M\,(5/2; -1/2)\;.$$

$$ML \parallel AB:\;\; k_{ML} = k_{AB} = -3\,;\;\; M \in ML\,;\; ML:$$

$y - y_0 = k\,(x - x_0)$; $y + 1/2 = -3(x - 5/2)$; $y = -3x + 7$. ■

1.2.8. Відстань від точки до прямої

Нехай задані точка $M_0(x_0, y_0)$ і пряма l своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ (рис. 12). ***Відстанню*** d ***від точки до прямої*** називається довжина перпендикуляра M_0N, опущеного з даної точки на дану пряму.

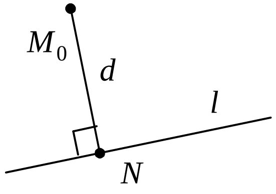

Рис. 12

Скориставшись умовою перпендикулярності, знайдемо рівняння цього перпендикуляра $l_\perp$. Склавши і розв’язавши систему рівнянь прямих l і $l_\perp$, одержимо точку перетину N. Довжину перпендикуляра M_0N знайдемо як відстань між двома точками. В результаті (проробіть указані операції самостійно) одержимо формулу для ***відстані*** d ***від точки до прямої***

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

<u>Приклад</u>. У трикутнику ABC задано рівняння сторони AB: $x/4 - y/3 = 1$ і координати вершини $C(-2; -5)$. Знайти довжину висоти CN.

□ Перетворимо рівняння прямої AB до загального вигляду: $x/4 - y/3 = 1$; $3x - 4y = 12$; $3x - 4y - 12 = 0$.

Знайдемо довжину висоти CN як відстань від точки C до прямої AB:

$$CN = |3\cdot(-2) - 4\cdot(-5) - 12| \Big/ \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 2/5 . \ \blacksquare$$

1.3. Лінії другого порядку

1.3.1. Загальне рівняння лінії другого порядку

Пряма – це єдина лінія першого порядку. Її загальним рівнянням є алгебраїчне рівняння першого степеня.

Лінії другого порядку відповідає рівняння другого степеня, загальний вигляд якого

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

де A, B, C, D, E, F – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел A, B і C відмінне від нуля, тобто

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 .$$

Існують чотири типи ліній другого порядку – ***коло, еліпс, гіпербола і парабола***.

<u>Зауваження</u>. Надалі будемо розглядати тільки ***суттєво криві дійсні лінії*** другого порядку. Випадки виродження та уявні лінії вивчати не будемо.

1.3.2. Коло

Колом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини C (***центра*** кола) дорівнює заданому сталому числу r (***радіусу*** кола).

Розглянемо коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом r (рис. 13). Для довільної точки $M(x;y)$ кола:

$$MO = r\ ;\quad \sqrt{x^2+y^2} = r\ ;\quad x^2+y^2 = r^2\ .$$

Одержане співвідношення

$$x^2+y^2=r^2$$

називається ***канонічним*** (найпростішим) ***рівнянням кола***.

Зауваження. Якщо центром кола служить точка $C(a;b)$, то маємо ***рівняння кола зі зміщеним центром*** (рис. 14)

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ .$$

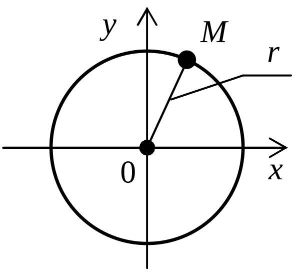

Рис. 13

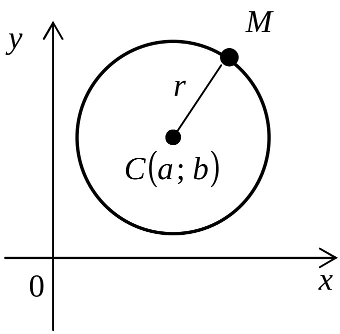

Рис. 14

Приклад 1. Переконатись, що рівняння

$$3x^2+3y^2+6x-5y-9=0$$

є рівнянням кола. Знайти його центр $C(a;b)$ і радіус r.

□ $\quad x^2+y^2+2x-(5/3)y-3=0\ ;$

$$x^2+2x+1-1+y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-3=0\ ;$$

$$(x+1)^2+(y-5/6)^2=(13/6)^2\ ;\quad C(-1;5/6)\ ;\quad r=13/6\,.\ ■$$

<u>Приклад 2</u>. Дано дві точки $A(2;-3)$ і $B(-6;1)$. Скласти рівняння кола l, для якого відрізок AB служить діаметром.

□ Центром кола l є середина C діаметра AB, а радіус кола $r=AB/2$. Тоді:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2+(-6)}{2}=-2\,;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-3+1}{2}=-1\,;$$

$$C(-2;-1);\quad AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$

$$=\sqrt{(2-(-6))^2+(-3-1)^2}=4\sqrt{5}\,;\quad r=2\sqrt{5}\,.$$

Рівняння кола $(x+2)^2+(y+1)^2=20$. ■

1.3.3. Еліпс

Еліпсом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** еліпса) дорівнює заданому сталому числу $2a$, більшому за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x;y)$ еліпса (рис. 15)

$$r_1+r_2=2a\ ,$$

де $r_1=MF_1$ і $r_2=MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x;y)$; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокуси, $F_1F_2=2c<2a$. Тоді

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a\ .$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи, поклавши $b^2=a^2-c^2$ (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння еліпса***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{де} \quad b^2=a^2-c^2>0.$$

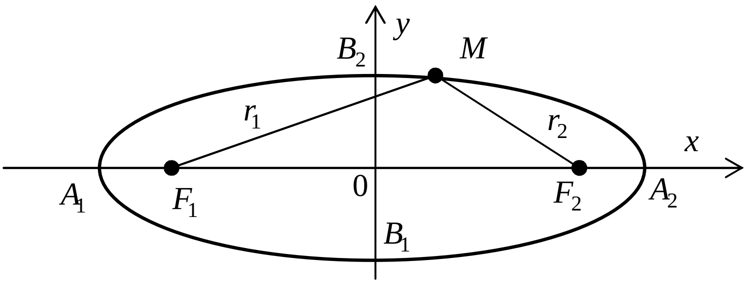

Рис. 15

Еліпс має форму овалу, який симетричний відносно ***великої осі*** $A_1A_2=2a$ і ***малої осі*** $B_1B_2=2b$, а також центрально симетричний відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** еліпса. Точки перетину з осями координат $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;\, b)$ називаються ***вершинами*** еліпса.

Відношення ***міжфокусної відстані*** $F_1F_2=2c$ до великої осі $A_1A_2=2a$ називається ***ексцентриситетом*** еліпса і позначається ε: $\varepsilon=c/a$.

Зауваження. Ексцентриситет характеризує форму еліпса, при цьому $0\le\varepsilon<1$. Якщо $\varepsilon=0$, то маємо окремий випадок еліпса – коло, при цьому $a=b=r$. Чим більше значення ε, тим сильніше витягнутий еліпс вздовж великої осі.

Дві прямі, що мають рівняння $x=\pm a/\varepsilon$, називаються ***директрисами*** еліпса. Оскільки для еліпса $\varepsilon<1$, то права директриса розміщена вертикально правіше від його правої вершини; а ліва директриса –лівіше від його лівої вершини.

Властивість директрис еліпса: *Відношення фокального радіуса* r *довільної точки еліпса до відстані* d *цієї точки до відповідної директриси є стала величина, що дорівнює ексцентриситету еліпса* $r/d=\varepsilon$.

Приклад 1. Переконатись, що рівняння

$$9x^2 + 100y^2 - 900 = 0$$

є рівнянням еліпса. Зобразити ескіз еліпса, знайшовши точки його перетину з осями координат (вершини еліпса).

□ $9x^2 + 100y^2 = 900$; $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; $\dfrac{x^2}{10^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

– еліпс, що перетинає осі координат у вершинах $A_1(-10;0)$, $A_2(10;0)$, $B_1(0;-3)$, $B_2(0;3)$.

(Ескіз еліпса зробити самостійно). ■

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння еліпса, мала піввісь якого $b = 4\sqrt{3}$, а лівий фокус знаходиться у точці $F(-4;0)$. Знайти його ексцентриситет і написати рівняння директрис.

□ За умовою задачі $b = 4\sqrt{3}$, а половина міжфокусної відстані $c = 4$. Тоді

$$c^2 = a^2 - b^2;\ \ a^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2 = 64;\ \ a = 8.$$

Звідси

$x^2/36 + y^2/20 = 1$ – канонічне рівняння; $\varepsilon = 4/8 = 1/2$ – ексцентриситет; $x = \pm 8/(1/2)$; $x = \pm 16$ – директриси. ■

1.3.4. Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** гіперболи) дорівнює заданому сталому числу $2a$, меншому за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x;y)$ гіперболи (рис. 16)

$$\left|r_1 - r_2\right| = 2a\ ,$$

де $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x;y)$; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокуси, $F_1F_2 = 2c > 2a$. Тоді

$$\left|\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a \ .$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи, поклавши $b^2 = c^2 - a^2$ (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння гіперболи***

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{де} \quad b^2=c^2-a^2>0 .$$

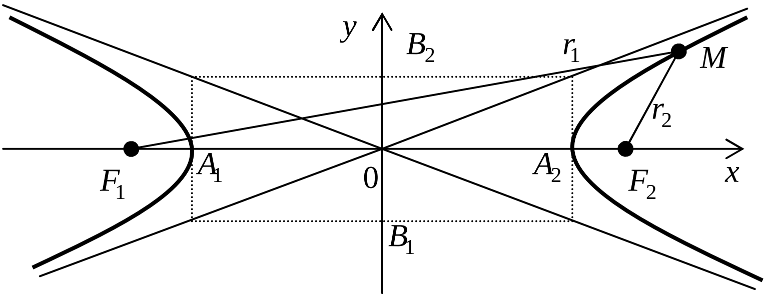

Рис. 16

Гіпербола складається з двох нескінченних гілок, які симетричні відносно ***дійсної осі*** $A_1A_2 = 2a$ і ***уявної осі*** $B_1B_2 = 2b$, а також центрально симетричні відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** гіперболи. Дійсні вершини $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ є точками перетину гіперболи з віссю Ox. Через уявні вершини $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ гіпербола не проходить. Прямі

$$y=\frac{b}{a}x \ ; \quad y=-\frac{b}{a}x$$

є ***асимптотами*** гіперболи.

Асимптотою називається пряма, що необмежено зближається з гілкою кривої на нескінченності.

Відношення ***міжфокусної відстані*** $F_1F_2 = 2c$ до дійсної осі $A_1A_2 = 2a$ називається ***ексцентриситетом*** гіперболи і позначається ε: $\varepsilon = c/a$.

Зауваження. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи, при цьому $\varepsilon > 1$. Чим менше значення ε, тим сильніше витягнута гіпербола вздовж дійсної осі.

Дві прямі, що мають рівняння $x = \pm a/\varepsilon$, називаються ***директрисами*** гіперболи. Оскільки для гіперболи $\varepsilon > 1$, то права директриса розмішена вертикально між центром і правою вершиною, а ліва директриса - між центром і лівою вершиною.

Властивість директрис гіперболи аналогічна відповідній властивості для еліпса: $r/d = \varepsilon$.

Приклад 1. Переконатись, що рівняння

$$9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$$

є рівнянням гіперболи. Знайти вершини гіперболи та її асимптоти. Зобразити ескіз гіперболи. (Розв'язати самостійно).

Приклад 2. Знайти рівняння гіперболи l_g, якщо її ексцентриситет $\varepsilon_g = 2$, а фокуси збігаються з фокусами еліпса l_e: $x^2/100 + y^2/36 = 1$.

□ l_e: $x^2/100 + y^2/36 = 1$; $a_e^2 = 100$; $b_e^2 = 36$; $c_e^2 = a_e^2 - b_e^2$;

$$c_e^2 = 100 - 36 = 64;\ c_g = c_e = 8;\ \varepsilon_g = c_g/a_g;\ a_g = c_g/\varepsilon_g;$$

$$a_g = 8/2 = 4;\ a_g^2 = 16;\ b_g^2 = c_g^2 - a_g^2;\ b_g^2 = 8^2 - 4^2 = 48;$$

$$l_g:\ x^2/16 - y^2/48 = 1.\quad ■$$

Приклад 3. Точка $M\left(-8; 6\sqrt{3}\right)$ належить гіперболі $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, а її асимптоти $y = \pm(3/2)x$. Знайти канонічне рівняння, ексцентриситет і директриси гіперболи.

□ Оскільки точка M належать гіперболі, то

$$(-8)^2/a^2 - \left(6\sqrt{3}\right)^2/b^2 = 1.$$

З рівнянь асимптот маємо $b/a = 3/2$. Розв'язуючи одержану систему двох рівнянь з двома невідомими a і b (зробіть це самостійно), знаходимо $a=4$ і $b=6$.

Звідси $x^2/16-y^2/36=1$ – канонічне рівняння;

$$c^2=a^2+b^2;\ c^2=16+36=52;\ c=2\sqrt{13};\ \varepsilon=c/a;$$

$$\varepsilon=\left(2\sqrt{13}\right)/4=\sqrt{13}/2 \text{ – ексцентриситет;}$$

$$x=\pm 4/\left(\sqrt{13}/2\right);\ \ x=\pm 8\sqrt{13}/13 \text{ – директриси. } \blacksquare$$

1.3.5. Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань від заданої точки площини F (***фокуса*** параболи) дорівнює відстані до заданої прямої l_d (***директриси*** параболи), що не проходить через фокус.

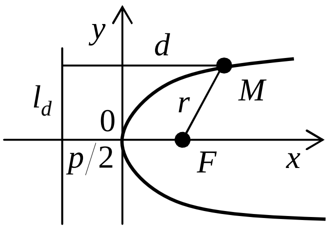

Рис. 17

Для довільної точки $M(x;y)$ параболи (рис. 17)

$$r=d\ ,$$

де $r=MF$ – ***фокальний радіус*** точки $M(x;y)$; d – відстань точки $M(x;y)$ до директриси l_d: $x=-p/2$; $F(p/2;0)$ – фокус; p – ***параметр*** параболи (відстань від фокуса до директриси), $p>0$. Тоді

$$\sqrt{(x-p/2)^2+(y-0)^2}=x-(-p/2)\ .$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння параболи***

$$y^2=2px\ .$$

Очевидно, що $x\geq 0$.

Парабола має форму нескінченної гілки, яка симетрична відносно ***осі*** параболи OF. Точка $O(0;0)$ на осі симетрії (початок координат) називається ***вершиною*** параболи. Асимптот парабола не має.

Зауваження 1. Згідно з означенням параболи і властивостями директрис еліпса і гіперболи, прийнято, що ***ексцентриситет*** параболи дорівнює одиниці $\varepsilon = 1$.

Приклад 1. Визначити координати фокуса $F(p/2;\,0)$ і рівняння директриси l_d параболи $y^2 = 12x$. Знайти кінці $M_1(p/2;\,-p)$ і $M_2(p/2;\,p)$ хорди $M_1M_2 = 2p$, яка проходить через фокус параболи і перпендикулярна до її осі. Зобразити ескіз параболи, провівши плавну лінію через її вершину O і точки $M_1(p/2;\,-p)$, $M_2(p/2;\,p)$.

