3.3.1. Оператор Гамільтона у скалярному полі

Нехай задано скалярне поле $u = u(x, y, z)$.

Застосуємо до функції $u = u(x, y, z)$ оператор "набла" за правилами множення вектора на число:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = grad\, u .$$

Отже, $\boxed{grad\, u = \nabla u}$.

<u>Приклад</u>. Нехай $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Знайти

а) $grad\,|\vec{r}|$; б) $grad\left(1/|\vec{r}|\right)$.

□ $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $grad\,|\vec{r}| = \nabla|\vec{r}| =$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{i} +$$

$$+ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{k} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} .$$

б) Розв’язати самостійно. Відповідь: $grad\left(1/|\vec{r}|\right) = -\vec{r}/|\vec{r}|^3$ ■

Застосування "набла"-оператора до суми скалярних полів здійснюється за правилами чисельного добутку $\boxed{\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v}$.

Наприклад,

$$grad\left(|\vec{r}| + 1/|\vec{r}|\right) = \nabla\left(|\vec{r}| + 1/|\vec{r}|\right) = \nabla|\vec{r}| + \nabla\left(1/|\vec{r}|\right) = \vec{r}/|\vec{r}| - \vec{r}/|\vec{r}|^3 .$$

3.3.2. Оператор Гамільтона у векторному полі

Нехай задано векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} .$$

Застосуємо оператор Гамільтона до цього векторного поля за правилами множення векторів. Оскільки добуток двох векторів може бути або скалярним, або векторним, то розглянемо спочатку скалярний добуток:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot \left(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \right) =$$

$= \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z = div\,\vec{F}$. Отже, $\boxed{div\,\vec{F} = \nabla \vec{F}}$.

Розглянемо тепер векторний добуток:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \times \left(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} \right) =$$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot\,\vec{F}$. Отже, $\boxed{rot\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F}}$.

Застосування оператора Гамільтона до суми векторних полів здійснюється за правилами відповідно скалярного чи векторного добутку:

$$\boxed{\nabla \cdot \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \right) = \nabla \cdot \vec{F}_1 + \nabla \cdot \vec{F}_2}; \quad \boxed{\nabla \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \right) = \nabla \times \vec{F}_1 + \nabla \times \vec{F}_2}.$$

3.3.3. Диференціальні операції другого порядку

Ми розглянули ***диференціальні операції першого порядку***: $grad\,u = \nabla u$, $div\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$, $rot\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$. Після їх застосування до поля виникає нове поле, до якого знову можна вжити ці операції. У результаті маємо ***диференціальні операції другого порядку***. Таких операцій існує лише п'ять, їх можна записати через "набла"-оператор.

Для скалярного поля $u = u(x, y, z)$ маємо:

$$div\,grad\,u = \nabla \cdot \nabla u\,; \quad rot\,grad\,u = \nabla \times \nabla u = \vec{0}.$$

Для векторного поля $\vec{F}$ маємо: $grad\,div\,\vec{F} = \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \vec{F} \right)$;

$$div\,rot\,\vec{F} = \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{F} \right) = 0\,; \quad rot\,rot\,\vec{F} = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{F} \right).$$

Розглянемо ці операції докладніше. Обчислимо

$$div\,grad\,u = \nabla \cdot \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\Bigg)u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{i}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{j}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{k}\right)u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Оператор $\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$ позначається через Δ ("дельта") і називається ***оператором Лапласа*** (***лапласіаном***):

$$\boxed{\Delta=\nabla^2=\nabla\cdot\nabla};\quad \boxed{\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \text{ або } \boxed{div\, grad\, u=\Delta u}.$$

Як відомо, векторний добуток $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, тому

$rot\, grad\, u=\nabla\times\nabla u=\vec{0}$. *Поле градієнта є безвихровим.*

Зокрема, в електротехніці для поля потенціалу $rot\, grad\, u=\vec{0}$.

Якщо в мішаному добутку векторів є два однакових вектори, то він дорівнює нулю. Тому

$div\, rot\,\vec{F}=\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=0$. *Поле вихору – соленоїдальне.*

Приклад. Для скалярного поля $u=y^2z-xyz+x^2-3$ знайти його градієнт $\vec{a}=grad\, u$ і лапласіан Δu. Перевірити, що векторне поле градієнтів $\vec{a}=grad\, u$ є потенціальним ($rot\,\vec{a}=\vec{0}$). Для потенціального векторного поля $\vec{a}$ знайти його потенціал $v=v(x,y,z)$ за допомогою криволінійного інтеграла за координатами

$$v(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz,$$

де за фіксовану точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ взяти початок координат $O(0,0,0)$ і покласти $v(0,0,0)=0$.

□ $\vec{a}=grad\, u=\nabla u=\frac{\partial}{\partial x}(y^2z-xyz+x^2-3)\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}(y^2z-xyz+$

$+x^2-3)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}(y^2z-xyz+x^2-3)\vec{k}=(2x-yz)\vec{i}+(2yz-xz)\vec{j}+$

$+(y^2-xy)\vec{k}$; $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\nabla\vec{a}=\frac{\partial}{\partial x}(2x-yz)+$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(2yz-xz)+\frac{\partial}{\partial z}(y^2-xy)=2+2z+0=2+2z\,;$$

$$rot\,\overrightarrow{a}=\nabla\times\overrightarrow{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 2x-yz & 2yz-xz & y^2-xy\end{vmatrix}=$$

$$=\big((2y-x)-(2y-x)\big)\,\vec{i}-(-y+y)\,\vec{j}+(-z+z)\vec{k}=\vec{0}\,;$$

$$v(x,y,z)=\int_0^x P(x,0,0)\,dx+\int_0^y Q(x,y,0)\,dy+\int_0^z R(x,y,z)\,dz+C=$$

$$=\int_0^x(2x-0\cdot 0)\,dx+\int_0^y(2y\cdot 0-x\cdot 0)\,dy+\int_0^z(y^2-xy)\,dz+C=$$

$$=x^2\Big|_0^x+0+(y^2-xy)\cdot z\Big|_0^z+C=x^2+(y^2-xy)z+C\,;$$

$$v(0,0,0)=0:\ \ C=0\,;\quad v(x,y,z)=x^2+(y^2-xy)z\,.\ \ ■$$

3.4. Поверхневий інтеграл за площею

3.4.1. Поняття поверхневого інтеграла за площею (першого роду)

Поверхня σ називається ***двосторонньою***, якщо обхід по довільному замкненому контуру, що лежить на поверхні σ і не має спільних точок з її межею, не змінює напряму нормалі до поверхні. Якщо ж дана умова не виконується, тобто існує замкнений контур, при обході вздовж якого напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхня називається ***односторонньою***.

Двосторонню поверхню називають ***орієнтовною***, а вибір певної сторони поверхні, якій відповідає певний напрямок нормалі, називається ***орієнтацією*** поверхні.

Наприклад, круговий конус, еліптичний циліндр, довільна замкнена поверхня без самоперетину (сфера, еліпсоїд, ...) – двосторонні поверхні, а лист Мебіуса (рис. 105) – одностороння поверхня.

Для двосторонньої поверхні σ сторона σ^+, якій відповідає додатний напрям нормалі, називається ***додатною*** (***зовнішньою***), а

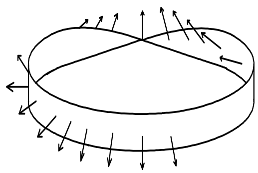

Рис. 105

інша сторона σ^{-} – ***від'ємною*** (***внутрішньою***). Для замкненої поверхні за додатну (зовнішню) приймається та сторона, що відповідає вектору нормалі, напрямленому назовні.

<u>Зауваження 1</u>. Надалі розглядатимемо лише кусково-гладкі двосторонні поверхні.

Нехай у просторі задано деяку область V і в цій області – поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Нехай на поверхні σ визначено деяку неперервну скалярну функцію $u = u(x, y, z)$. Інакше кажучи, розглянемо скалярне поле $u = u(x, y, z)$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожного частинного майданчика $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i) \in \Delta\sigma_i$, обчислимо значення заданої функції в цій точці $u\left(\overline{M}_i\right) = u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)$ і помножимо це значення на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму $\sum_{i=1}^{n} u\left(\overline{M}_i\right)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta\sigma_i$.

Одержаний вираз називається ***інтегральною сумою*** для функції $u = u(x, y, z)$ по поверхні σ.

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta\sigma_i$, *яка не залежить від способу розбиття поверхні* σ *та від вибору точок* $\overline{M}_i$, *за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається* ***поверхневим інтегралом за площею*** (***поверхневим інтегралом першого роду***) *від функції* $u = u(x, y, z)$ *по поверхні* σ:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} u(x, y, z)\, d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} u\left(\overline{M}_i\right)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta\sigma_i},$$

де $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$; d_i – діаметр i-го майданчика $\Delta\sigma_i$ (найбільша з відстаней між двома довільними точками його межі).

Якщо $\mu = \mu(x, y, z) \geq 0$ і функцію $\mu(x, y, z)$ розглядати як поверхневу густину маси, розподіленої по поверхні σ, то інтеграл виражає масу всієї поверхні: $\boxed{m = \iint_\sigma \mu(x,y,z)\,d\sigma}$ (фізичний зміст поверхневого інтеграла за площею).

Коли $u(x,y,z) \equiv 1$, то маємо площу поверхні σ: $\boxed{S = \iint_\sigma d\sigma}$.

Зауваження 2. *Поверхневий інтеграл за площею не залежить від вибору орієнтації поверхні* σ:

$$\boxed{\iint_{\sigma^-} u(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{\sigma^+} u(x,y,z)\,d\sigma}.$$

Інші властивості поверхневого інтеграла першого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

3.4.2. Обчислення поверхневого інтеграла за площею

Розглянемо інтеграл $\iint_\sigma u(x,y,z)\,d\sigma$. Припустимо, що поверхня σ правильна в напрямі осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x,y)$, де функція $z(x,y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 106). Покажемо, що в такому випадку обчислення інтеграла першого роду по поверхні σ зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}.

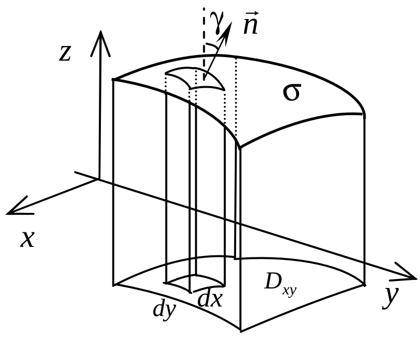

Рис. 106

Розглянемо елементарний майданчик $d\sigma$ на поверхні σ, який проектується на елемент $dS = dx\,dy$ області D_{xy}.

Проведемо нормаль $\vec{n}$ так, щоб вона утворила гострий кут γ з віссю Oz, тоді $\cos\gamma > 0$. Будемо вважати, що майданчик $d\sigma$ настільки малий, що в його межах нормаль не змінюється. Тоді площі елементарної частини $d\sigma$ та її проекції $dS = dx\,dy$ зв'язані співвідношенням

$dxdy = |\cos\gamma|\, d\sigma = \cos\gamma\, d\sigma$. Звідси $d\sigma = dxdy / \cos\gamma$.

З іншого боку, вибрана нормаль $\vec{n}$ до поверхні $z = z(x, y)$ має проекції $-z'_x, -z'_y, 1$. Тому $\cos\gamma = 1 \big/ \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$ і тоді $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$. Значить, інтеграл

$$\boxed{\iint_\sigma u(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} u\big(x; y; z(x; y)\big)\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy}.$$

<u>Зауваження 1</u>. Поклавши $u(x, y, z) \equiv 1$, для площі поверхні σ дістаємо формулу $\boxed{S = \iint_\sigma d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\,dy}$.

<u>Зауваження 2</u>. Може статися, що поверхня σ неправильна в напрямі осі Oz, але правильна в напрямі осі Oy чи Ox, тобто може бути подана явно у вигляді $y = y(x, z)$ чи $x = x(y, z)$. Тоді хід міркувань залишається тим же з тією лише різницею, що поверхню σ будемо проектувати на площину Oxz чи Oyz. При цьому змінні x, y і z міняються ролями. (Відповідні формули переходу до подвійного інтеграла запишіть самостійно). У загальному випадку поверхню σ треба розбити на правильні у вибраному напрямі частини.

<u>Приклад 1</u>. Обчислити поверхневий інтеграл за площею $\iint_\sigma (4x + 5z)\, d\sigma$, де σ – частина площини $p:\ 2x + 2y + 5z = 10$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Задачу розв'язати трьома способами, проектуючи поверхню σ на одну з координатних площин відповідно а) Oxy; б) Oyz; в) Oxz. До кожного способу зробити рисунок поверхні σ як правильної у вибраному напрямі (відповідно а) Oz, б) Ox чи в) Oy) і рисунок її проекції (відповідно а) D_{xy}. б) D_{yz} чи в) D_{xz}) як правильної в напрямі однієї з осей плоскої області.

□ а) Поверхню σ будемо розглядати як правильну в напрямі осі Oz, а її проекцію D_{xy} – як правильну в напрямі осі Oy плоску область (рис. 107). Тоді $\sigma: \ z = (10 - 2x - 2y)/5; \quad z'_x = -2/5;$

$$z'_y = -2/5; \quad D_{xy}: 0 \le x \le 5; \ 0 \le y \le 5 - x.$$

За формулою

$$\iint_\sigma u(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} u(x;y;z(x;y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy$$

дістаємо $\iint_\sigma (4x + 5z)\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left(4x + 5\cdot(10 - 2x - 2y)/5\right)\times$

$$\times\sqrt{1 + \left(-2/5\right)^2 + \left(-2/5\right)^2}\,dxdy = (1/5)\sqrt{33}\iint_{D_{xy}} (2x - 2y +$$

$$+10)\,dxdy = (1/5)\sqrt{33}\int_0^5 dx \int_0^{5-x} \left(2x - 2y + 10\right)dy = (1/5)\sqrt{33}\times$$

$$\times\int_0^5 (2xy - y^2 + 10y)\Big|_0^{5-x} dx = (1/5)\sqrt{33}\int_0^5 (2x(5-x) - (5-x)^2 +$$

$$+10(5-x))dx = (1/5)\sqrt{33}\int_0^5 (-3x^2 + 10x + 25)\,dx = (1/5)\sqrt{33}\times$$

$$\times(-x^3 + 5x^2 + 25x)\Big|_0^5 = 25\sqrt{33}.$$

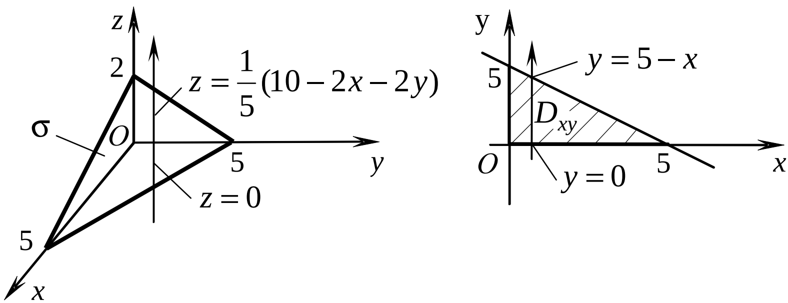

Рис. 107

(Способами б) і в) розв’язати самостійно). ■

Приклад 2. Обчислити масу m частини σ поверхні параболоїда обертання $2z = x^2 + y^2$, яка міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 4$, якщо поверхнева густина $\mu(x,y,z) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

□ σ: $z = x^2/2 + y^2/2$, звідки $z'_x = x$, $z'_y = y$.

Зводячи поверхневий інтеграл до подвійного, для шуканої маси поверхні дістанемо співвідношення

$$m = \iint_{D_{xy}} \mu(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dxdy,$$

де область D_{xy} - проекція вказаної частини σ поверхні параболоїда на площину Oxy. Область D_{xy} - круг радіуса $R = 2$ з центром у початку координат. Перейдемо до полярних координат:

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; \quad x^2 + y^2 = \rho^2; \quad dxdy = \rho d\rho d\varphi;$$

$$f(x,y) = \mu(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + x^2 + y^2} = \left((x^2 + y^2)\Big/\sqrt{1 + x^2 + y^2}\right)\times$$

$$\times\sqrt{1 + x^2 + y^2} = x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Тоді

$$m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2\,\rho\, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \rho^4\Big|_0^2 d\varphi = 4\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = 8\pi. \ \blacksquare$$

3.5. Поверхневий інтеграл за координатами

3.5.1. Поняття поверхневого інтеграла за координатами (другого роду). Потік векторного поля

Розглянемо деяку просторову область V, в якій задано поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Нехай вибрана сторона $\sigma^{\pm}$ (зафіксовано один певний знак “+” чи “-”) поверхні характеризується одиничним вектором нормалі

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},$$

де $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{n}$, $|\vec{n}|=1$.

Нехай на поверхні σ визначено деяку неперервну векторну функцію $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$. Інакше кажучи, розглянемо векторне поле $\vec{F}$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожного частинного майданчика $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \in \Delta\sigma_i$, обчислимо в цій точці значення заданої функції $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і нормалі $\vec{n}(\overline{M}_i)$, потім знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і $\vec{n}(\overline{M}_i)$, помножимо цей добуток на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\overline{M}_i)\cdot\vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i$.

Одержаний вираз називається ***інтегральною сумою*** для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x,y,z)$ по вибраній стороні $\sigma^{\pm}$ поверхні σ.

Скінченна границя інтегральної суми $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}(\overline{M}_i)\cdot\vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i$, *яка не залежить від способу розбиття поверхні* σ *та від вибору точок* $\overline{M}_i$, *за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається* ***поверхневим інтегралом за координатами*** (***поверхневим інтегралом другого роду***) *від вектор-функції* $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x,y,z)$ *по вибраній стороні* $\sigma^{\pm}$ *поверхні* σ:

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\overline{M}_i)\cdot\vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i},$$

де $\lambda = \max d_i,\ i=\overline{1,n}$; d_i – діаметр частинної поверхні $\Delta\sigma_i$.

Розглянемо докладніше i-й доданок. За означенням скалярного добутку: $\vec{F}(\overline{M}_i)\cdot\vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i = |\vec{F}(\overline{M}_i)|\cdot|\vec{n}(\overline{M}_i)|\cdot\cos\varphi\cdot\Delta\sigma_i =$

$$= |\vec{F}(\overline{M}_i)|\cdot\cos\varphi\cdot\Delta\sigma_i, \quad \varphi = \widehat{\vec{F}(\overline{M}_i), \vec{n}(\overline{M}_i)}.$$

Останній вираз допускає таке тлумачення: цей добуток визначає об'єм циліндра з основою $\Delta\sigma_i$ і висотою $|\vec{F}(\overline{M}_i)|\cdot\cos\varphi$ (рис. 108). Коли вважати, що векторне поле $\vec{F}$ є швидкість рідини, що протікає через поверхню σ, то цей добуток дорівнює кількості рідини, яка переміщується через частинний майданчик $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу в напрямі вектора $\vec{F}\left(\overline{M}_i\right)$. Інтеграл $\iint_{\sigma^\pm} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ визначає загальну кількість рідини, що протікає за одиницю часу через вибрану сторону $\sigma^\pm$ поверхні σ.

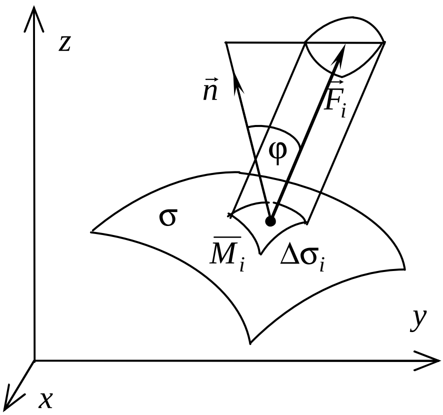

Рис. 108

Тому поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^\pm} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ також називають ***потоком векторного поля*** $\vec{F}$ через вибрану сторону $\sigma^\pm$ поверхні σ:

$$\boxed{\Pi^\pm = \iint_{\sigma^\pm} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma}$$

(фізичний зміст поверхневого інтеграла за координатами).

Якщо поверхня σ замкнена, то інтеграл по ній записується так $\oiint_{\sigma^\pm} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$.

Зауваження 1. Якщо всюди на поверхні σ векторне поле $\vec{F}$ дотичне до неї ($\vec{F}\perp\vec{n}$) (тобто, σ є ***векторною поверхнею***, що утворюється з векторних ліній), то потік через неї дорівнює нулю:

$$\iint_{\sigma^\pm} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^\pm} 0\,d\sigma = 0.$$

Зауваження 2. *При зміні орієнтації поверхні* σ *поверхневий інтеграл за координатами тільки змінює знак*:

$$\boxed{\iint_{\sigma^-} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = -\iint_{\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma},$$

оскільки при цьому одиничний вектор нормалі $\vec{n}$ змінює знак. Інші властивості поверхневого інтеграла першого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

Якщо виразити скалярний добуток у координатній формі, то одержимо співвідношення

$$\boxed{\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma},$$

що відображає ***зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду***.

Векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна подати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно поверхневий інтеграл можна розбити на три інтеграли-доданки:

$$\Pi^{\pm} = \iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P\vec{i}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint_{\sigma^{\pm}} Q\vec{j}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint_{\sigma^{\pm}} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma .$$

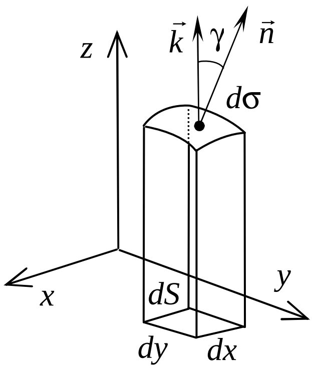

Рис. 109

Розглянемо останній з інтегралів $\iint_{\sigma^{\pm}} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma$. Обчислимо скалярний добуток $\vec{k}\cdot\vec{n} = |\vec{k}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\gamma = \cos\gamma$ (рис. 109). Далі $\cos\gamma\,d\sigma$ є проекція $dS = dx\,dy$ елементарного майданчика $d\sigma$ на площину Oxy: $\cos\gamma\,d\sigma = dxdy$, тому $\iint_{\sigma^{\pm}} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} R\,dxdy$.

Аналогічно $\cos\alpha\,d\sigma = dydz$, $\cos\beta\,d\sigma = dxdz$. Тоді

$$\iint_{\sigma^{\pm}} P\vec{i}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P\,dydz\,; \quad \iint_{\sigma^{\pm}} Q\vec{j}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz .$$

Отримані три інтеграли

$$\boxed{I_x = \iint_{\sigma^{\pm}} P\,dydz}, \quad \boxed{I_y = \iint_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz}, \quad \boxed{I_z = \iint_{\sigma^{\pm}} R\,dxdy}$$

називаються ***поверхневими інтегралами за відповідною парою координат*** (y,z) ***або*** (x,z), ***або*** (x,y). ***Повний поверхневий інтеграл за координатами*** $\Pi^{\pm} = I_x + I_y + I_z$ записується так

$$\boxed{\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy},$$

де для скорочення запису в підінтегральному виразі опущені зовнішні дужки.

Зауваження 3. Виділимо два важливі випадки, коли поверхневий інтеграл $I_z = \iint_{\sigma^\pm} R\,dxdy$ за парою координат (x, y) дорівнює нулю:

а) якщо $R = 0$ всюди на поверхні σ, тобто векторне поле $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + 0\vec{k}$ є ***плоскопаралельним*** (вектор $\vec{F}$ паралельний одній площині Oxy), при цьому $\vec{F} \perp \vec{k}$;

б) якщо $\vec{k} \perp \vec{n}$ всюди на поверхні σ, тобто σ є циліндричною поверхнею з твірними, що паралельні осі Oz, при цьому її проекцією D_{xy} на площину Oxy служить деяка лінія – фігура нульової площі.

Аналогічні твердження справедливі для поверхневих інтегралів $I_x = \iint_{\sigma^\pm} P\,dydz$ і $I_y = \iint_{\sigma^\pm} Q\,dxdz$.

3.5.2. Обчислення поверхневого інтеграла за координатами

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду зводиться до обчислення подвійних інтегралів по плоских областях.

Можна спочатку перейти до поверхневого інтеграла першого роду , а потім спроектувати поверхню σ на одну з координатних площин і перейти до подвійного інтеграла.

Але, як правило, зручніше спроектувати поверхню σ на всі три координатні площини і безпосередньо перейти до відповідних подвійних інтегралів. Для цього треба розбити повний інтеграл на складові частини і кожну з них розглянути окремо.

Метод проектування на одну з координатних площин. Нехай поверхня σ правильна в напрямі осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 110). Тоді для напрямних косинусів одиничного вектора нормалі $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ справедливі співвідношення:

$$\cos\alpha = -z'_x \Big/ \left(\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\right);$$

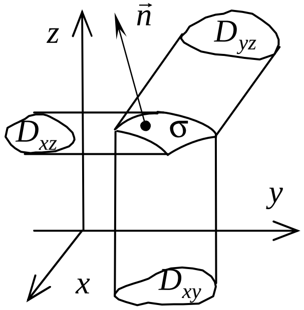

Рис. 110

$$\cos\beta = -z'_y \Big/ \left(\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\right);$$

$$\cos\gamma = 1 \Big/ \left(\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\right),$$

де перед квадратним коренем береться один певний знак "+" чи "-" у залежності від орієнтації поверхні.

Площі елементарного майданчика $d\sigma$ та його проекції $dS = dx\,dy$ зв'язані рівністю:

$$d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy\,.$$

Відповідно для поверхневого інтеграла маємо:

у векторній формі $\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \left[(\vec{F},\vec{n})/|\cos\gamma|\right]\Big|_{z=z(x,y)} dxdy$

або в координатній формі

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma =}$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{-z'_x\,P}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} + \frac{-z'_y\,Q}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{R}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} \right) \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy =$$

$$\boxed{= \pm\iint\limits_{D_{xy}} \left(-z'_x(x,y)P(x,y,z(x,y)) - z'_y(x,y)Q(x,y,z(x,y)) + \right.}$$

$$\boxed{\left. + R(x,y,z(x,y))\right)dx\,dy}\,.$$

Таким чином, обчислення поверхневого інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \geq 0$ (кут

γ між нормаллю $\vec{n}$ і вибраною віссю Oz – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma \le 0$ (кут γ – тупий).

Зауваження 1. Аналогічно розглядаються випадки поверхонь, що правильні в напрямі осей Ox чи Oy. При цьому змінні x, y і z міняються ролями. (Відповідні формули переходу до подвійного інтеграла запишіть самостійно).

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл за координатами

$$I = \iint_{\sigma^-} (xy/z - 3)\,dydz - \big(z/(yx)\big)\,dxdz + (2z/x)\,dxdy$$

методом проектування на одну координатну площину. Тут σ^- – внутрішня сторона частини поверхні гіперболічного параболоїда $z = xy$, що відсікається площинами $z = 0$ і $2x + y - 2 = 0$, відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ утворює з віссю Oz тупий кут γ.

□ Задана поверхня зображена на рис. 111. Поверхня σ – правильна в напрямі осі Oz і задається явно рівнянням $z = xy$. Прямокутний трикутник D_{xy} - її проекція на площину Oxy. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак мінус, оскільки кут γ – тупий. Тоді σ^- : $z = xy$; $z'_x = y$; $z'_y = x$; D_{xy}: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2 - 2x$;

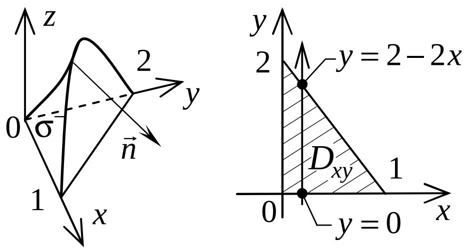

Рис. 111

$$I = \iint_{\sigma^-} (xy/z - 3)\,dydz - \big(z/(yx)\big)\,dxdz + (2z/x)\,dxdy =$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \big(-y(xy/(xy) - 3) - x\big(-xy/(yx)\big) + (2xy/x)\big)\,dxdy =$$

$$= -\iint_{D_{xy}} (4y + x)\,dxdy = -\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (4y + x)\,dy = -\int_0^1 (2y^2 +$$

$$+ xy)\Big|_0^{2-2x} dx = -\int_0^1 (6x^2 - 14x + 8)\,dx = -(2x^3 - 7x^2 + 8x)\Big|_0^1 = -3\,. \ \blacksquare$$

Метод проектування на всі три координатні площини. Нехай поверхня σ правильна в усіх трьох напрямах Ox, Oy, Oz. Зокрема, її можна задати явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функцію $z(x, y)$ будемо вважати неперервною зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 110).

Якщо $dS = dx\,dy$ - площа проекції елементарного майданчика $d\sigma$ на площину Oxy, то площа самого майданчика

$$d\sigma = dxdy/|\cos\gamma| = \pm dxdy/\cos\gamma,$$

де береться один певний знак "+" чи "-" у залежності від орієнтації поверхні. Тоді для поверхневого інтеграла $I_z = \iint_{\sigma^\pm} R\,dxdy$ маємо:

$$\boxed{I_z = \iint_{\sigma^\pm} R\,dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,dxdy},$$

тобто обчислення поверхневого інтеграла за парою координат (x, y) зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \geq 0$ (кут γ – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma \leq 0$ (кут γ – тупий).

Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли $I_x = \iint_{\sigma^\pm} P\,dydz$ і $I_y = \iint_{\sigma^\pm} Q\,dxdz$ за відповідною парою координат (y, z) чи (x, z):

$$\boxed{I_x = \iint_{\sigma^\pm} P\,dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\,dydz};$$

$$\boxed{I_y = \iint_{\sigma^\pm} Q\,dxdz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)\,dxdz},$$

де D_{yz} і D_{xz} – проекції поверхні σ на координатні площини відповідно Oyz і Oxz. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо кут між нормаллю $\vec{n}$ і координатною віссю відповідно Ox чи Oy – гострий, чи знак мінус, якщо цей кут – тупий.

Повний поверхневий інтеграл за координатами знаходиться як сума отриманих подвійних інтегралів

$$\boxed{\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = I_x + I_y + I_z}.$$

<u>Зауваження 2</u>. У загальному випадку поверхню σ доводиться розбивати на правильні у вибраному напрямі частини.

<u>Приклад 2.</u> Методом проектування на всі три координатні площини обчислити потік векторного поля $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ через зовнішню сторону σ^+ поверхні σ, відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ якої утворює з віссю Oz гострий кут γ:

$$\vec{F} = \frac{x^2}{\sqrt{y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{\pi x}{x^2+y^2+z^2}\vec{j} + \frac{1-z^2}{x^2+y^2}\vec{k};$$

$$\sigma:\ x^2+y^2+z^2=1 \quad (x\ge 0,\ y\le 0,\ z\ge 0).$$

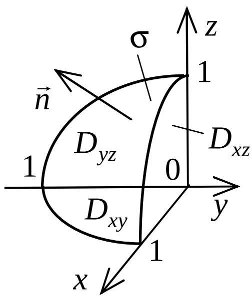

Рис. 112

□ Поверхня σ є восьмою частиною сфери одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 112). Вона правильна в усіх трьох напрямах Ox, Oy і Oz. При цьому нормаль $\vec{n}$ до вибраної сторони σ^+ з осями Ox і Oz утворює гострі кути α і γ, а з віссю Oy – тупий кут β. Позначимо проекції σ на координатні площини відповідно D_{yz}, D_{xz} і D_{xy}, які будуть чвертями кругів радіуса $R=1$. Поверхню σ можна задати явно відповідно одним з рівнянь

$$x=\sqrt{1-y^2-z^2}, \quad y=-\sqrt{1-x^2-z^2} \quad \text{чи} \quad z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три складові частини за відповідною парою координат (y,z), (x,z) і (x,y):

$$\Pi = \iint_{\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = I_x + I_y + I_z,$$

де $I_x = \iint\limits_{\sigma^+} \frac{x^2\,dydz}{\sqrt{y^2+z^2}}$; $I_y = \iint\limits_{\sigma^+} \frac{\pi x\,dxdz}{x^2+y^2+z^2}$; $I_z = \iint\limits_{\sigma^+} \frac{1-z^2}{x^2+y^2}dxdy$,

і обчислимо окремо кожний з інтегралів-доданків:

$$I_x=\iint\limits_{\sigma^+}\frac{x^2\,dydz}{\sqrt{y^2+z^2}}=+\iint\limits_{D_{yz}}\frac{1-y^2-z^2}{\sqrt{y^2+z^2}}dydz=\left|\begin{array}{l} y=\rho\cos\varphi;\\ z=\rho\sin\varphi;\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} y^2+z^2=\rho^2;\\ dydz=\rho\,d\rho\,d\varphi\end{array}\right|=\iint\limits_{D_{yz}}\frac{1-\rho^2}{\rho}\rho\,d\rho d\varphi=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_0^1(1-\rho^2)\,d\rho=$$

$$=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(\rho-\rho^3/3)\Big|_0^1\,d\varphi=\frac{2}{3}\cdot\varphi\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{\pi}{3};$$

$$I_y=\iint\limits_{\sigma^+}\frac{\pi x\,dxdz}{x^2+y^2+z^2}=-\iint\limits_{D_{xz}}\frac{\pi x\,dxdz}{x^2+(1-x^2-z^2)+z^2}=-\pi\iint\limits_{D_{xz}}x\,dxdz=$$

$$=\Big|\,x=\rho\cos\varphi;\ z=\rho\sin\varphi;\ x^2+z^2=\rho^2;\ dxdz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,\Big|=$$

$$=-\pi\iint\limits_{D_{xz}}\rho\cos\varphi\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi=-\pi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\,d\rho=$$

$$=-\pi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\cdot(\rho^3/3)\Big|_0^1\,d\varphi=-\frac{1}{3}\pi\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{\pi}{3};$$

$$I_z=\iint\limits_{\sigma^+}\frac{1-z^2}{x^2+y^2}dxdy=+\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1-(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=\frac{\pi}{4}$$

(це просто площа чверті круга).

Отже, $\Pi=I_x+I_y+I_z=\pi/3-\pi/3+\pi/4=\pi/4$. ■

<u>Приклад 3</u>. Методом проектування на всі три координатні площини обчислити потік векторного поля $\vec{F}=\Big(x(16-y^2)^{1/2}\Big/(x^2+y^2+4z^2)\Big)\vec{i}+xy^2z\,\vec{j}+xyz\,\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ частини поверхні кругового циліндра $x^2+y^2=16$, що відтинається площинами $z=0$, $z=2$.

□ Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три складові частини за відповідними парами координат (y,z), (x,z) і (x,y):

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma^+} \left(x(16 - y^2)^{1/2} \big/ (x^2 + y^2 + 4z^2) \right) dydz +$$

$$+ xy^2 z\, dxdz + xyz\, dxdy = I_x + I_y + I_z$$

і обчислимо окремо кожний з інтегралів I_x, I_y і I_z.

Поверхня σ (рис. 113) неправильна в усіх трьох напрямах Ox, Oy і Oz. Її проекцією D_{xy} на площину Oxy є лінія (коло $x^2 + y^2 = 16$) – фігура нульової площі. Тому останній з інтегралів-доданків дорівнює нулю: $I_z = \iint_{\sigma^+} xyz\, dxdy = 0$.

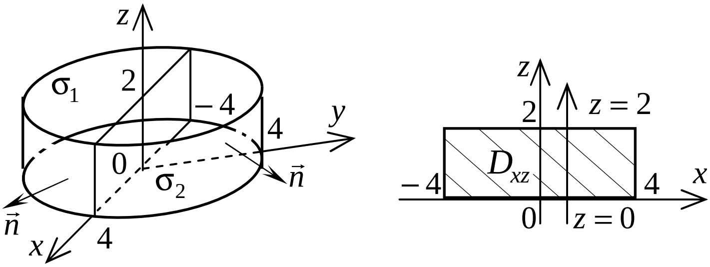

Рис. 113

Розглянемо другий інтеграл $I_y = \iint_{\sigma^+} xy^2 z\, dxdz$. Поверхня σ координатною площиною $y = 0$ розбивається на дві правильні в напрямі осі Oy частини: ліву $\sigma_{y1}: y = -\sqrt{16 - x^2}$ і праву $\sigma_{y2}: y = \sqrt{16 - x^2}$ зі спільною проекцією D_{xz} на площину Oxz (рис. 113), де D_{xz} – прямокутник: $-4 \le x \le 4$, $0 \le z \le 2$. При цьому нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{y1}^+ з віссю Oy утворює тупий кут β, а нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{y2}^+ з віссю Oy утворює гострий кут β. Тоді

$$I_y = \iint_{\sigma^+} xy^2 z\, dxdz = \iint_{\sigma_{y1}^+} xy^2 z\, dxdz + \iint_{\sigma_{y2}^+} xy^2 z\, dxdz =$$

$$=-\iint_{D_{xz}} x(16-x^2)z\,dxdz+\iint_{D_{xz}} x(16-x^2)z\,dxdz=0\,.$$

Розглянемо перший інтеграл $I_x=\iint\limits_{\sigma^+}\dfrac{x(16-y^2)^{1/2}\,dydz}{x^2+y^2+4z^2}$. Поверхня σ координатною площиною $x=0$ розбивається на дві правильні в напрямі осі Ox частини: задню σ_{x1}: $x=-\sqrt{16-y^2}$ і передню σ_{x2}: $x=\sqrt{16-y^2}$ зі спільною проекцією D_{yz} на площину Oyz (рис. 114), де D_{yz} – прямокутник: $-4\le y\le 4$, $0\le z\le 2$. При цьому нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ^+_{x1} з віссю Ox утворює тупий кут α, а нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ^+_{x2} з віссю Ox утворює гострий кут α. Тоді

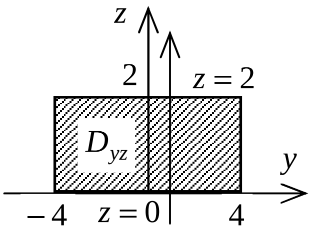

Рис. 114

$$I_x=\iint\limits_{\sigma^+}\frac{x(16-y^2)^{1/2}\,dydz}{x^2+y^2+4z^2}=\iint\limits_{\sigma^+_{x1}}\frac{x(16-y^2)^{1/2}\,dydz}{x^2+y^2+4z^2}+$$

$$+\iint\limits_{\sigma^+_{x2}}\frac{x(16-y^2)^{1/2}\,dydz}{x^2+y^2+4z^2}=-\iint\limits_{D_{yz}}\frac{-\sqrt{16-y^2}\,(16-y^2)^{1/2}\,dydz}{(16-y^2)+y^2+4z^2}+$$

$$+\iint\limits_{D_{yz}}\frac{\sqrt{16-y^2}\,(16-y^2)^{1/2}\,dydz}{(16-y^2)+y^2+4z^2}=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{yz}}\frac{16-y^2}{4+z^2}\,dydz=\frac{1}{2}\int\limits_{-4}^{4}(16-$$

$$-y^2)\,dy\int\limits_0^2\frac{dz}{4+z^2}=\frac{1}{2}\cdot(16y-y^3/3)\Big|_{-4}^{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot arctg\,(z/2)\Big|_0^2=\frac{16\pi}{3}\,.$$

Отже, $\Pi=I_x+I_y+I_z=16\pi/3$. ■

<u>Приклад 4</u>. Дано просторове електростатичне поле напруженості $\vec{E}=k\,q\vec{r}\big/|\,\vec{r}\,|^3$ позитивного точкового електричного заряду q ($q=const$), розміщеного в початку координат, де

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $k = const$. Обчислити потік цього векторного поля через зовнішню сторону σ^+ поверхні сфери σ радіуса R з центром у початку координат.

□ На поверхні сфери $|\vec{r}| = R = const$, а одиничний вектор зовнішньої нормалі $\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}| = \vec{r}/R$. Тоді $\vec{r}\cdot\vec{n} = |\vec{r}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos 0 = R$;

$$\Pi = \iint_{\sigma^+} k\frac{q}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{r}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \frac{kq}{R^2}\iint_{\sigma^+} d\sigma = \frac{kq}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi kq. \quad \blacksquare$$

3.5.3. Формула Стокса

Для поверхневих інтегралів має місце формула, аналогічна формулі Гріна. Розглянемо у просторі деяку поверхню σ, обмежену замкненою лінією L (рис. 115). Проекцією цієї поверхні на площину Oxy буде область D, обмежена замкненою лінією l. Нехай у просторі задано векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Якщо покласти $z = 0$ і $R(x,y,z) \equiv 0$, то матимемо плоске векторне поле, що в області D приймає значення

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}.$$

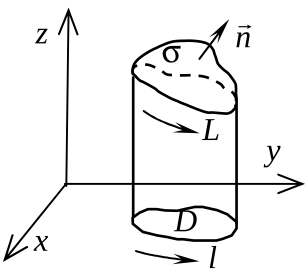

Рис. 115

Обчислимо ротор цього векторного поля

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = $$

$$= \left(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y\right)\vec{k}.$$

Тоді потік цього ротора через додатну сторону D^+ області D буде

$$\iint_{D^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{D^+}\left(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y\right)\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma.$$

Оскільки одинична нормаль $\vec{n}$ до області D співпадає з $\vec{k}$, то

$\vec{n}\cdot\vec{k}=1$, $\cos\gamma=1>0$. Перейдемо до подвійного інтеграла:

$$\iint_{D^+}\left(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y\right)\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_{D^+}\left(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y\right)d\sigma=$$

$$=+\iint_{D}\left(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y\right)dx\,dy\,.$$

Згадуючи формулу Гріна, отримуємо

$$\iint_{D}\left(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y\right)dx\,dy=\oint_l \vec{F}\,d\vec{l}\,.$$

Звідси $\iint_{D^+}\left(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y\right)\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\oint_l \vec{F}\,d\vec{l}$.

