$\iint_D f(M)\,dS$.

Отже, за означенням

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum\nolimits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i},$$

де x і y – ***змінні інтегрування***; $f(x,y)$ – ***підінтегральна функція***; dS – ***елемент*** (***диференціал***) ***площі***; $f(x,y)\,dS$ – ***підінтегральний вираз***; D – ***область інтегрування***.

Геометричний зміст: якщо функція $z = f(x,y)$ невід'ємна, то подвійний інтеграл від неї чисельно дорівнює об'єму V циліндричного тіла, нижньою основою якого є область D, верхньою – частина поверхні $z = f(x,y) \geq 0$, що проектується в D, а бічна поверхня – циліндрична з твірними, паралельними осі Oz, і напрямною L – межею області D: $\boxed{V = \iint_D f(x,y)\,dS}$.

Фізичний зміст: якщо матеріальна пластина лежить у координатній площині Oxy і має форму замкненої області D, в кожній точці якої задана поверхнева густина $\mu = \mu(x,y)$, то маса m пластини обчислюється за формулою $\boxed{m = \iint_D \mu(x,y)\,dS}$.

Зауваження 2. Процес побудови подвійного інтеграла по двовимірній області D аналогічний процедурі синтезу визначеного інтеграла функції однієї змінної по одновимірній області $[a;b]$. Спочатку область інтегрування довільним чином розбивається на частини, в кожній з яких береться довільна точка і в ній знаходиться значення функції. Потім знайдене значення функції множиться на міру відповідної частини області. У випадку однієї змінної такою мірою служить довжина Δx_i частинного відрізка $[x_{i-1};x_i]$, а у випадку двох змінних – площа ΔS_i елементарного майданчика D_i. Наступні кроки знову однакові: утворюються інтегральні суми і знаходяться їхні границі, коли міра частин області інтегрування прямує до нуля. Тому *умови існування та основні властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям звичайного визначеного інтеграла*. Наведемо найважливіші з них.

Теорема (***достатня умова інтегровності***). *Якщо функція* $f(x,y)$ *неперервна в замкненій обмеженій області* D*, то вона інтегровна в цій області*.

Властивості подвійного інтеграла:

1) *Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла*:

$$\boxed{\iint\limits_D C\, f(x,y)\,dS = C\iint\limits_D f(x,y)\,dS}, \text{ де } C = const .$$

2) *Подвійний інтеграл від скінченної алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же сумі подвійних інтегралів від кожного доданка окремо*:

$$\boxed{\iint\limits_D \big(f(x,y)+g(x,y)-h(x,y)\big)dS =}$$

$$\boxed{= \iint\limits_D f(x,y)\,dS + \iint\limits_D g(x,y)\,dS - \iint\limits_D h(x,y)\,dS}.$$

3) *Якщо функція* $\boxed{f(x,y) \ge 0}$ *в області* D*, то* $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dS \ge 0}$.

4) *Якщо дві функції в області* D *задовольняють нерівності* $\boxed{f(x,y) \ge g(x,y)}$, то $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dS \ge \iint\limits_D g(x,y)\,dS}$.

5) (***Адитивність***). *Якщо область інтегрування* D *функції* $f(x,y)$ *розбити на дві частини* D_1 *і* D_2*, які не мають спільних внутрішніх точок, то* $\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS}$.

6) (***Оцінка подвійного інтеграла***). *Якщо функція* $f(x,y)$ *неперервна в обмеженій замкненій області* D *площею* S*, то*

$$\boxed{m\,S \le \iint\limits_D f(x,y)\,dS \le M\,S},$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x,y)$ в області D.

7) Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій облас-

ті D з площею S. Величина $\boxed{\mu = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dS}$ називається ***середнім значенням*** функції $f(x,y)$ в області D. Теорема (***про середнє значення функції***). *В області* D *існує хоча б одна точка* $P(\bar{x},\bar{y})$, *в якій середнє значення функції досягається*:

$$\boxed{f(\bar{x},\bar{y}) = \mu = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dS}.$$

Зауваження 3. Надалі будемо розглядати лише функції, які неперервні в області інтегрування, що гарантує існування подвійного інтеграла. (Хоча подвійний інтеграл може існувати не тільки для неперервних функцій).

2.3.2. Обчислення подвійного інтеграла у прямокутній системі координат

Безпосереднє знаходження подвійного інтеграла як границі інтегральної суми пов'язане зі значними труднощами. Набагато простіше перейти до обчислення так званого двократного повторного інтеграла – послідовного знаходження двох звичайних визначених інтегралів.

Зауваження 1. Оскільки подвійний інтеграл не залежить від способу розбиття, то в декартовій прямокутній системі координат Oxy зручно розбивати область D координатною сіткою, утвореною прямими, які паралельні осям Ox і Oy (рис. 56). Тоді внутрішній елементарний майданчик D_i є прямокутником зі сторонами Δx_i, Δy_i і його площа $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Відповідно диференціал площі набуває вигляду $\boxed{dS = dxdy}$ і подвійний інтеграл можна подати у формі

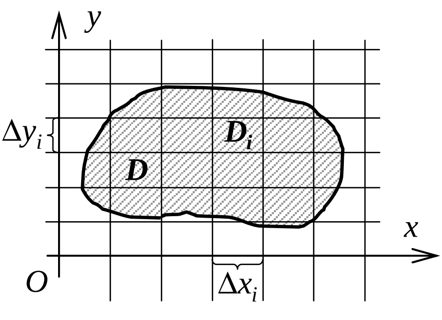

Рис. 56

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy}.$$

Нехай функція $f(x, y)$ невід'ємна в обмеженій замкненій області D. Тоді подвійний інтеграл $\boxed{V = \iint_D f(x, y)\,dxdy}$ виражає об'єм V вертикального циліндричного тіла (рис. 57) з нижньою основою D, що обмежене зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$.

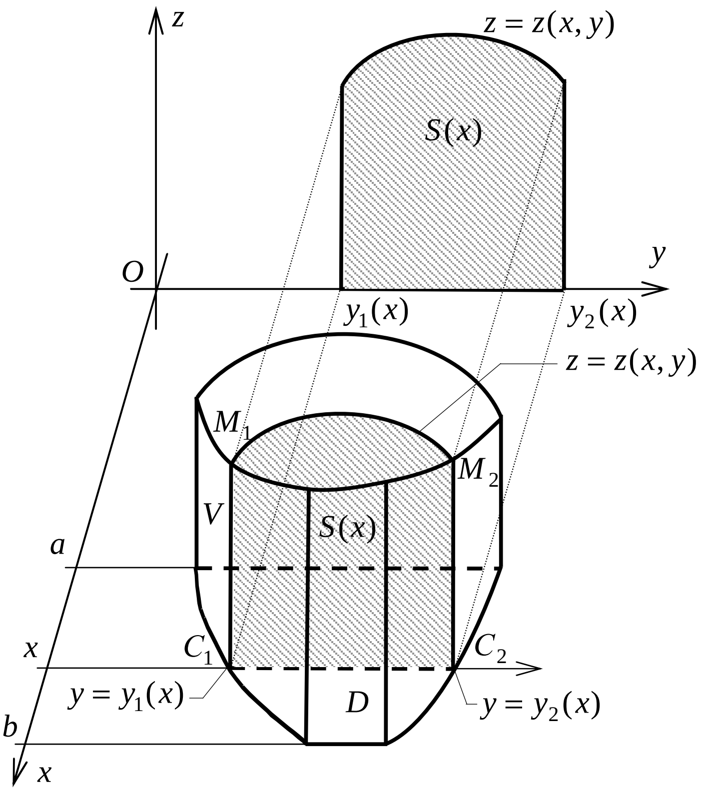

Рис. 57

Обчислимо об'єм V по-іншому – методом паралельних перерізів. Припустимо, що область D – правильна в напрямі осі Oy (рис. 58) і може бути подана у вигляді

$$D : \left\{ (x, y) \middle| \; y_1(x) \leq y \leq y_2(x),\; x \in [a; b],\; D \xrightarrow{Oy} [a; b] \right\}.$$

Тоді проекцією тіла на вісь Ox є відрізок $[a;b]$. Об'єм V можна знайти так: $V=\int_a^b S(x)\,dx$, де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною $x=C=const$, перпендикулярною до осі Ox, а $x=a$ і $x=b$ – рівняння крайніх площин, між якими лежить дане тіло.

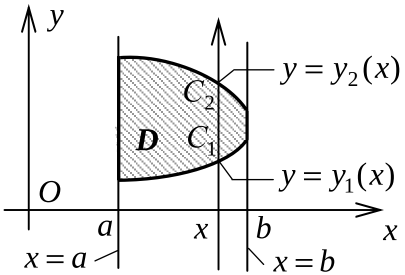

Рис. 58

При перетині циліндричного тіла площиною $x=C$, де $C=const$ утворюється криволінійна трапеція $C_1M_1M_2C_2$ (рис. 57). Апліката $z=f(x,y)$ точки лінії M_1M_2 при фіксованому x є функцією лише однієї змінної y, причому аргумент y змінюється в межах від $y_{вх}=y_1(x)$ до $y_{вих}=y_2(x)$.

Площа $S(x)$ фігури $C_1M_1M_2C_2$ дорівнює визначеному інтегралу

$$S(x)=\int_{y_{вх}}^{y_{вих}} z\,dy=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy. \quad \text{Тоді} \quad V=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Порівнюючи два вирази для об’єму V, одержуємо формулу

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

яка зводить подвійний інтеграл до двократного повторного інтеграла – послідовного обчислення двох звичайних одновимірних інтегралів. Це співвідношення звичайно записують у спрощеній формі

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy}.$$

Зауваження 2. Одержана з геометричних міркувань формула залишається справедливою в загальному випадку інтегровної функції $f(x,y)$. (Строге доведення опускаємо).

Зауваження 3. Спочатку обчислюється ***внутрішній інтеграл***

$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ за ***внутрішньою змінною*** y в припущенні, що ***зовнішня змінна*** x фіксована. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла в межах від $y_1(x)$ до $y_2(x)$ одержуємо певну функцію $S(x)$ однієї змінної x.

Зауваження 4. ***Зовнішні межі інтегрування*** a і b – завжди сталі. Обчислюючи ***зовнішній інтеграл*** $\int_a^b S(x)\,dx$, дістаємо деяке число I – значення подвійного інтеграла.

Зауваження 5. ***Внутрішні межі інтегрування*** $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є функціями зовнішньої змінної x. В окремих випадках вони також можуть бути сталими. Наприклад, коли область інтегрування D – прямокутник зі сторонами $x=a$, $x=b$, $y=c$ і $y=d$, що паралельні осям координат, то всі межі інтегрування є сталими і подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy .$$

Правило знаходження меж інтегрування для правильної в напрямі осі Oy області D:

1) *Область* D *спроектувати паралельно осі* Oy *на вісь* Ox *і одержати відрізок* $[a;b]$, $a \le x \le b$. *Числа* a *і* b *– відповідно нижня і верхня межі у зовнішньому інтегралі за* x. Вони визначаються крайніми зліва та справа точками області D, які лежать на вертикальних прямих $x=a$ та $x=b$, що обмежують цю область.

2) *Провести через будь-яку внутрішню точку* x *відрізка* $[a;b]$ *пробну пряму, паралельну осі* Oy *і в тому ж напрямі. Ця пряма перетинає межу області* D *у двох точках – входу* C_1 *і виходу* C_2. *Щоб визначити внутрішні межі інтегрування за* y *– ординати вказаних точок, необхідно розв'язати рівняння лінії входу і лінії виходу відносно* y: $y=y_1(x)$ *і* $y=y_2(x)$. *Функції* $y_1(x)$ *і* $y_2(x)$, *що на відрізку* $[a;b]$ *обмежені і зберігають аналітичний вираз, – відповідно нижня і верхня межі у внутрішньому інтегралі за* y.

Зауваження 6. Якщо область D – правильна в напрямі осі Ox

(рис. 59) і може бути подана у вигляді

$$D:\left\{(x,y)\middle|\; x_1(y)\le x\le x_2(y),\; y\in[c;d],\; D\xrightarrow{Ox}[c;d]\right\},$$

то справедлива формула (змінні x і y міняються ролями)

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx}.$$

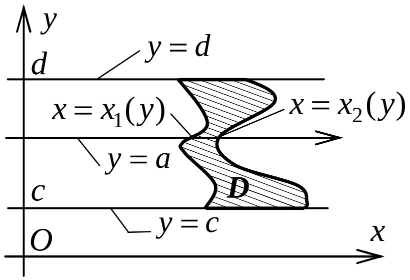

Рис. 59

Тут внутрішнім є інтеграл за змінною x. Обчислюючи його в межах від $x_1(y)$ до $x_2(y)$ (при цьому зовнішня змінна y вважається сталою), дістаємо деяку функцію $S(y)$ від однієї змінної y. Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d, одержуємо значення I подвійного інтеграла.