□ $y^2 = 2px$; $y^2 = 12x$; $2p = 12$; $p = 6$; $F(p/2;\,0)$;

$F(3;\,0)$; l_d: $x = -p/2$; l_d: $x = -3$; $M_1(3;-6)$; $M_2(3;\,6)$.

(Ескіз параболи зробити самостійно). ■

Приклад 2. Скласти рівняння параболи l_p: $y^2 = 2px$, якщо її фокус збігається з правою дійсною вершиною гіперболи l_g: $x^2/4 - y^2/6 = 1.$. Знайти точки перетину цих ліній.

□ l_g: $x^2/4 - y^2/6 = 1.$; $a_g^2 = 4$; $F(p/2;0) = A_2(a_g\,;0)$;

$$p/2 = a_g = 2;\quad p = 4;\quad l_p:\quad y^2 = 2px;\quad y^2 = 8x;$$

$$\begin{cases} x^2/4 - y^2/6 = 1 \\ y^2 = 8x\,; \end{cases}\quad \frac{x^2}{4} - \frac{8x}{6} = 1\,;\ 3x^2 - 16x - 12 = 0\,;$$

$$x_1 = 6\,;\quad x_2 = -2/3 - \text{ не задовольняє умову } x \ge 0\,;$$

$$y^2 = 8\cdot 6;\quad y_1 = 4\sqrt{3}\,;\quad y_2 = -4\sqrt{3}\,;$$

$$M_1(3;\,-4\sqrt{3});\quad M_2(3;\,4\sqrt{3}).$$ ■

Зауваження 2. На практиці часто зустрічаються параболи з іншим розміщенням відносно системи координат. На рис. 18 – 21 наведені основні випадки і відповідні канонічні рівняння.

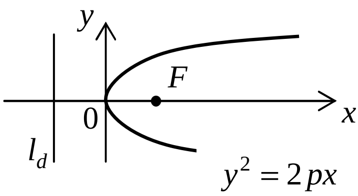

Рис. 18

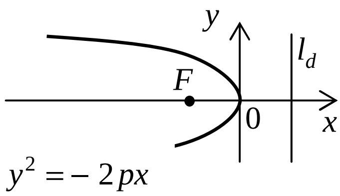

Рис. 19

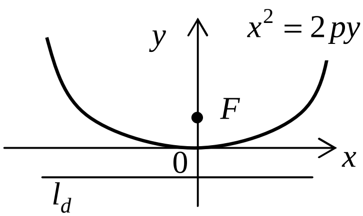

Рис. 20

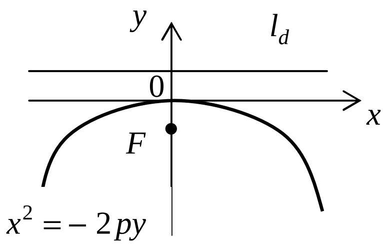

Рис. 21

1.3.6. Лінії другого порядку як конічні перерізи та їх оптична властивість

Будь-яка дійсна суттєво крива лінія другого порядку може бути одержана як перетин кругового конуса площиною, що не проходить через його вершину. Зокрема:

1) якщо площина перпендикулярна до осі конуса, то в перерізі – коло;

2) якщо площина перетинає лише одну порожнину конуса і не паралельна жодній його твірній, то в перерізі – еліпс;

3) якщо площина паралельна осі конуса, то в перерізі – гіпербола;

4) якщо площина паралельна твірній конуса, то в перерізі – парабола.

Оптична властивість ліній другого порядку: *промінь, що виходить з фокуса, йде вздовж фокального радіуса, відбивається від дзеркальної поверхні, що має твірною лінію другого по-*

рядку, а потім йде вздовж іншого фокального радіуса. У випадку еліпса відбиті промені проходять через другий фокус. У випадку параболи відбиті промені утворюють паралельний пучок, що йде у нескінченність. У випадку гіперболи відбиті промені утворюють пучок, що розсіюється, з центром у другому фокусі.

1.4. Полярна система координат. Параметрично задані лінії

1.4.1. Полярні координати

У ***полярній системі координат*** (рис. 22) положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою парою чисел $(\rho;\varphi)$ – її ***полярними координатами***. Тут ρ – ***полярний радіус*** OM (відстань від точки до ***полюса*** O), φ – ***полярний кут*** $\angle xOM$ (кут між ***полярною віссю*** – напрямленою півпрямою Ox із заданим масштабом $OE=1$ – і полярним радіусом OM).

Сукупність півпрямих $\varphi = C_1 = const$, що виходять з полюса, і концентричних кіл $\rho = C_2 = const$ зі спільним центром у полюсі, утворює ***координатну сітку*** полярної системи координат.

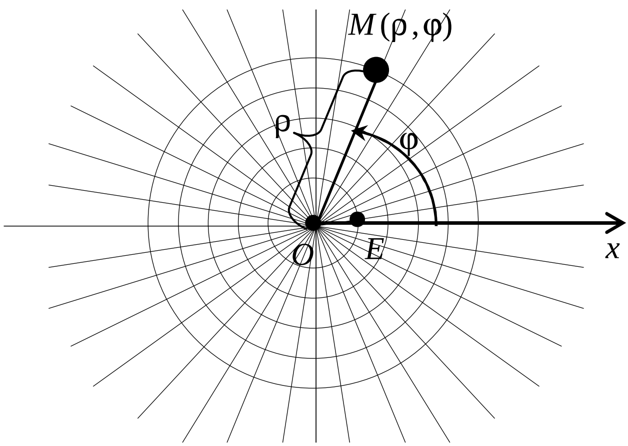

Рис. 22

Приклад 1. Побудувати точки у полярній системі координат: а) $M(4;\,\pi/3)$; б) $N(3;\,5\pi/4)$; в) $P(4;\,0)$; г) $Q(5;\,\pi)$. (Розв'язати самостійно).

Приклад 2. Побудувати задану дугу ***спіралі Архімеда*** $\rho = (4/\pi)\varphi;\quad 0 \le \varphi \le 3\pi$, надаючи аргументу φ значення з відрізка $[0;3\pi]$ через проміжок $\pi/4$, починаючи з $\varphi = 0$.

□ Побудуємо точки за їх координатами із табл. 1, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо задану дугу спіралі Архімеда (Рис. 23). ■

Таблиця 1

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$
ρ	0	1	2	3	4	5	6
φ	$7\pi/4$	2π	$9\pi/4$	$5\pi/2$	$11\pi/4$	3π	
ρ	7	8	9	10	11	12	

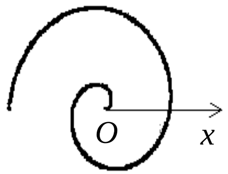

Рис. 23

Зауваження 1. Полярна система координат широко застосовується у механіці та інших областях при вивченні обертових рухів.

Зауваження 2. Надалі обмежимось розглядом тільки ***головних значень полярних координат*** $(\rho;\varphi)$, що задовольняють умови $\rho \ge 0$; $0 \le \varphi \le 2\pi$.

1.4.2. Зв'язок між полярними і прямокутними координатами

Припустимо, що полюс O полярної системи співпадає з початком декартової прямокутної системи координат Oxy, а полярна вісь служить додатною піввіссю абсцис Ox (рис. 24).

З прямокутного ΔOMN маємо ***формули переходу від полярних до декартових координат***

$$x = \rho\cos\varphi;\quad y = \rho\sin\varphi,$$

а також обернені ***формули переходу від декартових до поляр-***

них координат

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\ ; \quad \sin\varphi = y\Big/\sqrt{x^2 + y^2}\ ; \quad \cos\varphi = x\Big/\sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

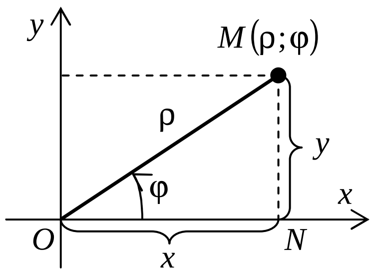

Рис. 24

Приклад 1. Використовуючи формули переходу, записати рівняння заданих ліній у полярній системі координат:

а) вертикальна пряма $x = a$;

б) горизонтальна пряма $y = b$;

в) коло $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ з центром у точці $C(a;\,0)$ на осі Ox, що проходить через початок координат O;

г) коло $x^2 + (y-b)^2 = b^2$ з центром у точці $C(0;\,b)$ на осі Oy, що проходить через початок координат O.

□ а) $x = a$; $\rho\cos\varphi = a$; $\rho = a/\cos\varphi$;

в) $(x-a)^2 + y^2 = a^2$; $(\rho\cos\varphi - a)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = a^2$;

$$\rho = 2a\cos\varphi\ .$$

(Пункти б) і г) розв'язати самостійно). ■

Зауваження. Деякі лінії, що у декартових координатах задаються рівняннями у незручній для дослідження неявній формі, при переході до полярних координат набувають досить простого явного вигляду $\rho = \rho(\varphi)$.

Приклад 2. Використовуючи формули переходу, записати рівняння заданих ліній у полярній системі координат і побудувати їх ескізи. (Розглядати тільки головні значення полярних координат):

а) ***лемніската*** $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$, $a = const > 0$;

б) ***кардіоїда*** $\left(x^2 + y^2 - ax\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$, $a = const > 0$.

□ а) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$; $(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=$

$$=a^2\left((\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2\right)\ ;\quad \rho^4\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)^2=$$

$$=a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)\ ;\quad \rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}\ .$$

Допустимі значення полярного кута визначаються системою обмежень $\rho\ge 0$; $0\le\varphi\le 2\pi$; $\cos 2\varphi\ge 0$.

Звідси $D(\rho)$: $\varphi\in[0;\pi/4]\cup[3\pi/4;5\pi/4]\cup[7\pi/4;2\pi]$.

Надаючи аргументу φ значення з області визначення $D(\rho)$ через проміжок $\pi/8$, починаючи з $\varphi=0$, побудуємо точки за їх координатами із табл. 2, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо ескіз лемніскати (Рис. 25).

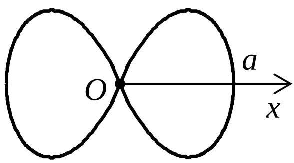

Рис. 25

(Для кардіоїди задачу розв’язати самостійно. Значення аргументу φ взяти з кроком $\pi/4$, починаючи з $\varphi=0$). ■

Таблиця 2

φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$7\pi/8$
ρ	a	$a\sqrt[4]{8}/2$	0	0	$a\sqrt[4]{8}/2$
φ	π	$9\pi/8$	$7\pi/4$	$15\pi/8$	2π
ρ	a	$a\sqrt[4]{8}/2$	0	$a\sqrt[4]{8}/2$	a

1.4.3. Рівняння ліній другого порядку в полярній системі координат

Рівняння ліній другого порядку в полярних координатах набувають найбільш простого вигляду, якщо полюс O розмістити відповідно у центрі кола, у лівому фокусі еліпса, у правому фокусі гіперболи чи у фокусі параболи, а за напрям полярної осі вибрати додатний напрям осі Ox (рис. 26).

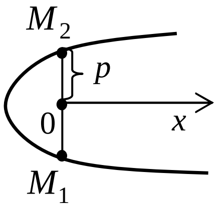

Рис. 26

Нехай $M_1M_2 = 2p$ – хорда, яка проходить через вибраний полюс і перпендикулярна до полярної осі. Число $p = M_1O = M_2O$ називається ***параметром*** лінії, $p > 0$. Для параболи параметр p уже визначений раніше як відстань від фокуса до директриси. Для кола $p = r$, а для еліпса і гіперболи $p = b^2/a$. Тоді рівняння

$$\rho = p/(1 - \varepsilon \cos\varphi)$$

визначає відповідно а) коло, якщо $\varepsilon = 0$; б) еліпс, якщо $0 < \varepsilon < 1$; в) параболу, якщо $\varepsilon = 1$; г) праву вітку гіперболи, якщо $\varepsilon > 1$.

1.4.4. Рівняння деяких ліній у параметричній формі

Нехай плоска лінія задана у декартовій прямокутній системі координат ***параметричними рівняннями***

$$x = x(t)\ ; \quad y = y(t)\ ,$$

де t – допоміжна змінна (***параметр***), $x(t)$ і $y(t)$ – деякі вирази.

Якщо з цих рівнянь удається вилучити параметр t, то одержується рівняння лінії у неявній $F(x, y) = 0$ чи навіть у явній $y = f(x)$ формах.

<u>Приклад 1</u>. Показати, що система параметричних рівнянь

$$x = a\cos t\ ; \quad y = b\sin t\ ,$$

де $a, b = const$, причому $a > 0$; $b > 0$, визначає еліпс з півосями a і b.

□ $$\cos t = x/a\ ; \quad \sin t = y/b\ ,$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = (x/a)^2 + (y/b)^2\ ;\ x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$ ■

<u>Зауваження 1</u>. Якщо $a = b = r$, то маємо параметричні рівняння кола $x = r\cos t$; $y = r\sin t$, $r > 0$.

Приклад 2. Показати, що система параметричних рівнянь

$$x = mt + a \ ; \qquad y = nt + b \ ,$$

де $a, b, m, n = const$, визначає пряму. (Розв'язати самостійно).

Приклад 3. Побудувати ескіз дуги ***циклоїди***, що задана в параметричній формі

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases} \quad t \in [0;\, 4\pi] \ ; \quad a > 0 \ .$$

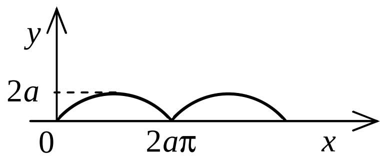

Рис. 27

□ Побудуємо точки за їх координатами із табл. 3, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо задану дугу циклоїди (Рис. 27). ■

Таблиця 3

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	
x	0	$a(\pi/2-1)$	$a\pi$	$a(3\pi/2+1)$	
y	0	a	$2a$	a	
t	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π
x	$2a\pi$	$a(5\pi/2-1)$	$3a\pi$	$a(7\pi/2+1)$	$4a\pi$
y	0	a	$2a$	a	0

Приклад 4. Побудувати ескіз ***астроїди***, що задана в параметричній формі

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0;\, 2\pi] \ ; \quad a > 0 \ .$$

(Розв'язати самостійно. Значення параметра t взяти з кроком $\pi/8$, починаючи з $t = 0$).

Зауваження 2. Якщо лінія задана явно рівнянням $y = f(x)$, то її можна подати в параметричній формі

$$x = t \; ; \quad y = f(t) \; .$$

Зауваження 3. Якщо лінія в полярних координатах задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, то використовуючи формули переходу $x = \rho\cos\varphi$ і $y = \rho\sin\varphi$, її можна подати в параметричній формі $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$; $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, де роль параметра відіграє полярний кут φ.

Приклад 5. Знайти рівняння лінії $\rho = 2p\cos\varphi / \sin^2\varphi$; $p > 0$ в декартових координатах і визначити її тип.