Остаточно, маємо формулу Стокса $\oint_l \vec{F}\,d\vec{l}=\iint_{D^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, що для плоского поля є векторним записом формули Гріна.

У просторі для поверхні σ, обмеженої замкненою лінією L, ***формула Стокса*** залишається в тому ж вигляді

$$\boxed{\oint_L \vec{F}\,d\vec{l}=\iint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma},$$

при цьому вибирається додатний напрям обходу контуру L: якщо дивитися з кінця вектора нормалі $\vec{n}$ до відповідної сторони σ^+ поверхні σ, то цей обхід здійснюється проти ходу годинникової стрілки (при цьому поверхня, обмежена контуром, залишається зліва).

Отже, справедлива теорема Стокса (***зв'язок між криволінійним і поверхневим інтегралами***): *Циркуляція векторного поля $\vec{F}$ вздовж замкненої лінії L, що обмежує поверхню σ, дорівнює потоку ротора цього поля через указану поверхню.*

Зауваження 1. Розглянемо довільний одиничний вектор $\vec{n}$, що виходить з деякої точки M, і оточимо цю точку плоским майданчиком $\Delta\sigma$, перпендикулярним до вектора $\vec{n}$ і обмеженим замкненим контуром ΔL. За формулою Стокса одержимо $\oint_{\Delta L} \vec{F}\,d\vec{l}=\iint_{\Delta\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$. До правої частини застосуємо теорему про середнє значення, тоді

$$\oint_{\Delta L} \vec{F}\,d\vec{l}=rot\,\vec{F}\left(M_*\right)\cdot\vec{n}\,\Delta\sigma=np_{\vec{n}}\,rot\,\vec{F}\left(M_*\right)\cdot\Delta\sigma\,.$$

Розділивши рівність на $\Delta\sigma$ і стягуючи майданчик $\Delta\sigma$ до даної точки M , тобто переходячи до границі при $\Delta\sigma \to 0$ (при цьому $M_* \to M$ і $\Delta L \to 0$), дістанемо

$$\boxed{np_{\vec{n}}\, rot\, \vec{F}(M) = \lim_{\Delta\sigma \to 0}\left(\oint_{\Delta L} \vec{F}\, d\vec{l} \Big/ \Delta\sigma \right)}.$$

Таким чином можна визначити проекцію ротора на довільну вісь (щільність циркуляції $C_{\vec{n}} = np_{\vec{n}}\, rot\, \vec{F}$), тобто *ротор* $rot\, \vec{F}$ *не залежить від вибору системи координат* (*є інваріантною векторною характеристикою поля*).

Зауваження 2. Коли векторне поле безвихрове, тобто $rot\, \vec{F} = 0$, то для довільного замкненого контура L , який цілком лежить у цьому полі, за формулою Стокса маємо $\oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = \iint_{\sigma^+} rot\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$. Це означає, що безвихрове поле є потенціальним. Навпаки, якщо поле потенціальне, тобто для довільного замкненого контуру L $\oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = 0$, то за формулою Стокса маємо $\iint_{\sigma^+} rot\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = 0$, звідки $rot\, \vec{F} = 0$. Це означає, що потенціальне поле є безвихровим.

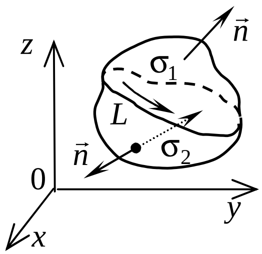

Рис. 116

Зауваження 3. Із формули Стокса випливає, що *потік вихору векторного поля* $\vec{F}$ *не залежить від виду поверхні* σ *, що натягнута на замкнений контур* L . Якщо через цей контур провести дві поверхні σ_1 та σ_2 (рис. 116), що обмежують деяке просторове тіло V , то

$$\iint_{\sigma_1^+} rot\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = \iint_{\sigma_2^-} rot\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma .$$

Змінивши орієнтацію поверхні σ_2 на зовнішню σ_2^+, маємо

$$\iint_{\sigma_2^+} rot\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = -\iint_{\sigma_2^-} rot\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = -\iint_{\sigma_1^+} rot\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma .$$

Тоді для замкненої поверхні $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, що обмежує просторове тіло V , одержуємо

$$\oiint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma_1^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint_{\sigma_2^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0.$$

Отже, *потік вихору векторного поля* $\vec{F}$ *через замкнену поверхню дорівнює нулю*: $\boxed{\oiint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0}$.

Приклад 1. Обчислити потік ротора векторного поля $\vec{F} = (y + xz)\,\vec{i} + (x + yz)\,\vec{j} + xyz\,\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ поверхні σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(z \ge 0)$, відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ якої утворює з віссю Oz гострий кут γ.

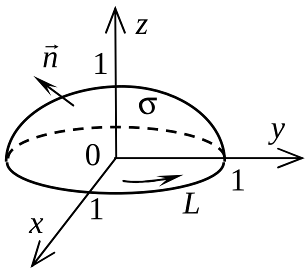

Рис. 117

□ Поверхня σ є півсферою одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 117), обмеженою замкненою лінією L – колом $x^2 + y^2 = 1$ в площині Oxy. За формулою Стокса

$$\Pi = \iint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \oint_L \vec{F}\,d\vec{l} =$$

$$= \oint_L (y + xz)\,dx + (x + yz)\,dy + xyz\,dz =$$

Далі врахуємо, що L лежить у площині $z = 0$, і перейдемо до параметричних рівнянь

$$= \left| \begin{matrix} x = 1\cos t;\ y = 1\sin t;\ z = 0;\ dx = -\sin t\,dt; \\ dy = \cos t\,dt;\ dz = 0;\ 0 \le t \le 2\pi \end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi} \big(\sin t\cdot(-\sin t) +$$

$$\times \cos t\cdot\cos t\big)\,dt = \int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt = (1/2)\cdot\sin 2t\Big|_0^{2\pi} = 0.\ ■$$

Приклад 2. Дано просторове векторне поле $\vec{F} = (3z - x + 2y)\vec{i} + 6xy\,\vec{j} + 6(2y - 3z)\vec{k}$ і поверхня σ – частина площини p: $x + 2y - 3z - 6 = 0$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Знайти циркуляцію $\Gamma = \oint_L \vec{F}\,d\vec{l}$ векторного поля вздовж замкненого контуру L, що обмежує поверхню σ, при додатному напрямі обходу відносно нормального вектора $\vec{N} = (A, B, C)$ цієї площини p. Обчислення провести двома способами: а) безпосередньо за означенням циркуляції; б) за допомогою формули Стокса.

□ Поверхня σ – це $\Delta M_x M_y M_z$ (рис. 118) з вектором нормалі $\vec{N} = (4, 2, -3)$. Замкнений контур L – це периметр $\Delta M_x M_y M_z$.

а) Знайдемо циркуляцію безпосередньо за означенням:

$$\Gamma = \oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = \oint_L (3z - x + 2y)dx + 6xy\, dy + 6(2y - 3z)\, dz =$$

$$\int_{M_x M_z} + \int_{M_z M_y} + \int_{M_y M_x},$$

де кожний доданок обчислимо окремо.

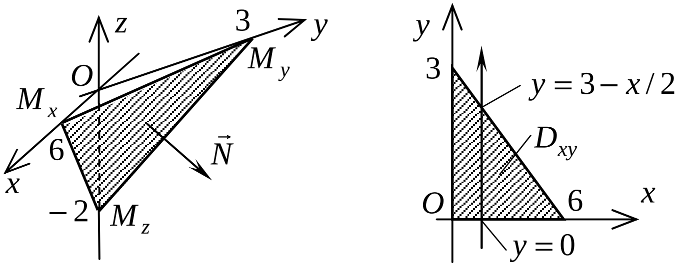

Рис. 118

Ділянка $M_x M_z$ – це відрізок лінії (прямої) перетину площини p з координатною площиною $y = 0$. Тоді

$$M_x M_z : \begin{cases} x + 2y - 3z - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x/3 - 2 & dx = dx; \\ y = 0; & dy = 0; \end{cases}$$

$$dz = (1/3)\, dx;\ x_1 = 6;\ x_2 = 0;\quad \int\limits_{M_x M_z} (3z - x + 2y)dx + 6xy\, dy +$$

$$+ 6(2y - 3z)\, dz = \int\limits_6^0 \left[\left(3 \cdot (x/3 - 2) - x + 2 \cdot 0\right) + 6x \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot \left(2 \cdot 0 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 3 \cdot (x/3 - 2)\right) \cdot (1/3)\right] dx = \int_6^0 (6 - 2x)\, dx = (6x - x^2)\Big|_6^0 = 0.$$

Ділянка $M_z M_y$ – це відрізок лінії (прямої) перетину площини

p з координатною площиною $x = 0$. Тоді

$$M_zM_y : \begin{cases} x + 2y - 3z - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y/3 - 2 & dx = 0; \\ x = 0; & dy = dy; \end{cases}$$

$$dz = (2/3)\,dy;\ \ y_1 = 0;\ y_2 = 3; \quad \int\limits_{M_zM_y} (3z - x + 2y)dx + 6xy\,dy +$$

$$+ 6(2y - 3z)\,dz = \int_0^3 \big[\big(3\cdot(2y/3 - 2) - 0 + 2y\big)\cdot 0 + 6\cdot 0\cdot y +$$

$$+ 6\cdot\big(2y - 3\cdot(2y/3 - 2)\big)\cdot(2/3)\big]dy = 24\int_0^3 dy = 24\cdot y\Big|_0^3 = 72.$$

Ділянка M_yM_x – це відрізок лінії (прямої) перетину площини p з координатною площиною $z = 0$. Тоді

$$M_yM_x : \begin{cases} x + 2y - 3z - 6 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x/2 \\ z = 0; \end{cases}$$

$$dx = dx;\ \ dy = -(1/2)\,dx;\ \ dz = 0;\ \ x_1 = 0;\ x_2 = 6;$$

$$\int\limits_{M_yM_x} (3z - x + 2y)dx + 6xy\,dy + 6(2y - 3z)\,dz = \int\limits_0^6 \big[\big(3\cdot 0 - x + 2\cdot(3 -$$

$$- x/2)\big) + 6x\cdot(3 - x/2)\cdot(-1/2) + 6\cdot\big(2\cdot(3 - x/2) - 3\cdot 0\big)\cdot 0\big]\,dy =$$

$$= (1/2)\int_0^6 (3x^2 - 22x + 12)\,dx = (1/2)\cdot(x^3 - 11x^2 + 12x)\Big|_0^6 = -54.$$

Отже, $\Gamma = 0 + 72 - 54 = 18$.

б) Оскільки лінія L замкнена, можна застосувати формулу Стокса. Виберемо за поверхню σ, що натягнута на L, частину площини p – $\Delta M_xM_yM_z$. Поверхня σ правильна в усіх трьох напрямах Ox, Oy і Oz. Для обчислення поверхневого інтеграла використаємо метод проектування на одну координатну площину, за яку виберемо Oxy. При цьому нормаль до вибраної сторони σ^+ з віссю Oz утворює тупий кут γ. Проекцією D_{xy} поверхні σ на площину Oxy є ΔOM_xM_y (рис. 118). Тоді

$$rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 3z-x+2y & 6xy & 6(2y-3z)\end{vmatrix}=\left(6\frac{\partial}{\partial y}(2y-3z)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}(6xy)\right)\vec{i}-\left(6\frac{\partial}{\partial x}(2y-3z)-\frac{\partial}{\partial z}(3z-x+2y)\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(6xy)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial y}(3z-x+2y)\right)\vec{k}=(12-0)\vec{i}-(0-3)\,\vec{j}+(6y-2)\vec{k}=$$

$$=12\vec{i}+3\,\vec{j}+(6y-2)\vec{k}\ ;\quad \sigma:\ z=x/3+2y/3-2\ ;\ \ z'_x=1/3;$$

$$z'_y=2/3;\quad \cos\gamma<0\Rightarrow\text{"}-\text{"};\quad \sigma\xrightarrow{Oz}D_{xy}=\Delta OM_xM_y\ :$$

$$0\le x\le 6\ ;\ 0\le y\le 3-x/2\ ;\qquad \Gamma=\oint_L\vec{F}\,d\vec{l}=\iint_{\sigma^+}rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=$$

$$=\iint_{\sigma^+}12\,dydz+3\,dxdz+(6y-2)\,dxdy=-\iint_{D_{xy}}\big(-(1/3)\cdot 12-$$

$$-(2/3)\cdot 3+(6y-2)\big)\,dxdy=\iint_{D_{xy}}(8-6y)\,dxdy=$$

$$=\int_0^6 dx\int_0^{3-x/2}(8-6y)\,dy=\int_0^6(8y-3y^2)\Big|_0^{3-x/2}dx=\frac{1}{4}\int_0^6(-3x^2+20x-$$

$$-12)\,dx=(1/4)\cdot(-x^3+10x^2-12x)\Big|_0^6=18.\ \ \blacksquare$$

3.5.4. Формула Остроградського – Гаусса

Розглянемо просторове тіло V, обмежене замкненою поверхнею σ (рис. 119). Проекцію тіла на площину Oxy позначимо через D. Нехай лінія L на поверхні тіла, що проектується в межу області D, поділяє поверхню σ на дві правильні в напрямі осі Oz частини σ_1 та σ_2, які описуються явно відповідно рівняннями $z=f_1(x,y)$ і $z=f_2(x,y)$. Окрім того, виділимо зовнішню сторону σ^+ поверхні, якій відповідає одиничний вектор нормалі $\vec{n}$. Нехай у просторі задано векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}\,.$$

Обчислимо потрійний інтеграл $I = \iiint\limits_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dV$:

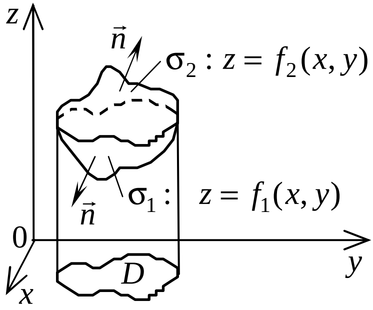

Рис. 119

$$I = \iiint\limits_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_D dx\,dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dz =$$

$$\iint\limits_D \left(R(x,y,z)\Big|_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \big[R\big(x,y,\, f_2(x,y)\big) -$$

$$- R\big(x,y,\, f_1(x,y)\big)\big]\,dx\,dy =$$

Далі перетворимо одержані подвійні інтеграли в поверхневі

$$= \iint\limits_{\sigma_2^+} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint\limits_{\sigma_1^+} R(x,y,z)\,dx\,dy = \oiint\limits_{\sigma^+} R(x,y,z)\,dx\,dy\,.$$

Таким чином $\iiint\limits_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\sigma^+} R(x,y,z)\,dx\,dy\,.$

Аналогічно можна обчислити

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\sigma^+} Q\,dx\,dz\,; \quad \iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\sigma^+} P\,dy\,dz\,.$$

Склавши ці три рівності, маємо ***формулу Остроградського – Гаусса*** в координатній формі

$$\boxed{\oiint\limits_{\sigma^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz}$$

або у векторній формі $\boxed{\oiint_{\sigma^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint_V div\,\vec{F}\,dV}$.

Отже, справедлива теорема Остроградського – Гаусса (***зв'язок між поверхневим і потрійним інтегралами***):

Потік векторного поля $\vec{F}$ через зовнішню сторону σ^+ замкненої поверхні σ дорівнює потрійному інтегралу за об'ємом V, обмеженим цією поверхнею, від дивергенції $\mathrm{div}\,\vec{F}$ поля.

Зауваження 1. Розглянемо деяку точку M, розміщену всередині замкненої поверхні $\Delta\sigma$, що обмежує об'єм ΔV. За формулою Остроградського – Гаусса $\iint_{\Delta\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint_{\Delta V} div\,\vec{F}\,dV$. До правої частини застосуємо теорему про середнє значення. Тоді

$$\iint_{\Delta\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = div\,\vec{F}(M_*)\Delta V .$$

Розділивши рівність на ΔV і стягуючи поверхню $\Delta\sigma$ до даної точки M, тобто переходячи до границі при $\Delta\sigma \to 0$, $M_* \to M$, $\Delta V \to 0$, дістанемо $\boxed{div\,\vec{F}(M) = \lim_{\Delta V\to 0}\left(\oiint_{\Delta\sigma^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma \Big/ \Delta V\right)}$.

Отже, *дивергенція $\mathrm{div}\,\vec{F}$ не залежить від вибору системи координат* (*є інваріантною скалярною характеристикою поля*).

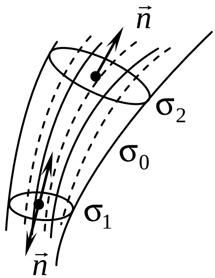

Рис. 120

Зауваження 2. Нехай векторне поле $\vec{F}$ – соленоїдальне, тобто $div\,\vec{F} = 0$. Розглянемо ***векторну трубку*** – поверхню, утворену векторними лініями, що проходять через деякий замкнений контур, який не збігається з векторною лінією (рис. 120). Виділимо її частину об'ємом V, розміщену між перерізами σ_1 і σ_2. За умовою $div\,\vec{F} = 0$, тому згідно формули Остроградського – Гаусса потік векторного поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю. Тоді для зовнішньої сторони замкненої поверхні, що обмежує виділений об'єм V, маємо

$$\iint_{\sigma_0^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma + \iint_{\sigma_1^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma + \iint_{\sigma_2^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint_V div\,\vec{F}\,dV = 0,$$

де σ_0 – бічна поверхня трубки; $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі.

Оскільки на бічній поверхні трубки нормаль $\vec{n}$ перпендикулярна до векторної лінії поля, то $\iint_{\sigma_0^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = 0$. Тоді

$$\iint_{\sigma_2^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = -\iint_{\sigma_1^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma .$$

Якщо змінити напрям нормалі на поверхні σ_1, тобто взяти внутрішню нормаль $\vec{n}$ (у напрямі векторних ліній), то дістанемо

$$\boxed{\iint_{\sigma_2^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma_1^-} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma}.$$

У соленоїдальному полі потік вектора $\vec{F}$ в напрямі векторних ліній через кожний переріз векторної трубки один і той же.

Якщо $\vec{F}$ – поле швидкостей текучої рідини, то в полі без джерел через кожний переріз векторної трубки протікає одна й та ж кількість рідини.

Відповідно до формули $div\,rot\,\vec{F} = 0$ *поле ротора довільного векторного поля – трубчате*. Справедливе й зворотне твердження: *кожне трубчате поле є полем ротора деякого векторного поля*. Тобто, *якщо* $div\,\vec{F} = 0$, *то існує таке поле* $\vec{\Phi}$, *що* $\vec{F} = rot\,\vec{\Phi}$. Вектор $\vec{\Phi}$ називають ***вектором-потенціалом*** даного поля.

<u>Зауваження 3</u>. Оскільки $rot\,grad\,u = 0$, то векторний потенціал $\vec{\Phi}$ визначається з точністю до доданка $grad\,u$, де $u = u(x, y, z)$ – довільна двічі диференційовна функція.

Таким чином, справедлива <u>теорема</u>. *Для векторного поля $\vec{F}$ наступні чотири властивості еквівалентні:*
1) потік поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю;
2) потік поля через поверхню σ, обмежену замкненим контуром L і відповідно з ним орієнтовану, залежить тільки від вибору контура L і не залежить від конкретного вибору поверхні σ;
3) існує таке поле $\vec{\Phi}$, що $\vec{F} = rot\,\vec{\Phi}$;
4) розбіжність поля $\vec{F}$ дорівнює нулю: $div\,\vec{F} = 0$, тобто *поле $\vec{F}$ – соленоїдальне.*

<u>Приклад 1</u>. Обчислити потік просторового векторного поля $\vec{F} = (x^3 - yz)\vec{i} + (y^3 + 2x)\,\vec{j} + xz^2\,\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+

повної поверхні σ конуса $V: z^2 = x^2 + y^2,\ z = 1$.

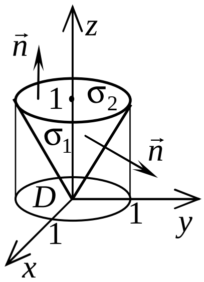

Рис. 121

□ Оскільки поверхня σ (рис. 121) замкнена, то для обчислення потоку можна застосувати формулу Остроградського – Гаусса.