Зауваження 7. Якщо область D правильна в напрямах обох осей Ox і Oy, то подвійний інтеграл можна звести до повторного будь-яким з указаних способів. Зрозуміло,що результати при цьому однакові, тобто *значення подвійного інтеграла не залежить від порядку інтегрування*:

$$\boxed{\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx}.$$

Перехід від лівої частини цього співвідношення до правої і навпаки називається ***зміною порядку інтегрування***.

Зауваження 8. У кожному конкретному випадку, залежно від вигляду області D та підінтегральної функції $f(x,y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Зауваження 9. Якщо область D не є правильною в напрямі жодної з осей Ox чи Oy, то її необхідно розбити на частини без спільних внутрішніх точок, кожна з яких є правильною в напрямі

Ox чи Oy. Обчислюючи подвійні інтеграли по правильних частинних областях і додаючи результати, знайдемо шуканий подвійний інтеграл по всій області D. Звичайно, для розбиття використовуються лінії, що належать координатній сітці. Зокрема, у випадку прямокутних координат поділ області D на правильні частини здійснюють прямими, які паралельні осям Ox і Oy.

<u>Приклад 1</u>. Для подвійного інтеграла $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ вказано підінтегральну функцію $f(x,y)$ і область інтегрування D, яка задана рівняннями ліній, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

1) Зобразити область інтегрування D.

2) Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Oy, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x і внутрішнім інтегруванням по y.

3) Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Ox, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по y і внутрішнім інтегруванням по x.

$$f(x,y) = xy\,; \quad D:\ 2x^2 - y - 2 = 0;\ 2(x+1)^2 + y - 8 = 0\,.$$

□ 1) Межа області D утворена двома вертикальними параболами. Перша з них $y = 2x^2 - 2$ має вершину, спрямовану вниз, у точці $(0;-2)$, а її вісь співпадає з віссю Oy. Друга парабола $y = 8 - 2(x+1)^2$ має вершину, спрямовану вверх, у точці $(-1;8)$, а її вісь паралельна осі Oy. Знайдемо точки перетину цих ліній:

$$\begin{cases} 2x^2 - y - 2 = 0; \\ 2(x+1)^2 + y - 8 = 0; \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = 2x^2 - 2; \\ 2(x+1)^2 + 2x^2 - 2 - 8 = 0; \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 = -2;\ x_2 = 1; \\ y_1 = 6;\ y_2 = 0; \end{array}$$

$$A(-2;6);\ \ B(1;0)\,.$$

Область D зображена штриховкою на рис. 60.

2) Спроектуємо область D паралельно осі Oy на вісь Ox і одержимо відрізок $[-2;1]$. Аналіз форми області D і вигляду рівнянь ліній, які її обмежують, показує, що область D – правильна у напрямі осі Oy. Відповідне подання відтворено на рис. 61. Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy = \int_{-2}^{1} dx \int_{2x^2-2}^{8-2(x+1)^2\,2x^2-2} xy\,dy = \int_{-2}^{1} x\,dx \int_{2x^2-2}^{8-2(x+1)^2} xy\,dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{1} x \left((y^2/2)\Big|_{2x^2-2}^{8-2(x+1)^2} \right) dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{1} x \Big((8-2(x+1)^2)^2 - (2x^2 -$$

$$-2)^2\Big)\,dx = \int_{-2}^{1} (8x^4 - 24x^2 + 16x)\,dx = \Big((8/5)x^5 - 8x^3 + 8x^2\Big)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= -216/5.$$

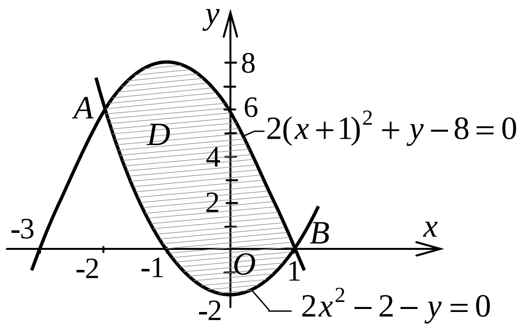

Рис. 60

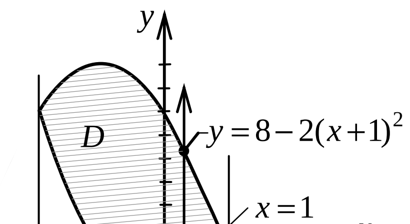

Рис. 61

3) Спроектуємо область D паралельно осі Ox на вісь Oy і одержимо відрізок $[-2;8]$. Аналіз форми області D і вигляду рівнянь ліній, які її обмежують, показує, що область D – неправильна у напрямі осі Ox. Прямі $y=0$ і $y=6$ розбивають цю область на три правильні у на-

прямі осі Ox частини D_1, D_2 і D_3. Відповідне подання зображено на рис. 62. Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

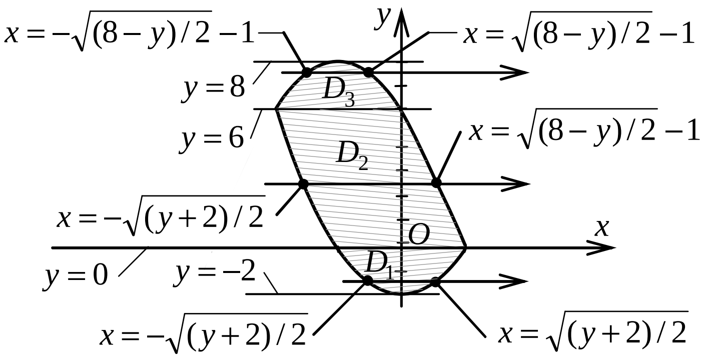

Рис. 62

$$\iint_D xy\,dx\,dy=\iint_{D_1} xy\,dx\,dy+\iint_{D_2} xy\,dx\,dy+\iint_{D_3} xy\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-2}^{0} dy\int_{-\sqrt{(y+2)/2}}^{\sqrt{(y+2)/2}} xy\,dx+\int_{0}^{6} dy\int_{-\sqrt{(y+2)/2}}^{\sqrt{(8-y)/2}-1} xy\,dx+\int_{6}^{8} dy\int_{-\sqrt{(8-y)/2}-1}^{\sqrt{(8-y)/2}-1} xy\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{0} y\,dy\int_{-\sqrt{(y+2)/2}}^{\sqrt{(y+2)/2}} x\,dx+\int_{0}^{6} y\,dy\int_{-\sqrt{(y+2)/2}}^{\sqrt{(8-y)/2}-1} x\,dx+\int_{6}^{8} y\,dy\int_{-\sqrt{(8-y)/2}-1}^{\sqrt{(8-y)/2}-1} x\,dx=$$

$$=\int_{-2}^{0} y\left((x^2/2)\Big|_{-\sqrt{(y+2)/2}}^{\sqrt{(y+2)/2}}\right)dy+\int_{0}^{6} y\left((x^2/2)\Big|_{-\sqrt{(y+2)/2}}^{\sqrt{(8-y)/2}-1}\right)dy+$$

$$+\int_{6}^{8} y\left((x^2/2)\Big|_{-\sqrt{(8-y)/2}-1}^{\sqrt{(8-y)/2}-1}\right)dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} y\left(\frac{y+2}{2}-\frac{y+2}{2}\right)dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{6} y\left(\left(\sqrt{(8-y)/2}-1\right)^2-\frac{y+2}{2}\right)dy+\frac{1}{2}\int_{6}^{8} y\left(\left(\sqrt{(8-y)/2}-1\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(-\sqrt{(8-y)/2}-1\right)^2\right)dy=0+\frac{1}{2}\int_{0}^{6}\left(4y-y^2-y\sqrt{2(8-y)}\right)dy-$$

$$-\sqrt{2}\int_6^8 y\sqrt{8-y}\;dy = \left|\begin{matrix} 8-y=u^2;\; y=8-u^2;\; dy=-2udu; \\ u=\sqrt{8-y};\quad u_1=\sqrt{2};\; u_2=0 \end{matrix}\right| =$$

$$=2\int_0^6 y\,dy-\frac{1}{2}\int_0^6 y^2dy-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^6 y\sqrt{8-y}\,dy-\sqrt{2}\int_{\sqrt{2}}^0(8-u^2)u(-2u)\,du=$$

$$=\left|\begin{matrix} 8-y=t^2;\; y=8-t^2;\;\; dy=-2tdt; \\ t=\sqrt{8-t};\; t_1=2\sqrt{2};\; t_2=\sqrt{2} \end{matrix}\right| = y^2\Big|_0^6-\frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\Big|_0^6-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(8-$$

$$-t^2)t(-2t)\,dt+2\sqrt{2}\int_{\sqrt{2}}^0(8u^2-u^4)\,du=36-36+\sqrt{2}\int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(8t^2-t^4)\,dt+$$

$$+2\sqrt{2}(8u^3/3-u^5/5)\Big|_{\sqrt{2}}^0=\sqrt{2}(8t^3/3-t^5/5)\Big|_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}\Big(16\sqrt{2}/3-$$

$$-4\sqrt{2}/5\Big)=\sqrt{2}\Big(16\sqrt{2}/3-4\sqrt{2}/5-128\sqrt{2}/3+128\sqrt{2}/5\Big)-$$

$$-64/3+16/5=-216/5.\quad\blacksquare$$

Приклад 2. У заданих повторних інтегралах змінити порядок інтегрування:

$$\text{а) } I=\int_0^1 dx\int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_1^e dx\int_{-1}^{-\ln x} f(x,y)\,dy\,;$$

$$\text{б) } I=\int_0^{\sqrt{2}} dy\int_0^{\arcsin(y/2)} f(x,y)\,dx+\int_{\sqrt{2}}^2 dy\int_{\sqrt{2}}^{\arccos(y/2)} f(x,y)\,dx\,.$$

□ а) Використовуючи зазначені межі інтегрування, для кожного з двох повторних інтегралів-доданків запишемо рівняння ліній, що обмежують відповідні області D_1 і D_2, та зобразимо їх в одній системі координат Oxy (рис. 63):

$$D_1:\; x=0;\; x=1;\;\; y=-1;\; y=-\sqrt{1-x^2}\;;$$

$$D_2:\; x=1;\; x=e;\;\; y=-1;\; y=-\ln x\,.$$

З рис. 63 видно, що D_1 і D_2 можна об’єднати в одну область

$D = D_1 \cup D_2$. У зазначених повторних інтегралах області D_1 і D_2 розглядаються як правильні в напрямі осі Oy. Для зміни порядку інтегрування об'єднану область D треба подати як правильну в напрямі осі Ox, при необхідності розбиваючи на правильні у вибраному напрямі частини. У даному випадку область D – правильна в напрямі осі Ox: D: $y=-1$; $y=1$; $y=0$; $x=\sqrt{1-y^2}$; $x=e^{-y}$. Відповідне зображення відтворено на рис. 64. Тоді

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{e^{-y}} f(x,y)\,dx.$$

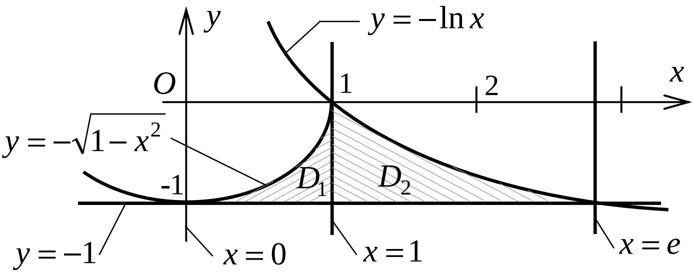

Рис. 63

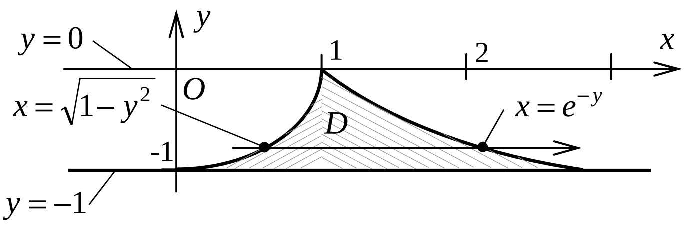

Рис. 64

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$I = \int_{0}^{\pi/4} dx \int_{2\sin x}^{2\cos x} f(x,y)\,dy. \quad \blacksquare$$

2.3.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярній системі координат

Нехай формули $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками $M(x,y)$ області D координатної площини Oxy і точками $M^*(u;v)$ деякої області D^* іншої координатної площини Ouv.