□ Спосіб 1. $\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi = \dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\cos\varphi = 2p\, ctg^2\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi = \dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\sin\varphi = 2p\, ctg\,\varphi \, ; \end{cases}$

$$ctg^2\varphi = x/(2p); \quad y^2 = 4p^2 ctg^2\varphi = 4p^2 \cdot x/(2p);$$

$$y^2 = 2px \text{ – парабола.}$$

Спосіб 2. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\sin\varphi = y/\sqrt{x^2 + y^2}$;

$$\cos\varphi = x/\sqrt{x^2 + y^2}; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 2p \cdot \left(x/\sqrt{x^2 + y^2}\right):$$

$$:\left(y/\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2; \quad y^2 = 2px \text{ – парабола.} \quad \blacksquare$$

1.5. Сталі та змінні величини

1.5.1. Поняття про сталі та змінні величини

У результаті вимірювання таких фізичних величин, як час, довжина, об'єм, маса, заряд, напруга, температура та ін., визначаються їх числові значення. Математика займається величинами, відвертаючись від їх конкретного змісту. Далі, розглядаючи величини, матимемо на увазі їх числові значення.

Сталою величиною або ***константою*** (від латинського слова “constans” – “сталий”) називається величина, яка не змінює свого значення в умовах задачі, що розглядається. Звичайно сталі величини позначаються малими (інколи великими) буквами із початку латинського алфавіту $a, b, c, d, \ldots$.

Змінною величиною називається величина, яка може набувати різних значень в умовах задачі, що розглядається. Звичайно змінні величини позначаються малими (інколи великими) буквами із кінця латинського алфавіту $\ldots, w, x, y, z$.

Сукупність всіх числових значень змінної величини утворює її ***область значень***.

Зауваження 1. Сталу величину часто зручно розглядати як окремий випадок змінної величини, всі значення якої рівні між собою.

Зауваження 2. Характер процесу змінювання може бути різним. Зокрема, розрізняють ***неперервні*** та ***дискретні*** змінні величини. Множина значень неперервної величини складається лише з числових проміжків. Множина значень дискретної величини включає в себе окремі ізольовані точки.

Наприклад:

а) Змінна величина $y = |x|$, $x \in R$ є неперервною. Її множиною значень служить закрита півпряма $[0; +\infty)$.

б) Змінна величина $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ $x \in R$ є дискретною. Її множиною значень служить сукупність трьох ізольованих точок $\{-1; 0; 1\}$.

1.5.2. Класифікація змінних величин

Змінна x є ***упорядкована величина***, якщо про кожне з двох будь-яких її значень можна сказати, яке з них попереднє і яке наступне.

Тут ці поняття не пов’язані з часом, а служать способом упорядкування значень змінної величини.

Окремим випадком упорядкованої змінної величини є ***числова послідовність*** $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$. Тут при $i < k$ значення x_i попереднє, а x_k – наступне незалежно від того, яке з цих значень більше.

Змінна величина x називається ***обмеженою***, якщо всі її значення за модулем не перевищують деякого додатного числа M протягом всього процесу змінювання:

$$\exists M > 0, \forall x : |x| \le M .$$

У противному випадку змінна величина називається ***необмеженою***. Точніше, змінна величина x називається ***необмеженою***, якщо для довільного додатного числа M знайдеться хоча б одне значення x, яке за модулем перевищує це число M:

$$\forall M > 0, \exists x : |x| > M .$$

Наприклад:

а) Змінна величина $x_n = 1000/n$, $n \in N$ є обмеженою, оскільки існує таке число $M > 0$, що для всіх значень x_n виконується нерівність $|x_n| \le M$, $n \in N$. Зокрема, можна взяти $M = 2000$, оскільки

$$|x_n| = |1000/n| = 1000/n \le 2000 , \quad n \in N .$$

б) Змінна величина $y_n = (-1)^n n^2$, $n \in N$ є необмеженою, оскільки для будь-якого числа $M > 0$ можна знайти хоча б одне значення y_n, для якого виконується нерівність $|y_n| > M$. Зокрема, якщо взяти $M = 1000$, то

$$|y_{100}| = \left|(-1)^{100} \cdot 100^2\right| = 10000 > 1000 .$$

Змінна величина x називається ***зростаючою***, якщо в процесі змінювання її значення не зменшуються, тобто кожне наступне значення неменше попереднього. Позначається $x \nearrow$.

Змінна величина x називається ***спадною***, якщо в процесі змінювання її значення не збільшуються, тобто кожне наступне значення небільше попереднього. Позначається $x \searrow$ **.**

Зростаючі та спадні змінні величини називаються ***монотонними***.

Монотонна величина називається ***строго монотонною***, якщо її значення задовольняють відповідну строгу нерівність.

Наприклад:

а) Змінна величина $x_n = 2^n$, $n \in N$ є строго зростаючою $x_n = 2^n \nearrow$, оскільки $x_{n+1} = 2^{n+1} > x_n = 2^n$, $n \in N$.

б) Змінна величина $y_n = (1/2)^n$, $n \in N$ є строго спадною $y_n = (1/2)^n \searrow$, оскільки $y_{n+1} = (1/2)^{n+1} < y_n = (1/2)^n$, $n \in N$.

в) Змінна величина $z_n = (-2)^n$, $n \in N$ є немонотонною, оскільки, зокрема,

$$z_3 = (-2)^3 \le z_2 = (-2)^2 \; ; \;\; z_4 = (-2)^4 \ge z_3 = (-2)^3 \; .$$

г) Площа S правильного вписаного в коло многокутника при подвоєнні його сторін є монотонно зростаючою величиною.

Підкреслимо, що величини з пунктів б) і г) є обмеженими, а величини з пунктів а) і в) – необмежені.

1.6. Нескінченно малі та нескінченно великі величини

1.6.1. Нескінченно малі величини

Змінна величина x називається ***нескінченно малою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються меншими будь-якого фіксованого додатного числа ε.

Іншими словами, змінна величина x називається ***нескінченно малою***, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий момент t_ε процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t > t_\varepsilon$ значення змінної величини x за модулем менші цього числа ε:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon, \forall t > t_\varepsilon : |x| < \varepsilon .$$

Нескінченно малі величини позначаються звичайно малими буквами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \ldots$.

Те, що змінна величина α є нескінченно малою, позначається так: $\alpha \to 0$ (читається "α прямує до 0") або $\lim \alpha = 0$ (від латинського слова "limes" – "границя", читається "границя α дорівнює 0").

Наприклад:

а) $\alpha = 10000/n^2 \to 0$. Зокрема, якщо $\varepsilon = 0{,}01$, то нерівність $|\alpha| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |10000/n^2| < 0{,}01$ виконується для всіх $n > n_\varepsilon = 1000$.

б) Змінні величини $x_n = 1 + (-1)^n$ і $y_n = n^{\cos \pi n}$ не є нескінченно малими.

Зауваження. Нуль 0 – це єдина стала величина, що є нескінченно малою.

Геометричний зміст: змінна величина α є нескінченно малою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ її значення в процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в ε-околі точки нуль:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon, \forall t > t_\varepsilon: \ \alpha \in U(0;\varepsilon).$$

1.6.2. Властивості нескінченно малих величин

Доведення основних властивостей нескінченно малих величин ґрунтується на їх означенні та властивостях модуля.

Теорема 1. *Нескінченно мала величина є обмеженою*:

$$\alpha \to 0 \;\Rightarrow\; \exists M > 0: \ |\alpha| \le M \ .$$

(Без доведення).

Теорема 2. *Сума (різниця) двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \to 0 \\ \beta \to 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \alpha \pm \beta \to 0 \ .$$

Символічний запис $0 \pm 0 = 0$.

□ $\forall \varepsilon > 0$; $\exists t_{\varepsilon/2}: |\alpha| < \varepsilon/2$; $|\beta| < \varepsilon/2$;

$|\alpha \pm \beta| \leq |\alpha| + |\beta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow \alpha \pm \beta \to 0$. ■

<u>Теорема 3</u>. *Добуток нескінченно малої величини на обмежену є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{matrix} |x| \leq M \\ \alpha \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha x \to 0 .$$

□ $\exists M > 0: |x| \leq M$; $\forall \varepsilon > 0$; $\exists t_{\varepsilon/M}: |\alpha| < \varepsilon/M$;

$|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x| < \varepsilon/M \cdot M = \varepsilon \Rightarrow \alpha x \to 0$. ■

<u>Наслідок</u>. *Добуток сталої величини на нескінченно малу є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{matrix} \alpha \to 0 \\ C = const \end{matrix}\right\} \Rightarrow C\alpha \to 0 .$$

Символічний запис $C \cdot 0 = 0$.

<u>Теорема 4</u>. *Добуток двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{matrix} \alpha \to 0 \\ \beta \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha\beta \to 0 .$$

Символічний запис $0 \cdot 0 = 0$.

□ $\forall \varepsilon > 0$; $\exists t_{\sqrt{\varepsilon}}: |\alpha| < \sqrt{\varepsilon}$; $|\beta| < \sqrt{\varepsilon}$;

$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon \Rightarrow \alpha\beta \to 0$. ■

<u>Зауваження 1</u>. Відношення двох нескінченно малих величин може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** $0/0$. Символічний запис $0/0 = ?$

<u>Зауваження 2</u>. Нескінченна алгебраїчна сума нескінченно малих величин може бути будь-якою величиною. Символічний

запис $0 \pm 0 \pm 0 \pm ... = ?$

1.6.3. Нескінченно великі величини

Змінна величина x називається ***нескінченно великою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються більшими будь-якого фіксованого додатного числа M.

Іншими словами, змінна величина x називається ***нескінченно великою***, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно великого) додатного числа $M > 0$ знайдеться такий момент t_M процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t > t_M$ значення змінної величини x за модулем більші цього числа M:

$$\forall M > 0, \exists t_M, \forall t > t_M : |x| > M .$$

Те, що змінна величина x є нескінченно великою, позначається так: $x \to \infty$ (читається "x прямує до ∞") або $\lim x = \infty$ (читається "границя x дорівнює ∞").

<u>Зауваження 1</u>. Якщо в процесі змінювання значення нескінченно великої величини x стають і надалі залишаються додатними, то більш точно пишуть $x \to +\infty$ або $\lim x = +\infty$. Аналогічно, якщо в процесі змінювання значення нескінченно великої величини x стають і надалі залишаються від'ємними, то більш точно пишуть $x \to -\infty$ або $\lim x = -\infty$.

Наприклад:

а) $x_n = (-1)^n n^2 \to \infty$. Зокрема, якщо $M = 100$, то нерівність $|x_n| > M \Leftrightarrow \left|(-1)^n n^2\right| > 100$ виконується для всіх $n > n_M = 10$.

б) $y_n = 2^n - 100 \to +\infty$; $z_n = -n^3 + 1000/n \to -\infty$.

в) Змінні величини $x_n = 2^n + (-2)^n$ і $y_n = n^2 \sin\frac{\pi n}{2}$ не є нескінченно великими (хоча є необмеженими).

Зауваження 2. Не існує сталої величини, яка є нескінченно великою.

Геометричний зміст: змінна величина x є нескінченно великою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно великого) додатного числа $M>0$ її значення в процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в M-околі символу нескінченності:

$$\forall M>0, \exists t_M, \forall t>t_M: \; x\in U(\infty; M).$$

Зауваження 3. Добуток сталої відмінної від нуля величини C на нескінченно велику x є нескінченно великою величиною:

$$\left.\begin{array}{r} x\to\infty \\ C=const\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; Cx\to\infty \; .$$

Зауваження 4. Добуток двох нескінченно великих величин є нескінченно великою величиною:

$$\left.\begin{array}{r} x\to\infty \\ y\to\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \; xy\to\infty \; .$$

Зауваження 5. Різниця двох нескінченно великих величин може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** $\infty-\infty$. Символічний запис $\infty-\infty=?$ Аналогічне твердження справедливе для алгебраїчної суми будь-якого скінченного числа нескінченно великих величин.

Зауваження 6. Відношення двох нескінченно великих величин може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** ∞/∞. Символічний запис $\infty/\infty=?$

1.6.4. Зв'язок нескінченно малих і нескінченно великих

Теорема 1. *Величина, обернена до нескінченно великої величини, є нескінченно малою*:

$$x\to\infty \; \Rightarrow \; \alpha=1/x\to 0 \; .$$

Символічний запис $1/\infty=0$.

□ $\forall \varepsilon > 0, \exists t_{1/\varepsilon}, \forall t > t_{1/\varepsilon} : |x| > 1/\varepsilon$;

$$|\alpha| = 1/|x| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \alpha \to 0 \; . \quad ■$$

Теорема 2. *Величина, обернена до нескінченно малої відмінної від нуля величини, є нескінченно великою*:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha \to 0 \\ \alpha \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \; x = \frac{1}{\alpha} \to \infty \; .$$

Символічний запис $1/0 = \infty$.

□ $\forall M > 0, \exists t_{1/M}, \forall t > t_{1/M} : |\alpha| < 1/M$;

$$|x| = 1/|\alpha| > M \;\Rightarrow\; x \to \infty \; . \quad ■$$

Зауваження. Добуток нескінченно малої величини на нескінченно велику може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** $0 \cdot \infty$. Символічний запис $0 \cdot \infty = ?$

1.7. Границя змінної величини

1.7.1. Поняття про границю змінної величини

Поняття про границю служить для характеристики напрямку процесу змінювання.

Стала величина a називається ***границею*** змінної величини x, якщо їх різниця $x - a$ є нескінченно малою величиною:

$$x - a = \alpha \to 0 \; .$$

Записується так: $x \to a$ (читається “x прямує до a”) або $\lim x = a$ (читається “границя x дорівнює a”).

Наприклад $\lim \dfrac{n+1}{n} = 1$, оскільки $\alpha = \dfrac{n+1}{n} - 1 = \dfrac{1}{n} \to 0$.

Зауваження 1. Означення границі дано через поняття нескінченно малої величини (“***мовою нескінченно малих***”). Існують інші еквівалентні означення границі.

Геометричний зміст: стала величина a служить границею змінної величини x, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ значення змінної величини x у процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в ε-околі точки a:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon, \forall t > t_\varepsilon: \; x \in U(a;\varepsilon).$$

Зауваження 2. Якщо з контексту задачі не зрозуміло, в яких умовах відбувається процес змінювання, то додаткову інформацію подають під знаком границі або після нього. Наприклад: $x_n \to a$ *при* $n \to \infty$ (читається "x_n прямує до a при n, що прямує до ∞") або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (читається "границя x_n при n, що прямує до ∞, дорівнює a").

1.7.2. Властивості границь

Доведення основних властивостей границь ґрунтується на означенні границі та властивостях нескінченно малих.

Теорема 1. *Змінна величина в фіксованому процесі змінювання має не більше однієї границі.*

□ Доведення методом від супротивного.

$$\left.\begin{array}{c} x \to a \\ x \to b \\ a \neq b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x - a = \alpha \to 0 \\ x - b = \beta \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -a + b = \alpha - \beta \to 0 \;;$$

$$\left.\begin{array}{c} b - a = \alpha - \beta \to 0 \\ b - a = const \end{array}\right\} \Rightarrow b - a = 0 \Rightarrow b = a \;,$$

що суперечить припущенню $a \neq b$. ■

Зауваження 1. Змінна величина може не мати границі в даному процесі змінювання. Змінна величина може вести себе по-різному в різних процесах змінювання.

Теорема 2. *Змінна величина, що має скінченну границю, є обмеженою у відповідному процесі змінювання.*

$$\lim x = a \Rightarrow \exists M > 0, \forall x: |x| \leq M \;.$$

(Без доведення).