Проекцією конуса V на площину Oxy є круг D радіуса $R = 1$ з центром у початку координат. Бокова поверхня конуса σ_1 задається явно рівнянням $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а поверхня основи σ_2 задається явно рівнянням $z = 1$. Знайдемо дивергенцію

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3 + 2x) + \frac{\partial}{\partial z}(xz^2) = 3x^2 + 3y^2 + 2xz.$$

Тоді

$$\Pi = \oiint\limits_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iiint\limits_V div\,\vec{F}\, dV = \iiint\limits_V \left(3(x^2 + y^2) + 2xz\right) dx\, dy\, dz =$$

Для обчислення потрійного інтеграла перейдемо до циліндричних координат

$$= \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi;\ \ y = \rho\sin\varphi;\ \ z = z;\ \ x^2 + y^2 = \rho^2; \\ \sigma_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho;\ \ \sigma_2 : z = 1;\ dx\,dy\,dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \end{matrix} \right| =$$

$$= \iiint_V (3\rho^2 + 2\rho\cos\varphi \cdot z)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_\rho^1 (3\rho^2 +$$

$$+ 2\rho z\cos\varphi)\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (3\rho^2 z + \rho\cos\varphi \cdot z^2)\Big|_\rho^1 \rho\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (3\rho^3 -$$

$$- 3\rho^4 + \rho^2\cos\varphi - \rho^4\cos\varphi)\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \Big((3/4)\rho^4 - (3/5)\rho^5 + \cos\varphi \times$$

$$\times (1/3)\rho^3 - \cos\varphi \cdot (1/5)\rho^5\Big)\Big|_0^1 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(3/20 + (2/15)\cos\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \left((3/20)\varphi + (2/15)\sin\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi/10.\ \blacksquare$$

Зауваження 4. Для спрощення обчислень незамкнену поверхню можна доповнити іншими поверхнями до замкненої. Потім знайти потік за формулою Остроградського – Гаусса і від одержаного результату відняти потоки через додаткові поверхні.

Приклад 2. Обчислити потік векторного поля

$$\vec{F} = (x^3 - xy^2)\vec{i} - 2y(x^2 + z^2)\vec{j} + (2y^2 z + z^3 + x^2 + y^2)\vec{k}$$

через зовнішню сторону σ_1^+ півсфери σ_1: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

□ Поверхню σ_1 доповнимо до замкненої $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, де σ_2 – круг D_{xy} радіуса $R = 2$ на площині Oxy: $z = 0$ (рис. 122).

Знайдемо дивергенцію

$$div\,\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-2y(x^2 + z^2)\right) + \frac{\partial}{\partial z}(2y^2 z + z^3 +$$

$$+ x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Тоді потік $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ через всю замкнену поверхню:

$$\Pi = \oiint_{\sigma^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint_V div\,\vec{F}\,dV = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

Для обчислення потрійного інтеграла перейдемо до сферичних координат

$$= \left| \begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi;\;\; y = r\sin\theta\sin\varphi;\;\; z = r\cos\theta; \\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2;\;\; \sigma_1 : r = 2;\;\; dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\;dr\,d\varphi\,d\theta \end{array} \right| =$$

$$= \iiint_V r^2\,r^2\sin\theta\;dr\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \int_0^2 r^4\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot \frac{1}{5} \times$$

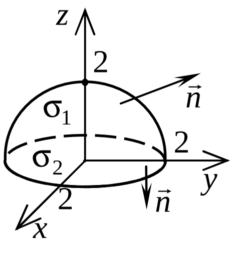

Рис. 122

$$\times r^5\Big|_0^2 d\theta = \frac{32}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta = \frac{32}{5} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta = \frac{32}{5}\int_0^{2\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} d\varphi =$$

$$= (32/5)\int_0^{2\pi} d\varphi = (32/5)\,\varphi\Big|_0^{2\pi} = 64\pi/5 .$$

Далі обчислимо потік Π_2 через додаткову поверхню σ_2:

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_2^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma_2^+} (x^3 - xy^2)\,dydz - 2y(x^2+z^2)\,dxdz +$$

$$+(2y^2z + z^3 + x^2 + y^2)\,dxdy = I_x + I_y + I_z\,.$$

Поверхня σ_2 на площини Oyz і Oxz проектується у відрізки – фігури нульової площі. Тому перші два інтеграли-доданки дорівнюють нулю

$$I_x = \iint_{\sigma_2^+} (x^3 - xy^2)\,dydz = 0; \quad I_y = -2\iint_{\sigma_2^+} y(x^2+z^2)\,dxdz = 0\,.$$

Нормаль $\vec{n}$ до вибраної сторони σ_2^+ з віссю Oz утворює тупий кут γ, тоді

$$I_z = \iint_{\sigma_2^+} (2y^2z + z^3 + x^2 + y^2)\,dxdy = -\iint_{D_{xy}} (2y^2\cdot 0 + 0^3 + x^2 +$$

$$+y^2)\,dxdy = \begin{vmatrix} x^2+y^2=\rho^2; \\ dxdy = \rho\,d\rho\,d\varphi \end{vmatrix} = -\iint_{D_{xy}} \rho^2\rho\,d\rho\,d\varphi = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho =$$

$$= -2\pi\cdot(1/4)\cdot\rho^4\Big|_0^2 = -8\pi. \quad \text{Отже, } \Pi_2 = 0 + 0 - 8\pi = -8\pi\,.$$

Таким чином, шуканий потік $\Pi_1 = \Pi - \Pi_2 = 104\pi/5$. ■

<u>Приклад 3</u>. Знайти потік Π просторового векторного поля $\vec{F} = (6x - y)\vec{i} + (y - 2z + 6)\vec{j} + (3x + y - 2z)\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ замкненої повної поверхні σ піраміди V, утвореної при перетині площини $p: -3x + y - 2z + 6 = 0$ з координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Обчислення провести двома способами: а) безпосередньо за означенням потоку; б) за допомогою формули Остроградського – Гаусса.

□ а) Знайдемо потік безпосередньо за означенням. Піраміда $V = OABC$ зображена на рис. 123. Проекціями піраміди V на координатні площини відповідно D_{yz} (рис. 124), D_{xz} (рис. 125) і D_{xy} (рис. 126) служать прямокутні трикутники, що є правильними плоскими областями в напрямі відповідних координатних осей. По-

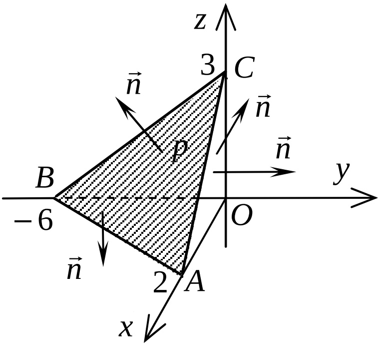

Рис. 123

тік Π через зовнішню сторону σ^{+} замкненої повної поверхні σ піраміди є сумою потоків через всі її чотири грані:

$$\Pi = \oiint_{\sigma^{+}} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \oiint_{\sigma^{+}} (6x - y)\,dydz + (y - 2z + 6)\,dxdz + (3x + y - 2z)\,dxdy = \Pi_{\Delta ABC} + \Pi_{\Delta OBC} + \Pi_{\Delta OAC} + \Pi_{\Delta OAB}.$$

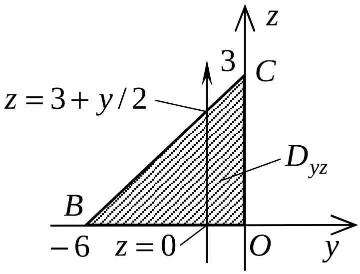

Рис. 124

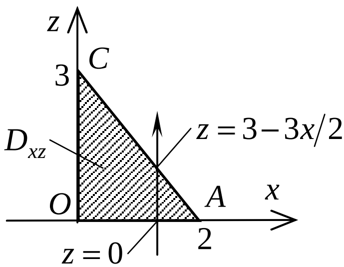

Рис. 125

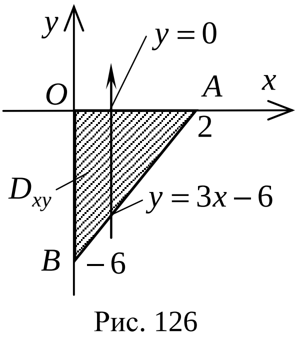

Рис. 126

Для обчислення поверхневих інтегралів-доданків будемо використовувати метод проектування на всі три координатні площини. Тоді

$$\Pi_{\Delta ABC} = \iint_{\Delta ABC} (6x - y)\,dydz + (y - 2z + 6)\,dxdz + (3x + y - 2z)\,dxdy =$$

$$= I_x + I_y + I_z;\ I_x = \iint\limits_{\Delta ABC} (6x - y)\,dydz =$$

$$= \Big|\, \Delta ABC : x = 2 + y/3 - 2z/3;$$

$$\cos\alpha > 0 \Rightarrow "+";\ \Delta ABC \xrightarrow{Ox} D_{yz} = \Delta OBC:\ -6 \le y \le 0;$$

$$0 \le z \le 3 + y/2 \Big| = +\iint_{D_{yz}} \big(6\cdot(2 + y/3 - 2z/3) - y\big)\,dydz =$$

$$= \iint_{D_{yz}} (12 + y - 4z)\, dydz = \int_{-6}^{0} dy \int_{0}^{3+y/2} (12 + y - 4z)\, dz = \int_{-6}^{0} (12z + yz -$$

$$- 2z^2)\Big|_0^{3+y/2} dy = \int_{-6}^{0} (3y + 18)\, dy = (3y^2/2 + 18y)\Big|_{-6}^{0} = 54\,;$$

$$I_y = \iint_{\Delta ABC} (y - 2z + 6)\, dxdz = \left| \begin{array}{l} \Delta ABC : y = 3x + 2z - 6; \\ \cos\beta < 0 \Rightarrow "-"; \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC \xrightarrow{Oy} D_{xz} = \Delta OAC : \\ 0 \le x \le 2;\;\; 0 \le z \le 3 - 3x/2 \end{array} \right| = -\iint_{D_{xz}} (3x + 2z - 6 - 2z + 6)\; dxdz =$$

$$= -3 \iint_{D_{xz}} x\; dxdz = -3\int_0^2 x\, dx \int_0^{3-3x/2} dz = -3\int_0^2 xz\Big|_0^{3-3x/2} dx = -3\int_0^2 (3x -$$

$$- 3x^2/2)\, dx = -3\cdot(3x^2/2 - x^3/2)\Big|_0^2 = -6\,;$$

$$I_z = \iint_{\Delta ABC} (3x + y - 2z)\; dxdy = \left| \begin{array}{l} \Delta ABC :\; z = 3 - 3x/2 + y/2; \\ \cos\gamma > 0 \Rightarrow "+"; \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta ABC \xrightarrow{Oz} D_{xy} = \Delta OAB : \\ 0 \le x \le 2;\;\; 3x - 6 \le y \le 0 \end{array} \right| = +\iint_{D_{xy}} \left(3x + y - 2\cdot\left(3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y \right) \right) \times$$

$$\times\, dxdy = 6 \iint_{D_{xy}} (x - 1)\; dxdy = 6\int_0^2 (x-1)\, dx \int_{3x-6}^{0} dy = 6\int_0^2 (x-1)\, y\Big|_{3x-6}^{0} dx =$$

$$= -18\int_0^2 (x^2 - 3x + 2)\, dx = -18(x^3/3 - 3x^2/2 + 2x)\Big|_0^2 = -12\,;$$

$$\Pi_{\Delta ABC} = 54 - 6 - 12 = 36\,;\;\; \Pi_{\Delta OBC} = \iint_{\Delta OBC} (6x - y)\, dydz +$$

$$+ (y - 2z + 6)\, dxdz + (3x + y - 2z)\, dxdy = I_x + I_y + I_z\,;$$

$$I_x = \iint_{\Delta OBC} (6x - y)\, dydz = \left| \, \Delta OBC : x = 0; dx = 0;\ \cos\alpha < 0 \Rightarrow "-"; \right.$$

$$\Delta OBC \xrightarrow{Ox} D_{yz} = \Delta OBC : -6 \le y \le 0;\;\; 0 \le z \le 3 + y/2 \Big| =$$

$$= -\iint\limits_{D_{yz}} (6\cdot 0 - y)\,dydz = \iint\limits_{D_{yz}} y\,dydz = \int\limits_{-6}^{0} ydy \int\limits_{0}^{3+y/2} dz = \int\limits_{-6}^{0} yz\Big|_{0}^{3+y/2} dy =$$

$$= \int\limits_{-6}^{0} (3y + y^2/2)\,dy = (3y^2/2 + y^3/6)\Big|_{-6}^{0} = -18\,;$$

$$I_y = \iint_{\Delta OBC} (y - 2z + 6)\,dxdz = \left|\,\Delta OBC : x = 0;\ dx = 0\,\right| = 0\,;$$

$$I_z = \iint_{\Delta OBC} (3x + y - 2z)\ dxdy = \left|\,\Delta OBC : x = 0;\ dx = 0\,\right| = 0\,;$$

$$\Pi_{\Delta OBC} = -18 + 0 + 0 = -18\,;\ \ \Pi_{\Delta OAC} = \iint_{\Delta OAC} (6x - y)\,dydz +$$

$$+ (y - 2z + 6)\,dxdz + (3x + y - 2z)\,dxdy = I_x + I_y + I_z\,;$$

$$I_x = \iint_{\Delta OAC} (6x - y)\,dydz = \left|\,\Delta OAC : y = 0;\ dy = 0\,\right| = 0\,;$$

$$I_y = \iint_{\Delta OAC} (y - 2z + 6)\,dxdz = \Big|\,\Delta OAC : y = 0;\ dy = 0;$$

$$\cos\beta > 0 \Rightarrow "+";\ \Delta OAC \xrightarrow{Oy} D_{xz} = \Delta OAC :\ 0 \le x \le 2;$$

$$0 \le z \le 3 - 3x/2\,\Big| = +\iint\limits_{D_{xz}} (0 - 2z + 6)\,dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} (6 - 2z)\,dxdz =$$

$$= \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{3-3x/2} (6 - 2z)\,dz = \int\limits_{0}^{2} (6z - z^2)\Big|_{0}^{3-3x/2} dx = \int\limits_{0}^{2} (9 - 9x^2/4)\,dx =$$

$$= (9x - 3x^3/4)\Big|_{0}^{2} = 12\,;\quad I_z = \iint_{\Delta OAC} (3x + y - 2z)\ dxdy =$$

$$= \left|\,\Delta OAC : y = 0;\ dy = 0\,\right| = 0\,;\quad \Pi_{\Delta OAC} = 0 + 12 + 0 = 12\,;$$

$$\Pi_{\Delta OAB} = \iint_{\Delta OAB} (6x - y)\,dydz + (y - 2z + 6)\,dxdz + (3x + y -$$

$$- 2z)\,dxdy = I_x + I_y + I_z\,;\quad I_x = \iint_{\Delta OAB} (6x - y)\,dydz =$$

$$= \left|\,\Delta OAB :\ z = 0;\ dz = 0\,\right| = 0\,;\quad I_y = \iint_{\Delta OAB} (y - 2z + 6)\,dxdz =$$

$$= \left|\,\Delta OAB :\ z = 0;\ dz = 0\,\right| = 0\,;\quad I_z = \iint_{\Delta OAB} (3x + y - 2z)\ dxdy =$$

$$=\left|\Delta OAB: z=0;\ dz=0;\quad \cos\gamma<0 \Rightarrow "-";\right.$$

$$\left.\Delta OAB \xrightarrow{Oz} D_{xy}=\Delta OAB: 0\le x\le 2;\ 3x-6\le y\le 0\right|=$$

$$=-\iint_{D_{xy}}(3x+y-2\cdot 0)\,dxdy=-\int_0^2 dx\int_{3x-6}^{0}(3x+y)\,dy=-\int_0^2(3xy+(1/2)\times$$

$$\times y^2)\Big|_{3x-6}^{0}dx=\int_0^2(27x^2/2-36x+18)\,dx=(9x^3/2-18x^2+18x)\Big|_0^2=0;$$

$$\Pi_{\Delta OAB}=0+0+0=0;\ \ \Pi=36-18+12+0=30.$$

б) Для обчислення потоку Π через зовнішню сторону σ^+ замкненої повної поверхні σ піраміди можна застосувати формулу Остроградського – Гаусса. Знайдемо дивергенцію

$$div\,\vec{F}=(6x-y)'_x+(y-2z+6)'_y+(3x+y-2z)'_z=6+1-2=5.$$

Тоді $\Pi=\oiint_{\sigma^+}\vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma=\iiint_V div\,\vec{F}\,dV=5\iiint_V dx\,dy\,dz=$

$$=\left|\begin{array}{c} V: 0\le z\le 3-3x/2+y/2; \\ V\xrightarrow{Oz} D_{xy}: 0\le x\le 2;\ 3x-6\le y\le 0\end{array}\right|=5\iint_{D_{xy}}dxdy\int_0^{3-3x/2+y/2}dz=$$

$$=5\int_0^2 dx\int_{3x-6}^{0}(3-3x/2+y/2)\,dy=5\int_0^2(3y-3xy/2+y^2/4)\Big|_{3x-6}^{0}dx=$$

$$=5\int_0^2(9x^2/4-9x+9)\,dx=5\cdot(3x^3/4-9x^2/2+9x)\Big|_0^2=30.\ \blacksquare$$

<u>Приклад 4</u>. Знайти потік просторового векторного поля $\vec{F}=xy^2\,\vec{i}+x^2y\,\vec{j}+z(x^2+y^2)\,\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ повної поверхні σ просторового тіла V, обмеженого параболоїдом обертання $z=1+(x^2+y^2)/2$ і площиною $z=1+y$ (рис. 88). Обчислення провести двома способами: а) безпосередньо за означенням потоку; б) за допомогою формули Остроградського – Гаусса.

□ (Розв’язати самостійно). Відповідь: $\Pi=\oiint_{\sigma^+}\vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma=2\pi/3.$ ■

3.6. Диференціальні рівняння з частинними похідними

3.6.1. Диференціальне рівняння з частинними похідними та його розв'язок. Крайові задачі

У ***математичній фізиці*** вивчаються математичні моделі фізичних процесів, які мають форму диференціальних рівнянь з частинними похідними чи споріднених рівнянь або їх комбінацій, що розглядаються при певних додаткових умовах. Функції багатьох змінних описують різноманітні явища в електродинаміці, теорії пружності, гідродинаміці та інших галузях науки і техніки. Їх частинні похідні відображають найважливіші фізичні величини (швидкість, прискорення, потік, струм і т. п.). Використання фізичних принципів і законів, що зв'язують вказані величини, приводить до рівнянь з частинними похідними.

Диференціальним рівнянням з частинними похідними (ДРЧП) називається рівняння, яке зв'язує незалежні змінні, шукану функцію та її частинні похідні. Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називається його ***порядком***.

$$\boxed{F\left(x,y,u(x,y),\partial u/\partial x,\partial u/\partial y,\partial^2u/\partial x^2,\partial^2u/\partial y^2,\partial^2u/\partial x\partial y\right)=0}$$

– ***загальний вигляд*** диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними для функції двох незалежних змінних. Тут x, y – незалежні змінні; $u=u(x,y)$ – шукана функція.

Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними називається будь-яка функція, що при підстановці у диференціальне рівняння замість шуканої функції перетворює його на тотожність.

Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння (ЗДР) містить довільні сталі, число яких дорівнює порядку рівняння. Аналогічно, ***загальний розв'язок*** ДРЧП містить довільні функції, число яких дорівнює порядку цього рівняння.

Розв'язок ДРЧП, який входить до складу загального розв'язку при певних фіксованих довільних функціях, називається ***частинним розв'язком***.

Для виділення цілком певного розв'язку ДРЧП треба вказати додаткові умови. Усі фізичні явища вивчають, починаючи з деякого моменту часу і у відповідних областях, що мають певні межі. Тому для однозначного зображення реального процесу, крім диференціального рівняння, необхідно задати ще ***початкові умови***, що відображають початковий стан процесу, а також ***крайові*** (***граничні***) ***умови***, що вказують значення шуканої функції та її похідних на межі області визначення процесу.

У випадку необмеженої області D граничні умови відпадають. Задача відшукання розв'язку ДРЧП у необмеженій області при заданих початкових умовах називається ***задачею Коші*** (***початковою задачею***).

Задача відшукання розв'язку ДРЧП в обмеженій області при заданих початкових і граничних умовах називається ***крайовою*** (***граничною***) ***задачею***.

Задача Коші та крайова задача формулюються для ДРЧП, які виникають при вивчені ***нестаціонарних процесів***, що змінюються з перебігом часу. Рівняння, що описують ***стаціонарні процеси***, не містять часу t. Тому для таких рівнянь початкові умови відсутні. Указані ДРЧП розв'язуються тільки при граничних умовах.

У залежності від типу граничних умов розрізняють <u>три типи крайових задач</u> ***математичної фізики***:

1) Задача знаходження розв'язку ДРЧП при відомих значеннях шуканої функції u на межі S області D (***граничні умови першого типу***) $\boxed{u|_S = g(S)}$ називається ***крайовою задачею Діріхле*** (***першою крайовою задачею***).

2) Задача знаходження розв'язку ДРЧП при відомих значеннях нормальної похідної (похідної за напрямом зовнішньої нормалі $\vec{n}$) $\partial u/\partial n$ на межі S області D (***граничні умови другого типу***) $\boxed{\partial u/\partial n|_S = g(S)}$ називається ***крайовою задачею Неймана*** (***другою крайовою задачею***).

3) Якщо на межі S області D задано ***граничні умови третього*** (***змішаного***) ***типу*** $\boxed{(\alpha u + \beta \partial u/\partial n)|_S = g(S)}$, то маємо ***третю*** (***змішану***) ***крайову задачу***. Тут α і β - задані числа.