<u>Теорема</u>. *Нехай* ***перетворення*** $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, *яке переводить замкнену обмежену область* D *в замкнену обмежену область* D^*, *є взаємно однозначним, при цьому функції* $x(u,v)$, $y(u,v)$ *мають в області* D^* *неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник*

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} \neq 0,$$

а функція $f(x,y)$ *неперервна в області* D. *Тоді справджується* ***формула заміни змінних у подвійному інтегралі***

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|du\,dv}.$$

(Без доведення).

Функціональний визначник $J(u,v)$ називається **визначником Якобі** (***якобіаном***). Модуль якобіана визначає коефіцієнт зміни нескінченно малої площі при відповідному перетворенні координат.

<u>Правило</u>. *Виконуючи заміну змінних у подвійному інтегралі, треба елемент площі* $dS = dxdy$ *в старих координатах* x, y *замінити елементом площі* $dS^* = \left|J(u,v)\right|dudv$ *у нових координатах* u, v *і стару область інтегрування* D *замінити відповідною їй областю* D^*.

На практиці часто застосовують перехід до полярних координат. Прямокутні x, y і полярні ρ, φ координати зв'язані співвідношеннями: $\boxed{x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi}$ ($0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$).

У цьому випадку якобіан $J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$ і тому елемент площі $\boxed{dS^* = \rho\, d\rho\, d\varphi}$. ***Формула переходу до полярних координат у подвійному інтегралі*** набуває вигляду

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi},$$

де область D задана у декартовій системі координат Oxy, а D^* – відповідна їй область у полярній системі координат $O\rho\varphi$.

Зауваження 1. Диференціал $dS^* = \rho\, d\rho\, d\varphi$ визначає лінійну частину площі нескінченно малого внутрішнього елементарного майданчика, на які область D розбивається координатною сіткою полярної системи, утвореною променями $\varphi = const$, що виходять з полюсу, і концентричними колами $\rho = const$ з центром у полюсі.

Зауваження 2. Перехід до полярних координат доцільно застосовувати тоді, коли: 1) область інтегрування D задана у полярній системі; 2) область інтегрування D – круг або його частина (сектор, сегмент, кільце і т.п.), оскільки при цьому рівняння межі області містять суму $x^2 + y^2 = \rho^2$; 3) сама підінтегральна функція містить цей вираз $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Припустимо, що область D – правильна в напрямі координатних променів $\varphi = C$ ($C = const$) (рис. 65 і рис. 66 відображають випадок, коли полюс O не лежить у області D) і може бути подана у вигляді $D: \{(\rho,\varphi) \mid \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi), \varphi \in [\alpha;\beta], \alpha < \beta\}$.

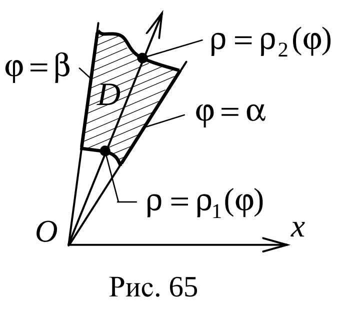

Рис. 65

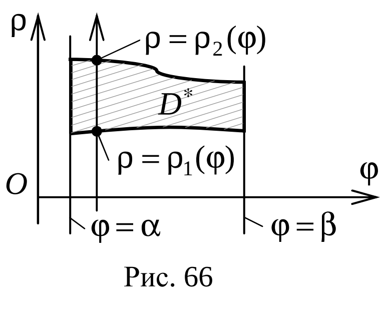

Рис. 66

Тоді справедлива формула

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\alpha} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho},$$

яка зводить подвійний інтеграл до двократного повторного інтеграла Тут внутрішнім є інтеграл за змінною ρ. Обчислюючи його в межах від $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$, вважаючи зовнішню змінну φ сталою, дістаємо деяку функцію $S(\varphi)$ від однієї змінної φ. Інтегруючи потім цю функцію в межах від α до β, одержуємо значення подвійного інтеграла.

Зауваження 3. У випадку, коли полюс O лежить на межі чи всередині області D лінія входу вироджується в точку – полюс O: $\rho_1(\varphi)=0$. Величина $\Delta\varphi=\beta-\alpha$ лежить у межах $0\le\Delta\varphi\le 2\pi$. Коли $\Delta\varphi=2\pi$, то звичайно покладають $\alpha=0$ і $\beta=2\pi$.

Зауваження 4. На практиці перехід до полярних координат здійснюється заміною $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $dxdy=\rho\,d\rho\,d\varphi$ у підінтегральному виразі та відповідним перетворенням рівнянь ліній, що обмежують область інтегрування D. Перетворення області D в область D^* не виконують, а сумістивши декартову і полярну системи, знаходять межі інтегрування по ρ і φ, досліджуючи зміну ρ і φ точки $(\rho;\varphi)$ при її ототожненні з точкою $(x;y)$ області D.

Приклад 1. Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл $I=\iint\limits_D \dfrac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$, де область D обмежена лініями $y=\sqrt{4-x^2}+2$; $y=2$.

□ Перейдемо в підінтегральній функції та в рівняннях указаних ліній до полярних координат:

$$f(x,y)=1/(x^2+y^2)^2=1/(\rho^2)^2=1/\rho^4; \quad y=\sqrt{4-x^2}+2;$$

$$\rho\sin\varphi=\sqrt{4-\rho^2\cos^2\varphi}+2;\ \rho^2\sin^2\varphi-4\rho\sin\varphi+4=4-\rho^2\cos^2\varphi;$$

$\rho=4\sin\varphi$ – коло з центром $(0;2)$ і радіусом $r=2$;

$y=2$; $\rho\sin\varphi=2$; $\rho=2/\sin\varphi$ – горизонтальна пряма.

Знайдемо точки перетину цих ліній:

$$\begin{cases} \rho = 4\sin\varphi; & 4\sin\varphi = 2/\sin\varphi; \quad \varphi_1 = \pi/4;\ \varphi_1 = 3\pi/4; \\ \rho = 2/\sin\varphi; & \sin\varphi = \pm\sqrt{2}/2; \quad \rho_1 = 2\sqrt{2};\ \rho_2 = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

На рис. 67 область D подана як правильна в напрямі координатних променів $\varphi = const$. Тоді

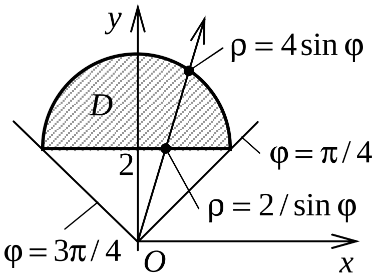

Рис. 67

$$I = \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_{2/\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \frac{\rho d\rho}{\rho^4} =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(-(\rho^{-2}/2) \Big|_{2/\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{32} \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{8} \times$$

$$\times \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{32} \cdot ctg\,\varphi \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} +$$

$$+ \frac{1}{16} \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} (1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \cdot \varphi \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} - \frac{1}{32} \cdot \sin 2\varphi \Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} =$$

$$= -1/16 + \pi/32 + 1/16 = \pi/32. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл $I = \iint\limits_D \frac{x^2 y^8 dx\, dy}{(x^2 + y^2)^5}$, де область D обмежена лінією $y^6 = 36(y^4 - x^4)$, $y \ge 0$.

□ Перейдемо в підінтегральній функції та в рівнянні вказаної лінії до полярних координат:

$$f(x, y) = x^2 y^8 \big/ (x^2 + y^2)^5 = \rho^2 \cos^2\varphi\, \rho^8 \sin^8\varphi \big/ (\rho^2)^5 =;$$

$$= \cos^2\varphi \sin^8\varphi; \quad y^6 = 36(y^4 - x^4); \ \rho^6 \sin^6\varphi = 36(\rho^4 \sin^4\varphi -$$

$$- \rho^4 \cos^4\varphi); \ \rho^2 \sin^6\varphi = 36(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi);$$

$$\rho = 6\sqrt{-\cos 2\varphi} \big/ |\sin^3\varphi|; \quad y \ge 0; \ \rho\sin\varphi \ge 0;$$

$$2\pi n \le \varphi \le \pi + 2\pi n,\ n \in Z,\ Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Знайдемо область визначення даної кривої $\rho = \rho(\varphi)$, розглядаючи тільки головні значення полярних координат $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$:

$$\begin{cases} -\cos 2\varphi \ge 0; \\ 2\pi n \le \varphi \le \pi + 2\pi n,\ n \in Z; \\ 0 \le \varphi < 2\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} \pi/4 + \pi k \le \varphi \le 3\pi/4 + \pi k,\ k \in Z; \\ 2\pi n \le \varphi \le \pi + 2\pi n,\ n \in Z; \\ 0 \le \varphi < 2\pi; \end{cases}$$

$$\pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4.$$

Отже, полярне рівняння зазначеної лінії

$$\rho = 6\sqrt{-\cos 2\varphi}\Big/\sin^3\varphi,\quad \pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4.$$

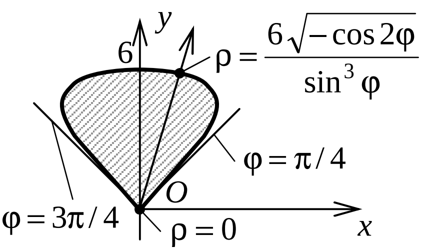

Рис. 68

На рис. 68 область D, обмежена цією кривою, подана як правильна в напрямі координатних променів $\varphi = const$. Тоді

$$I = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{6\sqrt{-\cos 2\varphi}/\sin^3\varphi} \cos^2\varphi \times$$

$$\times \sin^8\varphi \rho d\rho =$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos^2\varphi \sin^8\varphi d\varphi \int_0^{6\sqrt{-\cos 2\varphi}/\sin^3\varphi} \rho d\rho = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos^2\varphi \sin^8\varphi \times$$

$$\times \left((\rho^2/2) \Big|_0^{6\sqrt{-\cos 2\varphi}/\sin^3\varphi} \right) d\varphi = -18 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos^2\varphi \sin^2\varphi \cos 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= -(9/2)\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi\, d\varphi = \Big| u = \sin 2\varphi;\ du = 2\cos 2\varphi d\varphi;$$

$$u_1 = \sin(\pi/2) = 1;\ u_1 = \sin(3\pi/2) = -1 \Big| = -(9/4)\int_1^{-1} u^2 du =$$

$$= -(3/4) \cdot u^3 \Big|_1^{-1} = 3/2. \quad \blacksquare$$

2.3.4. Геометричні застосування подвійного інтеграла

Площа плоскої фігури. Якщо в подвійному інтегралі $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x,y)\equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме площі області інтегрування D:

$$\boxed{S=\iint_D dx\,dy}.$$

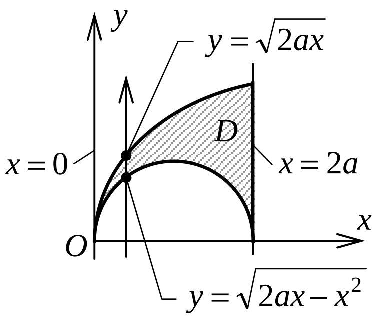

Рис. 69

Приклад 1. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу плоскої області D, що обмежена півколом $y=\sqrt{2ax-x^2}$, дугою параболи $y=\sqrt{2ax}$ і прямою $x=2a$ ($a>0$).

□ На рис. 69 область D подана як правильна в напрямі осі Oy. Тоді

$$S=\iint_D dxdy=\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}dy=\int_0^{2a}\left(\sqrt{2ax}-\sqrt{2ax-x^2}\right)dx=\int_0^{2a}\sqrt{2ax}dx-$$

$$-\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}dx=\sqrt{2a}\cdot(2/3)x^{3/2}\Big|_0^{2a}-\int_0^{2a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}dx=$$

$$=\Big|\,x-a=a\sin t;\ dx=a\cos t\,dt;\ t=\arcsin(x/a-1);$$

$$t_1=-\pi/2;\ t_2=\pi/2;\ \sqrt{a^2-(x-a)^2}=a\cos t\,\Big|=\sqrt{2a}\cdot(2/3)\sqrt{8a^3}-$$

$$-a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=(8/3)a^2-(1/2)a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{8}{3}a^2-\frac{1}{2}a^2\cdot\left(t+(1/2)\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{(16-3\pi)}{6}a^2 \text{ (кв. од.).} \quad ■$$

Приклад 2. Перейти до полярних координат і обчислити площу плоскої області D, що обмежена двома півколами $y=\sqrt{2ax-x^2}$, $y=\sqrt{4ax-x^2}$ і прямою $y=x/\sqrt{3}$ ($a>0$).