Теорема 3. *Границя сталої величини дорівнює самій цій величині*:

$$C = const \Rightarrow \lim C = C \ .$$

□ $C = const \Rightarrow C - C = 0 \to 0 \Rightarrow C \to C$. ■

Теорема 4. *Границя скінченної алгебраїчної суми змінних величин дорівнює такій же сумі їх границь, якщо останні існують*:

$$\lim(x + y - z) = \lim x + \lim y - \lim z \ .$$

□ $\left.\begin{array}{r}\lim x = a\\ \lim y = b\\ \lim z = c\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x = a + \alpha,\ \alpha \to 0\\ y = b + \beta,\ \beta \to 0\\ z = c + \gamma,\ \gamma \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow x + y - z =$

$= (a + \alpha) + (b + \beta) - (c + \gamma) = (a + b - c) + (\alpha + \beta - \gamma)$;

$\alpha + \beta - \gamma \to 0 \Rightarrow \lim(x + y - z) = a + b - c$. ■

Теорема 5. *Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку їх границь, якщо останні існують*:

$$\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y \ .$$

□ $\left.\begin{array}{r}\lim x = a\\ \lim y = b\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x = a + \alpha,\ \alpha \to 0\\ y = b + \beta,\ \beta \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \ x\,y = (a + \alpha)\times$

$$\times(b + \beta) = ab + (\alpha b + \beta a + \alpha\beta) \ ;$$

$$\alpha b + \beta a + \alpha\beta \to 0 \Rightarrow \lim(xy) = a\,b \ . \quad ■$$

Наслідок 1. *Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити за знак границі*:

$$\lim(Cx) = C \cdot \lim x \ , \quad C = const \ .$$

Наслідок 2. *Границя степеня з натуральним показником змінної величини дорівнює відповідному степеню її границі, якщо остання існує*:

$$\lim x^n = (\lim x)^n \ , \quad n \in N \ .$$

Теорема 6. *Границя відношення двох змінних величин до-*

рівнює такому ж відношенню їх границь, якщо останні існують, причому границя знаменника відмінна від нуля:

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y} \; .$$

□ $$\left.\begin{array}{c} \lim x = a \\ \lim y = b,\, b \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x = a + \alpha,\ \alpha \to 0 \\ y = b + \beta,\ \beta \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y} - \frac{a}{b} =$$

$$= \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)} \to 0 \Rightarrow \lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \; . \qquad ■$$

Теорема 7. *Границя невід'ємної змінної величини також невід'ємна*. Аналогічно, *границя недодатної змінної величини також недодатна*:

$$x \geq 0 \Rightarrow \lim x \geq 0 \;; \quad x \leq 0 \Rightarrow \lim x \leq 0 \; .$$

□ Доведемо першу частину теореми методом від супротивного.

$$\lim x = a < 0; \quad \left.\begin{array}{c} x \geq 0 \\ a < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x - a > -a = const > 0 \Rightarrow \;;$$

$$\Rightarrow \lim (x - a) \neq 0 \,,$$

що суперечить припущенню $\lim x = a$.

Доведення другої частини аналогічно. ■

Зауваження 2. Якщо змінна величина x додатна $x > 0$, то гарантувати строгу нерівність для границі $\lim x > 0$ у загальному випадку не можна. Те саме справедливе і для від'ємної змінної величини. Наприклад:

$$x_n = 1/n > 0 \;; \quad \lim x_n = \lim(1/n) = 0 \; .$$

Теорема 8 (про стабілізацію знака нерівності). *Якщо границя змінної величини додатна, то починаючи з деякого моменту процесу змінювання всі її наступні значення також додатні*:

$$\lim x > 0 \Rightarrow \exists t_0,\, \forall t > t_0 :\, x > 0 \, .$$

Аналогічно, *якщо границя змінної величини від'ємна, то* *починаючи з деякого моменту процесу змінювання всі її наступні значення також від'ємні*:

$$\lim x < 0 \Rightarrow \exists t_0,\ \forall t > t_0:\ x < 0\,.$$

(Без доведення).

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x+7}{3x^2-2}$.

□ $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x+7}{3x^2-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-5x+7\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-2\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}5x+\lim\limits_{x\to 2}7}{\lim\limits_{x\to 2}3x^2-\lim\limits_{x\to 2}2}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^3-5\lim\limits_{x\to 2}x+7}{3\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-2}=$$

$$=\frac{(2)^3-5\cdot 2+7}{3\cdot 2^2-2}=\frac{1}{2}\,.\quad ■$$

Спираючись на розв'язаний приклад, сформулюємо наступне правило:

Границю раціонального дробу $P(x)/Q(x)$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени, можна обчислити шляхом прямої підстановки замість x його граничного значення, якщо при цьому не порушуються умови, вказані у властивостях границь.

Зауваження 3. Якщо вказані умови порушуються, то треба скористатися, зокрема, властивостями нескінченно малих і нескінченно великих величин.

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x-4}{x^3+1}$.

□ $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x-4}{x^3+1}=\left|\frac{(-1)^2+3\cdot(-1)-4}{(-1)^3+1}=\frac{-6}{0}\right|=\infty\,.\quad ■$$

1.7.3. Розкриття невизначеності виду $0/0$ для многочленів

<u>Правило</u>: *Для розкриття невизначеності виду* $0/0$ *для многочленів* $P(x)/Q(x)$ *треба чисельник* $P(x)$ *і знаменник* $Q(x)$ *розкласти на множники та скоротити дріб, а потім перейти до границі.*

<u>Приклад</u>. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+27}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}=\left|\dfrac{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}{1^3-1}=\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\left|\begin{array}{l}3x^2-5x+2=0\\ x_1=1;\ x_2=2/3\end{array}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-2/3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=3\lim_{x\to 1}\frac{x-2/3}{x^2+x+1}=$$

$=3\cdot\dfrac{1-2/3}{1^2+1+1}=\dfrac{1}{3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\left|\begin{array}{l|l}
_\,3x^4-5x^3-5x+2 & x-2 \\ \cline{2-2}
\quad 3x^4-6x^3 & 3x^3+x^2+2x-1 \\ \cline{1-1}
\qquad _\,x^3-5x+2 & \\
\qquad\quad x^3-2x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad _\,2x^2-5x+2 & \\
\qquad\qquad 2x^2-4x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad _\,-x+2 & \\
\qquad\qquad\qquad -x+2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x^3+x^2+2x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^3+x^2+2x-1}{x+2}=$$

$$=\frac{3\cdot 2^3+2^2+2\cdot 2-1}{2+2}=7\frac{3}{4};$$

в) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}=\left|\frac{4}{0}\right|=\infty\ ;$$

г) $$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x^3+27}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x^2-3x+9)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-3x+9}=\frac{-3+3}{(-3)^2-3\cdot(-3)+9}=\frac{0}{27}=0\,.\ \blacksquare$$

1.7.4. Розкриття невизначеності виду ∞/∞ для многочленів

При розкритті невизначеності виду ∞/∞ для нескінченно великих величин, зручно спочатку перейти до розгляду нескінченно малих величин, використовуючи наступне правило:

Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ *для многочленів* $P(x)/Q(x)$ *треба чисельник* $P(x)$ *і знаменник* $Q(x)$ *поділити на найвищий степінь* x*, а потім перейти до границі.*

Зауваження 1. Указане правило справедливе для всіх випадків нескінченно великих величин ∞, $+\infty$ чи $-\infty$, тобто знак символу ∞ можна не уточнювати.

Приклад. Знайти границю:

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}\ ;$$ б) $$\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}\ ;$$

в) $$\lim_{x\to +\infty}\frac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}\ .$$

□ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-5/x+4/x^3-1/x^4}{5/x^2-2/x^3+6/x^4}=\left|\frac{3-0+0-0}{0-0+0}\right|=\infty\,;$$

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-4/x-7/x^2}{8-3/x+6/x^2}=$

$=\dfrac{5-0-0}{8-0+0}=\dfrac{5}{8}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}=$

$=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9/x^2+4/x^4}{2+1/x^2+6/x^5}=\dfrac{0+0}{2+0+0}=0$. ■

Зауваження 2. Очевидно, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\begin{cases}0,\ m<n,\\ a_{p0}/a_{q0},\ m=n,\\ \infty,\ m>n,\end{cases}$$ де a_{p0} і a_{q0} –

коефіцієнти при найвищих степенях відповідних многочленів.

1.7.5. Розкриття невизначеності виду $0/0$ для ірраціональних виразів

Правило: *Для розкриття невизначеності виду $0/0$ для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і нарешті перейти до границі.*

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(\sqrt{5x-1}-3\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{\left(4x^2-5x-6\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{5x-1}+3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{5x-1-9}{4x^2-5x-6}=\frac{1}{\sqrt{5\cdot 2-1}+3}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5x-10}{4x^2-5x-6}=\begin{vmatrix}4x^2-5x-6=0\\ x_1=2;\ x_2=-3/4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5(x-2)}{4(x-2)(x+3/4)}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+3/4}=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{2+3/4}=\frac{5}{11}\ ;$$

б) $$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\left(\sqrt[3]{4x+4}+2\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)}{\left(\sqrt{-3x}+x\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{-3x}-x}{\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4x+4+8}{-3x-x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{-3\cdot(-3)}-(-3)}{\sqrt[3]{(4\cdot(-3)+4)^2}-2\sqrt[3]{4\cdot(-3)+4}+4}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4(x+3)}{-x(3+x)}=$$

$$=\frac{6}{12}\cdot(-4)\lim_{x\to -3}\frac{1}{x}=-2\cdot\frac{1}{-3}=\frac{2}{3}\ .\qquad\blacksquare$$

1.7.6. Ознаки існування границі

Питання про границю має дві сторони: 1) Чи існує границя? 2) Як обчислити границю? Друге питання уже частково розглянуте. Звернемо увагу на перше питання.

Теорема 1 (про обмежену монотонну змінну). *Обмежена монотонна величина має границю, причому:*

$$\left.\begin{matrix}x\le M\\ x\nearrow\end{matrix}\right\}\Rightarrow\exists\lim x\le M\ \text{ і }\ \left.\begin{matrix}x\ge M\\ x\searrow\end{matrix}\right\}\Rightarrow\exists\lim x\ge M\text{, де }M=const.$$

(Без доведення).

Теорема 2 (про стиснену змінну). *Нехай задано три змінні величини* x, y *і* z, *для яких виконується подвійна нерівність* $x \le y \le z$. *Якщо при цьому крайні змінні* x *і* z *мають однакову границю* $\lim x = \lim z = a$, *то середня змінна* y *також має ту саму границю* $\lim y = \lim x = \lim z = a$:

$$\left.\begin{array}{c} x \le y \le z \\ \lim x = \lim z = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim y = \lim x = \lim z = a.$$ (Без доведення).

Зауваження. Згідно з означенням границі поведінка змінної величини у початковий період процесу змінювання ніяким чином не впливає на розв'язання питання про границю.

1.7.7. Перша стандартна границя. Розкриття невизначеності виду $0/0$ для тригонометричних виразів

При обчисленні границь конкретних змінних величин часто використовуються уже відомі ***стандартні границі***.

Теорема 1 (***перша стандартна границя***). *Границя відношення синуса нескінченно малої величини до самої цієї величини існує і дорівнює одиниці*:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \left| \frac{0}{0} \right| = 1 .$$

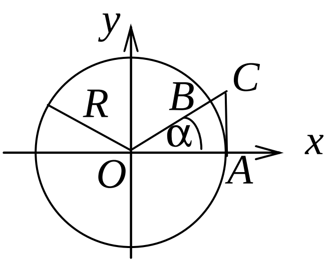

Рис. 28

□ Функція $\dfrac{\sin \alpha}{\alpha}$ – парна, тому можна обмежитися тільки додатними значеннями α. А оскільки $\alpha \to 0$, то можна розглядати тільки значення α з першої чверті $0 < \alpha < \pi/2$.

Розглянемо коло радіуса R з центром у початку координат (рис. 28). Порівнюючи площі трьох вкладених одна в одну фігур, отримаємо:

$$S_{\Delta OAB} < S_{сектора OAB} < S_{\Delta OAC} ;$$

$$\frac{1}{2}R^2\sin\alpha < \frac{1}{2}R^2\alpha < \frac{1}{2}R^2 tg\alpha \ ; \quad \sin\alpha < \alpha < tg\alpha \quad (*);$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}\ ; \ 1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha\ ; \quad \cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1 \quad (**).$$

З нерівності (*) і умови $0 < \sin\frac{\alpha}{2} < 1$ випливає

$$0 < \beta = 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} <$$

$$< 2\sin\frac{\alpha}{2} < 2\cdot\frac{\alpha}{2} = \alpha\ .$$

Оскільки $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha = 0$ і $\lim\limits_{\alpha\to 0} 0 = 0$, то за теоремою про стиснену змінну $\lim\limits_{\alpha\to 0}\beta = \lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha = \lim\limits_{\alpha\to 0} 0 = 0$. Звідси

$$\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \lim_{\alpha\to 0}(1-\beta) = 1 - \lim_{\alpha\to 0}\beta = 1\ .$$

Якщо врахувати, що $\cos 0 = 1$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \cos 0 = 1$.

Із цього співвідношення і нерівності (**) за теоремою про стиснену змінну нарешті одержимо

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \lim_{\alpha\to 0} 1 = 1\ . \qquad \blacksquare$$

<u>Наслідок 1</u>. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{tg\,\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = 1$.

$$\square \ \lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\,\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha} = 1\cdot 1 = 1\ . \quad \blacksquare$$

<u>Наслідок 2</u>. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = 1$.

$$\square \ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\begin{array}{l} u = \arcsin\alpha;\ \alpha = \sin u; \\ \alpha\to 0 \ \Rightarrow \ u\to 0 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\sin u/u} = \frac{1}{1} = 1. \quad ■$$

<u>Наслідок 3</u>. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{arctg\,\alpha}{\alpha} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = 1$.

$$□ \quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\begin{matrix} u = arctg\,\alpha;\ \alpha = tgu; \\ \alpha\to 0 \Rightarrow u\to 0 \end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{u}{tgu} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{tgu/u} = \frac{1}{1} = 1. \quad ■$$

<u>Зауваження</u>. Для розкриття невизначеності виду $0/0$ з тригонометричними виразами треба розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу стандартну границю чи її наслідки.

<u>Приклад</u>. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{ctg(\pi/4-x)}{4x-\pi}$.

$$□ \text{ а) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\dfrac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}\cos x = 1\cdot 1 = 1; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(3x/2)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(3x/2)\cdot(3x/2)^2}{(3x/2)^2\cdot x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot x} =$$

$$= \frac{9}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x/2)}{3x/2}\right)^2 : \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{9}{2}\cdot 1^2 : 1 = \frac{9}{2};$$

в) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{ctg(\pi/4+x)}{4x-\pi}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\left|\begin{matrix}u=x-\pi/4;\ x=\pi/4+u;\\ x\to\pi/4\ \Rightarrow\ u\to 0\end{matrix}\right|=$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{ctg(\pi/4+u+\pi/4)}{4(\pi/4+u)-\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{ctg(\pi/2+u)}{4u}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{tg\,u}{u}=-\frac{1}{4}\cdot 1=-\frac{1}{4}\ . \quad ■$$

1.7.8. Друга стандартна границя. Розкриття невизначеності виду 1^{∞}

Теорема 1 (***друга стандартна границя***). *Змінна величина* $(1+1/n)^n$ *має границю при* $n\to\infty$*. Ця границя позначається буквою* e *і називається* ***числом Ейлера***:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left|1^{\infty}\right|=e\ .$$

□ $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n;\ \ x_1=\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1=2;\ \ x_2=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2=2{,}25;$

$$x_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\approx 2{,}37;\ \ x_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=\frac{625}{256}\approx 2{,}44;\ \dots\ .$$

Можна довести, що змінна величина $x_n=(1+1/n)^n$ – зростаюча x_n і обмежена числом $M=3$. Тому за теоремою про обмежену монотонну змінну існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e$. ■

Зауваження 1. Далі будуть наведені способи обчислення числа Ейлера e з будь-якою наперед заданою точністю $e=2{,}718281828459045\ldots\approx 2{,}72$. Можна показати, що число e – ірраціональне і навіть ***трансцендентне*** (воно не може бути коренем жодного алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами).