Початкові та граничні умови, що доповнюють ДРЧП, на практиці є результатом деяких вимірювань, що виконуються з похибками. Можливі небажані ситуації, коли малі похибки в початкових та граничних умовах призводять до значних похибок у розв'язку.

Задача математичної фізики називається ***коректно*** (***правиль-***

но) ***поставленою***, якщо: 1) задача має розв’язок; 2) розв’язок єдиний; 3) розв’язок неперервно залежить від початкових і граничних умов (***розв'язок стійкий*** до малих змін цих умов).

Задача, що не задовольняє хоча б одній з трьох указаних умов, називається ***некоректно*** (***неправильно***) ***поставленою***.

Приклад. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $\partial^2 u \big/ \partial x \partial y = 4xy - 5y^4$, де $u = u(x, y)$.

□ Зробимо заміну $\partial u / \partial x = v$. Тоді рівняння прийме вигляд: $\partial v / \partial y = 4xy - 5y^4$. Інтегруючи за y, маємо $v = \int (4xy - 5y^4)\, dy =$

$= 2xy^2 - y^5 + \overline{C}_1(x)$, де $\overline{C}_1(x)$ – довільна функція від x.

Звідси $\partial u / \partial x = 2xy^2 - y^5 + \overline{C}_1(x)$. Інтегруючи за x, дістаємо шуканий розв’язок: $u = \int \left(2xy^2 - y^5 + \overline{C}_1(x)\right) dx + C_2(y) = x^2 y^2 -$

$$- y^5 x + \int \overline{C}_1(x) dx + C_2(y) = x^2 y^2 - y^5 x + C_1(x) + C_2(y),$$

де $C_2(y)$ – довільна функція від y; $C_1(x) = \int \overline{C}_1(x)\, dx$. ■

3.6.2. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними

Найбільш загальні результати одержані для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними, які традиційно називають ***рівняннями математичної фізики***.

Диференціальне рівняння з частинними похідними називається ***лінійним***, якщо воно лінійне відносно шуканої функції та всіх її частинних похідних.

$$\boxed{A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F}$$

– ***загальний вигляд*** лінійного ДРЧП другого порядку. Тут $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$, $C = C(x, y)$, $D = D(x, y)$, $E = E(x, y)$, $G = G(x, y)$, $F = F(x, y)$ – задані функції, причому A, B, C, D, E, G називаються ***коефіцієнтами***; F – ***правою частиною***.

Якщо $\boxed{F = 0}$, то рівняння називається ***однорідним***, в противному разі – ***неоднорідним***.

Якщо коефіцієнти A, B, C, D, E, F, G – сталі числа, то рівняння називається ***лінійним зі сталими коефіцієнтами***.

<u>Принцип суперпозиції</u>: *Довільна лінійна комбінація зі сталими коефіцієнтами розв'язків лінійного однорідного ДРЧП також є розв'язком цього рівняння.*

Диференціальне рівняння з частинними похідними називається ***квазілінійним***, якщо воно лінійне відносно всіх похідних найвищого порядку.

$$\boxed{A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0}$$

– ***загальний вигляд*** квазілінійного ДРЧП другого порядку.

Ясно, що будь-яке <u>лінійне ДРЧП є</u> одночасно <u>квазілінійним</u>.

У залежності від знака ***дискримінанта*** $\boxed{\Delta = B^2 - AC}$ квазілінійне ДРЧП другого порядку відноситься до одного з наступних трьох типів:

1) якщо $\boxed{\Delta = B^2 - AC > 0}$, то рівняння ***гіперболічного типу***, його ***канонічний вигляд*** $\boxed{\partial^2 u/\partial x\partial y = f\left(x,y,u,\partial u/\partial x,\partial u/\partial y\right)}$.

2) якщо $\boxed{\Delta = B^2 - AC = 0}$, то рівняння ***параболічного типу***, його ***канонічний вигляд*** $\boxed{\partial^2 u/\partial y^2 = f\left(x,y,u,\partial u/\partial x,\partial u/\partial y\right)}$.

3) якщо $\boxed{\Delta = B^2 - AC < 0}$, то рівняння ***еліптичного типу***, й його ***канонічний вигляд*** $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x,y,u,\partial u/\partial x,\partial u/\partial y\right)}$.

<u>Зауваження 1</u>. Розбиття ДРЧП на гіперболічні, параболічні та еліптичні рівняння відповідає розбиттю фізичних процесів на три основні класи: хвильові, дифузійні та стаціонарні. Для рівнянь різних типів по-різному ставляться основні задачі і часто застосовуються різні методи розв'язування.

Найважливіші рівняння математичної фізики вказаних типів:

1) ***одновимірне хвильове рівняння*** $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ (гіпербо-

лічний тип);

2) ***одновимірне рівняння теплопровідності*** (***рівняння Фур'є***) $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$ (параболічний тип);

3) ***двовимірне рівняння Лапласа*** $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$ (еліптичний тип). Тут a – сталий коефіцієнт.

<u>Зауваження 2</u>. Тип розглянутих ДРЧП визначається тільки коефіцієнтами при других похідних і не залежить від інших складових. Якщо коефіцієнти A, B, C сталі, то тип цього рівняння один і той же у всій області визначення. Якщо ж коефіцієнти A, B, C змінні, то для рівняння виділяються області його гіперболічності, параболічності та еліптичності.

3.7. Виведення основних рівнянь математичної фізики

3.7.1. Рівняння коливань струни

Розглянемо натягнену струну довжини l, закріплену на кінцях. Якщо її вивести з положення рівноваги (наприклад, легко смикнути), то вона буде коливатися. Моделлю струни є пружна невагома (дією сили тяжіння можна знехтувати порівняно з силою натягу струни) і абсолютно гнучка (не чинить опору згину) нитка. Будемо розглядати малі плоскі поперечні коливання, коли рух усіх точок струни відбувається в одній площині перпендикулярно до її прямолінійного положення рівноваги – осі Ox (рис. 127). Лівий кінець струни співпадає з точкою $x = 0$, а правий – з точкою $x = l$. Процес коливань характеризується однією функцією $u(x,t)$ – відхиленням точки струни з абсцисою x у момент часу t. При фіксованому значенні t графік функції $u(x,t)$ дає форму (профіль) струни у цей момент часу.

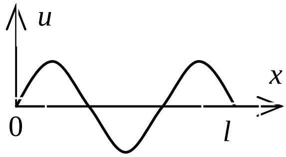

Рис. 127

Виділимо довільний елемент струни $[x, x+\Delta x]$, який при коливанні деформується в дугу $\cup MM_1$ (рис. 128).

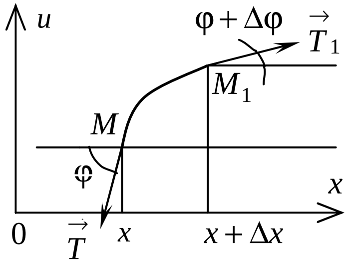

Рис. 128

Довжина цієї дуги

$$\Delta l = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\partial u / \partial x\right)^2}\, dx \approx \Delta x,$$

оскільки при малих коливаннях $\partial u / \partial x = o(\Delta x)$. Тобто видовження струни не відбувається. Тоді на підставі закону Гука сила натягу $\vec{T}$ в кожній точці струни направлена вздовж дотичної до її профілю і не змінюється за величиною, тобто $|\vec{T}| = T_0 = const$.

Проекція на вісь Ou F_u рівнодійної сил пружності $\vec{F}$, які прикладені до елемента MM_1, дорівнює

$$F_u = T_0 \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T_0 \sin\varphi.$$

Оскільки кут φ малий, то $\sin\varphi \approx \varphi \approx tg\,\varphi$. За геометричним змістом похідної $tg\,\varphi = \partial u / \partial x$. Тоді

$$F_u \approx T_0 \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - T_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = T_0 \left(\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right).$$

За формулою Лагранжа про скінченні прирости дістанемо

$$\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x + \theta\Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x \approx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \Delta x,$$

де $0 < \theta < 1$. Тоді $F_u \approx T_0 \left(\partial^2 u(x,t) / \partial x^2 \right) \Delta x$.

Якщо вважати струну однорідною з лінійною густиною $\rho = \rho_0 = const$, то маса елемента $\cup MM_1$ $m = \rho \Delta l \approx \rho_0 \Delta x$. Вертикальне (в напрямку осі Ou) прискорення w довільної точки цього елемента приблизно дорівнює вертикальному прискоренню точки M з координатою x, тобто $w \approx \partial^2 u(x,t) / \partial t^2$ згідно з геометричним змістом другої похідної по t.

Шукане рівняння коливань струни безпосередньо випливає з другого закону Ньютона $mw = F_u$ для елемента $\cup MM_1$ в напрямі осі Ou: $\rho_0 \Delta x \, \partial^2 u(x,t) / \partial t^2 = T_0 \left(\partial^2 u(x,t) / \partial x^2 \right) \Delta x$.

Звідси одержуємо $\boxed{\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (0 < x < l; \; t > 0)}$

– ***одновимірне однорідне хвильове рівняння***, де $a^2 = T_0 / \rho_0$.

Це рівняння гіперболічного типу і для нього задаються дві початкові умови (ПУ) $u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 < x < l)$ (початкове положення струни) і $\partial u(x,0)/\partial t = \psi(x) \quad (0 < x < l)$ (початкова швидкість струни). Якщо кінці струни $x = 0$ і $x = l$ жорстко закріплені, то граничні умови (ГУ) $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0 \quad (t > 0)$.

Таким чином, математична модель (задача математичної фізики) вільних малих плоских поперечних коливань однорідної струни з жорстко закріпленими кінцями, на яку не діють зовнішні сили, має вигляд:

(ДРЧП) $\partial^2 u / \partial t^2 = a^2 \partial^2 u / \partial x^2 \quad (0 < x < l; \; t > 0)$;

(ПУ) $u(x,0) = \varphi(x)$, $\partial u(x,0)/\partial t = \psi(x) \quad (0 < x < l)$;

(ГУ) $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0 \quad (t > 0)$.

Можна показати, що існує єдиний розв`язок цієї задачі, який стійкий до малих змін початкових і граничних умов. Таким чином, задача поставлена коректно.

<u>Зауваження 1</u>. Якщо кінці струни $x = 0$ і $x = l$ вільні, то граничні умови: $\partial u(0,t)/\partial x = 0$, $\partial u(l,t)/\partial x = 0 \quad (t > 0)$.

<u>Зауваження 2</u>. Ускладнення розглянутої задачі внаслідок врахування додаткових фізичних факторів приводить до більш складних ДРЧП.

<u>Зауваження 3</u>. Поперечні коливання струни не єдиний вид плоских хвильових рухів. Зокрема, звукові чи електромагнітні хвилі на значній відстані від джерел збудження можна вважати плоскими й описувати їх одновимірними хвильовими рівняннями.

<u>Зауваження 4</u>. Розглянемо (рис. 129) довгу однорідну двопровідною електричну лінію, що характеризується активним опором R, індуктивністю L, ємністю C і втратою G, де величини R, L, C, G розподілені вздовж лінії неперервно і рівномірно і роз-

раховані на одиницю довжини. Нехай $i(x,t)$ – сила струму; $u(x,t)$ – напруга. З рівняння балансу для сумарної зміни сили струму $\dfrac{\partial i}{\partial x}\Delta x + C\dfrac{\partial u}{\partial t}\Delta x + Gu\Delta x = 0$ випливає ***система телеграфних рівнянь***: $\boxed{\partial i/\partial x + C\,\partial u/\partial t + Gu = 0}$ і $\boxed{\partial u/\partial x + Ri + L\,\partial i/\partial t = 0}$. Продиференціювавши відповідним чином ці співвідношення і вилучивши одну з шуканих функцій $u(x,t)$ або $i(x,t)$, можна зазначену систему звести до вигляду, де кожне з рівнянь містить тільки одну з указаних функцій:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{RG}{LC}u = 0};$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{RG}{LC}i = 0}.$$

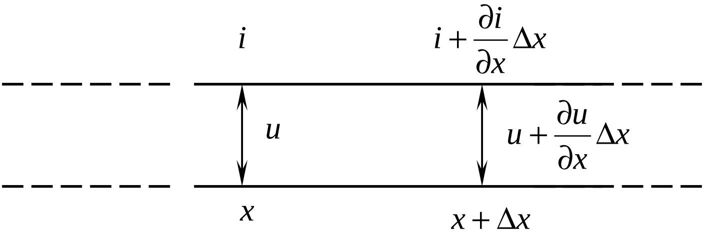

Рис. 129

3.7.2. Рівняння поширення тепла у стержні

Розглянемо (рис. 130) тонкий циліндричний однорідний стержень довжини l і сталого поперечного перерізу S. Припустимо, що бічна поверхня стержня теплоізольована (теплообмін може здійснюватися тільки через торці циліндра), а температура у всіх точках поперечного перерізу однакова (оскільки стержень тонкий – його діаметр достатньо малий порівняно з довжиною). Вісь стержня приймемо за координатну вісь Ox, причому лівий

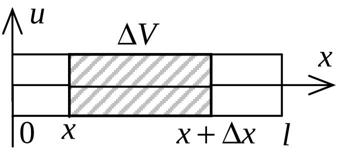

Рис. 130

кінець стержня співпадає з точкою $x=0$, а правий – з точкою $x=l$. Будемо вважати, що всередині стержня теплові джерела відсутні.

Нехай $\rho = const$ – густина речовини стержня; $C = const$ – питома теплоємність; $k = const$ – коефіцієнт теплопровідності. Величиною, яка характеризує процес поширення тепла в стержні, служить функція $u(x,t)$ – температура стержня в перерізі з абсцисою x в момент часу t.

Розглянемо довільний елемент стержня об`ємом $\Delta V = S\Delta x$, який розміщений між перерізами з абсцисами $x$ і $x+\Delta x$. Згідно з законом Фур`є кількість тепла, що проходить через поперечний переріз за одиницю часу пропорційна похідній $\partial u/\partial x$ (градієнту температури). Тоді $\Delta Q_1 = -k\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}S\Delta t$ і $\Delta Q_2 = -k\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}S\Delta t$ – кількість тепла, що протікає відповідно через перерізи $x_1 = x$ і $x_2 = x+\Delta x$. У результаті зовнішній приплив тепла в елемент ΔV за час Δt: $\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 = k\left(\dfrac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)S\Delta t \approx$

$$\approx k\left(\partial^2 u(x,t)/\partial x^2\right)\Delta x S\Delta t \; .$$

Цей приплив тепла ΔQ витрачається на зміну температури елемента ΔV на величину $\Delta u \approx \left(\partial u/\partial t\right)\Delta t$. Тоді

$$\Delta Q = c\Delta m\Delta u = c\rho\Delta V\Delta u \approx c\rho S\Delta x\left(\partial u/\partial t\right)\Delta t \; .$$

Складемо рівняння теплового балансу (з точністю до нескінченно малих більш високого порядку порівняно з Δx, Δt):

$$c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t . \quad \text{Звідси} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Таким чином, маємо ***одновимірне однорідне рівняння теплопровідності*** $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0<x<l;\; t>0)}$, де $a^2 = k/(c\rho)$.

Це рівняння параболічного типу. Параболічні рівняння виникають при моделюванні явищ переносу (теплопередачі, дифузії, фільтрації, випромінювання нейтронів і т.п.).

На відміну від гіперболічних рівнянь, для рівняння теплопровідності задається тільки одна початкова умова

$u(x,0)=\varphi(x) \quad (0<x<l)$ (початковий розподіл температури).

Якщо торці стержня підтримуються при певних температурах, то граничні умови $u(0,t)=g_1(t)$, $u(l,t)=g_2(t) \quad (t>0)$.

Якщо торці стержня теплоізольовані, то граничні умови

$$\partial u(0,t)/\partial x=0\,; \quad \partial u(l,t)/\partial x=0\,.$$

Таким чином, математична модель (задача математичної фізики) поширення тепла в тонкому однорідному циліндричному стержні довжини l з теплоізольованою бічною поверхнею і заданою температурою на торцях $x=0$, $x=l$ при відсутності внутрішніх джерел тепла має вигляд:

(ДРЧП) $\partial u/\partial t=a^2\,\partial^2 u/\partial x^2 \quad (0<x<l;\ t>0)$;

(ПУ) $u(x,0)=\varphi(x) \quad (0<x<l)$;

(ГУ) $u(0,t)=g_1(t)$, $u(l,t)=g_2(t) \quad (t>0)$.

3.8. Методи розв’язування задач математичної фізики

3.8.1. Розв`язування першої крайової задачі для хвильового рівняння методом відокремлення змінних

Метод відокремлення змінних (***метод стоячих хвиль*** або ***метод Фур`є***) – один з найбільш ефективних аналітичних способів розв`язування крайових задач для широкого кола лінійних ДРЧП. Звичайно його застосовують тоді, коли рівняння і граничні умови є лінійними та однорідними. У багатьох випадках він дозволяє будувати розв`язки крайових задач і для неоднорідних ДРЧП з неоднорідними граничними умовами.

Суть методу відокремлення змінних полягає у відшуканні розв`язку крайової задачі у вигляді ряду Фур`є за деякою ортогональною системою функцій, пов`язаних з цією задачею.

Загальна схема методу для випадку одновимірного однорідного лінійного ДРЧП гіперболічного (чи параболічного) типу:

1) Знаходження всієї нескінченної множини нетривіальних (ненульових) розв`язків спеціального вигляду добутку функцій $u(x,t) = X(x)T(t)$, кожна з яких залежить тільки від одного аргументу, з врахуванням однорідних граничних умов. У результаті ДРЧП розщеплюється на звичайні диференціальні рівняння, кожне з яких включає лише одну функцію-співмножник. Потім знаходять розв`язки цих звичайних диференційних рівнянь, які задовольняють виділені нульові граничні умови на межі області дослідження. Однорідні елементарні розв`язки узгоджуються між собою і з них формується нескінченна послідовність розв`язків.

2) Побудова на основі принципу суперпозиції розв`язку однорідного лінійного ДРЧП, який задовольняє як граничним, так і початковим умовам, у вигляді нескінченного ряду, що формується з одержаної на першому етапі послідовності елементарних розв`язків. У класичному припущенні цей ряд повинен бути рівномірно збіжним разом з рядами, які одержуються з нього диференціюванням необхідне число разів за незалежними змінними. Відповідний розв`язок називається ***класичним***. Якщо вказана умова не виконується, то відповідний розв`язок називається ***узагальненим***.

Розглянемо задачу про вільні коливання однорідної струни довжини l з жорстко закріпленими кінцями $x = 0$, $x = l$. Припустимо, що середовище опору не чинить і зовнішні сили на струну не діють. Математично вона формулюється як ***перша крайова задача для одновимірного однорідного хвильового рівняння***:

знайти розв`язок $u(x,t)$ ДРЧП $\boxed{\partial^2 u/\partial t^2 = a^2\, \partial^2 u/\partial x^2}$ $\boxed{(0 < x < l;\ t > 0)}$, який задовольняє початковим умовам $\boxed{u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial u(x,0)/\partial t = \psi(x) \quad (0 < x < l)}$ і однорідним граничним умовам першого типу $\boxed{u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad (t > 0)}$, де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – відомі функції; a, l – відомі числа, $a > 0$, $l > 0$.

Згідно з методом відокремлення змінних розв`язування цієї задачі розбивається на два етапи:

1) Знаходження нескінченної послідовності елементарних розв`язків, що задовольняють однорідним граничним умовам.

Шукаємо ненульові розв`язки у вигляді $u(x,t) = X(x)T(t)$, де

$X(x)$ – функція тільки від x, а $T(t)$ – тільки від t. Підставимо цей вираз у рівняння і дістанемо $X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$.

Відокремимо змінні в одержаному рівнянні, поділивши обидві його частини на $a^2 X(x)T(t)$: $\dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$.

Ця тотожна рівність двох відношень, кожне з яких залежить тільки від x чи тільки від t, можлива лише у випадку, коли обидва відношення дорівнюють одній і тій же сталій величині. Позначимо її через λ: $\dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$. Звідси дістанемо два звичайні диференціальні рівняння $X'' - \lambda X = 0$ і $T'' - a^2\lambda T = 0$, де λ – довільне дійсне число (***параметр розщеплення***).

Розв`яжемо ці рівняння для трьох можливих випадків значень параметра розщеплення λ.

а) Якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, тоді: $X'' + \beta^2 X = 0$; $k^2 + \beta^2 = 0$; $k_{1,2} = \pm\beta i$; $X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$; $T'' + a^2\beta^2 T = 0$; $k^2 + a^2\beta^2 = 0$; $x_{1,2} = \pm a\beta i$; $T = C\cos(a\beta t) + D\sin(a\beta t)$.

б) Якщо $\lambda = 0$, тоді: $X'' = 0$; $X' = A$; $X = Ax + B$; $T'' = 0$; $T' = C$; $T = Ct + D$.