□ Перейдемо в рівняннях указаних ліній до полярних координат:

$$y=\sqrt{2ax-x^2}\,;\;\; \rho\sin\varphi=\sqrt{2a\rho\cos\varphi-\rho^2\cos^2\varphi}\,;$$

$$\rho^2\sin^2\varphi=2a\cos\varphi-\rho^2\cos^2\varphi\,;\;\; \rho^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=2a\cos\varphi\,;$$

$\rho=2a\cos\varphi$ – коло з центром $(a;0)$ і радіусом $r=a$;

$$y=\sqrt{4ax-x^2}\,;\;\; \rho\sin\varphi=\sqrt{4a\rho\cos\varphi-\rho^2\cos^2\varphi}\,;$$

$\rho=4a\cos\varphi$ – коло з центром $(2a;0)$ і радіусом $r=2a$;

$y=x/\sqrt{3}$; $\rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi/\sqrt{3}$; $tg\ \varphi=\sqrt{3}/3$; $\varphi=\pi/6$ – промінь, що виходить з полюса.

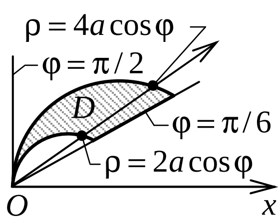

Рис. 70

На рис. 70 область D подана як правильна в напрямі координатних променів $\varphi=const$. Тоді

$$S=\iint_D dxdy=\iint_{D^*}\rho d\rho d\varphi=\int_{\pi/6}^{\pi/2}d\varphi\int_{2a\cos\varphi}^{4a\cos\varphi}\rho d\rho=$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\left((\rho^2/2)\Big|_{2a\cos\varphi}^{4a\cos\varphi}\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2}(16a^2\times$$

$$\times\cos^2\varphi-4a^2\cos^2\varphi)\,d\varphi=3a^2\int_{\pi/6}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=3a^2(\varphi+(1/2)\sin 2\varphi)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2}=\frac{a^2}{4}\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)\text{ (кв. од.).}\quad\blacksquare$$

Об'єм тіла. Нехай правильне у напрямі осі Oz просторове тіло V , яке обмежене знизу і зверху поверхнями входу $z=z_1(x,y)$ і виходу $z=z_2(x,y)$, проектується на площину Oxy в область D_{xy}. Тоді його об’єм обчислюється за формулою

$$\boxed{V=\iint_{D_{xy}}\left(z_2(x,y)-z_1(x,y)\right)dxdy}.$$

Зауваження 1. Якщо тіло V – правильне в напрямі осі Ox чи Oy , то його об’єм обчислюється за аналогічною формулою відповідно

$$\boxed{V = \iint_{D_{yz}} \left(x_2(x,y) - x_1(x,y)\right) dydz} \text{ і } \boxed{V = \iint_{D_{xz}} \left(y_2(x,y) - y_1(x,y)\right) dxdz}.$$

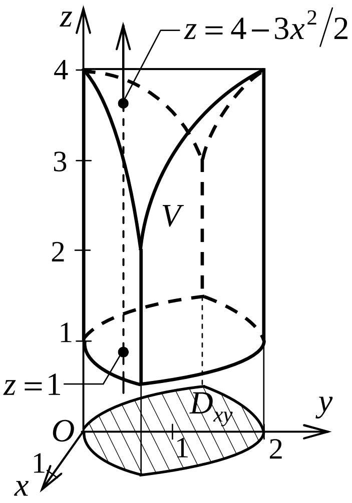

Рис. 71

Приклад 3. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об'єм тіла V, що обмежене параболічними циліндрами $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $z = 4 - 3x^2/2$ і площиною $z = 1$.

□ На рис. 71 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz. Його проекцією на площину Oxy служить область D_{xy}, що зображена на рис. 72 як правильна в напрямі осі Oy. Тоді

$$V = \iint_{D_{xy}} \left(z_2(x,y) - z_1(x,y)\right) dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(4 - 3x^2/2 - 1\right) dxdy =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(2 - x^2)\,dx \int_{x^2}^{2-x^2} dy = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(2 -$$

$$x^2)\cdot y\Big|_{x^2}^{2-x^2} dx = (3/2)\int_{-1}^{1}(2 - x^2)(2 -$$

$$- x^2 - x^2)\,dx = 3\int_{-1}^{1}(x^4 - 3x^2 + 2)\,dx =$$

$$= 3\cdot(x^5/5 - x^3 + 2x)\Big|_{-1}^{1} = 7\frac{1}{5} \text{ (куб. од.). } \blacksquare$$

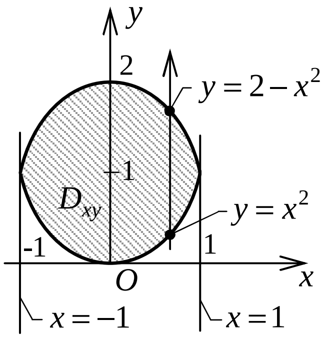

Рис. 72

Приклад 4. Перейти до полярних координат і обчислити об'єм тіла V, що обмежене півсферою $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ і параболоїдом обертання $z = 1 + (x^2 + y^2)/8$.

□ Знайдемо лінію перетину зазначених поверхонь:

$$\begin{cases} z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}; & \sqrt{25 - x^2 - y^2} = 1 + (x^2 + y^2)\big/8; \\ z = 1 + (x^2 + y^2)\big/8; & (x^2 + y^2)^2 + 80(x^2 + y^2) - 1536 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16; \\ \quad z = 3 \end{cases} \text{– коло з центром } (0;0;3) \text{ і радіусом } r = 4.$$

Проекцією тіла V на площину Oxy служить область D_{xy} – круг з центром $(0;0)$ і радіусом $r = 4$. На рис. 73 це тіло подане як правильне в напрямі осі Oz. Тоді

$$V = \iint_{D_{xy}} \left(\sqrt{25 - x^2 - y^2} - 1 - (x^2 + y^2)/8\right) dxdy.$$

Область D_{xy} – правильна в напрямі координатних променів $\varphi = const$ і може бути задана як $D_{xy} : 0 \le \rho \le 4;\ \varphi \in [0; 2\pi]$. Перейдемо в подвійному інтегралі до полярних координат і дістанемо:

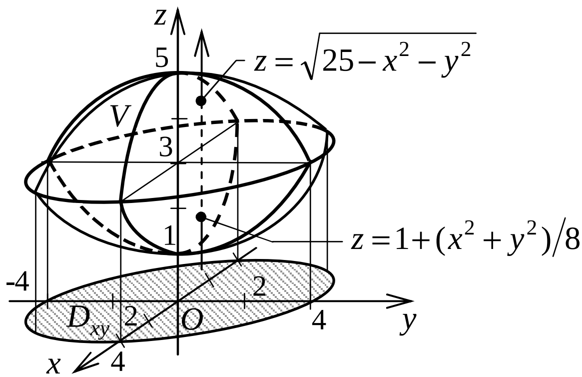

Рис. 73

$$V = \iint\limits_{D^*_{xy}} \left(\sqrt{25 - \rho^2} - 1 - \rho^2/8\right) \rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(\int_0^4 (25 - \rho^2)^{1/2} \rho\, d\rho - \right.$$

$$\left. - \int_0^4 \rho\, d\rho - (1/8) \int_0^4 \rho^3\, d\rho \right) d\varphi = \left| \, 25 - \rho^2 = u^2;\ \rho\, d\rho = -u du; \right.$$

$$u=(25-\rho^2)^{1/2};\ u_1=5;\ u_2=3\Bigg|=\int_0^{2\pi}\left(-\int_5^3 u^2\,du-(1/2)\cdot\rho^2\Big|_0^4-\right.$$

$$\left.-(1/32)\cdot\rho^4\Big|_0^4\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(-(1/3)\cdot u^3\Big|_5^3-8-8\right)d\varphi=\frac{50}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=(50/3)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=100\pi/3 \text{ (куб. од.). } \blacksquare$$

Площа поверхні. Нехай σ – деяка поверхня, плоска область D_{xy} - її проекція паралельно осі Oz на координатну площину Oxy (рис. 74). Поверхня σ називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямі осі*** Oz, якщо виконуються наступні умови: 1) довільна пробна пряма, що проходить через область D_{xy} паралельно осі Oz і в тому ж напрямі, перетинає поверхню σ лише в одній точці, тобто поверхня σ взаємно однозначно проектується в область D_{xy}; 2) рівняння поверхні σ задається в явному вигляді, розв'язаному відносно z, причому тільки однією формулою $z=z(x,y)$, де функція $z(x,y)$ неперервна в D_{xy}.

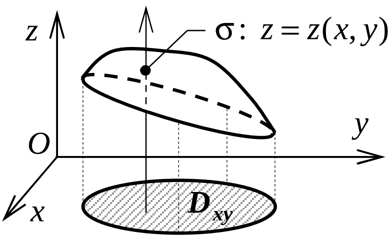

Рис. 74

Аналогічно розглядаються поверхні, що ***правильні в напрямі осей*** Ox ***і*** Oy.

Якщо поверхня σ правильна у всіх трьох напрямах Ox, Oy і Oz, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Наприклад, параболоїд $z=x^2+y^2$ правильний у напрямі тільки осі Oz; циліндр $z=\sqrt{x}$ правильний у напрямі тільки осей Ox і Oz; площина $2x+3y-z-6=0$ просто правильна; сфера $x^2+y^2+z^2=1$ неправильна в кожному напрямі Ox, Oy і Oz.

Зауваження 2. Якщо поверхня σ – неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Як правило, для цього застосовують координатні чи їм паралельні площини. Наприклад, сфера

$x^2+y^2+z^2=1$ площиною $z=0$ розбивається на дві правильні в напрямі осі Oz півсфери $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ і $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

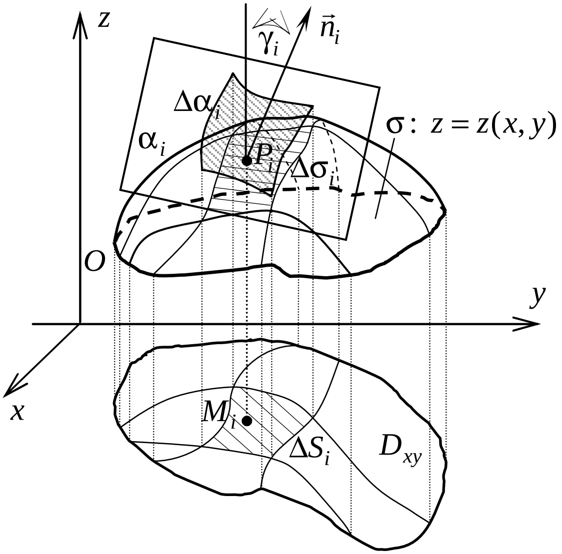

Рис. 75

Нехай правильна у напрямі осі Oz поверхня σ проектується на координатну площину Oxy в замкнену обмежену область D_{xy} і задається рівнянням $z=z(x,y)$ (рис. 75).

Припустимо, що функція $z(x,y)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними z'_x і z'_y в області D_{xy}. Тоді у кожній точці поверхні σ існує дотична площина, що неперервно змінює своє положення при переході від однієї точки до іншої, тобто поверхня σ є гладкою. Знайдемо площу S_σ цієї поверхні.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$, що не мають спільних внутрішніх точок. На кожному майданчику $\Delta\sigma_i$, який проектується на координатну площину Oxy в частинну область ΔS_i з діаметром d_i, візьмемо довільну точку $P_i(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$, проведемо в ній дотичну площину α_i і одиничний вектор нормалі $\vec{n}_i=(-z'_x(x_i,y_i), -z'_y(x_i,y_i), 1)$, який утворює гострий кут γ_i з віссю Oz. При цьому

$$\cos\gamma_i = 1\Big/\sqrt{z'^2_x(x_i,y_i)+z'^2_y(x_i,y_i)+1}>0\,.$$

На площині α_i виділимо частину $\Delta\alpha_i$, проекцією якої служить елементарна область ΔS_i. Їх площі зв'язані співвідношенням

$$\Delta\alpha_i = \Delta S_i / |\cos\gamma_i| = \sqrt{z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i) + 1}\,\Delta S_i .$$

За площу S_σ поверхні σ приймають скінченну границю

$$S_\sigma = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i) + 1}\,\Delta S_i ,$$

яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок P_i. Вираз $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i) + 1}\,\Delta S_i$ є інтегральною сумою неперервної функції $f(x, y) = \sqrt{z'^2_x(x, y) + z'^2_y(x, y) + 1}$ по області D_{xy}. Тому зазначена границя визначає подвійний інтеграл

$$\boxed{S_\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dx\, dy},$$

за яким обчислюється площа S_σ поверхні σ, що правильна у напрямі осі Oz. Відповідно ***елемент*** (***диференціал***) ***площі*** $d\sigma$ такої поверхні визначається рівністю $\boxed{d\sigma = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dx\, dy}$.