Зауваження 2. При обчисленнях границь використовують також наступні форми запису другої стандартної границі:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\left|1^{\infty}\right|=e$,

де змінна x – дійсна неперервна (на відміну від дискретної змінної n). Графік функції $y=\left(1+1/x\right)^{x}$ подано на рис. 29.

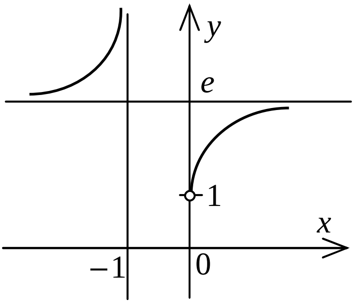

Рис. 29

2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{1/\alpha}=\left|1^{\infty}\right|=e$

Границя виразу – одиниця плюс нескінченно мала в степені, оберненому до цієї нескінченно малої – дорівнює числу Ейлера e.

Зауваження 3. Показникова функція $y=e^{x}$ з основою e називається ***експонентою*** і часто позначається $y=\exp x$ (рис. 30). Логарифмічна функція $y=\log_{e}x$ з основою e називається ***натуральним логарифмом*** і позначається $y=\ln x$ (рис. 30). Десятковий і натуральний логарифми зв'язані співвідношеннями

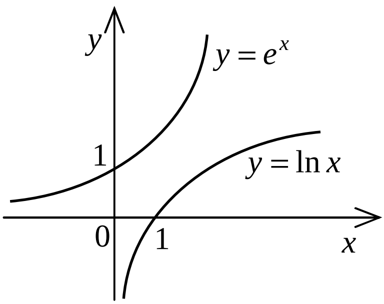

Рис. 30

$$\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=M\ln x;$$

$$\ln x=\frac{1}{M}\lg x,$$

де $M=1/\ln 10=0{,}43429...$ – модуль переходу.

Зауваження 4. З експонентою $y=e^{x}$ зв'язані так звані ***гіперболічні функції***:

$$sh\,x = \left(e^{x} - e^{-x}\right)/2$$ – ***гіперболічний синус*** (рис. 31);

$$ch\,x = \left(e^{x} + e^{-x}\right)/2$$ – ***гіперболічний косинус*** (рис. 31);

$$th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$ – ***гіперболічний тангенс*** (рис. 32);

$$cth\,x = \frac{ch\,x}{sh\,x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$ – ***гіперболічний котангенс*** (рис. 32);

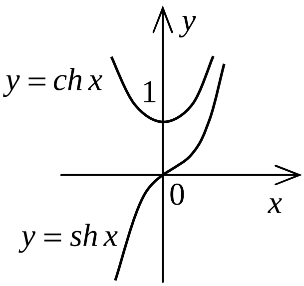

Рис. 31

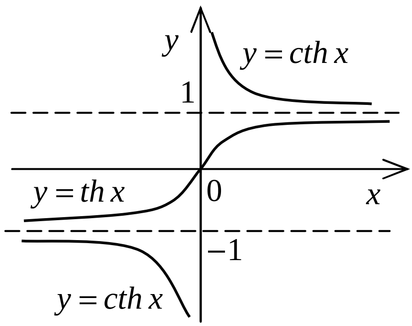

Рис. 32

Для гіперболічних функцій існує сукупність формул, що складають ***гіперболічну тригонометрію***. Зазначимо лише ***основну гіперболічну тотожність*** $ch^{2}x - sh^{2}x = 1$.

Наведемо (без доведення) наступні <u>наслідки</u> з другої стандартної границі, корисні при обчисленнях:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha.$$

<u>Приклад</u>. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{1/x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x-1}-1}{arctg\,(x-1)}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{2x+1} = \left|1^{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\dfrac{x-5}{x+2}-1\right)\right)^{2x+1} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+2}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-7}\cdot\frac{-7}{x+2}(2x+1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7(2x+1)}{x+2}} = e^{-7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{1+2/x}} = e^{-7\cdot\frac{2+0}{1+0}} = e^{-14} \;;$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x} = \left|1^{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{(1/\sin x)\cdot(\sin x/x)} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/x)} = e^{1} = e \;;$$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x-1}-1}{arctg\,(x-1)} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \left|\begin{array}{l} u = x-1; \\ x\to 1 \Rightarrow u\to 0 \end{array}\right| =$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{2^{u}-1}{arctg\;u} = \lim_{u\to 0}\frac{2^{u}-1}{u} : \lim_{u\to 0}\frac{arctg\;u}{u} = \ln 2 : 1 = \ln 2\,. \;\blacksquare$$

1.7.9. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі

Нехай змінні α і β – нескінченно малі. Розглянемо їх відношення α/β (припускається, що $\beta\neq 0$). Тоді:

1) Якщо $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, то α називається нескінченно малою ***вищого порядку*** мализни порівняно з β і позначається $\alpha = o(\beta)$ (α прямує до нуля швидше, ніж β).

2) Якщо $\lim\dfrac{\alpha}{\beta^{k}}=A\neq 0$, то α називається ***нескінченно малою*** k ***-го порядку*** мализни порівняно з β.

3) Якщо $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$, то α і β називаються ***нескінченно малими одного порядку*** мализни.

4) Якщо $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то α і β називаються ***еквівалент-***

ними нескінченно малими, позначається $\alpha \sim \beta$.

5) Якщо відношення α/β не має ні скінченної, ні нескінченної границі, то α і β називаються ***непорівнянними нескінченно малими***.

Наприклад:

а) $\alpha = \sin 2x$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x/x) = 2$. Отже, нескінченно малі α і β одного порядку.

б) $\alpha = x^n$, $\beta = x$, $n > 1$, $x \to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^n/x\right) = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1} = 0$. Отже, $\alpha = o(\beta)$.

в) $\alpha = 4x^3$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha/\beta^3\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(4x^3/x^3\right) = 4$. Отже, величина α є нескінченно малою третього порядку мализни відносно β.

г) $\alpha = (x+1)/x^2$, $\beta = 1/x$, $x \to \infty$. Тоді

$\lim\limits_{x\to \infty}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to \infty}\left(((x+1)/x^2)/(1/x)\right) = \lim\limits_{x\to \infty}(1+1/x) = 1$.

Отже, $\alpha \sim \beta$.

д) $\alpha = x\sin(1/x)$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to 0}\left((x\sin(1/x))/x\right) = \lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ – не існує. Отже, α і β – непорівнянні.

Нехай нескінченно мала α подана у вигляді суми $\alpha = \beta + \gamma$. Перший доданок β називається ***головною частиною*** α, якщо другий доданок γ має вищий порядок порівняно з β.

Теорема 1. *Нескінченно мала* α *еквівалентна своїй головній частині* β: $\alpha \sim \beta$.

□ $\alpha = \beta + \gamma$; $\dfrac{\alpha}{\beta} = 1 + \dfrac{\gamma}{\beta}$; $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim 1 + \lim \dfrac{\gamma}{\beta} = 1 + 0 = 1$; ■

Теорема 2 (принцип заміни нескінченно малих). *При розкритті невизначеності виду* $0/0$ *можна чисельник і знаменник цієї невизначеності заміняти величинами, що їм еквівалентні*:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \sim \alpha_* \\ \beta \sim \beta_*\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_*}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_*} = \lim \frac{\alpha_*}{\beta_*}$$

Основні еквівалентності при $x \to 0$, що використовуються при обчисленнях границь, подані в таблиці 4:

Таблиця 4

$\sin x \sim x$	$arctg\, x \sim x$	$a^x - 1 \sim x \ln a$
$tg\, x \sim x$	$1 - \cos x \sim x^2/2$	$\ln(1+x) \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+x} - 1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1 - 6x^2\right)}{arctg\, x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin^2 x}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+x} - 1}{x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/5} - 1}{x} =$

$$= \left|(1+x)^{1/5} - 1 \sim x/5\right| = \lim_{x\to 0} \frac{x/5}{x} = \frac{1}{5};$$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1 - 6x^2\right)}{arctg\, x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \left|\ln\left(1 - 6x^2\right) \sim -6x^2;\right.$

$$\left. arctg\, x \sim x \right| = \lim_{x\to 0} \frac{-6x^2}{x} = 0;$$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin^2 x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \left|e^{2x} - 1 \sim 2x;\ \sin x \sim x\right| =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2} = \infty. \quad ■$$

Зауваження 1. Якщо в чисельнику чи знаменнику невизначеності $0/0$ стоїть алгебраїчна сума, то в загальному випадку не можна заміняти еквівалентними величинами окремі доданки, а лише весь чисельник чи знаменник в цілому.

Зауваження 2. Нескінченно великі величини порівнюють між собою так само, як і нескінченно малі.

1.8. Поняття функції. Способи задання функції. Основні елементарні функції та їх графіки. Складена функція. Обернена функція

1.8.1. Загальне поняття функції. Області визначення та значень. Графік функції. Способи задання функції

Досліджуючи різні явища природи, розв'язуючи науково-технічні проблеми доводиться розглядати зміну однієї з величин у залежності від зміни іншої.

Нехай задані непорожні множини X і Y. Якщо вказано правило (***закон відповідності***) f, за яким кожному значенню x із множини X ставиться у відповідність одне певне значення y із множини Y, то кажуть, що задано ***функцію***, визначену на множині X, зі значеннями у множині Y. Функцію позначають одним із способів: $y = f(x)$, $x \in X$, або $f : X \to Y$, або $X \xrightarrow{f} Y$.

При цьому x називається ***незалежною змінною*** (***аргументом***), а y – ***залежною змінною*** (***функцією***).

Множина $D(f) = X$ називається ***областю визначення*** функції. Множина $E(f)$ всіх тих значень $y \in Y$, кожне з яких відповідає принаймні одному $x \in D(f)$, називається ***областю значень*** функції.

Значення функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають так: $f(x_0)$ або $f(x)\big|_{x=x_0}$.

Функція $y = C,\ C = const$, яка на всій області визначення набуває єдиного значення C, називається ***сталою***.

Дві функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ називаються ***рівними***, якщо: 1) вони мають одну й ту саму область визначення $D(f) = D(g)$; 2) на кожному елементі x з цієї області визначення функції набувають однакових значень $f(x) = g(x)$.

Якщо змінні x і y розглядати як декартові координати точок на площині, то ***графіком*** функції $y = f(x)$ є множина всіх точок координатної площини Oxy з координатами $(x, f(x))$, $x \in D(f)$.

Зауваження 1. Кожна пряма, паралельна осі Oy, з графіком функції може мати не більше однієї спільної точки.

Функція $y = f(x)$ вважається заданою, якщо: 1) вказана її область визначення $D(f)$: 2) вказаний закон відповідності f.

Основні способи задання функції.

1) Табличний спосіб задання функції. При цьому способі пишуть у визначеному порядку значення аргументу $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ і відповідні значення функції $y_1, y_2, ..., y_i, ...$:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$
y	y_1	y_2	$\dots$	y_i	$\dots$

2) Графічний спосіб задання функції. Якщо у прямокутній системі координат на площині маємо деяку сукупність точок (x, y) і при цьому ніякі дві точки не лежать на одній прямій, що паралельна осі Oy, то ця сукупність точок визначає деяку однозначну функцію $y = f(x)$. Значеннями аргументу є абсциси точок, значеннями функції – відповідні ординати.

3) Аналітичний спосіб задання функції:

а) ***Явна форма задання функції***. Функцію задають у вигляді формул, що визначають операції (і послідовності їх виконання), які потрібно здійснити над значенням незалежної змінної x, щоб визначити значення залежної змінної y.

Наприклад, $y = (x^{1/2} - 1)^2$, де $x \geq 0$.

б) ***Неявна форма задання функції***. Під неявним розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно y, яке визначає функцію тільки тоді, коли всі впорядковані пари (x, y), що є розв'язками даного рівняння, утворюють множину, в якій для будь-якого числа x_0 є не більш як одна пара (x_0, y_0) з першим елементом x_0.

Наприклад, $xy - 4 = 0$.

в) ***Параметрична форма задання функції***. Якщо функцію задано параметрично, то значення змінних x і y, що відповідають одне одному, визначають через третю величину t (***параметр***): $x = x(t)$, $y = y(t)$.

У деяких випадках функцію, задану параметрично, можна записати в явній формі, виключивши параметр t.

Наприклад, функція $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$, допускає запис у явній формі: $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0;1]$.

Зауваження 2. Коли функція задається аналітично, то часто область визначення явно не вказується. Тоді розглядається так звана ***природна область визначення*** (***область допустимих значень***). *Щоб знайти природну область визначення треба скласти систему обмежень на всі математичні операції, що фігурують в наведених формулах, і розв'язати її.*

Приклад. Знайти область визначення функції

$$y = \ln(6 - x) + \sqrt{x^2 - 4}.$$

□ $D(f)$: $\begin{cases} 6 - x > 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 6 \\ |x| \geq 2 \end{cases}$ $x \in (-\infty; -2] \cup [2; 6)$. ■

1.8.2. Основні елементарні функції

Степенева функція $y = x^{\alpha}$:

а) α – ціле додатне число. Функція визначена на всій числовій прямій $-\infty < x < +\infty$. Графіки функції у цьому випадку при деяких значеннях α мають вигляд, зображений на рис. 33 і 34;

б) α – ціле від'ємне число. Функція визначена для усіх значень x, окрім $x = 0$. Графіки функцій при деяких значеннях α мають вигляд, зображений на рис. 35 і 36;

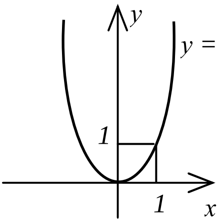

Рис. 33

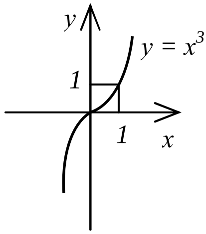

Рис. 34

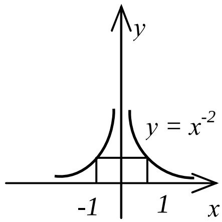

Рис. 35

в) число α – раціональне дробове. На рис. 37, 38 і 39 зображені графіки степеневої функції, коли числа α додатні. При від'ємних числах α матимемо графіки, які схожі з зображеними на рис. 35 і 36, коли знаменник дробу непарний, і їх частиною праворуч від осі Oy, якщо знаменник дробу парний.