в) Якщо $\lambda = \beta^2 > 0$, тоді: $X'' - \beta^2 x = 0$; $k^2 - \beta^2 = 0$; $k_{1,2} = \pm\beta$; $X = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$; $T'' - a^2\beta^2 T = 0$; $k^2 - a^2\beta^2 = 0$; $k_{1,2} = \pm a\beta$; $T = Ce^{a\beta t} + De^{-a\beta t}$.

В силу довільності сталих A, B, C, D, λ маємо нескінченну множину розв`язків хвильового рівняння. Виділимо з неї підмножину розв`язків, які задовольняють зазначеним однорідним граничним умовам. Для цього підставимо в них вираз $u(x,t) = X(x)T(t)$ і дістанемо: $X(0)T(t) = 0$; $X(l)T(t) = 0$ $(t > 0)$.

Оскільки для ненульових розв`язків $T(t) \neq 0$ $(t > 0)$, то $X(0) = 0$; $X(l) = 0$. Таким чином, крайова задача для звичайного диференціального рівняння:

(ЗДР) $\boxed{X''-\lambda X=0 \quad (0<x<l)}$; (ГУ) $\boxed{X(0)=0\,;\;\; X(l)=0}$
дає можливість відібрати ненульові розв`язки хвильового рівняння.

Значення λ, для якого остання крайова задача має ненульовий розв`язок, називається ***власним значенням (власним числом)***, а відповідний розв`язок $X(x)$ – ***власною функцією***. Множина всіх власних значень називається ***спектром***, а поставлена задача про відшукання спектра і відповідної йому ***системи власних функцій – спектральною задачею*** або ***задачею Штурма – Ліувілля***.

Зазначимо, що *власні функції визначаються з точністю до сталого множника*.

Розглянемо три можливих випадки значень параметра розщеплення λ.

а) Якщо $\lambda=-\beta^2<0$, то загальний розв`язок ЗДР визначається формулою $X=A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)$. Підставляючи його у граничні умови, дістанемо: $A=0$; $A\cos(\beta l)+B\sin(\beta l)=0$. Звідси $B\sin(\beta l)=0$. Якщо покласти $B=0$, то отримаємо нульовий розв`язок $X(x)=0$. Тому треба вважати, що $\sin(\beta l)=0$.

Розв`язавши одержане тригонометричне рівняння, знаходимо власні значення $\beta l=\pi n,\, n\in Z$; $\beta_n=\pi n/l$; $\lambda_n=-\pi^2 n^2/l^2$; $n=1,2,...$ і відповідні їм власні функції $X_n(x)=B_n\sin(\pi nx/l)$, $n=1,2,...$, де B_n – довільна стала, відмінна від нуля.

Зазначимо, що нема необхідності розглядати значення $n=0$, $-1,\,-2,...$. При $n=0$ маємо нульовий розв`язок $X_0(0)=0$, а при $n=-1,-2,...$ власні функції відрізняються тільки знаком від знайдених $X_n(x)$ і тому не поповнюють набір власних функцій новими ***лінійно незалежними функціями***.

У цьому випадку функція $T(t)$ набуває вигляду

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{\pi nat}{l}+D_n\sin\frac{\pi nat}{l},$$ де C_n, D_n – довільні сталі.

Відповідно ненульові розв`язки хвильового рівняння, що задовольняють однорідним граничним умовам, одержуються у вигляді

$$u_n(x,t)=\sin(\pi nx/l)\left(a_n\cos(\pi nat/l)+b_n\sin(\pi nat/l)\right),$$

де a_n, b_n – довільні сталі, причому сталі B_n, C_n, D_n введено до складу a_n, b_n, $n=1,2,\ldots$.

б) Якщо $\lambda=0$, то загальний розв`язок ЗДР має вигляд $X=Ax+B$. Підставляючи його в граничні умови, одержимо $B=0$; $Al+B=0$. Звідси $A=0; B=0$, тобто маємо нульовий розв`язок $X(x)=0$.

в) Якщо $\lambda=\beta^2>0$, то загальний розв`язок ЗДР має вигляд $X=Ae^{\beta x}+Be^{-\beta x}$. Підставляючи його в граничні умови (3.49), отримаємо систему для знаходження A і B:

$$A+B=0; \quad Ae^{\beta l}+Be^{-\beta l}=0.$$

Оскільки $\beta\neq 0$, то звідси одержимо $A=0; B=0$. Тобто, при будь-якому значенні $\lambda=\beta^2>0$ крайова задача має тільки нульовий розв`язок $X(x)=0$.

Таким чином, всі ненульові розв`язки хвильового рівняння, що задовольняють однорідні граничні умови, утворюють послідовність

$$u_n(x,t)=\sin(\pi nx/l)\left(a_n\cos(\pi nat/l)+b_n\sin(\pi nat/l)\right), \quad n=1,2,\ldots.$$

<u>2) Знаходження розв`язку, який задовольняє як граничним, так і початковим умовам.</u>

Оскільки задане хвильове рівняння і граничні умови лінійні й однорідні, то згідно з принципом суперпозиції сума його розв`язків також є розв`язком. Більше того, функція $u(x,t)$, що задається рядом $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nat}{l}+b_n\sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}$,

також є розв`язком, який задовольняє однорідні граничні умови.

Для знаходження коефіцієнтів a_n, b_n скористаємося початковими умовами. Дістанемо співвідношення

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}a_n\sin(\pi nx/l)=\varphi(x); \quad \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}(\pi na/l)b_n\sin(\pi nx/l)=\psi(x),$$

які можна розглядати як розвинення відомих функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ в ряди Фур`є за синусами на проміжку $[0; l]$. Вважаючи, що умови розвинення цих функцій у ряд Фур`є виконані (наприклад, функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ задовольняють умовам Діріхле на відрізку $[0;\, l]$), скористаємося відомими формулами для коефіцієнтів Фур'є і дістанемо

$$\boxed{a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx\,;\;\; b_n = \frac{2}{\pi n a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots)}.$$

Отже, розв`язок крайової задачі для хвильового рівняння можна подати у вигляді функціонального ряду:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(\pi n a t/l) + b_n \sin(\pi n a t/l)\right)\sin(\pi n x/l)}.$$

<u>Зауваження 1</u>. При розв`язуванні крайової задачі методом відокремлення змінних суттєва однорідність граничних умов, причому ці умови можуть бути не тільки першого типу

$$u(0,t) = 0\,, \quad u(l,t) = 0 \quad (t > 0)\,,$$

а й другого $\partial u(0,t)/\partial x = 0\,;\quad \partial u(l,t)/\partial x = 0 \quad (t > 0)$

чи третього (змішаного)

$$\alpha u(0,t) + \beta\,\partial u(0,t)/\partial x = 0\,;\quad \gamma u(l,t) + \delta\,\partial u(l,t)/\partial x = 0 \quad (t > 0)\,.$$

Якщо граничні умови ненульові, то заміною змінних задачу треба попередньо звести до випадку однорідних (нульових) граничних умов. Наприклад, якщо задано граничні умови $u(0,t) = g_1(t)$; $u(l,t) = g_2(t) \quad (t > 0)$, то використовується заміна $u = v + w$. Тут $v = v(x,t)$ – довільно задана функція, що задовольняє вказаним граничним умовам, зокрема, можна покласти

$$v = (1 - x/l)g_1(t) + (x/l)g_2(t)\,;$$

$w = w(x,t)$ – нова шукана функція, що задовольняє однорідним граничним умовам. Звичайно, диференціальне рівняння і початкові умови при цьому дещо ускладнюються.

<u>Зауваження 2</u>. Якщо треба розв`язати крайову задачу для <u>неоднорідного ДРЧП</u> з однорідними граничними умовами, то її <u>розв`язок</u> шукають <u>у вигляді функціонального ряду за власними функціями</u> $X_n(x)$ відповідної однорідної задачі (***метод розвинен-***

ня за власними функціями). Можливий також інший підхід: якщо для неоднорідного ДРЧП, яким-небудь способом знайти частинний розв`язок v, що задовольняє однорідним граничним і однорідним початковим умовам, то введення нової шуканої функції w за формулою $u = v + w$ приводить до відповідної крайової задачі для однорідного ДРЧП.

Зауваження 3. Знайдений розв`язок першої крайової задачі для хвильового рівняння можна подати у вигляді

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\pi n x / l) \sin(\pi n a t / l + \alpha_n)},$$

де

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\ ;\ \sin\alpha_n = a_n \Big/ \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\ ;\ \cos\alpha_n = b_n \Big/ \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\ .$$

Кожний член $\boxed{u_n(x,t) = A_n \sin(\pi n x / l) \sin(\pi n a t / l + \alpha_n)}$ розкладу – це так звана ***стояча хвиля*** або ***власне коливання***. Сталі A_n і α_n називаються відповідно ***амплітудою*** і ***початковою фазою*** стоячої хвилі $u_n(x,t)$. Кожна точка струни з фіксованою абсцисою x здійснює гармонічні коливання $u_n(x,t)$ з амплітудою $A_n \sin(\pi n x / l)$, різною для різних точок струни, і з однаковими ***частотою*** $\omega_n = \pi n a / l$ і ***початковою фазою*** α_n. Вся струна розбивається на n рівних ділянок, причому точки однієї і тієї ж ділянки знаходяться в одній і тій же ***фазі*** $\pi n a / l + \alpha_n$, а точки сусідніх ділянок – в прямо протилежних фазах. На рис. 131 зображені послідовні положення струни для випадків $n = 1,\ 2,\ 3$.

Точки, які відділяють одну ділянку від іншої, знаходяться в спокої. Це так звані ***вузли***. Середини ділянок, які називають ***пучностями***, коливаються з найбільшою амплітудою A_n. ***Основний тон***, який характеризує ***висоту*** звуку, визначається першою складовою $u_1(x,t)$. Інші ***тони (обертони)***, $u_n(x,t)$, $n = 2, 3, \ldots$, які видає струна одночасно з основним тоном, характеризують певне забарвлення (***тембр***) звуку. Рух струни в цілому є накладанням різних власних коливань.

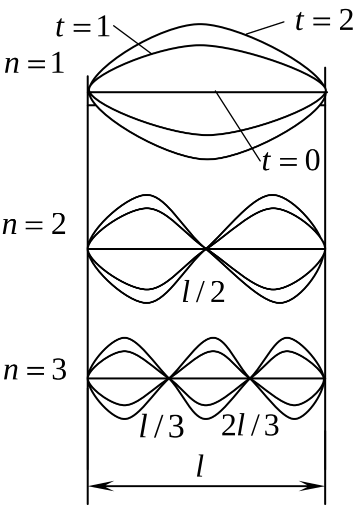

Рис. 131

Приклад 1. Знайти закон коливань струни довжиною l, що розміщена на відрізку $[0;l]$, якщо в початковий момент струні надають форми синусоїди $\varphi(x) = A\sin(4\pi x/l)$, а потім її відпускають без початкової швидкості. Кінці струни закріплені, зовнішні сили відсутні.

□ З математичної точки зору маємо першу крайову задачу: знайти розв`язок однорідного хвильового рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < l,\quad t > 0)$, який задовольняє початковим умовам

$$u(x,0) = A\sin(4\pi x/l);$$

$$\partial u(x,0)/\partial t = 0 \quad (0 < x < l)$$

і однорідним граничним умовам першого типу

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0 \quad (t > 0).$$

Згідно з методом відокремлення змінних розв`язок поставленої задачі можна подати у вигляді функціонального ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\pi nat/l) + b_n \sin(\pi nat/l)\right) \sin(\pi nx/l).$$

Знайдемо його коефіцієнти:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l A\sin\frac{4\pi}{l}x\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq 4; \\ A, & n = 4; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi na}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx = \frac{2}{\pi na}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx = 0.$$

Тоді шуканий розв`язок

$$u(x,t) = A\cos(4\pi at/l)\sin(4\pi x/l). \quad ■$$

Приклад 2. По середині вільної струни, кінці якої закріплені в точках $x=0$ і $x=l$, в початковий момент часу $t=0$ вдаряють плоским молоточком шириною h і надають відповідній ділянці струни початкової швидкості v_0. Визначити форму струни в довільний момент часу t, якщо початкове відхилення струни відсутнє.

□ Математично маємо першу крайову задачу:

знайти розв`язок однорідного хвильового рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0<x<l,\ t>0)$, який задовольняє початковим умовам $u(x,0)=0$; $\partial u(x,0)/\partial t=v_0$ $(l/2-h/2\le x\le l/2+h/2)$; $\partial u(x,0)/\partial t=0$ $(0<x<l/2-h/2;\ l/2+h/2<x<l)$ і однорідним граничним умовам $u(0,t)=0$; $u(l,t)=0$ $(t>0)$.

За методом відокремлення змінних розв`язок цієї задачі знаходимо у вигляді функціонального ряду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\pi nat/l)+b_n\sin(\pi nat/l)\right)\sin(\pi nx/l).$$

Обчислимо його коефіцієнти:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx=0;\quad b_n=\frac{2}{\pi na}\int_{(l-h)/2}^{(l+h)/2}v_0\sin\frac{\pi nx}{l}dx=$$

$$=-\frac{2v_0 l}{\pi^2 n^2 a}\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}\Bigg|_{(l-h)/2}^{(l+h)/2}=-\frac{2v_0 l}{\pi^2 n^2 a}\cdot\left(\cos\frac{\pi n(l+h)/2}{l}-\right.$$

$$\left.-\cos\frac{\pi n(l-h)/2}{l}\right)=\frac{4v_0 l}{\pi^2 n^2 a}\sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi nh}{2l}.$$

Тоді шуканий розв`язок

$$u(x,t)=\frac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi nh}{2l}\sin\frac{\pi nat}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}.\ \blacksquare$$

Приклад 3. Провідник довжиною l, по якому тече змінний струм, вкритий такою якісною ізоляцією, що втрати через його поверхню G практично відсутні. Крім того, активний опір R настільки малий, що ним можна знехтувати. Початкове значення сили струму в провіднику дорівнює нулю $i(x,0)=0$, а початкова напруга задається формулою $u(x,0)=E_0\sin\frac{5\pi x}{2l}$. Обидва кінці провідника ізольовані. Знайти силу струму $i(x,t)$ в кожній точці провідника в довільний момент часу.

□ Сила струму $i(x,t)$ задовольняє телеграфному рівнянню

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+\frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{RG}{LC}i=0.$$

Оскільки за умовою задачі втрати через ізоляцію G і активний опір R відсутні, тобто $G=0$, $R=0$, то це рівняння переходить в однорідне хвильове рівняння $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$, де $a^2=\frac{1}{LC}$; L – індуктивність, C – ємність провідника.

З рівняння $\frac{\partial u}{\partial x}+Ri+L\frac{\partial i}{\partial t}=0$ дістанемо $\frac{\partial i}{\partial t}=-\frac{1}{L}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{R}{L}i$.

З умови задачі $R=0$, $i(x,0)=0$ і $\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}=\frac{5\pi E_0}{2l}\cos\frac{5\pi x}{2l}$.

Тоді $\frac{\partial i(x,0)}{\partial t}=-\frac{5\pi E_0}{2lL}\cos\frac{5\pi x}{2l}$.

Оскільки кінці провідника ізольовані, то функція $i(x,t)$ задовольняє однорідним граничним умовам $i(0,t)=0$, $i(l,t)=0$.

Таким чином, задача допускає наступне математичне формулювання: знайти розв`язок однорідного хвильового рівняння $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$, який задовольняє початковим умовам $i(x,0)=0$; $\frac{\partial i(x,0)}{\partial t}=-\frac{5\pi E_0}{2lL}\cos\frac{5\pi x}{2l}$ і однорідним граничним умовам $i(0,t)=0$, $i(l,t)=0$.

За методом відокремлення змінних розв`язок цієї задачі знаходимо у вигляді функціонального ряду

$$i(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(\pi nat/l)+b_n\sin(\pi nat/l)\right)\sin(\pi nx/l).$$

Обчислимо його коефіцієнти:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx=0;\quad b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\left(-\frac{5E_0\pi}{2lL}\cos\frac{5\pi x}{2l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=$$

$$=-\frac{5E_0}{nalL}\cdot\frac{1}{2}\int_0^l\left(\sin\frac{(2n+5)\pi x}{2l}+\sin\frac{(2n-5)\pi x}{2l}\right)dx=-\frac{5E_0}{2nalL}\times$$

$$\times\left(-\frac{2l}{(2n+5)\pi}\cos\frac{(2n+5)\pi x}{2l}-\frac{2l}{(2n-5)\pi}\cos\frac{(2n-5)\pi x}{2l}\right)\Bigg|_0^l=$$

$$=-\frac{5E_0}{\pi naL}\cdot\left(\frac{1}{2n+5}+\frac{1}{2n-5}\right)=\frac{20E_0}{\pi aL(25-4n^2)}.$$

Тоді шуканий розв`язок

$$i(x,t)=\frac{20E_0}{\pi aL}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{25-4n^2}\sin\frac{\pi nat}{l}\sin\frac{\pi nx}{l}.\quad\blacksquare$$

3.8.2. Розв'язування другої крайової задачі для рівняння теплопровідності методом відокремлення змінних

Розглянемо задачу про поширення тепла в однорідному стержні довжини l, всередині якого відсутні теплові джерела, а бічна поверхня теплоізольована. Припустимо, що початковий розподіл при $t=0$ температури $u(x,t)$ в стержні $u(x,0)=\varphi(x)$ $(0<x<l)$, де $\varphi(x)$ – відома функція, а обидва його кінці $x=0$ і $x=l$ теплоізольовані, тобто теплові потоки через них відсутні:

$$\partial u(0,t)/\partial x=0;\quad \partial u(l,t)/\partial x=0\quad (t>0).$$

Математично ця задача формулюється як ***друга крайова задача*** (***задача Неймана***) ***для одновимірного рівняння теплопровідності***:

знайти розв'язок $u(x,t)$ ДРЧП $\boxed{\partial u/\partial t=a^2\,\partial^2u/\partial x^2}$

$\boxed{(0 < x < l;\ \ t > 0)}$, який задовольняє початковій умові $\boxed{u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 < x < l)}$ і однорідним граничним умовам другого типу $\boxed{\partial u(0,t)/\partial x = 0\,; \quad \partial u(l,t)/\partial x = 0 \quad (t > 0)}$, де $\varphi(x)$ – відома функція; a, l – відомі числа, $a > 0$, $l > 0$.

На першому етапі розв'язування задачі методом відокремлення змінних шукаємо ненульові розв'язки даного однорідного ДРЧП, які задовольняють указаним однорідним граничним умовам, у вигляді добутку функцій $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Використовуючи відокремлення змінних у рівнянні ДРЧП і граничних умовах (зробіть це самостійно), дістанемо звичайне диференціальне рівняння

$$T'(t) - \lambda a^2 T(t) = 0$$

для знаходження функції $T(t)$ і крайову задачу Штурма – Ліувілля

(ЗДР) $X''(x) - \lambda X(x) = 0 \ \ (0 < x < l)$; (ГУ) $X'(0) = 0$; $X'(l) = 0$

для знаходження функції $X(x)$ і довільної сталої λ (параметра розщеплення).

Рівняння $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ уже розв'язувалось в попередньому пункті 3.8.1. Якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, то його загальний розв'язок визначається формулою $X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$, де A і B –довільні сталі. З граничних умов маємо:

$X'(0) = 0: \quad B = 0;$

$X'(l) = 0: \quad -A\beta\sin(\beta l) + B\beta\cos(\beta l) = 0; \ \ A\sin\beta l = 0.$

Якщо покласти $A = 0$, то одержимо нульовий розв'язок $X(x) \equiv 0$. Тому треба покласти $\sin\beta l = 0$.

Розв'язавши одержане тригонометричне рівняння, знаходимо власні значення: $\beta l = \pi n,\, n \in Z$; $\beta_n = \pi n / l$; $\lambda_n = -\pi^2 n^2 / l^2$, $n = 1,2,...$ і відповідні їм власні функції $X_n(x) = A_n \cos(\pi n x / l)$, $n = 1,2,...$, де A_n – довільна стала, відмінна від нуля.

Якщо $\lambda = 0$, то загальний розв'язок ЗДР визначається формулою $X = Ax + B$, де A і B - довільні сталі. Граничні умови дозволяють знайти тільки довільну сталу A:

$$X'(0)=0: \quad A=0; \qquad X'(l)=0: \quad A=0.$$

Звідси $X(x)=B$. Тоді $.\lambda_0=0$ – власне значення; $X_0(x)=A_0$ – відповідна власна функція, де A_0 – довільна стала, відмінна від нуля.

Якщо $\lambda=\beta^2>0$, то загальним розв'язком ЗДР служить функція $X=Ae^{\beta x}+Be^{-\beta x}$, де A і B – довільні сталі. Підставляючи його в граничні умови, дістанемо систему для знаходження A і B:

$$X'(0)=0: \ A\beta-B\beta=0; \qquad X'(l)=0: \ A\beta e^{\beta l}-B\beta e^{\beta l}=0.$$

Оскільки $\beta\neq 0$, то звідси одержимо $A=0$; $B=0$. Тобто, при будь-якому значенні $\lambda=\beta^2>0$ задача Штурма – Ліувілля має тільки нульовий розв'язок $X(x)\equiv 0$.