Зауваження 3. Якщо поверхня σ правильна у напрямі осі Ox чи Oy, то її площа обчислюється відповідно за формулою

$$\boxed{S_\sigma = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z}\, dy\, dz} \quad \text{або} \quad \boxed{S_\sigma = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\, dx\, dz}.$$

При цьому диференціал площі $d\sigma$ поверхні σ визначається відповідно рівністю

$$\boxed{d\sigma = \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z}\, dy\, dz} \quad \text{або} \quad \boxed{d\sigma = \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\, dx\, dz}.$$

Приклад 5. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу частини верхньої півсфери $\sigma:\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, яка вирізається вертикальним циліндром $x = \sqrt{2y - y^2}$ і площиною $x = 0$.

□ На рис. 76 зазначена частина півсфери подана як правильна

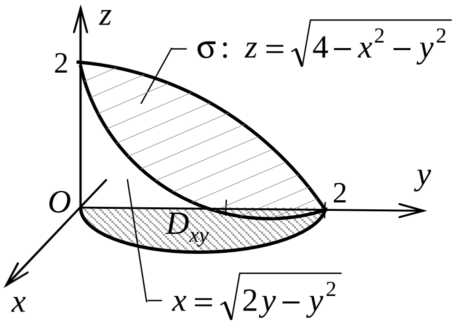

Рис. 76

в напрямі осі Oz. Її проекцією на площину Oxy служить область D_{xy} – півкруг з центром $(0;1)$ і радіусом $r=1$.

З рівняння півсфери дістаємо

$$z'_x=-x\Big/\sqrt{4-x^2-y^2}\ ;$$

$$z'_y=-y\Big/\sqrt{4-x^2-y^2}\ .$$

Тоді

$$S_\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

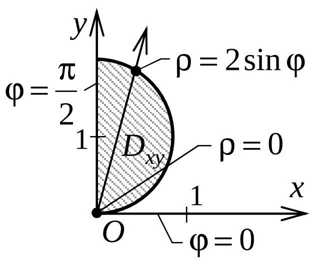

Рис. 77

Оскільки область інтегрування D_{xy} – півкруг, то зручно перейти до полярних координат:

$$x=\rho\cos\varphi;\quad y=\rho\sin\varphi;$$

$$x^2+y^2=\rho^2;\quad dxdy=\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

На рис. 77 область D_{xy} подана як правильна в напрямі координатних променів. Тоді

$$S_\sigma=2\iint\limits_{D^*_{xy}}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}=2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}=-2\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{4-\rho^2}\Big|_0^{2\sin\varphi}d\varphi=-4\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi-1)\,d\varphi=-4(\sin\varphi-\varphi)\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=-4(1-\pi/2)=2\pi-4\ \text{(кв. од.)}.\quad\blacksquare$$

2.3.5. Фізичні застосування подвійного інтеграла

Маса і середня густина пластини. Нехай на координатній площині Oxy лежить матеріальна пластина, що має форму обмеженої замкненої області D, у кожній точці якої поверхнева густина визначається неперервною функцією $\mu = \mu(x, y)$. Тоді маса m і середня густина $\mu_{сер}$ пластини обчислюються за формулами

$$\boxed{m = \iint\limits_D \mu(x, y)\,dxdy}; \quad \boxed{\mu_{сер} = \frac{m}{S} = \iint_D \mu(x, y)\,dxdy \Big/ \iint_D dxdy}.$$

Статичні моменти і центр маси пластини. Розіб'ємо область D довільними кусково-гладкими лініями на елементарні частини D_i ($i = \overline{1, n}$), що не мають спільних внутрішніх точок. Виберемо на кожному майданчику D_i з площею ΔS_i і діаметром d_i довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і наближено вважатимемо, що його маса Δm_i дорівнює $\mu(x_i, y_i)\Delta S_i$ і зосереджена у вибраній точці $M_i(x_i, y_i)$. Тоді пластину можна розглядати як систему всіх цих матеріальних точок. Її статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox і Oy наближено визначаються за формулами

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} y_i\,\Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} y_i\,\mu(x_i, y_i)\Delta S_i\ ;$$

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_i\,\Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mu(x_i, y_i)\Delta S_i\ .$$

Щоб знайти точні значення вказаних величин, перейдемо в цих рівностях до границі при необмеженому здрібненні розбиття області D: $\max d_i \to 0$. Дістанемо

$$\boxed{M_x = \iint_D y\mu(x, y)\,dxdy}; \quad \boxed{M_y = \iint_D x\mu(x, y)\,dxdy}.$$

Відповідно координати x_c та y_c центра маси пластини обчислюються за формулами $\boxed{x_c = M_y / m}$; $\boxed{y_c = M_x / m}$.

Зауваження. Якщо пластина однорідна, то $\mu = \mu_0 = const$.

Моменти інерції пластини. Замінивши пластину системою матеріальних точок $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,n}$ з масами $\Delta m_i \approx \mu(x_i, y_i)\Delta S_i$, дістанемо наступні наближені рівності для її моментів інерції I_x, I_y і I_0 відносно осей Ox, Oy і початку координат O:

$$I_x \approx \sum_{i=1}^{n} y_i^2\,\Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} y_i^2\,\mu(x_i, y_i)\,\Delta S_i\,;$$

$$I_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,\Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,\mu(x_i, y_i)\,\Delta S_i\,;$$

$$I_0 \approx \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\mu(x_i, y_i)\Delta S_i\,.$$

Перейшовши до границі при $\max d_i \to 0$, з цих співвідношень одержимо точні формули для обчислення моментів інерції

$$\boxed{I_x = \iint_D y^2\,\mu(x,y)\,dxdy};\quad \boxed{I_y = \iint_D x^2\,\mu(x,y)\,dxdy};$$

$$\boxed{I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\mu(x,y)\,dxdy = I_x + I_y}.$$

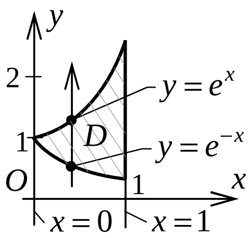

Рис. 78

Приклад 1. Знайти масу та середню густину пластини D, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$ і $x = 1$, якщо поверхнева густина задається функцією $\mu(x, y) = x + 4y$.

□ На рис. 78 пластина D зображена як правильна в напрямі осі Oy. Обчислимо її масу:

$$m = \iint_D \mu(x,y)\,dxdy = \iint_D (x+4y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} (x+4y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (xy + 2y^2)\Big|_{e^{-x}}^{e^x} dx = \int_0^1 (xe^x - xe^{-x} + 2e^{2x} - 2e^{-2x})\,dx = \int_0^1 xe^x dx -$$

$$- \int_0^1 xe^{-x}dx + 2\int_0^1 e^{2x}dx - 2\int_0^1 e^{-2x}dx = \Big|\, u_1 = x;\ du_1 = dx;\ dv_1 = e^x dx;$$

$$v_1 = e^x dx;\ u_2 = x;\ du_2 = dx;\ dv_2 = e^{-x}dx;\ v_2 = -e^{-x}\,\Big| = (xe^x)\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 e^x dx+(xe^{-x})\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-x}dx+e^{2x}\Big|_0^1+e^{-2x}\Big|_0^1=e-e^x\Big|_0^1+e^{-1}+$$

$$+e^{-x}\Big|_0^1+e^2-1+e^{-2}-1=e-e+1+e^{-1}+e^{-1}-1+e^2+e^{-2}-2=$$

$$=2e^{-1}+e^2+e^{-2}-2\,.$$

Знайдемо площу пластини D:

$$S=\iint_D dxdy=\int_0^1 dx\int_{e^{-x}}^{e^x}dy=\int_0^1 y\Big|_{e^{-x}}^{e^x}dx=\int_0^1(e^x-e^{-x})\,dx=(e^x+e^{-x})\Big|_0^1=$$

$$=e+e^{-1}-2\,.$$

Тепер обчислимо середню густину пластини $\mu_{сер}$:

$$\mu_{сер}=m/S=(2e^{-1}+e^2+e^{-2}-2)\big/(e+e^{-1}-2)\,.\quad ■$$

Приклад 2. Знайти статичні моменти M_x та M_y відносно осей координат та центр маси $C(x_c,y_c)$ пластини D, обмеженої дугою кривої $y=\sqrt{\sin x}$, $0\le x\le \pi/2$, віссю Ox і прямою $x=\pi/2$, якщо поверхнева густина $\mu(x,y)=60y\cos x$.

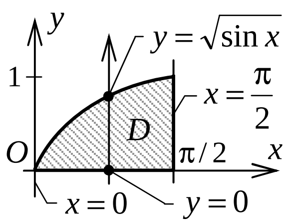

Рис. 79

□ На рис. 79 пластина D подана як правильна в напрямі осі Oy. Обчислимо її масу:

$$m=\iint_D \mu(x,y)\,dxdy=\iint_D 60y\cos x\,dxdy=60\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\int_0^{\sqrt{\sin x}}y\,dy=$$

$$=60\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot(y^2/2)\Big|_0^{\sqrt{\sin x}}dx=30\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\sin x\,dx=15\int_0^{\pi/2}\sin 2x\,dx=$$

$$=-(15/2)\cdot\cos 2x\Big|_0^{\pi/2}=-(15/2)(\cos\pi-\cos 0)=15\,.$$

Знайдемо статичні моменти пластини:

$$M_x = \iint_D y\mu(x,y)\,dxdy = \iint_D y \cdot 60y\cos x\,dxdy =$$

$$= 60\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx \int_0^{\sqrt{\sin x}} y^2\,dy = 60\int_0^{\pi/2} \cos x \cdot (y^3/3)\Big|_0^{\sqrt{\sin x}} dx =$$

$$= 20\int_0^{\pi/2}\cos x \cdot \sin^{3/2} x\,dx = \left| u = \sin x;\ du = \cos x\,dx;\ u_1 = 0;\ u_2 = 1 \right| =$$

$$= 20\int_0^1 u^{3/2} du = 20\cdot(2/5)\cdot u^{5/2}\Big|_0^1 = 8\,;$$

$$M_y = \iint_D x\mu(x,y)\,dxdy = \iint_D x \cdot 60y\cos x\,dxdy =$$

$$= 60\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx \int_0^{\sqrt{\sin x}} y\,dy = 60\int_0^{\pi/2} x\cos x \cdot (y^2/2)\Big|_0^{\sqrt{\sin x}} dx =$$

$$= 30\int_0^{\pi/2} x\cos x \cdot \sin x\,dx = 15\int_0^{\pi/2} x\sin 2x\,dx = \Big| u = x;\ du = dx;$$

$$dv = \sin 2x\,dx;\ \ v = -(1/2)\cos 2x \Big| = -(15/2)\cdot x\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+\frac{15}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx = -\frac{15}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cos\pi + \frac{15}{4}\cdot\sin 2x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{15\pi}{4}\,.$$

Тепер обчислимо координати центра маси пластини:

$x_c = M_y \big/ m = (15\pi/4)\big/15 = \pi/4\,;\ \ y_c = M_x \big/ m = 8/15\,.$ ■

<u>Приклад 3</u>. Знайти момент інерції I_y відносно осі Oy пластини D, обмеженої дугою кардіоїди $(x^2 + y^2 - 2x) = 4(x^2 + y^2)$, $y \ge 0$, півколом $x^2 + y^2 = 1$, $x \ge 0$ і віссю Oy, якщо поверхнева густина $\mu(x,y) = y\big/(x^2 + y^2)^2$.