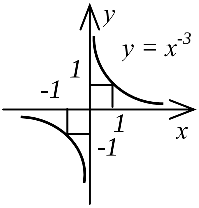

Рис. 36

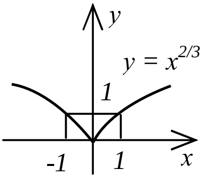

Рис. 37

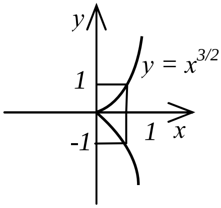

Рис. 38

<u>Показникова функція</u> $y = a^x$, $a > 0$ і $x \in R$. Графік її має вигляд, зображений на рис. 40. Розглянуті випадки, коли $0 < a < 1$ і $a > 1$.

<u>Логарифмічна функція</u> $y = \log_a x$, $a > 0$ і $x > 0$. Графік її зображено на рис. 41. Розглянуті випадки, коли $0 < a < 1$ і $a > 1$. $\lg x$ – десятковий логарифм, $\ln x$ – натуральний логарифм.

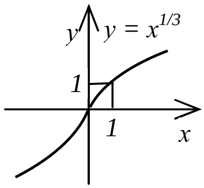

Рис. 39

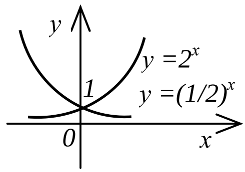

Рис. 40

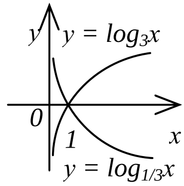

Рис. 41

<u>Тригонометричні функції</u>: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$, $y = \sec x = 1/\cos x$, $y = \operatorname{cos}ec\, x = 1/\sin x$. Незалежна змінна x у формулах набуває значення у радіанах. Усі названі тригонометричні функції періодичні.

Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ мають період 2π. Ці функції визначені при всіх значеннях $x \in R$.

Функції $y = tg\, x$ і $y = \sec x$ мають період відповідно π і 2π. Вони визначені скрізь, крім точок $x = (2k+1)\pi/2$, $k \in Z$.

Функції $y = ctg\, x$ і $y = \operatorname{cos}ec\, x$ мають період відповідно π і 2π. Вони визначені скрізь, крім точок $x = k\pi$, $k \in Z$.

Графіки тригонометричних функцій зображені на рис. 42-44.

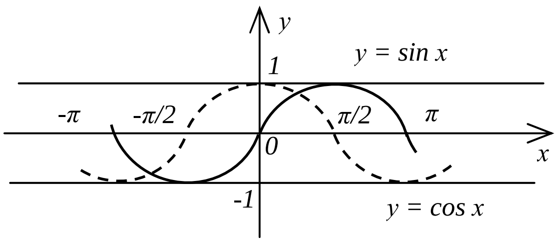

Рис. 42

<u>Обернені тригонометричні функції</u>:

а) Функція арксинус $y = \arcsin x$. Область її визначення – відрізок $[-1;1]$, область значень – відрізок $[-\pi/2;\pi/2]$. Графік подано на рис. 45.

б) Функція арккосинус $y = \arccos x$. Область її визначення – відрізок $[-1;1]$, область значень – відрізок $[0;\pi]$. Графік подано на рис. 46.

в) Функція арктангенс $y = arctg\, x$. Область її визначення – вся числова пряма, область значень – інтервал $(-\pi/2;\pi/2)$. Графік подано на рис. 47.

г) Функція арккотангенс $y = arcctg\, x$. Область її визначення – вся числова пряма, область значень – інтервал $(0;\pi)$. Графік подано на рис. 48.

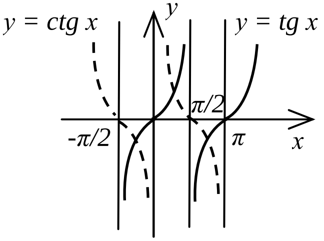

Рис. 43

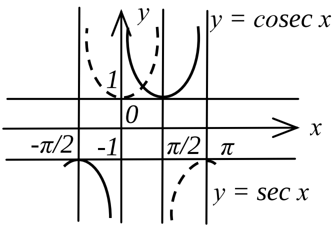

Рис. 44

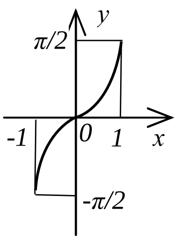

Рис. 45

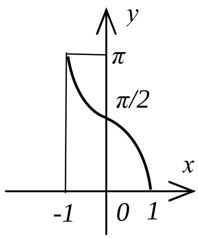

Рис. 46

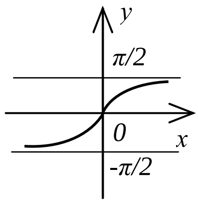

Рис. 47

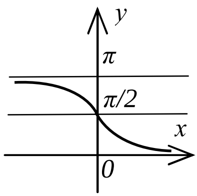

Рис. 48

<u>Деякі границі, що відображають властивості основних елементарних функцій</u>:

$$\lim_{x\to-\infty} arctg\, x = -\pi/2; \quad \lim_{x\to+\infty} arctg\, x = \pi/2;$$

$$\lim_{x\to-\infty} arcctg\, x = \pi; \quad \lim_{x\to+\infty} arcctg\, x = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, \ a>1; \\ +\infty, \ 0<a<1; \end{cases} \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, \ a>1; \\ 0, \ 0<a<1; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, \ a>1; \\ +\infty, \ 0<a<1; \end{cases} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, \ a>1; \\ -\infty, \ 0<a<1; \end{cases}$$

1.8.3. Класифікація функцій за їхніми властивостями

Парність. Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D(f)$; і ***непарною***, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D(f)$. Інакше функція називається ***функцією загального вигляду*** (***загального положення***).

Наприклад, функції $y = x^2$ і $y = \cos x$ – парні, функції $y = \sin x$ і $y = arctg\, x$ – непарні, а функції $y = 2^x$ і $y = \arccos x$ – загального вигляду.

Періодичність. Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною***, якщо існує додатне число T (***період***) таке, що $f(x+T) = f(x)$, $x \in D(f)$.

Звичайно під ***періодом*** (***основним періодом***) функції розуміють T_0 – найменший з усіх додатних періодів (якщо такий існує). У цьому разі всі періоди функції йому кратні: $T = kT_0$, $k \in N$.

Приклад. Дослідити функцію $y = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$ на періодичність і у випадку періодичності знайти основний період.

□ Дана функція визначена на всій числовій прямій. Припустимо, що ця функція періодична. Тоді для довільного $x \in R$ повинна виконуватися умова $\sin(ax+b) = \sin(a(x+T)+b)$, де $T = const > 0$. Розв'яжемо це рівняння відносно T:

$$T = (\pi + 2\pi k)/a - 2x - 2b/a, \quad k \in Z; \; T = (2\pi n)/a, \quad n \in Z.$$

Величина T з першої формули не є періодом, тому що залежить від x. Друга формула задає нескінченну множину чисел. Отже, задана функція періодична. Найменшим додатним з цих чисел є $T_0 = 2\pi / |a|$ – основний період. ■

Обмеженість. Функція $y = f(x)$ є ***обмеженою зверху***, якщо існує таке число M, що для всіх значень аргументу з області визначення функції виконується нерівність $f(x) \le M$, і ***обмеженою знизу***, якщо існує таке число τ, що для всіх значень аргументу з області визначення функції виконується нерівність $f(x) \ge \tau$.

Функція, обмежена зверху і знизу, є ***обмеженою***.

Наприклад, функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ обмежені зверху числом 1, а знизу числом -1. Функція $y = 2^x$ обмежена знизу числом 0, а зверху необмежена. Функції $y = tg\, x$ і $y = ctg\, x$ необмежені.

Монотонність. Функція $y = f(x)$ є ***зростаючою*** на проміжку $(a;b)$, якщо для будь-якої пари значень $x_1 \in (a;b)$ і $x_2 \in (a;b)$ з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \ge f(x_2)$, тобто *більшому значенню аргументу відповідає неменше значення функції*. Якщо з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$, то функція зветься ***спадною***, тобто *більшому значенню аргументу відповідає небільше значення функції*.

Зростаючі і спадні функції називають ***монотонними***.

Якщо в поданих означеннях нестрогі нерівності замінити на строгі, то маємо ***строго монотонні*** функції.

Якщо область визначення можна розбити на деяке число проміжків, які не перетинаються, таких, що на кожному з них функція монотонна, то вони називаються ***проміжками монотонності*** функції.

Наприклад, функція $y = x^2$ визначена на всій числовій осі. Вона має два проміжки строгої монотонності $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$, на першому з яких функція є строго спадною, а на другому – строго зростаючою.

1.8.4. Класифікація функцій за їхньою будовою

Складена функція. Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині U, а функція $u = \varphi(x)$ визначена на множині X, причому для кожного значення $x \in X$ відповідне значення $u = \varphi(x)$ належить множині U. Тоді на множині X визначена функція $y = f(\varphi(x))$, яку називають ***складеною функцією*** від x або ***суперпозицією*** (***композицією***) функцій φ і f. При цьому $y = f(u)$ називають ***зовнішньою функцією***, а $u = \varphi(x)$ – ***внутрішньою функцією*** або ***проміжним аргументом***. Змінну x називають ***незалежною змінною*** або ***внутрішнім аргументом***.

Складена функція – це функція від функції. Більшість функцій, які вивчають у математиці, можна розглядати як складені функції.

Наприклад, функцію $z = \sqrt{x} - 1$ можна записати: $y = \sqrt{x}$; $z = y - 1$.

Зауваження 1. Суперпозиція може застосовуватися повторно. Наприклад, $y = \sin v$; $v = 2^u$; $u = arctg\, x$.

Зауваження 2. Розглядаючи складені функції, слід звертати увагу на області визначення функцій, що їх утворюють.

Елементарні функції. ***Елементарною функцією*** називається така, що може бути задана за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і суперпозицій над основними елементарними функціями.

Наприклад, $y = (\lg x + 4\sqrt[3]{x} + 2tg\, x)/(10^x - x^2 \arcsin x)$ – елементарна функція, а функції $y = sign\, x$ (знак числа x) та $y = \sin x + \sin x^2 + \sin x^3 + \ldots + \sin x^n + \ldots$ не є елементарними.

Алгебраїчні функції. До числа ***алгебраїчних функцій*** належать такі елементарні функції:

1) ***Ціла раціональна функція*** або ***многочлен*** (***поліном***)

$$y = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

де $a_0, a_1, ..., a_n$ – ***коефіцієнти*** (сталі числа); n – ***степінь*** (***порядок***) многочлена (ціле невід'ємне число). Зрозуміло, що ця функція визначена при будь-якому $x \in R$.

2) ***Дробово-раціональна функція*** (***раціональний дріб***) – відношення двох многочленів $y = P_n(x)/Q_m(x)$.

Наприклад, раціональний дріб $y = a/x$, $(a \neq 0, x \neq 0)$ виражає обернено пропорційну залежність.

3) ***Ірраціональна функція*** – це така функція $y = f(x)$, в якій зустрічається піднесення до степеня з раціональним дробовим показником.

Наприклад, функція $y = (2x^2 + \sqrt{x})/(1 + 5x^2)$ є ірраціональною.

Зауваження 3. Розглянуті три види не вичерпують усіх алгебраїчних функцій.

Елементарні функції, що не є алгебраїчними, називаються ***трансцендентними***.

Наприклад, функція $y = \cos x - 5x^3$ є трансцендентною.

Обернена функція. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині X, а Y –множина її значень. Якщо ця функція $y = f(x)$ така, що при кожному фіксованому $y \in Y$ рівняння $y = f(x)$ має єдиний розв'язок $x \in X$, то можна розглядати ***обернену функцію*** $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Обернена функція $x = f^{-1}(y)$ кожному $y \in Y$ ставить у відповідність єдине значення $x \in X$ таке, що $f(x) = y$. Функція $y = f(x)$, $x \in X$ при цьому називається ***прямою функцією***.

Якщо функція f^{-1} обернена до функції f, то й функція f буде оберненою до функції f^{-1}. Функції f і f^{-1} називають ***взаємно оберненими***. Область визначення X функції f є областю значень функції f^{-1}, область значень Y функції f є областю визначення функції f^{-1}.

Графіки функцій $y = f(x)$, $x \in X$ і $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ збігаються (відображають одну залежність з різних позицій).

Зауваження 4. Якщо в оберненій функції $x = f^{-1}(y)$ ввести традиційні позначення для незалежної та залежної змінних (перезначити $x \to y$, $y \to x$), то матимемо ***обернену функцію в традиційних позначеннях змінних*** $y = f^{-1}(x)$. Графіки прямої $y = f(x)$ і оберненої $y = f^{-1}(x)$ функцій симетричні відносно бісектриси $y = x$ першого і третього координатних кутів.

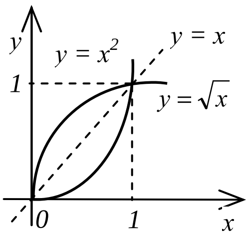

Рис. 49

Наприклад, функція $y = f(x) = x^2$ на інтервалі $[0; +\infty)$ має обернену $y = \sqrt{x}$. Графіки цих функцій зображені на рис. 49.

Теорема. *Нехай функція* $y = f(x)$ *визначена і строго зростаюча (строго спадна) на відрізку* $[a;b]$. *Тоді обернена функція* $y = f^{-1}(x)$ *визначена і строго зростаюча (строго спадна) на відрізку* $\left[f(a); f(b)\right]$ $\left(\left[f(b); f(a)\right] \right)$.
(Без доведення).

1.9. Неперервність функції

З поняттям границі тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу – неперервність функції.

1.9.1. Приріст аргументу та приріст функції. Поняття неперервності функції в точці

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і x – довільна точка з цього околу, відмінна від x_0. Різницю $\Delta x = x - x_0$ називають ***приростом незалежної змінної*** (***приростом аргументу***). Відповідну різницю $\Delta y = f(x) - f(x_0)$

називають ***приростом функції***.

Тоді $x = x_0 + \Delta x$; $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Зауваження. Приріст функції Δy залежить як від вибору точки x_0, так і від вибору приросту аргументу Δx.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо в цій точці виконується рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Сформульоване означення неперервності накладає на функцію $f(x)$ такі умови: 1) функція визначена в деякому околі точки x_0, включаючи і саму точку x_0, тобто існує число $f(x_0)$; 2) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – границя функції в точці x_0; 3) границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці.

Оскільки $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то для неперервної в точці x_0 функції маємо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, тобто *знак границі* $\lim$ *і знак неперервної функції* f *можна міняти місцями*. Іншими словами, *щоб обчислити границю неперервної функції, треба у її вираз замість аргументу підставити його границю*.

У рівності $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ перенесемо $f(x_0)$ ліворуч та уведемо під знак границі як сталу. Тоді отримаємо $\lim\limits_{x - x_0 \to 0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = 0$, звідки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, тобто *функція неперервна, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції*.

Якщо функція $f(x)$ неперервна у кожній точці деякого інтервалу $(a; b)$, то вона називається ***неперервною на*** цьому ***інтервалі***.

Приклад. Довести, що функція $y = \sin x$ неперервна у довільній точці x_0 області визначення $D(f) = R$.