Таким чином, об'єднуючи всі можливі випадки λ, маємо послідовність власних значень $\lambda_n=-\pi^2n^2/l^2$, $n=0,1,2,...$ і відповідних власних функцій $X_n(x)=A_n\cos(\pi nx/l)$, $n=0,1,2,....$

При $\lambda=\lambda_n$ диференціальне рівняння для функції $T(t)$ набуває вигляду

$$T_n'(t)+\left(\pi^2n^2a^2/l^2\right)T_n(t)=0 \quad (n=0,1,2,...).$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\int\frac{dT_n}{T_n}=-\int\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}dt; \quad \ln T_n=-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}t+\ln C_n;$$

$$T_n=C_n\,e^{-\left(\pi^2n^2a^2/l^2\right)t} \quad (n=0,1,2,...).$$

Підставляючи функції $X_n(x)=A_n\cos(\pi nx/l)$ і $T_n=C_n\,e^{-\left(\pi^2n^2a^2/l^2\right)t}$ у формулу $u(x,t)=X(x)T(t)$, знаходимо послідовність ненульових розв'язків рівняння теплопровідності, які задовольняють однорідним граничним умовам:

$$u_n(x,t)=a_n\,e^{-\left(\pi^2n^2a^2/l^2\right)t}\cos(\pi nx/l) \quad (n=0,1,2,...),$$

де a_n – довільна стала, до складу якої введено A_n і C_n.

На другому етапі методу відокремлення змінних будується розв’язок ДРЧП, який задовольняє як граничним, так і початковій умовам. За загальною схемою методу такий розв’язок формується у вигляді функціонального ряду:

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\left(\pi^2n^2a^2/l^2\right)t}\cos\frac{\pi nx}{l}}.$$

Коефіцієнти ряду a_n, $n=0,1,2,\ldots$ знаходять за початковою умовою: $u(x,0)=\varphi(x)$: $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(\pi nx/l)$.

Розглядаючи останнє співвідношення як розвинення заданої функції $\varphi(x)$ у ряд Фур’є за косинусами на відрізку $[0;\,l]$ і користуючись відомими формулами для обчислення коефіцієнтів ряду Фур’є, дістанемо

$$\boxed{a_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)\,dx;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx\quad(n=1,2,\ldots)}.$$

<u>Приклад</u>. Розв'язати другу крайову задачу:

(ДРЧП) $\partial u/\partial t=9\,\partial^2u/\partial x^2\quad(0<x<4;\ t>0)$;

(ПУ) $u(x,0)=\varphi(x)=\pi\cos(\pi x/8)$;

(ГУ) $\partial u(0,t)/\partial x=0$; $\partial u(4,t)/\partial x=0\quad(t>0)$.

□ У даній задачі $a^2=9$, $l=4$. Обчислимо коефіцієнти:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_0^4\pi\cos\frac{\pi x}{8}dx=2\sin(\pi x/8)\Big|_0^4=2;$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{4}\int_0^4\pi\cos\frac{\pi x}{8}\cos\frac{\pi nx}{4}dx=\frac{\pi}{4}\times$$

$$\times\int_0^4\left(\cos\frac{\pi x(2n+1)}{8}+\cos\frac{\pi x(2n-1)}{8}\right)dx=\frac{2}{2n+1}\cdot\sin\frac{\pi x(2n+1)}{8}\Bigg|_0^4+$$

$$+\frac{2}{2n-1}\cdot\sin\frac{\pi x(2n-1)}{8}\bigg|_0^4=\frac{2}{2n+1}\sin\frac{\pi(2n+1)}{2}+\frac{2}{2n-1}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi(2n-1)}{2}=\frac{2\cdot(-1)^n}{2n+1}+\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{4n^2-1}.$$

Тоді шуканий розв'язок можна подати у вигляді ряду

$$u(x,t)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{4n^2-1}e^{-\left(\pi^2n^2 9/4^2\right)t}\cos\frac{\pi nx}{4}=$$

$$=2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}e^{-\left(9\pi^2n^2/16\right)t}\cos\frac{\pi nx}{4}.\quad\blacksquare$$

3.8.3. Розв'язування першої крайової задачі для рівняння Лапласа у крузі методом відокремлення змінних

Вивчення усталених (стаціонарних) процесів приводить до ДРЧП еліптичного типу. Наприклад, якщо в двовимірному однорідному рівнянні теплопровідності

$$\partial u/\partial t=a^2\left(\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2\right)$$

вважати, що шукана температура u не залежить від часу t, тобто $u=u(x,y)$, то похідна $\partial u/\partial t$ тотожно дорівнює нулю і для знаходження $u(x,y)$ одержуємо ***двовимірне рівняння Лапласа*** $\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2=0$, яке відноситься до еліптичного типу.

Для рівнянь еліптичного типу вказуються лише граничні умови, а початкові умови відсутні.

Обмежимося двовимірним випадком. Для однозначного обчислення $u=u(x,y)$ не треба задавати початковий розподіл шуканої величини u, а досить знати значення u на межі S області D, в якій вивчається дане явище, тобто маємо ***граничну умову першого типу*** $\boxed{u(x,y)\big|_S=g(x,y)}$, $(x,y)\in S$, де $g(x,y)$ - відома функція. Така гранична умова виникає, коли межа S доступна для спостереження і в кожній її точці величину u можна виміряти.

Якщо ж у довільній точці межі S відома інтенсивність потоку

$\partial u/\partial n$ шуканої величини, то маємо ***граничну умову другого типу*** $\boxed{\partial u(x,y)/\partial n\big|_S = g(x,y)}$, $(x,y)\in S$, де $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до межі S.

Гранична умова третього (***змішаного***) ***типу*** має комбінований вигляд $\boxed{\left(\alpha u(x,y)+\beta \partial u(x,y)/\partial n\right)\big|_S = g(x,y)}$, $(x,y)\in S$, де α, β – задані числа.

Нехай у крузі радіуса ρ_0 з центром у початку координат треба знайти розв'язок $u(\rho,\varphi)$ ***рівняння Лапласа*** (***в полярних координатах***)

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0 \quad (0<\varphi<2\pi;\, 0<\rho<\rho_0)},$$

який задовольняє граничній умові $\boxed{u(\rho_0,\varphi)=g(\varphi) \quad (0<\varphi<2\pi)}$, а також додатковим умовам, що випливають з фізичних міркувань:

$u(\rho,\varphi)$ – неперервна функція в крузі $0\le\rho\le\rho_0$ (а, отже, обмежена в даному крузі);

$u(\rho,\varphi)$ – періодична функція відносно φ з періодом 2π, тобто $u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi)$.

Тут φ – полярний кут; ρ – полярний радіус; $g(\varphi)$ – відома періодична функція з періодом 2π.

Розв'язок поставленої ***першої крайової задачі для рівняння Лапласа у крузі*** шукаємо методом відокремлення змінних у вигляді $u=R(\rho)\,\Phi(\varphi)$ Підставляючи цей вираз у рівняння, маємо:

$$\Phi(\varphi)R''(\rho)+(1/\rho)\,\Phi(\varphi)R'(\rho)+\left(1/\rho^2\right)\Phi''(\varphi)R(\rho)=0;$$

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=-\lambda, \quad \text{де} \quad \lambda\ge 0.$$

Зазначимо, що при $\lambda<0$ розв'язок неперіодичний. (Перевірте це самостійно).

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0; \qquad \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0.$$

Якщо $\lambda=0$, то

$$\Phi''(\varphi)=0;\ \ \Phi(\varphi)=A\varphi+B;\quad \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)=0;$$

$$R'(\rho)=v(\rho);\ \ \rho v'+v=0;\ \ \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{d\rho}{\rho};\quad \ln v=-\ln\rho+\ln C;$$

$$v=\frac{C}{\rho};\quad R'(\rho)=\frac{C}{\rho};\ \ R\rho=C\int\frac{d\rho}{\rho};\ \ R\rho=C\ln\rho+D;$$

$u_0(\rho,\varphi)=(A\varphi+B)(C\ln\rho+D)$, де A, B, C, D – довільні сталі.

Оскільки функція $u_0(\rho,\varphi)$ – періодична по φ, то $A=0$. Із неперервності функції $u_0(\rho,\varphi)$ у центрі круга при $\rho=0$ маємо $C=0$. Отже, $u_0(\rho,\varphi)=a_0/2$, де a_0 – довільна стала, в яку введено B і D.

Якщо $\lambda>0$, то $\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0$; $k^2+\lambda=0$;

$$k=\pm\sqrt{\lambda}i\ ;\ \ \Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi;$$

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0;\ \ R(\rho)=\rho^{\alpha};$$

$$\rho^2\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}+\rho\alpha\rho^{\alpha-1}-\lambda\rho^{\alpha}=0;\ \ \alpha(\alpha-1)+\alpha-\lambda=0;$$

$$\alpha^2-\lambda=0;\ \ \alpha=\pm\sqrt{\lambda};\quad R(\rho)=C\rho^{-\sqrt{\lambda}}+D\rho^{\sqrt{\lambda}};$$

$$u(\rho,\varphi)=\left(A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi\right)\left(C\rho^{-\sqrt{\lambda}}+D\rho^{\sqrt{\lambda}}\right),$$

де A, B, C, D – довільні сталі.

Оскільки розв’язок $u(\rho,\varphi)$ неперервний у центрі круга при $\rho=0$, то $C=0$. Тоді $u(\rho,\varphi)=\left(a\cos\sqrt{\lambda}\varphi+b\sin\sqrt{\lambda}\varphi\right)\rho^{\sqrt{\lambda}}$, де $a,\ b$ – довільні сталі.

Знайдений розв’язок має період $2\pi/\sqrt{\lambda}$. Цей період дорівнює 2π або ціле число разів міститься в 2π тоді і тільки тоді, коли $\sqrt{\lambda}$ – ціле додатне число, тобто $\sqrt{\lambda}=n$; $\lambda_n=n^2$ $(n=1,2,...)$.

Отже, $u_n(\rho,\varphi)=(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\rho^n$.

Згідно з принципом суперпозиції довільна сума знайдених функцій $u_n(\rho,\varphi)$ $(n=0,1,2,...)$ і навіть ряд

$$\boxed{u(\rho,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)\rho^n}$$

також буде розв'язком рівняння Лапласа.

Довільні сталі a_0, a_n, b_n $(n=1,2,...)$ знаходимо з граничної умови:

$$u(\rho_0,\varphi)=g(\varphi): \quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)\rho_0^n=g(\varphi);$$

$$g(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\rho_0^n\cos n\varphi+b_n\rho_0^n\sin n\varphi\right).$$

Розглядаючи останній вираз як розвинення функції $g(\varphi)$ в ряд Фур'є і використовуючи формули для коефіцієнтів ряду Фур'є, одержимо

$$\boxed{a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)d\varphi}; \qquad \boxed{a_n=\frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi};$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi}.$$

Розглянута крайова задача має важливе значення в фізичних застосуваннях. Зокрема, її можна інтерпретувати як задачу про знаходження електростатичного потенціалу кругового диску за відомим розподілом потенціалу на його межі $\rho=\rho_0$ або як задачу про стаціонарний розподіл температури всередині круга при відомій температурі на його межі і т.п.

Приклад. Знайти розподіл електростатичного потенціалу $u(\rho,\varphi)$ на однорідній тонкій круглій пластині радіуса $\rho_0=1$, якщо потенціал на її межі задається формулою $u(1,\varphi)=8\sin^2 2\varphi$.

□ Треба знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \quad (0<\varphi<2\pi;\ 0<\rho<1),$$

який задовольняє граничній умові $u(1,\varphi)=8\sin^2 2\varphi \quad (0<\varphi<2\pi)$.
а також додатковим умовам, що випливають з фізичних міркувань:

Будемо шукати розв'язок у вигляді ряду

$$u(\rho,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)\rho^n .$$

Обчислимо його коефіцієнти:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 8\sin^2 2\varphi\,d\varphi=\frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi=\frac{4}{\pi}\varphi\Big|_0^{2\pi}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sin 4\varphi\Big|_0^{2\pi}=8; \quad a_n=\frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi=\frac{1}{\pi\cdot 1^n}\int_0^{2\pi} 8\sin^2 2\varphi\times$$

$$\times\cos n\varphi d\varphi=\frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi=\frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\varphi\,d\varphi-\frac{2}{\pi}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\left(\cos(n+4)\varphi+\cos(n-4)\varphi\right)d\varphi=\frac{4}{n\pi}\sin n\varphi\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{(n+4)\pi}\times$$

$$\times\sin(n+4)\varphi\Big|_0^{2\pi}-\begin{cases}(2/\pi)\varphi\Big|_0^{2\pi}=-4, \quad n=4;\\ \left((2/\pi)/(n-4)\right)\sin(n-4)\varphi\Big|_0^{2\pi}=0,\ n\neq 4;\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi=\frac{1}{\pi_0 1^n}\int_0^{2\pi} 8\sin^2 2\varphi\sin n\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\sin n\varphi d\varphi=\frac{4}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\varphi d\varphi+\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin(n+4)\varphi+\right.$$

$$\left.+\sin(n-4)\varphi\right)d\varphi=0.$$

Тоді $\quad u(\rho,\varphi)=8/2+(-4)\rho^4\cos 4\varphi=4-4\rho^4\cos 4\varphi$. ■

Зауваження. Розглянуті методи не вичерпують усіх відомих способів розв`язування задач математичної фізики. Перелічимо деякі найбільш вживані методи:

1) Метод відокремлення змінних. 2) Метод інтегральних пе-

ретворень (зокрема, застосування перетворення Лапласа – операційний метод). 3) Метод перетворення координат. 4) Метод заміни незалежних і залежних змінних. 5) Метод функцій Гріна (функцій впливу (джерела)). 6) Метод інтегральних рівнянь. 7) Варіаційні методи (замість крайової задачі для ДРЧП розв`язується деяка задача оптимізації). 8) Чисельні методи (метод сіток, апроксимація сплайнами, метод скінченних елементів і т.п.).

3.8.4. Загальне поняття про нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними

Фізичні явища, що відбуваються в природі, як правило, носять дуже складний характер. Тому математичні моделі реальних процесів, які досить точно відображають основні їх закономірності, виявляються нелінійними. Лінійні моделі виникають звичайно при додаткових спрощеннях, до яких приводять різні правдоподібні припущення, такі як малість величин, що характеризують процес.

Складність оперування з нелінійними моделями довгий час стримувала їх практичне застосування. У результаті поза належною увагою залишались по-справжньому життєво важливі явища, які не піддаються лінійному описові і з класичних позицій часто сприймаються як катастрофи. Потреби більш глибокого вивчення реальних процесів і зростання можливостей обчислювальної техніки створюють передумови для підвищення інтересу до нелінійних моделей, відкриття нових чисто нелінійних математичних методів.

Можна виділити наступні три основні властивості нелінійних ДРЧП, які відрізняють їх від лінійних рівнянь:

1) утворення стійких усамітнених хвиль – ***солітонів***; які ведуть себе подібно частинкам;

2) руйнування неперервних, гладких (класичних) розв’язків і утворення ***розривних*** (***узагальнених***) ***розв’язків***, які відповідають ***ударним хвилям***;

3) ***самоорганізація систем*** – утворення розв’язків зі стійкою неоднорідною структурою при однорідних умовах задачі, наприклад, утворення дисипативних (теплових) структур у нелінійних задачах дифузії.

3.9. Контрольні запитання

1. Що називається криволінійним інтегралом за довжиною (першого роду)?
2. Як обчислити криволінійний інтеграл першого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задані у параметричній формі?
3. Як обчислити криволінійний інтеграл за довжиною за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задано в явному вигляді $y = y(x)$?
4. Як за допомогою криволінійного інтеграла першого роду обчислити довжину дуги, масу кривої та площу циліндричної поверхні?
5. Що таке векторне поле? Що таке векторні лінії?
6. Які основні характеристики векторного поля? Дайте означення дивергенції та ротора векторного поля.
7. Що таке щільність циркуляції векторного поля?
8. Запишіть формули для обчислення дивергенції та ротора у прямокутних координатах.
9. Яке поле називається соленоїдальним? Безвихровим? Гармонічним?
10. Що називається криволінійним інтегралом за координатами (другого роду)?
11. Як обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задані у параметричній формі?
12. Як обчислити криволінійний інтеграл за координатами за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задано в явному вигляді $y = y(x)$?
13. Як визначається додатний напрям обходу замкненої кривої?
14. Сформулюйте теорему і запишіть формулу Гріна, що зв'язує криволінійний і подвійний інтеграли.
15. Як за допомогою криволінійного інтеграла за координатами обчислити площу плоскої фігури?
16. Як обчислити роботу змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж заданої кривої?
17. Сформулюйте умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування.

18. Як за допомогою криволінійного інтеграла за координатами відновити функцію двох чи трьох змінних за її повним диференціалом?
19. Як за допомогою криволінійного інтеграла другого роду знайти загальний розв'язок диференціального рівняння у повних диференціалах?
20. Яке поле називається потенціальним? Як зв'язані поняття безвихрового і потенціального поля?
21. Як знайти потенціал векторного поля?
22. Що таке вектор-потенціал соленоїдального поля?
23. Що таке оператор Гамільтона ("набла"-оператор)? Наведіть вирази для диференціальних операцій першого порядку – градієнта, дивергенції та ротора – за допомогою цього оператора.
24. Які існують диференціальні операції другого порядку? Що таке оператор Лапласа (лапласіан)?
25. Які поверхні називаються двосторонніми? Односторонніми? Наведіть приклади двосторонніх поверхонь. Що таке орієнтація двосторонньої поверхні?
26. Яка поверхня називається правильною (стандартною) в напрямі осі Ox? Осі Oy? Осі Oz? Яка поверхня називається просто правильною (стандартною)?
27. Що називається поверхневим інтегралом за площею (першого роду)?
28. Як обчислюється поверхневий інтеграл першого роду?
29. Як знайти масу матеріальної поверхні за допомогою поверхневого інтеграла за площею?
30. Що називається поверхневим інтегралом за координатами (другого роду)?
31. Які застосування має поверхневий інтеграл за координатами?
32. У чому полягає зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду?
33. Як обчислюється поверхневий інтеграл за координатами методом проектування на одну координатну площину?
34. Як обчислюється поверхневий інтеграл другого роду методом проектування на всі три координатні площини?
35. Сформулюйте теорему і запишіть формулу Стокса, що зв'язує криволінійний і поверхневий інтеграли.

36. Сформулюйте теорему і запишіть формулу Остроградського – Гаусса, що зв'язує поверхневий і потрійний інтеграли.
37. Дайте означення диференціального рівняння з частинними похідними (ДРЧП). Що таке загальний і частинний розв'язки ДРЧП?
38. Що таке початкова задача (задача Коші) для ДРЧП?
39. Укажіть основні типи граничних умов і відповідні типи крайових задач.
40. Яка задача математичної фізики називається коректно поставленою?
41. Який загальний вигляд лінійного ДРЧП другого порядку?
42. Дайте класифікацію лінійних ДРЧП другого порядку. Наведіть відповідний канонічний вигляд лінійного ДРЧП другого порядку кожного типу.
43. Як формулюється перша крайова задача для однорідного одновимірного хвильового рівняння? Як розв'язується ця задача методом відокремлення змінних?
44. Як формулюється друга крайова задача для однорідного одновимірного рівняння теплопровідності? Як розв'язується ця задача методом відокремлення змінних?
45. Як формулюється перша крайова задача для двовимірного рівняння Лапласа у крузі? Як розв'язується ця задача методом відокремлення змінних?
46. Укажіть основні властивості нелінійних ДРЧП, що відрізняють їх від лінійних рівнянь.

3.10. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Примітка. Значення параметрів α, β, γ, a, l, що входять у поставлені задачі, визначаються так:

α і β – відповідно число голосних і приголосних букв у Вашому прізвищі; γ – номер варіанта; $a = |\alpha - \beta| + 1$; $l = a + 1 + \left[\gamma/(\alpha+\beta)\right]$, де $[z]$ – ціла частина числа z.

Завдання 1. Обчислити вказаний криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною) $I = \int\limits_L f(x, y)\, dl$ по заданій дузі L.