□ Рівняння кардіоїди і кола спрощуються при переході до полярних координат ($x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $x^2 + y^2 = \rho^2$) і набувають відповідно вигляду

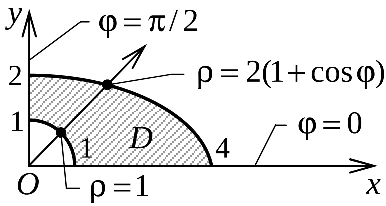

Рис. 80

$$\rho = 2(1+\cos\varphi) \quad \text{і} \quad \rho = 1.$$

На рис. 80 область D подана як правильна в напрямі координатних променів. Знайдемо момент інерції I_y пластини D, переходячи в подвійному інтегралі до полярних координат:

$$I_y = \iint_D x^2 \mu(x,y)\,dxdy = \iint_D x^2 \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \Big| x = \rho\cos\varphi;$$

$$y = \rho\sin\varphi;\ \ x^2+y^2 = \rho^2;\ \ dxdy = \rho\,d\rho\,d\varphi \Big| = \iint_{D^*} \rho^2\cos^2\varphi \frac{\rho\sin\varphi}{\rho^4} \times$$

$$\times \rho\,d\rho\,d\varphi = \iint_D \cos^2\varphi\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi \int_1^{2(1+\cos\varphi)} d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin\varphi\cdot\rho\Big|_1^{2(1+\cos\varphi)} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin\varphi(1+2\cos\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \Big| u = \cos\varphi;\ du = -\sin\varphi\,d\varphi;\ u_1 = 1;\ u_2 = 0 \Big| = -\int_1^0 u^2(1+2u)\,du =$$

$$= -\int_1^0 u^2 du - 2\int_1^0 u^3 du = -\frac{1}{3}u^3\Big|_1^0 - \frac{1}{2}u^4\Big|_1^0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}. \quad \blacksquare$$

2.3.6. Задача про масу просторового тіла. Потрійний інтеграл і його властивості

Нехай у тривимірному просторі задана замкнена обмежена область (просторове тіло) V, яка суцільно заповнена речовиною з об’ємною густиною $\mu = f(x,y,z)$. Знайдемо масу m цього тіла V.

Для цього розіб'ємо область V сіткою довільних кусково-гладких поверхонь на елементарні частини V_i ($i = \overline{1,n}$), що не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо об’єм комірки V_i через ΔV_i, а її діаметр (довжину найбільшої хорди, що з’єднує дві точки межі області V_i) – через d_i, $i=\overline{1,n}$. У кожній комірці V_i візьмемо довільну точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$. Можна наближено вважати, що густина в межах елементарної області V_i однакова і дорівнює значенню $\mu_i = f(M_i) = f(x_i,y_i,z_i)$ у виділеній точці. Тоді для маси Δm_i комірки V_i справджується наближена рівність $\Delta m_i \approx \mu_i \, \Delta V_i =$ $= f(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta V_i$. Відповідно маса m всього тіла V наближено визначається за формулою $m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$.

Вираз $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$ називається ***інтегральною сумою функції*** $f(x,y,z)$ ***по області*** V.

Природно границю інтегральної суми при умові, що кожна комірка V_i стягується в точку $(\max d_i \to 0)$ і, відповідно, їх число n необмежено збільшується $(n\to\infty)$, прийняти за масу m тіла V:

$$m=\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i .$$

Скінченна границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття тривимірної області V*, якщо вона існує і не залежить від способу поділу на елементарні комірки* V_i *та від вибору точок* $M_i(x_i,y_i,z_i)$ *у них, називається* ***потрійним інтегралом від функції*** $f(x,y,z)$ ***по області*** V:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV=\lim_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i},$$

де x, y і z – ***змінні інтегрування***; $f(x,y,z)$ – ***підінтегральна функція***; dV – ***елемент*** (***диференціал***) ***об'єму***; $f(x,y,z)\,dV$ – ***підінтегральний вираз***; V – ***область інтегрування***.

Таким чином $\boxed{m=\iiint_V \mu(x,y,z)\,dV}$ (<u>фізичний зміст потрійного інтеграла</u>).

Якщо в потрійному інтегралі підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x,y,z)\equiv 1$, то його значення чисель-

но дорівнюватиме об’єму області інтегрування V : $\boxed{V = \iiint_V dV}$
(<u>геометричний зміст потрійного інтеграла</u>).

<u>Зауваження</u>. *Умови існування та основні властивості потрійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям подвійного і звичайного визначеного інтеграла*.

2.3.7. Обчислення потрійного інтеграла у прямокутній системі координат

Нехай у тривимірному просторі визначена декартова прямокутна система координат $Oxyz$. Оскільки потрійний інтеграл не залежить від способу розбиття, то в цій системі координат зручно розбивати область V координатною сіткою, утвореною площинами, які паралельні координатним площинам. Тоді внутрішня елементарна комірка V_i є прямокутним паралелепіпедом зі сторонами Δx_i , Δy_i і Δz_i . Його об’єм $\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$. Відповідно диференціал об’єму набуває вигляду $\boxed{dV = dx\,dy\,dz}$ і подвійний інтеграл можна подати у формі $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$.

Нехай тривимірна область V – правильна в напрямі осі Oz (є вертикальним циліндричним тілом, зображеним на рис. 54), і може бути подана у вигляді

$$V : \left\{ (x,y,z) \middle|\; z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\, (x,y) \in D_{xy},\, V \xrightarrow{Oz} D_{xy} \right\}.$$

Тоді справедлива формула

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\;dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz},$$

за якою спочатку обчислюється внутрішній одновимірний інтеграл по z , а потім зовнішній подвійний інтеграл по x, y .

Якщо при цьому плоска область D_{xy}, що служить проекцією тіла V на площину Oxy , є правильною в напрямі осі Oy (рис. 58) і може бути подана у вигляді

$$D_{xy} : \left\{ (x,y) \middle|\; y_1(x) \le y \le y_2(x),\, x \in [a;b],\, D \xrightarrow{Oy} [a;b] \right\},$$

то приходимо до формули

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz},$$

яка зводить потрійний інтеграл до трикратного повторного інтеграла.

Зауваження 1. За цією формулою спочатку обчислюється самий внутрішній інтеграл по внутрішній змінній z при фіксованих зовнішніх змінних x і y. Потім знаходиться проміжний інтеграл по y при фіксованому x. В останню чергу обчислюється зовнішній інтеграл по x.

Зауваження 2. Можна одержати повторний інтеграл з іншим порядком інтегрування. Його доцільність залежить як від розташування області V відносно прийнятої системи координат $Oxyz$ та її форми, так і від вигляду підінтегральної функції $f(x,y,z)$.

Зауваження 3. Якщо область V – неправильна, то її треба розбити на правильні частини.

Приклад. Для потрійного інтеграла $I = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$ вказано підінтегральну функцію $f(x,y,z)$ й область інтегрування V, яка задана рівняннями поверхонь, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

1) Зобразити тіло V у прямокутній системі координат $Oxyz$ як правильну в напрямі осі Oz просторову область.

2) Подати його проекцію D_{xy} як правильну в напрямі осі Oy плоску область, при необхідності розбиваючи на частини, і зробити відповідний рисунок.

3) За результатами пунктів 1) і 2) перейти до повторного інтеграла і обчислити його значення.

а) $f(x,y,z) = 7(1 - x/4)(3y^2 + 4z)$;

$V:\ z - y^2 = 0;\ x + 4y - 4 = 0;\ x = 0;\ z = 0;$

б) $f(x,y,z) = x + y + z$;

$V:\ x + y + z = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$.

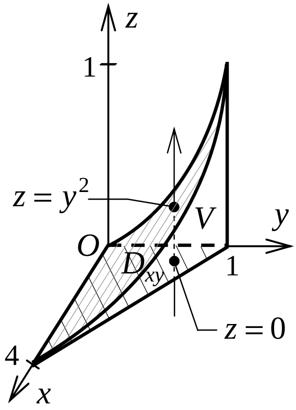

Рис. 81

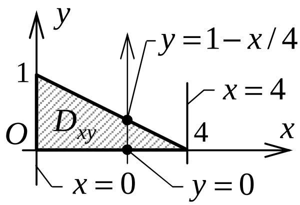

Рис. 82

□ а) Дана область інтегрування V є вертикальним циліндричним тілом, а його проекцією на координатну площину Oxy є плоска область D_{xy}. На рис. 81 це тіло V подано як правильну в напрямі осі Oz просторову область, що обмежена знизу координатною площиною $z=0$ (поверхня входу), зверху – параболічним циліндром $z=y^2$ (поверхня виходу), а з боків – координатною площиною $x=0$ і вертикальною площиною $x+4y-4=0$. Відповідно на рис. 82 проекцію D_{xy} відтворено як правильну в напрямі осі Oy плоску область, яка обмежена знизу віссю Ox (лінія входу $y=0$), зверху – похилою прямою $y=1-x/4$ ((лінія виходу), а з боків – вертикальними прямими $x=0$ і $x=4$. Тоді потрійний інтеграл переходом до повторного обчислюється так:

$$I=7\iiint_V(1-x/4)(3y^2+4z)\,dxdydz=7\int_0^4(1-x/4)\,dx\int_0^{1-x/4}dy\int_0^{y^2}(3y^2+$$

$$+4z)\,dz=7\int_0^4(1-x/4)\,dx\int_0^{1-x/4}(3y^2z+2z^2)\Big|_0^{y^2}dy=$$

$$=7\int_0^4(1-x/4)\,dx\int_0^{1-x/4}(3y^4+2y^4)\,dy=7\int_0^4(1-x/4)\,dx\int_0^{1-x/4}5y^4dy=$$

$$=7\int_0^4(1-x/4)y^5\Big|_0^{1-x/4}dx=7\int_0^4(1-x/4)^6dx=-4\cdot(1-x/4)^7\Big|_0^4=4.$$

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь: $I=1/8$. ■

2.3.8. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Потрійний інтеграл у циліндричній та сферичній системах координат

У багатьох задачах обчислення потрійних інтегралів зручніше робити в циліндричній, сферичній або іншій криволінійній системі координат.

Нехай функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій замкненій області V простору (x,y,z), а функції $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ і $z = z(u,v,w)$ разом з частинними похідними неперервні в обмеженій замкненій області V^* простору (u,v,w) і взаємно однозначно відображають цю область на область V, причому якобіан відображення $J(u,v,w)$ відмінний від нуля:

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix} \neq 0,$$

Тоді має місце ***формула заміни змінних у потрійному інтегралі***

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz =}$$

$$\boxed{= \iiint_{V^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| J(u,v,w) \right| dudvdw}.$$

Змінні u, v і w служать криволінійними координатами точки, а вираз $\boxed{dV^* = \left| J(u,v,w) \right| dudvdw}$ задає ***елемент об'єму*** у криволінійному просторі (u,v,w). Модуль якобіана $\left| J(u,v,w) \right|$ визначає коефіцієнт зміни нескінченно малого об'єму при відповідному перетворенні координат.

<u>Перехід до циліндричних координат</u>. Визначимо положення довільної точки $M(x,y,z)$ у просторі її декартовою координатою – аплікатою z і полярними координатами ρ і φ її проекції M_1 на площину Oxy (рис. 83). Величини ρ, φ і z називаються ***циліндричними координатами*** точки M .

З рис. 83 видно, що прямокутні і циліндричні координати точки M зв'язані співвідношеннями:

$$\boxed{x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ \ z=z}\ (0\le\rho<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi),$$

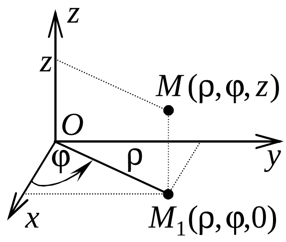

Рис. 83

які відображають область $0\le\rho<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$, $-\infty<z<+\infty$ криволінійного простору (ρ,φ,z) на весь простір (x,y,z).

Координатну сітку циліндричної системи координат утворюють кругові циліндри $\rho=const$ з віссю Oz, півплощини $\varphi=const$, що виходять з осі Oz, і площини $z=const$, паралельні площині Oxy.

Якобіан у циліндричних координатах має вигляд

$$J(\rho,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho.$$

Тоді елемент об'єму $\boxed{dV^*=\rho\,d\rho d\varphi dz}$. ***Формула переходу до потрійного інтеграла у циліндричних координатах***

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\,d\rho d\varphi dz}.$$

Зауваження 1. Перехід до циліндричних координат доцільно застосовувати, коли: 1) область інтегрування V задана у циліндричній системі; 2) область інтегрування V проектується в круг або його частину; 3) підінтегральна функція $f(x,y,z)$ містить суму квадратів хоча б двох декартових координат.