□ $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin(\Delta x/2)\cos(x_0 + \Delta x/2)$. Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(\Delta x/2) = 0$, а величина $\cos(x_0 + \Delta x/2)$ обмежена, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. ■

1.9.2. Властивості функцій, які неперервні в точці

Спираючись на властивості границь, можна встановити наступне:

1) Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні у точці x_0, то функції $g(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, $h(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ і $q(x) = f_1(x)/f_2(x)$ $\left(f_2(x) \neq 0 \right)$, також неперервні у точці x_0.

2) Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна у точці x_0, а функція $f(u)$ неперервна у точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то й складена функція $f(\varphi(x))$ неперервна у точці x_0.

3) Якщо функція $f(x)$ неперервна у точці x_0 і має обернену функцію $x = f^{-1}(y)$ в деякому околі точки x_0, то обернена функція $x = f^{-1}(y)$ неперервна в точці $y_0 = f(x_0)$.

4) Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і відмінна від нуля $f(x_0) \neq 0$, то існує такий окіл цієї точки x_0, що для всіх x з указаного околу функція $f(x)$ не обертається в нуль і має знак, який збігається зі знаком $f(x_0)$.

Неперервність функцій використовується при обчисленні границь. З наведених властивостей випливають такі важливі <u>наслідки</u>:

1) ***Заміна змінної***

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \left| \begin{array}{c} u = \varphi(x) \\ u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \end{array} \right| = \lim_{u \to u_0} f(u).$$

2) Границя ***показниково-степеневої функції***

$$\lim_{x\to x_0}\left(u(x)\right)^{v(x)}=\left(\lim_{x\to x_0}u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)}.$$

3) *Усі елементарні функції є неперервними у кожній точці своєї природної області визначення.*

1.9.3. Односторонні границі. Одностороння неперервність

Границя функції $f(x)$ в точці x_0 при додатковій умові, що x залишається меншим x_0, називається ***лівою границею*** функції $f(x)$ в точці x_0 і позначається

$$\lim_{x\to x_0,\, x<x_0} f(x) \quad \text{або} \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Аналогічно визначається ***права границя*** функції $f(x)$ в точці x_0:

$$\lim_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x) \quad \text{або} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Ліва і права границі називаються ***односторонніми границями***.

<u>Теорема</u>. *Для того, щоб функція $f(x)$ в точці x_0 мала границю, яка дорівнює A, необхідно і достатньо, щоб існували обидві односторонні границі в цій точці, кожна з яких також дорівнює A:*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

(Без доведення).

Нехай функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $(a;x_0]$, $a<x_0$. Функція $f(x)$ ***неперервна у точці*** x_0 ***зліва***, якщо

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0).$$

Аналогічно, функція $f(x)$, визначена на півінтервалі $[x_0;b)$, $x_0<b$, ***неперервна у точці*** x_0 ***справа***, якщо

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Загальна назва для функції, неперервної зліва чи справа, – ***односторонньо неперервна***.

Якщо функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і точка $x_0 \in (a;b)$, то *для неперервності функції у точці* x_0 *необхідно і достатньо, щоб функція* $f(x)$ *була неперервна зліва і справа у точці* x_0. Іншими словами, *функція* $f(x)$*, яка визначена в деякому околі точки* x_0*, неперервна в точці* x_0*, якщо обидві її односторонні границі дорівнюють значенню функції в цій точці*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній внутрішній точці відрізка $[a;b]$ і відповідно односторонньо неперервна на його кінцях, то вона називається ***неперервною на відрізку*** $[a;b]$.

1.9.4. Властивості функцій, неперервних на відрізку

Ці властивості будуть сформульовані у вигляді теорем (подаємо без доведення).

Теорема 1 (про обмеженість функції та існування найменшого та найбільшого значень). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$*, то вона обмежена на цьому відрізку і серед її значень існує найменше* $m = f(x_1)$ *та найбільше* $M = f(x_2)$*, де* $x_1 \in [a;b]$ *і* $x_2 \in [a;b]$ (рис. 50).

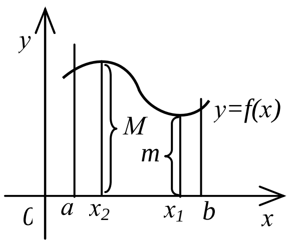

Рис. 50

Зауваження. Твердження теореми може бути невірним, якщо розглядати $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$.

Теорема 2 (про перетворення функції на нуль). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і на його кінцях має значення різних знаків* $f(a)\cdot f(b) < 0$. *Тоді на інтервалі* $(a;b)$

знайдеться хоча б одна точка $x = d$ *така, що* $f(d) = 0$ (рис. 51).

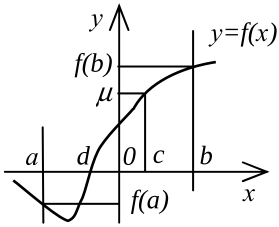

Рис. 51

Теорема 3 (про проміжне значення). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і на його кінцях приймає різні значення* $f(a) \neq f(b)$. *Тоді для будь-якого числа* μ, *що міститься між числами* $f(a)$ *і* $f(b)$, *на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться хоча б одна точка* $x = c$ *така, що* $f(c) = \mu$ (рис. 51).

1.9.5. Розривні функції. Точки розриву та їх класифікація

Неперервна в точці x_0 функція $f(x)$ повинна задовольняти наступні умови: 1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і деякому її околі. 2) існує скінченна ліва границя функції $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$. 3) існує скінченна права границя функції $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$. 4) односторонні границі рівні. 5) спільне значення односторонніх границь дорівнює значенню функції $f(x_0)$ в цій точці x_0.

Якщо хоча б одна з перелічених умов порушується, то функція $f(x)$ називається ***розривною*** в точці x_0, а сама точка x_0 називається ***точкою розриву*** цієї функції.

Якщо в точці розриву x_0 існують обидві скінченні односторонні границі, то це – ***точка розриву першого роду***. Якщо у точці розриву x_0 хоча б одна з односторонніх границь нескінченна або взагалі не існує, то це – ***точка розриву другого роду***.

Якщо в точці розриву І роду x_0 односторонні границі рівні $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, то маємо ***усувний розрив***, оскільки, поклавши $f(x_0) = A$, дістанемо неперервну функцію.

Якщо в точці розриву I роду x_0 односторонні границі різні $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$, то маємо ***скінченний стрибок*** висотою $|A_2 - A_1|$.

Якщо в точці розриву II роду x_0 існують одна нескінченна одностороння границя, а інша – скінченна чи нескінченна, то маємо ***нескінченний стрибок***.

Правило. *Для знаходження точок розриву функції* $f(x)$ *і визначення їх характеру треба:*

1) знайти можливі точки розриву (скінченні кінці інтервалів області визначення; точки, в яких змінюється характер задання функції, і т.п.);

2) у кожній "підозрілій" точці x_0 *обчислити , якщо існують, значення функції* $f(x_0)$ *та обидві односторонні границі* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ *і* $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$*;*

3) з аналізу отриманих значень зробити висновок про наявність і характер розриву.

Приклад. Визначити точки розриву заданої функції та з'ясувати їх характер:

а) $y = arctg\left(1/(x-3)\right)$;

б) $y = 3^{-1/x^2}$;

в) $y = \sin\left(\pi/x\right)$;

г) $y = \begin{cases} 2^{2/(x+1)} - 3, & x < 1; \\ \log_2 x, & x \geq 1 \end{cases}$

□ а) Функція $y = arctg\left(1/(x-3)\right)$ невизначена у точці $x = 3$. Розглянемо

$$\lim_{x \to 3-0} arctg\left(1/(x-3)\right) = -\pi/2 \quad \text{і} \quad \lim_{x \to 3+0} arctg\left(1/(x-3)\right) = \pi/2 .$$

Функція у точці $x = 3$ має скінченний стрибок висотою π (рис. 52).

б) Функція $y = 3^{-1/x^2}$ невизначена у точці $x = 0$. Розглянемо

$$\lim_{x\to -0} 3^{-1/x^2} = 0 \;\text{ і }\; \lim_{x\to +0} 3^{-1/x^2} = 0 .$$

Якщо довизначимо функцію рівністю $f(0)=0$, то дістанемо неперервну у точці $x=0$ функцію. Отже, маємо усувний розрив (рис. 53).

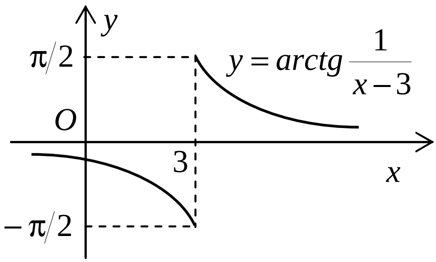

Рис. 52

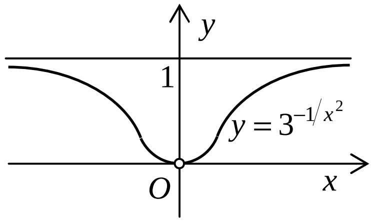

Рис. 53

в) Функція $y=\sin(\pi/x)$ невизначена у точці $x=0$. Обидві односторонні границі $\lim\limits_{x\to -0}\sin(\pi/x)$ і $\lim\limits_{x\to +0}\sin(\pi/x)$ не існують. Отже, маємо точку розриву II роду (рис. 54).

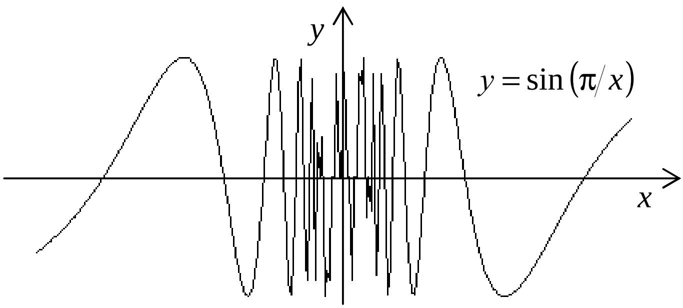

Рис. 54

г) Функція $y=f(x)=\begin{cases} 2^{2/(x+1)}-3, & x<1; \\ \log_2 x, & x\ge 1 \end{cases}$ визначена на всій числовій прямій, окрім точки $x=-1$, а в точці $x=1$ змінюється її аналітичний вираз. Тому маємо дві точки, що "підозрілі” на розрив.

У точці $x=-1$: $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0}\left(2^{2/(x+1)}-3\right)=-3;$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\left(2^{2/(x+1)}-3\right)=+\infty .$$

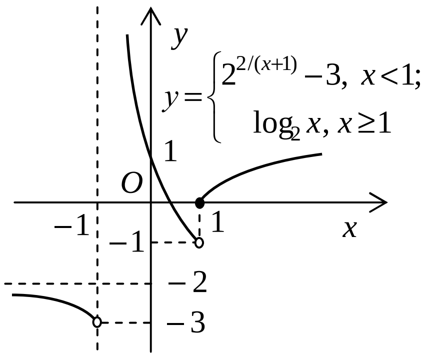

Рис. 55

Отже, у точці $x=-1$ функція має нескінченний стрибок (рис. 55).

У точці $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\left(2^{2/(x+1)}-3\right)=-1;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\log_2 x=0;$$

$$f(1)=\log_2 1=0.$$

Отже, у точці $x=1$ функція має скінченний стрибок висотою 1 (рис. 55). ■

1.10. Контрольні запитання

1) Що служить координатною сіткою декартової системи координат на площині?
2) За якою формулою обчислюється відстань між двома точками на площині?
3) За якими співвідношеннями обчислюються координати точки, що ділить даний відрізок у вказаному відношенні?
4) Як записується рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
5) Який вигляд має рівняння прямої, що паралельна осі ординат Oy?
6) Наведіть рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку.
7) Як записується рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?

8) Який вигляд має рівняння прямої у відрізках на осях?
9) Наведіть загальне рівняння прямої.
10) Як знайти гострий кут між двома похилими прямими?
11) Яка умова паралельності двох похилих прямих?
12) Яка умова перпендикулярності двох похилих прямих?
13) За якою формулою обчислюється відстань від точки до прямої?
14) Який вигляд має загальне рівняння лінії другого порядку?
15) Що називається колом? Наведіть канонічне рівняння кола, рівняння кола із заданим центром і радіусом.
16) Що називається еліпсом? Наведіть канонічне рівняння еліпса.
17) Яким співвідношенням зв'язані велика a і мала b півосі еліпса та половина c міжфокусної відстані?
18) Що називається гіперболою? Наведіть канонічне рівняння гіперболи.
19) Яким співвідношенням зв'язані дійсна a і уявна b півосі гіперболи та половина c міжфокусної відстані?
20) Які рівняння асимптот гіперболи?
21) Що називається параболою? Наведіть канонічне рівняння параболи.
22) Що таке ексцентриситет еліпса, гіперболи, параболи?
23) Які рівняння директрис еліпса, гіперболи, параболи?
24) У чому полягає властивість директрис еліпса, гіперболи, параболи?
25) У чому полягає оптична властивість ліній другого порядку?
26) Як задається полярна система координат? Що таке головні значення полярних координат?
27) Що служить координатною сіткою полярної системи координат?
28) Якими співвідношеннями зв'язані полярні та прямокутні координати?
29) Яким рівнянням задаються лінії другого порядку в полярних координатах?
30) Наведіть параметричні рівняння прямої та кола.
31) Що таке сталі та змінні величини? Наведіть приклади.

32) Яка змінна величина називається обмеженою? Необмеженою?
33) Яка змінна величина називається зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?
34) Яка змінна величина називається нескінченно малою? Нескінченно великою?
35) Наведіть властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин. Як зв'язані ці величини?
36) Що називається границею змінної величини?
37) Наведіть властивості границь.
38) Що називається першою стандартною границею? Другою стандартною границею? Наведіть їх наслідки.
39) Як здійснюється порівняння нескінченно малих величин? Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих.
40) Як розкривається невизначеність виду ∞/∞ для многочленів?
41) Як розкривається невизначеність виду $0/0$ для многочленів, ірраціональних та тригонометричних виразів?
42) Дайте означення функції. Що називається областю визначення, областю значень і законом відповідності функції?
43) Що таке природна область визначення аналітично заданої функції? Як вона знаходиться?
44) Що таке графік функції? Наведіть основні способи задання функції.
45) Яка функція називається обмеженою? Необмеженою?
46) Яка функція називається парною? Непарною? Загального вигляду?
47) Яка функція називається зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?
48) Яка функція називається періодичною? Наведіть приклади періодичних функцій.
49) Що таке складена функція? Наведіть приклади.
50) Яка функція називається оберненою до даної? Як розміщені графіки взаємно обернених функцій?
51) Яка функція називається елементарною? Наведіть приклади алгебраїчних і трансцендентних функцій.
52) Які функції відносяться до основних елементарних?

53) Наведіть приклади границь, що відображають властивості основних елементарних функцій.
54) Що таке приріст аргументу і відповідний приріст функції? Дайте означення неперервності функції в точці “мовою приростів”.
55) Що таке ліва і права границі функції в точці? Дайте означення неперервності функції в точці через односторонні границі.
56) Наведіть основні властивості функцій, які неперервні в точці.
57) Наведіть основні властивості функцій, неперервних на відрізку.
58) Яка функція називається розривною?
59) Що таке точка розриву першого роду? Другого роду? Наведіть приклади точок усувного розриву, скінченного та нескінченного стрибка.
60) Як знаходять точки розриву аналітично заданої функції?