№ в-та	Завдання
1	$\int\limits_L (x^2 - y)\,dl$, L – дуга кола $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$
2	$\int\limits_L \dfrac{y\,dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, L – дуга кардіоїди $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$
3	$\int\limits_L (x^2 + y^2)\,dl$, L – дуга кола $x^2 + y^2 = 4x$, $y \ge 0$
4	$\int\limits_L x^3 \sqrt{y}\,dl$, L – дуга лінії $y = x^4$, $0 \le x \le 1$
5	$\int\limits_L y\,dl$, L – дуга циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$
6	$\int\limits_L (x^2 + y^2)^{3/2}\,dl$, L – дуга лемніскати Бернуллі $\rho = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi/4$
7	$\int\limits_L x^2 y^{-3}\,dl$, L – дуга лінії $y = 1/x$, $\sqrt{3}/2 \le x \le 1$
8	$\int\limits_L \dfrac{y\,dl}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$, L – дуга тангенсоїди $y = tg\,x$, $0 \le x \le \pi/3$
9	$\int\limits_L (x + y)\,dl$, L – дуга лемніскати Бернуллі $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi/4$
10	$\int\limits_L \dfrac{(3-4y)\,dl}{\sqrt{1+9xy}}$, L – дуга кубічної параболи $y = x^3$, $0 \le x \le 1$
11	$\int\limits_L \sqrt{y}\,dl$, L – дуга циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le \pi/2$
12	$\int\limits_L \dfrac{y^2\,dl}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, L – дуга синусоїди $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi/2$

13	$\int\limits_L \frac{y\cos x}{\sqrt{2-y^2}}dl$, L – дуга синусоїди $y=\sin x$, $0 \le x \le \pi/3$
14	$\int\limits_L \frac{y\,dl}{\sqrt{1+x^2}}$, L – дуга лінії $y=\ln x$, $1 \le x \le e$
15	$\int\limits_L \frac{y^2\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dl$, L – дуга синусоїди $y=\sin x$, $0 \le x \le \pi/4$
16	$\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, L – дуга лемніскати Бернуллі $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi/4$
17	$\int\limits_L \frac{y\sin x\,dl}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, L – дуга косинусоїди $y=\cos x$, $0 \le x \le \pi/2$
18	$\int\limits_L (x^2+y^2)\,dl$, L – дуга лінії $x=\cos t+t\sin t$, $y=\sin t-t\cos t$, $0 \le t \le \pi/2$
19	$\int\limits_L x\sqrt{1+4y}\,dl$, L – дуга параболи $y=x^2$, $0 \le x \le 1$
20	$\int\limits_L \frac{y\,dl}{\sqrt{1+16x^2y}}$, L – дуга лінії $y=x^4$, $0 \le x \le 1$
21	$\int\limits_L \frac{dl}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, L – дуга гіперболічної спіралі $\rho=3/\varphi$, $4/3 \le \varphi \le \sqrt{3}$
22	$\int\limits_L \frac{x-3y}{\sqrt{1+4y}}dl$, L – дуга параболи $y=x^2$, $0 \le x \le 1$
23	$\int\limits_L e^x\sqrt{1+y^2}\,dl$, L – дуга експоненти $y=e^x$, $0 \le x \le 1$
24	$\int\limits_L (x+y)\,dl$, L – дуга кола $\rho=4\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$
25	$\int\limits_L \frac{y\,dl}{\sqrt{1+x^6}}$, L – дуга лінії $y=x^4/4$, $0 \le x \le 1$

26	$\int\limits_L xy\,dl$, L – дуга кола $\rho = 4\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$
27	$\int\limits_L \frac{xy\,dl}{\sqrt{x^2+16y^2}}$, L – дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
28	$\int\limits_L (4x^{1/3} - 3y^{1/3})\,dl$, L – дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$
29	$\int\limits_L \frac{y\,dl}{\sqrt{1+\sin^4 x}}$, L – дуга котангенсоїди $y = ctg\,x$, $\pi/6 \le x \le \pi/2$
30	$\int\limits_L \frac{x\,dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, L – дуга кардіоїди $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Завдання 2. Обчислити вказаний криволінійний інтеграл другого роду (за координатами) $\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ по заданій дузі L.

№ в-та	Завдання
1	$\int\limits_L xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, L – дуга кривої $x = 2e^{-t}$, $y = 2e^{t}$, $0 \le t \le 1$
2	$\int\limits_L 2xy\,dx + y^2 dy$, L – дуга кола $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$
3	$\int\limits_L xy^2\,dx - x\,dy$, L – дуга еліпса $x = 4\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$
4	$\int\limits_L y^2\,dx - 2y\sin x\,dy$, L – дуга лінії $y = \sqrt{\cos x}$, $0 \le x \le \pi/4$
5	$\int\limits_L \cos^2 x\,dx - y^{-3}\,dy$, L – дуга кривої $y = tg\,x$, $\pi/6 \le x \le \pi/4$

6	$\int\limits_L \sqrt[3]{xy^2}\,dx - dy$, L – дуга астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$
7	$\int\limits_L (x - y^2)\,dx + xy\,dy$, L – дуга параболи $y^2 = 1 - x$ від $A(1,0)$ до $B(0,1)$
8	$\int\limits_L (x - 2y)\,dx + x\,dy$, L – дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$
9	$\int\limits_L 3x^2 y\,dx + (x^3 + 3y)\,dy$, L – дуга лінії $y = x^3/3$, $0 \le x \le 1$
10	$\int\limits_L (x^2 - y^2)\,dx + (x/y)\,dy$, L – дуга кривої $y = e^x$, $0 \le x \le 1$
11	$\int\limits_L y\,dx - (x^4 - 8y^2)\,dy$, L – дуга параболи $y = x^2/4$, $0 \le x \le 2$
12	$\int\limits_L \frac{y\,dx + x\,dy}{\sqrt{1 - x^2}}$, L – дуга лінії $y = \arcsin x$, $0 \le x \le 1/2$
13	$\int\limits_L \frac{xy\,dx + dy}{\sqrt{1 + x^2}}$, L – дуга лінії $y = \sqrt{1 + x^2}$, $0 \le x \le 1$
14	$\int\limits_L y^2 \sin x\,dx + 2y\cos x\,dy$, L – дуга лінії $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$
15	$\int\limits_L ydx + (\cos^2 x + y\sin x)\,dy$, L – дуга лінії $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi/2$
16	$\int\limits_L (y^3/x)\,dx + 3y^2 \ln x\,dy$, L – дуга лінії $y = \ln x$, $1 \le x \le e^2$
17	$\int\limits_L \sin^2 x\,dx + y^{-2}\,dy$, L – дуга кривої $y = ctg\,x$, $\pi/6 \le x \le \pi/4$
18	$\int\limits_L (x^2 - 2y)\,dx + 3x^2 y\,dy$, L – дуга параболи $y = x^2$, $0 \le x \le 1$

19	$\int\limits_L xy\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy$, L – дуга лінії $y=\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le 3/5$
20	$\int\limits_L xy\,dx-(1+x^2)\,dy$, L – дуга лінії $y=\ln(1+x^2)$, $0\le x\le 1$
21	$\int\limits_L xy\,dx+x^2dy$, L – дуга лінії $x=t^2$, $y=t^3$, $0\le t\le 1$
22	$\int\limits_L xy^2\,dx+x^{5/2}dy$, L – дуга параболи $y^2=4x$ від $A(0,0)$ до $B(1,2)$
23	$\int\limits_L xy\,dx-(x^2+y^2)\,dy$, L – дуга кола $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $0\le t\le \pi/2$
24	$\int\limits_L \dfrac{y\,dx+4x\,dy}{x^2+1}$, L – дуга лінії $y=arctg\,x$, $0\le x\le 1$
25	$\int\limits_L 3x^2y\,dx+(x^3+3y)\,dy$, L – дуга лінії $y=x^3/3$, $0\le x\le 1$
26	$\int\limits_L (x+2y)\,dx+(x-2y)\,dy$, L – дуга еліпса $x=2\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le \pi/2$
27	$\int\limits_L x^3y\,dx-dy$, L – дуга еліпса $x=4\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le \pi/2$
28	$\int\limits_L y\sin x\,dx+\sqrt{1-y^2}\cos x\,dy$, L – дуга лінії $y=\sin x$, $0\le x\le \pi/2$
29	$\int\limits_L 12xy\,dx-(x^2+4y^2)\,dy$, L – дуга параболи $y=x^2/4$, $0\le x\le 1$
30	$\int\limits_L x^{-1}y^2dx+2y\ln x\,dy$, L – дуга лінії $y=\ln x$, $e\le x\le e^2$

Завдання 3. Перевірити, що задане диференціальне рівняння $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ є рівнянням у повних диференціалах $\left(\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x\right)$ і знайти його загальний розв'язок $u(x,y)=C$, відновлюючи функцію $u(x,y)$ за її повним диференціалом $du=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ за допомогою криволінійного інтеграла за координатами, вибираючи за шлях інтегрування ламану, ланки якої паралельні координатним осям.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\left(1+\dfrac{x}{y^4}\right)dx-\dfrac{2x^2}{y^5}dy=0$	16	$\dfrac{2xe^{-y}}{(1+x^2)^2}dx+\dfrac{e^{-y}dy}{1+x^2}=0$
2	$2xydx+(x^2-2e^y)\,dy=0$	17	$ydx+(x+3y^2)dy=0$
3	$3x^2e^ydx+x^3e^ydy=0$	18	$xy^2dx+(x^2y+6y)dy=0$
4	$y\,dx+(x-2e^y)dy=0$	19	$2xe^y\,dx+x^2e^y\,dy=0$
5	$xy^2dx+(e^y+x^2y)dy=0$	20	$y^3dx+(3xy^2+e^y)\,dy=0$
6	$\dfrac{y^2}{x^2}dx-\left(\dfrac{2y}{x}+y^4\right)dy=0$	21	$\left(1+\dfrac{2x}{y^3}\right)dx-\dfrac{3x^2}{y^4}dy=0$
7	$\dfrac{y^2}{2x}dx+(y\ln x-e^y)dy=0$	22	$\dfrac{xdx}{y^2-x^2}-\dfrac{y\,dy}{y^2-x^2}=0$
8	$e^yx^{-1}\,dx+e^y\ln x\,dy=0$	23	$(\ln y-x)\,dx+xy^{-1}dy=0$
9	$xy^2dx+(x^2y+y^5)\,dy=0$	24	$e^{\,y}dx+(xe^{\,y}-y^2)\,dy=0$
10	$\dfrac{y^3}{3x}dx+y^2\ln x\;dy=0$	25	$\dfrac{\sin y}{x^2}dx-\dfrac{\cos y}{x}dy=0$
11	$\dfrac{y\,dx}{x^{1-y}}+(x^y\ln x+1)\,dy=0$	26	$\dfrac{\sin 2y}{x^3}dx-\dfrac{\cos 2y}{2x^2}dy=0$
12	$\dfrac{\sin 2x}{y}dx-\dfrac{\sin^2 x}{y^2}dy=0$	27	$\dfrac{y^2}{\cos^2 x}dx+2y\,tg\,x\,dy=0$

13	$3x^2 e^y dx + x^3 e^y dy = 0$	28	$\cos^2 y\, dx - x \sin 2y\, dy = 0$
14	$(ctg\, y + x)dx - \dfrac{x\, dy}{\sin^2 y} = 0$	29	$\dfrac{\sin 2x}{3y^3} dx + \dfrac{\cos 2x}{2y^4} dy = 0$
15	$(tg\, y - x^2)\, dx + \dfrac{x\, dy}{\cos^2 y} = 0$	30	$\dfrac{y}{x} dx + (\ln x + \sin y) dy = 0$

Завдання 4. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду (за площею) $I = \iint\limits_{\sigma} \left((-1)^{\alpha} ax + (-1)^{\beta} ly + (-1)^{\gamma}\, z\right) d\sigma$, де σ – частина заданої площини p: $Ax + By + Cz + D = 0$, яка відсічена координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. (Тут $A = (-1)^{\beta} l$, $B = (-1)^{\gamma} a$, $C = (-1)^{\alpha} 2a$, $D = (-1)^{\alpha+\beta} 2al$).

Задачу розв'язати трьома способами, проектуючи поверхню σ на одну з координатних площин відповідно а) Oxy, б) Oyz, в) Oxz. До кожного способу зробити рисунок поверхні σ як правильної у вибраному напрямі відповідно а) Oz, б) Ox чи в) Oy і рисунок її проекції (відповідно а) D_{xy}, б) D_{yz} чи в) D_{xz}) як правильної в напрямі однієї з осей плоскої області.

Завдання 5. Задано векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \left(ax + (-1)^{\alpha} y + az\right)\vec{i} + \left(x + ly + (-1)^{\beta} az\right)\vec{j} + \left((-1)^{\gamma} ax + (-1)^{\beta} ly + +z\right)\vec{k}$ і поверхня σ – частина площини p: $Ax + By + Cz + D = 0$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Методом проектування на одну координатну площину знайти потік $\Pi = \iint_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma^+} P\, dydz + Q\, dxdz + R\, dxdy$ цього поля через додатну сторону σ^+ вказаної поверхні, якій відповідає вектор нормалі $\vec{N} = (A, B, C)$ площини p. (Тут $A = (-1)^{\alpha} a$, $B = (-1)^{\beta} l$, $C = (-1)^{\gamma} 2a$, $D = (-1)^{\alpha+\gamma} 2al$).

Задачу розв'язати трьома способами, проектуючи поверхню σ на одну з координатних площин відповідно а) Oxy, б) Oyz, в) Oxz. До кожного способу зробити рисунок поверхні σ як правильної у вибраному напрямі (відповідно а) Oz, б) Ox, в) Oy) і рисунок її проекції (відповідно а) D_{xy}, б) D_{yz}, в) D_{xz}) як правильної в напрямі однієї з осей плоскої області.

Завдання 6. Задано векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \left(lx + (-1)^{\beta} ayz\right)\vec{i} + \left(ay + (-1)^{\gamma} lxz\right)\vec{j} + \left((-1)^{\beta} axy + (-1)^{\alpha} lz\right)\vec{k}$ і поверхня σ – частина площини p: $Ax + By + Cz + D = 0$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Знайти $\Gamma = \oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ – циркуляцію векторного поля вздовж замкненого контуру L, що обмежує поверхню σ, при додатному напрямі обходу відносно вектора нормалі $\vec{N} = (A, B, C)$ цієї площини p. (Тут $A = (-1)^{\beta} l$, $B = (-1)^{\gamma} a$, $C = (-1)^{\alpha} 2l$, $D = (-1)^{\beta+\gamma} 2al$).

Обчислення провести двома способами:

а) безпосередньо за означенням циркуляції;

б) за допомогою формули Стокса.

Для обчислення поверхневого інтеграла використати метод проектування на одну координатну площину Oxy. У просторовій системі координат $Oxyz$ зробити рисунок поверхні σ як правильної у напрямі осі Oz. На координатній площині Oxy зробити рисунок проекції D_{xy} поверхні σ як правильної в напрямі однієї з осей плоскої області.

Завдання 7. Задано векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \left(lx + (-1)^{\beta} ayz\right)\vec{i} + \left(y + (-1)^{\alpha} lxz\right)\vec{j} + \left(z + (-1)^{\gamma} axy\right)\vec{k}$ і піраміда V, утворена вказаною площиною p: $Ax + By + Cz + D = 0$ і координатними площинами $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$. (Тут $A = (-1)^{\gamma} 2l$, $B = (-1)^{\alpha} a$, $C = (-1)^{\beta} 2a$, $D = 2al$). Необхідно:

1) Зробити рисунок піраміди V у просторовій системі координат $Oxyz$. Зобразити вектор зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до кожної з граней піраміди V.

2) Знайти проекції D_{xy}, D_{xz} і D_{yz} піраміди V на відповідні координатні площини. Подати кожну плоску область D_{xy}, D_{xz} і D_{yz} як правильну в напрямі однієї з координатних осей і зробити рисунок у відповідній плоскій системі координат.

3) Знайти $\Pi = \oiint_{\sigma^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \oiint_{\sigma^+} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$ – потік векторного поля через зовнішню сторону σ^+ замкненої повної поверхні σ піраміди V двома способами:

а) безпосередньо за означенням потоку методом проектування на всі три координатні площини;

б) за допомогою формули Остроградського – Гаусса.

Завдання 8. Для скалярного поля $u = (-1)^{\alpha} axyz + (-1)^{\beta} lyz^2 + (-1)^{\gamma} lxz^2 + a$ знайти його градієнт $\vec{F} = grad\,u$ і лапласіан Δu. Обчислити $\left(\partial u(M_1)/\partial l\right)_{max} = \left| grad\,u(M_1) \right|$ – найбільшу швидкість зростання функції $u = u(x, y, z)$ у точці $M_1(x_1, y_1, z_1)$, де $M_1(1,1,1)$. Перевірити, що одержане векторне поле градієнтів $\vec{F} = grad\,u$ є безвихровим ($rot\,\vec{F} = \vec{0}$), а значить, потенціальним. Для потенціального векторного поля $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ знайти його потенціал $v = v(x, y, z)$ за допомогою криволінійного інтеграла за координатами

$$v(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz + C,$$

вибираючи за шлях інтегрування ламану, ланки якої паралельні координатним осям. За точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ взяти початок координат $(0, 0, 0)$. Значення довільної сталої C визначити з умови $v(0, 0, 0) = 0$.

Завдання 9. Для векторного поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} =$
$= \left((-1)^{\beta} x^2 y + (-1)^{\gamma} az^2\right)\vec{i} + (-1)^{\alpha} axyz\,\vec{j} + \left((-1)^{\alpha} ly^2 z + (-1)^{\beta} xy\right)\vec{k}$
знайти його ротор $\vec{b} = rot\,\vec{F}$. Обчислити найбільшу густину циркуляції $C_{\max}(M_1) = \left| rot\,\vec{F}(M_1) \right|$ векторного поля $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ у точці $M_1(x_1, y_1, z_1)$, де $M_1(1,1,1)$. Перевірити, що векторне поле роторів $\vec{b} = rot\,\vec{F}$ є соленоїдальним ($div\,\vec{b} = 0$).

Завдання 10. Методом відокремлення змінних розв`язати наступні крайові задачі:

1) Знайти розв'язок хвильового рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < l;\ t > 0)$ який задовольняє початковим умовам $u(x,0) = \varphi(x)$, $\partial u(x,0)/\partial t = \psi(x)$ $(0 < x < l)$ і однорідним граничним умовам першого типу $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ $(t > 0)$, де

$$\varphi(x) = \left((-1)^{\alpha} + 1\right)\sin\frac{\beta\pi x}{l} + \left(1 - (-1)^{\alpha}\right)\frac{x(l-x)}{l^2},$$

$$\psi(x) = \left((-1)^{\beta} + 1\right)\sin\frac{\alpha\pi x}{l} + \left(1 - (-1)^{\beta}\right)\frac{x(l-x)}{l^2}.$$

2) Знайти розв'язок рівняння теплопровідності $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 < x < l;\ t > 0)$ який задовольняє початковій умові $u(x,0) = \varphi(x)$ $(0 < x < l)$ і однорідним граничним умовам другого типу $\partial u(0,t)/\partial x = 0$; $\partial u(l,t)/\partial x = 0$ $(t > 0)$, де

$$\varphi(x) = \left((-1)^{\gamma} + 1\right)\sin\frac{a\pi x}{l} + \left((-1)^{\gamma} - 1\right)\frac{x(l-x)}{l^2}.$$

3) У крузі $0 < \rho < a$ знайти розв'язок рівняння Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = 0$ при граничній умові першого типу

$$u(a, \varphi) = (-1)^{\alpha} a \sin\beta\varphi + (-1)^{\beta} l \cos\alpha\varphi.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бізюк В.В., Якунін А.В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 300 с.

2. Борисенко О.А., Ушакова Л.М. Аналітична геометрія. – Х.: Основа, 1993. – 192 с.

3. Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. За ред. В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2003. – 479 с.

4. Вища математика: Збірник задач: У 2 ч. / За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. Ч.1 / Х.Г, Гаврильченко, С.П. Полушкін, П.С. Кропив'янський та ін. – 2003. – 279 с. Ч.2 / П.П. Овчинников, П.С. Кропив'янський, С.П. Полушкін та ін. –2003.– 375 с.

5. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Навч. посіб. у 3 т. Т. 3. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі / В.С. Герасимчук, Г.С. Васильченко, В.І. Кравцов. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – 400 с.

6. Вища математика. У 2 ч. / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчук, В.М. Михайленко. За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003 – 2004. Ч.1. – 2003. – 600 с.; Ч.2. – 2004. – 791 с.

7. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 491 с.

8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: Наука, 1997.

Ч.1 – 304 с.; Ч.2 – 415 с.

9. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2009. – 648 с.

10. Кононенко Г.М. Елементи векторного аналізу і теорія поля. – К.: КНУБА, 2005. – 243 с.

11. Мартиненко М.А., Легеза В.П. Інженерні задачі математичної фізики. – К.: НУХТ, 2008. – 389 с.

12. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 495 с.

13. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.

14. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2006. – 423 с.

15. Черняк А.А., Черняк Ж.А., Доманова Ю.А. Высшая математика на базе Mathcad. – СПб.: БХВ – Петербург, 2004. – 598 с.

З М І С Т

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

В И Щ А   М А Т Е М А Т И К А
д л я   е л е к т р о т е х н і к і в
у трьох модулях

Навчальний посібник

М о д у л ь 3

Бізюк Валерій Васильович,
Якунін Анатолій Вікторович

Числові та функціональні ряди.
Функції декількох змінних. Елементи теорії поля.
Криволінійні та поверхневі інтеграли.
Рівняння математичної фізики

Відповідальний за випуск *С. О. Станішевський*
Редактор *З. І. Зайцева*

Підп. до друку 02.09.2011 Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 21,5
Тираж 500 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011