Перехід до сферичних координат. Визначимо положення довільної точки $M(x,y,z)$ у просторі за допомогою трьох величин (рис. 84): відстані $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ від початку координат O до точки M (***радіус-вектор***), кута φ між додатним напрямом осі Ox та проекцією OM_1 відрізка OM на площину Oxy (***довгота***), кута θ між додатним напрямом осі Oz та відрізком OM (***широта***). Величини r, φ і θ називаються ***сферичними координатами*** точки M. З рис. 84 видно, що прямокутні і сферичні координати точки M зв'язані співвідношеннями:

$$x = r\cos\varphi\,\sin\theta\,;\; y = r\sin\varphi\,\sin\theta\,;\; z = r\cos\theta\,;\; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(0 \le r < +\infty,\; 0 \le \varphi < 2\pi,\; 0 \le \theta \le \pi),$$

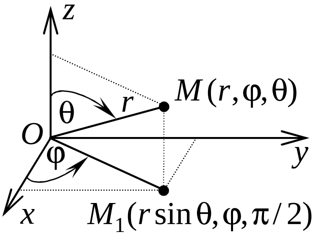

Рис. 84

які відображають область $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$ криволінійного простору (r,φ,θ) на весь простір (x, y, z).

Координатну сітку сферичної системи координат утворюють сфери $r = const$ з центром у початку координат O, півплощини $\varphi = const$, що виходять з осі Oz, і кругові півконуси $\theta = const$ з віссю Oz.

Якобіан у сферичних координатах має вигляд

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Тоді елемент об'єму $\boxed{dV^* = r^2\sin\theta\, dr d\varphi d\theta}$. ***Формула переходу до потрійного інтеграла у сферичних координатах***

$$\boxed{\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz =}$$

$$\boxed{= \iiint_{V^*} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\; r^2\sin\theta\, dr d\varphi d\theta}.$$

<u>Зауваження 2</u>. До сферичних координат зручно переходити, коли: 1) область інтегрування V задана у сферичній системі; 2) областю інтегрування V є куля чи її частина; 3) підінтегральна функція $f(x, y, z)$ містить суму квадратів всіх трьох декартових координат $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

<u>Зауваження 3</u>. При переході у потрійному інтегралі до циліндричних або сферичних координат область V^* у новому просторі, як правило, не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо

за областю V у прямокутних координатах.

<u>Приклад 1</u>. Знайти потрійний інтеграл $I=\iiint\limits_V \frac{xyz\,dxdydz}{x^2+y^2}$, де область V – розміщена в першому октанті ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$) частина просторового тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z=x^2+y^2$ і круговим півконусом $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

□ Знайдемо лінію перетину параболоїда і півконуса:

$$\begin{cases} z=x^2+y^2; \\ z=2-\sqrt{x^2+y^2}; \end{cases} \quad \begin{matrix} z=2-\sqrt{z}; \\ z=1; \end{matrix} \quad \begin{cases} x^2+y^2=1; \\ z=1 \end{cases}$$

– коло у площині $z=1$, що має радіус $r=1$ і центр $(0;0;1)$.

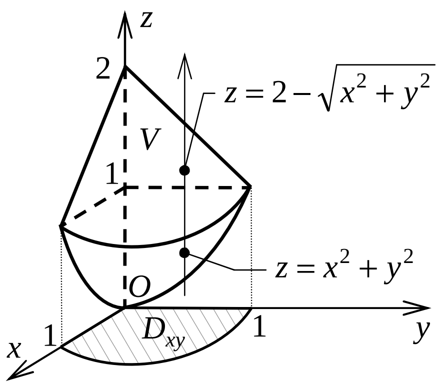

Рис. 85

На рис. 85 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz. Його проекцією на площину Oxy служить область D_{xy} – частина круга з центром $(0;0)$ і радіусом $r=1$, що відповідає першій чверті ($x\ge 0$, $y\ge 0$).

Крім того, підінтегральна функція містить суму квадратів двох координат. Тому раціонально перейти до циліндричних координат:

$$z=2-\sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; z=2-\rho;$$

$$z=x^2+y^2 \;\Rightarrow\; z=\rho^2;$$

$$f(x,y,z)=xyz\big/(x^2+y^2)=$$

$$=\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot z\big/\rho^2=z\cos\varphi\sin\varphi.$$

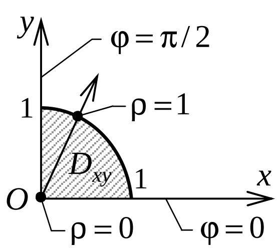

Рис. 86

На рис. 86 область D_{xy} зображена як правильна в напрямі координатних променів $\varphi=const$.

Обчислимо інтеграл, застосовуючи циліндричні координати:

$$I=\iiint\limits_V \frac{xyz\,dxdydz}{x^2+y^2}=\iiint\limits_{V^*} z\cos\varphi\sin\varphi\rho\,d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,\sin\varphi\times$$

$$\times d\varphi\int\limits_0^1\rho\,d\rho\int\limits_{\rho^2}^{2-\rho}z\,dz=\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\rho\,(z^2/2)\Big|_{\rho^2}^{2-\rho}d\rho=\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\times$$

$$\times\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1\rho\,(z^2/2)\Big|_{\rho^2}^{2-\rho}d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1(4\rho-4\rho^2+\rho^3-$$

$$-\rho^5)\,d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,(2\rho^2-4\rho^3/3+\rho^4/4-\rho^6/6)\Big|_0^1\,d\varphi=$$

$$=\frac{3}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d(\sin\varphi)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3}{16}.\quad\blacksquare$$

Приклад 2. Знайти потрійний інтеграл $I=\iiint\limits_V\frac{z^2\,dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, де область V обмежена півсферою $z=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ і круговим півконусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

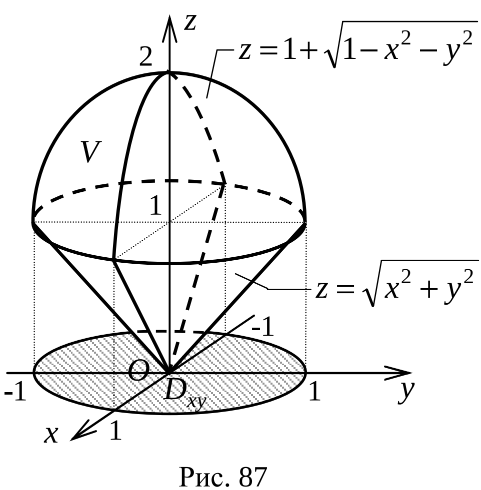

Рис. 87

□ Лінією перетину вказаних поверхонь є коло з центром $(0;0;1)$ і радіусом $r=1$, що лежить у площині $z=1$.

Тіло V зображене на рис. 87. Його проекцією на площину Oxy служить круг D_{xy} з центром $(0;0)$ і радіусом $r=1$.

Перейдемо до сферичних координат:

$$z = 1+\sqrt{1-x^2-y^2} \;\Rightarrow\; \left((r\cos\theta)^2-1\right)^2 = 1-(r\cos\varphi\,\sin\theta)^2 -$$

$$-(r\sin\varphi\,\sin\theta)^2;\; r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 = 1 - r^2\sin^2\theta;\; r = 2\cos\theta;$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; r\cos\theta = \sqrt{(r\cos\varphi\,\sin\theta)^2 + (r\sin\varphi\,\sin\theta)^2};$$

$$\cos\theta = \sin\theta;\quad tg\,\theta = 1;\quad \theta = \pi/4;$$

$$f(x,y,z) = z^2\big/(x^2+y^2+z^2) = r^2\cos^2\theta\big/r^2 = \cos^2\theta.$$

Оскільки проекцією тіла V є круг, то кут φ змінюється в межах від 0 до 2π. При фіксованому значенні φ кут θ пробігає значення від 0 до $\pi/4$. При фіксованих значеннях обох кутів φ і θ лінійна координата r змінюється в межах від 0 до $2\cos\theta$. Тоді

$$I = \iiint\limits_V \frac{z^2\,dxdydz}{x^2+y^2+z^2} = \iiint\limits_{V^*} \cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \cos^2\theta\times$$

$$\times\sin\theta\,d\theta \int\limits_0^{2\cos\theta} r^2dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \cos^2\theta\sin\theta\cdot (r^3/3)\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{8}{3}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \cos^5\theta\sin\theta\,d\theta = -\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{6}\int\limits_0^{2\pi} \cos^6\theta\Big|_0^{\pi/4} d\varphi = -\frac{4}{9}\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\left(\sqrt{2}/2\right)^6 -$$

$$-1^6\Bigg)d\varphi = \frac{7}{18}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{7\pi}{9}.\quad ■$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти потрійний інтеграл $I = \iiint\limits_V xyz^2\,dxdydz$, де область V є частиною кулі $x^2+y^2+z^2 \le 4$, що відповідає першому октанту ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$). Задачу розв'язати трьома способами: 1) безпосередньо в декартових прямокутних координатах; 2) за допомогою переходу до циліндричних координат; 3) за допомогою переходу до сферичних координат.

□ (Розв'язати самостійно). Відповідь: $I = 64/105$. ■

2.3.9. Застосування потрійного інтеграла

Обчислення об'єму. Згідно геометричного змісту потрійного інтеграла об'єм просторової області V обчислюється за формулою

$$\boxed{V=\iiint_V dV=\iiint_V dxdydz}.$$

Фізичні застосування. Якщо матеріальне тіло V має густину $\mu=\mu(x,y,z)$, то за фізичним змістом потрійного інтеграла маса m тіла обчислюється за формулою $\boxed{m=\iiint_V \mu(x,y,z)\,dxdydz}$.

Середня густина μ_{cep} тіла V є відношенням маси m тіла до його об'єму V, тобто $\boxed{\mu_{cep}=m/V}$.

Статичні моменти M_{yz}, M_{xz} і M_{xy} відносно координатних площин і координати центра маси $C(x_c,y_c,z_c)$ тіла V знаходяться відповідно за співвідношеннями:

$$\boxed{M_{yz}=\iiint_V x\mu(x,y,z)\,dxdydz};\quad \boxed{M_{xz}=\iiint_V y\mu(x,y,z)\,dxdydz};$$

$$\boxed{M_{xy}=\iiint_V z\mu(x,y,z)\,dxdydz};\quad \boxed{x_c=\frac{M_{yz}}{m}};\quad \boxed{y_c=\frac{M_{xz}}{m}};\quad \boxed{z_c=\frac{M_{xy}}{m}}.$$

Моменти інерції I_x, I_y, I_z і I_0 тіла V відносно осей і початку координат визначаються відповідно за формулами:

$$\boxed{I_x=\iiint_V (y^2+z^2)\mu\,dxdydz};\quad \boxed{I_y=\iiint_V (x^2+z^2)\mu\,dxdydz};$$

$$\boxed{I_z=\iiint_V (x^2+y^2)\mu\,dxdydz};\quad \boxed{I_0=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mu\,dxdydz}.$$

Приклад 1. Обчислити середню густину μ_{cep} і координати центра маси $C(x_c,y_c,z_c)$ тіла V, обмеженого параболоїдом обертання $z=1+(x^2+y^2)\big/2$ і площиною $z=1+y$, якщо густина задається функцією $\mu(x,y,z)=y\big/\sqrt{x^2+y^2}$.

□ Враховуючи, що на лінії перетину аплікати співпадають, знайдемо рівняння проекції лінії перетину параболоїда і площини на координатну площину Oxy:

$$\begin{cases} z = 1 + (x^2+y^2)/2; & y = (x^2+y^2)/2; \\ z = 1 + y; & x^2 + (y-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Отже, проекцією лінії перетину служить коло $x^2 + (y-1)^2 = 1$, що має радіус $r = 1$ і центр $(0;1;0)$.

Оскільки проекцією тіла V на координатну площину Oxy є круг D_{xy}, то зручно перейти до циліндричних координат:

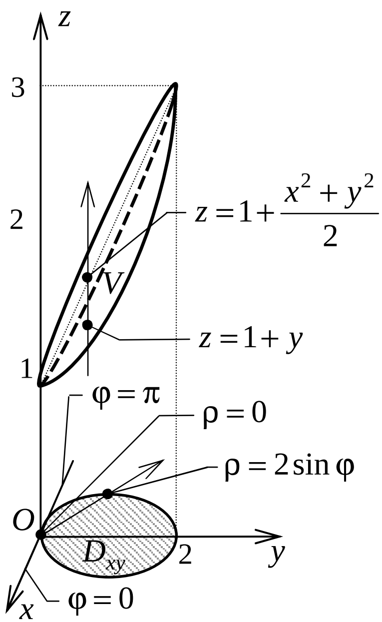

Рис. 88

$$z = 1 + (x^2+y^2)/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 1 + \rho^2/2;$$

$$z = 1 + y \Rightarrow z = 1 + \rho\sin\varphi;$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow \rho = 2\sin\varphi;$$

$$\mu = y\Big/\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \mu = \sin\varphi.$$

На рис. 88 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz, а його проекція D_{xy} зображена як правильна в напрямі координатних променів $\varphi = const$.