1.11. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Трикутник ABC заданий координатами своїх вершин $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$, $C(x_3 ; y_3)$. Засобами аналітичної геометрії знайти:

1) рівняння сторони AB та її довжину $|AB|$;

2) рівняння висоти CN та її довжину $|CN|$;

3) рівняння медіани CM ;

4) рівняння прямої ET, що проходить через точку перетину E медіан трикутника ABC паралельно стороні AB;

5) гострий кут $\varphi_г$ між висотою CN і медіаною CM ;

6) точку перетину S висоти CN і прямої ET .

Зобразити трикутник ABC, знайдені точки і прямі в прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	A	B	C	№ в-та	A	B	C
1	(-6;-5)	(-4;1)	(5;2)	16	(2;-1)	(4;-7)	(-6;4)
2	(-3;-1)	(-1;9)	(2;6)	17	(5;-3)	(1;-1)	(-3;2)
3	(-1;1)	(1;5)	(4;-3)	18	(4;6)	(2;-2)	(-3;-1)
4	(-2;4)	(2;-6)	(5;2)	19	(3;4)	(-1;-6)	(-4;0)
5	(-1;-6)	(3;2)	(3;-2)	20	(1;-2)	(-3;6)	(0;2)
6	(-2;-7)	(6;-3)	(7;1)	21	(2;-1)	(-2;3)	(-6;1)
7	(-2;1)	(-4;-7)	(3;3)	22	(6;-4)	(2;4)	(-3;1)
8	(1;2)	(3;-6)	(-4;-1)	23	(2;-5)	(-8;-3)	(0;4)
9	(4;5)	(2;-3)	(-3;0)	24	(7;-5)	(-3;-3)	(2;1)
10	(5;-6)	(7;2)	(-8;-3)	25	(4;-5)	(6;1)	(-1;2)
11	(-5;-4)	(-1;4)	(6;-1)	26	(5;3)	(-1;-3)	(-3;4)
12	(-3;2)	(7;4)	(1;-5)	27	(3;1)	(-5;7)	(-3;-3)
13	(-2;-5)	(-6;-3)	(6;1)	28	(1;3)	(-5;7)	(0;-3)
14	(6;2)	(-2;4)	(-4;-5)	29	(-3;3)	(3;-1)	(-1;4)
15	(2;-4)	(-2;2)	(4;-3)	30	(3;7)	(-1;-3)	(-3;2)

Завдання 2. У прямокутній системі координат Oxy лінія другого порядку l визначається вказаною її характеристичною властивістю: для кожної точки $M(x;y)$ лінії l відношення відстаней до заданої точки $M_0(x_0;y_0)$ і до заданої прямої l_0 дорівнює заданому числу ε. Знайти загальне рівняння $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ цієї лінії l.

№ в-та	M_0	l_0	ε	№ в-та	M_0	l_0	ε
1	(2; 3)	$x=-5$	4	16	(-7; 2)	$x=-1$	3
2	(-2; 4)	$x=4$	1/2	17	(-2; -5)	$x=3$	1/4
3	(4; 3)	$x=6$	2	18	(5; -2)	$y=2$	1/2

4	(2; -3)	$x=-1$	3	19	(-4; 3)	$x=-7$	2
5	(1; -4)	$y=-6$	1/4	20	(3; -7)	$y=-2$	1/2
6	(-2; 4)	$y=3$	2	21	(2; -8)	$x=4$	1/3
7	(6; 1)	$x=-5$	1/3	22	(-6; 5)	$x=5$	1/4
8	(7; 2)	$y=6$	1/3	23	(8; -3)	$y=-1$	4
9	(4; 1)	$y=-4$	3	24	(-4; -8)	$y=-4$	1
10	(2; 3)	$x=-4$	2	25	(2; 3)	$y=-4$	2
11	(5; 6)	$x=-3$	1	26	(-5; -8)	$x=3$	1
12	(-5; 1)	$y=8$	2	27	(6; -7)	$y=1$	1/2
13	(-2; 7)	$y=-6$	1	28	(-3; 7)	$x=-2$	1/4
14	(-3; -5)	$x=8$	1/2	29	(7; -4)	$y=2$	3
15	(-6; -3)	$y=-5$	1/3	30	(4; -7)	$y=2$	2

Завдання 3. У прямокутній системі координат Oxy коло l задане своїм загальним рівнянням вигляду $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$, де відсутній член з добутком координат xy. Привести задане рівняння кола до відповідного стандартного вигляду $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ і знайти координати центра $C(x_0\,;y_0)$ і радіус R. Зобразити задане коло l у прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	Рівняння кола
1	$4x^2+4y^2-18x-8y-23=0$
2	$3x^2+3y^2+2x-6y-1=0$
3	$4x^2+4y^2+6x+12y-11=0$
4	$4x^2+4y^2-6x+16y-11=0$
5	$5x^2+5y^2-20x-3y-5=0$

6	$7x^2+7y^2+28x-14y-4=0$
7	$2x^2+2y^2+14x+5y-6=0$
8	$5x^2+5y^2-30x+10y-1=0$
9	$4x^2+4y^2-3x-36y-6=0$
10	$4x^2+4y^2+24x-10x-3=0$
11	$6x^2+6y^2+6x-8y-5=0$
12	$5x^2+5y^2-25x-10y-1=0$
13	$2x^2+2y^2+16x-3y-6=0$
14	$4x^2+4y^2-2x-16y+3=0$
15	$3x^2+3y^2-18x-4y+4=0$
16	$5x^2+5y^2-6x+10y-6=0$
17	$3x^2+3y^2-6x-4y-11=0$
18	$2x^2+2y^2-18x+7y-1=0$
19	$4x^2+4y^2-8x-7y-12=0$
20	$3x^2+3y^2-15x+8y-9=0$
21	$6x^2+6y^2-4x+12y+5=0$
22	$5x^2+5y^2+20x-2y-15=0$
23	$4x^2+4y^2+8x-10y-3=0$
24	$3x^2+3y^2-18x-8y-12=0$
25	$2x^2+2y^2-12x+7y-6=0$
26	$7x^2+7y^2+14x+7y-3=0$
27	$4x^2+4y^2-8x+18y-5=0$
28	$5x^2+5y^2+10x-15y-2=0$
29	$3x^2+3y^2-4x-12y+2=0$
30	$2x^2+2y^2-16x-7y+3=0$

Завдання 4. У прямокутній системі координат Oxy еліпс l заданий своїм загальним рівнянням вигляду $Ax^2 + By^2 + F = 0$, де відсутні лінійні члени відносно координат x і y, а також член з добутком координат xy. Привести задане рівняння еліпса до відповідного канонічного вигляду $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ і знайти велику a та малу b півосі, координати фокусів $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ і ексцентриситет ε. Зобразити заданий еліпс l у прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	Рівняння еліпса	№ в-та	Рівняння еліпса
1	$x^2+16y^2-144=0$	16	$4x^2+49y^2-196=0$
2	$4x^2+9y^2-144=0$	17	$9x^2+49y^2-1764=0$
3	$25x^2+144y^2-3600=0$	18	$25x^2+81y^2-2025=0$
4	$49x^2+81y^2-3969=0$	19	$49x^2+64y^2-3136=0$
5	$4x^2+81y^2-324=0$	20	$16x^2+81y^2-1296=0$
6	$16x^2+49y^2-3136=0$	21	$4x^2+49y^2-784=0$
7	$49x^2+144y^2-196=0$	22	$49x^2+144y^2-784=0$
8	$9x^2+169y^2-169=0$	23	$25x^2+169y^2-676=0$
9	$49x^2+225y^2-900=0$	24	$25x^2+49y^2-4900=0$
10	$4x^2+169y^2-169=0$	25	$4x^2+225y^2-900=0$
11	$9x^2+256y^2-1024=0$	26	$169x^2+225y^2-4225=0$
12	$16x^2+225y^2-3600=0$	27	$49x^2+225y^2-900=0$
13	$64x^2+225y^2-225=0$	28	$16x^2+169y^2-2704=0$
14	$25x^2+256y^2-6400=0$	29	$81x^2+256y^2-324=0$
15	$81x^2+169y^2-1521=0$	30	$144x^2+169y^2-6084=0$

Завдання 5. У прямокутній системі координат Oxy гіпербола l задана своїм загальним рівнянням вигляду $Ax^2 + By^2 + F = 0$, де відсутні лінійні члени відносно координат x і y, а також член з добутком координат xy. Привести задане рівняння гіперболи до відповідного канонічного вигляду $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ і знайти дійсну a та уявну b півосі, координати фокусів $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ і ексцентриситет ε, а також рівняння асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$. Зобразити задану гіперболу l та її асимптоти в прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	Рівняння гіперболи	№ в-та	Рівняння гіперболи
1	$9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$	16	$x^2 - 9y^2 - 36 = 0$
2	$4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$	17	$9x^2 - 49y^2 - 441 = 0$
3	$x^2 - 4y^2 - 16 = 0$	18	$9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$
4	$x^2 - 16y^2 - 64 = 0$	19	$x^2 - 25y^2 - 100 = 0$
5	$4x^2 - 25y^2 - 100 = 0$	20	$16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$
6	$x^2 - 49y^2 - 49 = 0$	21	$4x^2 - 49y^2 - 196 = 0$
7	$x^2 - 49y^2 - 196 = 0$	22	$x^2 - 49y^2 - 441 = 0$
8	$9x^2 - 49y^2 - 1764 = 0$	23	$25x^2 - 49y^2 - 1225 = 0$
9	$x^2 - 36y^2 - 36 = 0$	24	$25x^2 - 36y^2 - 900 = 0$
10	$25x^2 - 36y^2 - 3600 = 0$	25	$25x^2 - 36y^2 - 8100 = 0$
11	$x^2 - 16y^2 - 256 = 0$	26	$x^2 - 16y^2 - 1600 = 0$
12	$36x^2 - 49y^2 - 1764 = 0$	27	$9x^2 - 64y^2 - 576 = 0$
13	$9x^2 - 64y^2 - 2304 = 0$	28	$x^2 - 64y^2 - 256 = 0$
14	$25x^2 - 64y^2 - 2500 = 0$	29	$25x^2 - 64y^2 - 6400 = 0$
15	$49x^2 - 64y^2 - 3136 = 0$	30	$49x^2 - 64y^2 - 784 = 0$

Завдання 6. У прямокутній системі координат Oxy парабола l задана своїм загальним рівнянням вигляду $By^2 - Dx = 0$, де $B > 0,\ D > 0$ і відсутні лінійні члени відносно координат x і y, а також член з добутком координат xy і член з x^2. Привести задане рівняння параболи до відповідного канонічного вигляду $y^2 = 2px$ і знайти значення параметра p і координати фокуса $F(p/2;0)$, а також рівняння директриси $x = -p/2$. Зобразити задану параболу l та її директрису в прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	Рівняння параболи	№ в-та	Рівняння параболи
1	$3y^2 - 10x = 0$	16	$2y^2 - 17x = 0$
2	$5y^2 - 24x = 0$	17	$4y^2 - 15x = 0$
3	$8y^2 - 27x = 0$	18	$6y^2 - 29x = 0$
4	$4y^2 - 25x = 0$	19	$2y^2 - 27x = 0$
5	$3y^2 - 32x = 0$	20	$3y^2 - 16x = 0$
6	$6y^2 - 25x = 0$	21	$4y^2 - 15x = 0$
7	$2y^2 - 15x = 0$	22	$3y^2 - 16x = 0$
8	$5y^2 - 12x = 0$	23	$8y^2 - 45x = 0$
9	$3y^2 - 22x = 0$	24	$5y^2 - 32x = 0$
10	$4y^2 - 9x = 0$	25	$6y^2 - 19x = 0$
11	$6y^2 - 35x = 0$	26	$4y^2 - 21x = 0$
12	$4y^2 - 45x = 0$	27	$4y^2 - 27x = 0$
13	$5y^2 - 36x = 0$	28	$3y^2 - 28x = 0$
14	$8y^2 - 25x = 0$	29	$9y^2 - 64x = 0$
15	$3y^2 - 20x = 0$	30	$4y^2 - 35x = 0$

Завдання 7. Лінія l задана в полярній системі координат рівнянням у явній формі $\rho = \rho(\varphi)$. Знайти точки даної лінії, що відповідають значенням аргументу φ, взятим через інтервал $\pi/8$, починаючи з $\varphi = 0$, на проміжку $0 \le \varphi \le 2\pi$ (головні значення полярних координат). Заповнити таблицю

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$
ρ										

φ	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
ρ							

Побудувати знайдені точки в полярній системі координат і одержати зображення заданої кривої l, сполучивши послідовно ці точки суцільною лінією.

Примітка: Розрахунки вести з точністю до двох значущих знаків.

№ в-та	Рівняння лінії	№ в-та	Рівняння лінії
1	$\rho = 1 + \sin 2\varphi$	16	$\rho = 1 + \cos 2\varphi$
2	$\rho = 4/(3 - \cos 2\varphi)$	17	$\rho = 6/(3 + \cos\varphi)$
3	$\rho = 4(1 - \sin\varphi)$	18	$\rho = 8(1 + \cos(\varphi/2))$
4	$\rho = 6/(2 + \cos\varphi)$	19	$\rho = 5/(4 - 3\sin\varphi)$
5	$\rho = 2 + \sin^3(\varphi/2)$	20	$\rho = 4\sin^3(\varphi/2)$
6	$\rho = 4 + 2\sqrt[3]{\cos\varphi}$	21	$\rho = 3 + 2\sqrt[3]{\sin\varphi}$
7	$\rho = 3 + 2\cos^3\varphi$	22	$\rho = 1 + 4\cos^2\varphi$
8	$\rho = 2 + \sqrt[3]{\cos(\varphi/2)}$	23	$\rho = 1 + \sin^2(\varphi/2)$
9	$\rho = 3(1 + \cos 2\varphi)$	24	$\rho = 4(1 - \cos 2\varphi)$
10	$\rho = 6(1 + \sin\varphi)$	25	$\rho = 2 + \cos^3(\varphi/3)$

11	$\rho = 6 - 4\cos^2\varphi$	26	$\rho = 5 - 4\sin^2\varphi$
12	$\rho = 2 - \sqrt[3]{\cos 2\varphi}$	27	$\rho = 2 + \cos^3\varphi$
13	$\rho = 2 + \sin^3(\varphi/3)$	28	$\rho = 2 - \sin^2(\varphi/3)$
14	$\rho = 4 + \cos^3(\varphi/3)$	29	$\rho = 3 - 2\sin^2(\varphi/3)$
15	$\rho = 6/(2 + \cos^3\varphi)$	30	$\rho = 4/(2 - \sin^3\varphi)$

Завдання 8. Лінія l задана в декартовій прямокутній системі координат Oxy параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Знайти точки даної лінії, що відповідають значенням параметра t, взятим через інтервал $\pi/8$, починаючи з $t = 0$, на проміжку $0 \le t \le 2\pi$. Заповнити таблицю

t	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$
x										
y										

t	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
x							
y							

Побудувати знайдені точки в декартовій прямокутній системі координат Oxy і одержати зображення заданої кривої l, сполучивши послідовно отримані точки суцільною лінією.

Примітка: Розрахунки вести з точністю до двох значущих знаків.