Знайдемо об'єм і масу тіла V:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V^*} \rho\, d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho\, d\rho \int_{1+\rho^2/2}^{1+\rho\sin\varphi} dz = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho\cdot z\Big|_{1+\rho^2/2}^{1+\rho\sin\varphi} d\rho = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} (\rho^2\sin\varphi -$$

$$-\rho^3/2)\,d\rho = \int_0^{\pi} ((1/3)\rho^3\sin\varphi - \rho^4/8)\Big|_0^{2\sin\varphi} d\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\varphi\, d\varphi =$$

$$= (1/6)\int_0^{\pi} (1-\cos 2\varphi)^2 d\varphi = (1/6)\int_0^{\pi} (1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$=(1/6)\int_0^{\pi} d\varphi-(1/3)\int_0^{\pi}\cos 2\varphi\, d\varphi+(1/12)\int_0^{\pi}(1+\cos 4\varphi)\, d\varphi=$$

$$=(1/6)\varphi\Big|_0^{\pi}-(1/6)\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}+(1/12)\,\varphi\Big|_0^{\pi}+(1/48)\sin 4\varphi\Big|_0^{\pi}=\pi/4\,;$$

$$m=\iiint\limits_V \frac{y\, dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iiint\limits_{V^*}\sin\varphi\cdot\rho\, d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}\rho\, d\rho\int\limits_{1+\rho^2/2}^{1+\rho\sin\varphi}dz=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}\rho\cdot z\Big|_{1+\rho^2/2}^{1+\rho\sin\varphi}d\rho=\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}(\rho^2\sin\varphi-\rho^3/2)\, d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\cdot((1/3)\rho^3\sin\varphi-\rho^4/8)\Big|_0^{2\sin\varphi}d\varphi=\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi}\sin^4\varphi\sin\varphi\, d\varphi=$$

$$=\left|\begin{array}{c} u=\cos\varphi;\ \ du=-\sin\varphi\, d\varphi;\ \ u_1=1; \\ u_2=-1;\ \sin^4\varphi=(1-\cos^2\varphi)^2=(1-u^2)^2 \end{array}\right|=-\frac{2}{3}\int\limits_1^{-1}(1-u^2)^2\, du=$$

$$=-\frac{2}{3}\int\limits_1^{-1}(1-2u^2+u^4)\ du=-\frac{2}{3}\ (u-2u^3/3+u^5/5)\Big|_1^{-1}=\frac{32}{45}\,.$$

Тоді середня густина $\mu_{сер}=m/V=128/(45\pi)$.

За формою і розподілом густини дане тіло V симетричне відносно координатної площини Oyz, тому $x_c=0$. Для знаходження y_c і z_c обчислимо статичні моменти M_{xz} і M_{xy}:

$$M_{xz}=\iiint\limits_V \frac{y^2\, dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iiint\limits_{V^*}\rho\sin^2\varphi\cdot\rho\, d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}\rho^2\times$$

$$\times d\rho\int\limits_{1+\rho^2/2}^{1+\rho\sin\varphi}dz=\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}\rho^2\cdot z\Big|_{1+\rho^2/2}^{1+\rho\sin\varphi}d\rho=\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}(\rho^3\times$$

$$\times\sin\varphi-\rho^4/2)\, d\rho=\int\limits_0^{\pi}\sin^2\varphi\cdot((1/4)\rho^4\sin\varphi-\rho^5/10)\Big|_0^{2\sin\varphi}d\varphi=\frac{4}{5}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi}\sin^6\varphi\sin\varphi\, d\varphi=\left|\begin{array}{c} u=\cos\varphi;\ \ du=-\sin\varphi\, d\varphi;\ \ u_1=1; \\ u_2=-1;\ \sin^6\varphi=(1-\cos^2\varphi)^3=(1-u^2)^3 \end{array}\right|=$$

$$-(4/5)\int_1^{-1}(1-u^2)^3\,du=(4/5)\int_1^{-1}(1-3u^2+3u^4-u^6)\,du=$$

$$=-(4/5)\,(u-u^3+3u^5/5-u^7/7)\Big|_1^{-1}=128/175;$$

$$M_{xy}=\iiint\limits_V\frac{zy\,dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iiint\limits_{V^*}z\sin\varphi\cdot\rho\,d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}\rho\times$$

$$\times d\rho\int\limits_{1+\rho^2/2}^{1+\rho\sin\varphi}z\,dz=\left|\begin{array}{c}\text{Необхідні розрахунки}\\ \text{проробіть самостійно}\end{array}\right|=\frac{416}{315}.$$

Отже, $y_c=M_{xz}\big/m=36/35$; $z_c=M_{xy}\big/m=13/7$. ■

<u>Приклад 2</u>. Знайти момент інерції I_z відносно осі Oz півкулі $V: x^2+y^2+z^2\le 1$, $z\ge 0$, якщо густина задається функцією $\mu(x,y,z)=z^3\big/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$.

□ Оскільки область V є частиною кулі і вираз для густини, що входить у підінтегральну функцію відповідного інтеграла, містить суму квадратів всіх трьох декартових координат, то доцільно перейти до сферичних координат. Дістанемо:

$$\mu=\cos^3\theta;\quad V^*:\left\{(r,\varphi,\theta)\,\middle|\;0\le\varphi\le 2\pi,\,0\le\theta\le\pi/2,\;0\le r\le 1\right\}.$$

Далі обчислимо момент інерції I_z, застосовуючи сферичні координати:

$$I_z=\iiint\limits_V\frac{(x^2+y^2)\,z^3dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\iiint\limits_{V^*}r^2\sin^2\theta\cdot\cos^3\theta\cdot r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta=$$

$$=\iiint\limits_{V^*}r^4(\sin\theta\,\cos\theta)^3\;drd\varphi d\theta=\frac{1}{8}\iiint\limits_{V^*}r^4\sin^3 2\theta\;drd\varphi d\theta=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 2\theta\,d\theta\int\limits_0^1 r^4dr=\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 2\theta\cdot\,(r^5/5)\Big|_0^1\,d\theta=\frac{1}{40}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\sin 2\theta\,d\theta=\left|\begin{array}{l}u=\cos 2\theta;\;du=-2\sin 2\theta\,d\theta;\;u_1=1;\\ u_2=-1;\;\sin^2 2\theta=1-\cos^2 2\theta=1-u^2\end{array}\right|=$$

$$= -(1/80)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{-1} (1-u^2)\, du = -(1/80)\int_0^{2\pi} (u - u^3/3)\Big|_1^{-1} d\varphi =$$

$$= (1/60)\int_0^{2\pi} d\varphi = (1/60)\cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi/30. \ \blacksquare$$

Приклад 3. застосовуючи перехід до циліндричної системи координат, обчислити координати центра маси $C(x_c, y_c, z_c)$ розміщеної в першому октанті ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) частини V просторового тіла, обмеженого двома круговими циліндрами $x^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + z^2 = 1$ (рис. 89), якщо густина

$$\mu(x, y, z) = xyz \big/ (x^2 + y^2).$$

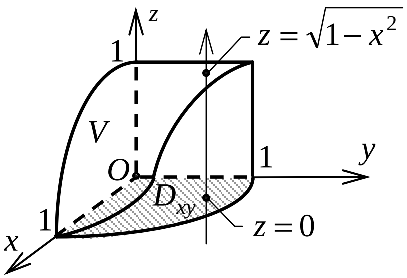

Рис. 89

□ (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$C(256/675,\ 256/675,\ 16/63)$. ■

2.4. Контрольні запитання

1. Яка поверхня називається сферою? Наведіть канонічне рівняння сфери та рівняння сфери зі зміщеним центром.
2. Запишіть загальне рівняння поверхні другого порядку.
3. Яка поверхня називається циліндричною? Запишіть канонічні рівняння еліптичного, гіперболічного, параболічного циліндрів.
4. Яка поверхня називається конічною? Наведіть канонічне рівняння конуса другого порядку.
5. Як утворюється поверхня обертання? Як знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї ж площини?
6. Запишіть канонічні рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, еліптичного та гіперболічного параболоїдів. Які з цих поверхонь є лінійчатими?
7. Наведіть означення функції n змінних та її області визначення.
8. Як знайти природну область визначення (область допустимих

значень) функції багатьох змінних?

9. Дайте означення функції двох змінних та її області визначення. Який геометричний зміст цих понять? Наведіть приклади графіків функцій двох змінних.
10. Що називається лінією рівня функції двох змінних? Поверхнею рівня функції трьох змінних? Наведіть приклади ліній та поверхонь рівня.
11. Дайте означення границі та неперервності функції $u = f(M)$ в точці.
12. Запишіть вирази для повного та частинних приростів функції $u = f(x, y, z)$ в точці M_0.
13. Наведіть означення частинних похідних функції багатьох змінних. У чому полягає геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних?
14. Як за правилами диференціювання функції однієї змінної знаходяться частинні похідні функції багатьох змінних?
15. Що таке частинні та повний диференціали функції n змінних?
16. Сформулюйте необхідні та достатні умови диференційовності функції двох змінних.
17. У чому полягає інваріантність форми повного диференціала?
18. Як застосовується повний диференціал у наближених обчисленнях?
19. За якими формулами проводиться диференціювання складених функцій багатьох змінних? Запишіть формулу повної похідної.
20. За якими формулами проводиться диференціювання неявно заданих функцій однієї і двох змінних?
21. Дайте означення похідних і диференціалів вищих порядків.
22. Сформулюйте умови незалежності мішаної частинної похідної від порядку диференціювання.
23. Як обчислюється похідна вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$?
24. Якими рівняннями задаються дотична пряма і нормальна площина до просторової лінії?
25. Наведіть означення дотичної площини і нормальної прямої до поверхні.
26. Запишіть загальне рівняння дотичної площини і канонічні рівняння нормальної прямої до поверхні, що задана явно. Який вигляд набувають ці рівняння у випадку неявного задання поверхні?

27. У чому полягає геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних?
28. Що таке скалярне поле? Як його зображують геометрично?
29. Дайте означення похідної за напрямом і градієнта функції трьох змінних.
30. Запишіть формули для обчислення похідної за напрямом і градієнта у прямокутних координатах.
31. Як зв'язані похідна за напрямом і градієнт, градієнт і вектор нормалі до поверхні рівня?
32. Запишіть формулу Тейлора для функції n змінних.
33. Наведіть означення точки локального мінімуму (максимуму) функції багатьох змінних.
34. Сформулюйте необхідні умови локального екстремуму.
35. Яка точка називається стаціонарною?
36. Сформулюйте достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.
37. Як ставиться задача на умовний екстремум для функції двох змінних?
38. У чому полягає метод множників Лагранжа для знаходження умовного екстремуму функції двох змінних?
39. Як знаходяться найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області?
40. Як за методом найменших квадратів знаходяться коефіцієнти шуканої лінійної функції?
41. Наведіть означення подвійного інтеграла.
42. Сформулюйте достатні умови існування подвійного інтеграла.
43. Сформулюйте основні властивості подвійного інтеграла.
44. У чому полягає геометричний зміст подвійного інтеграла?
45. У чому полягає фізичний зміст подвійного інтеграла?
46. Яка плоска область D називається правильною (стандартною) у напрямі осі Ox ? У напрямі осі Oy ?
47. Задати аналітично як множину точок плоску область D, що правильна у напрямі осі Ox ? У напрямі осі Oy ?
48. Як обчислюється подвійний інтеграл у прямокутних координатах? Наведіть приклад області інтегрування D, якій відповідають сталі як зовнішні, так і внутрішні межі інтегрування у прямокутних координатах.
49. Як знайти межі інтегрування при переході від подвійного до

двократного повторного інтеграла?

50. Яка загальна формула заміни змінних у подвійному інтегралі?
51. Запишіть якобіан $J(u,v)$ перетворення $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. У чому полягає геометричний зміст модулю якобіана $J(u,v)$?
52. Наведіть формули, що зв'язують прямокутні та полярні координати точки на площині.
53. Як записується формула переходу в подвійному інтегралі від прямокутних до полярних координат?
54. При яких умовах рекомендується переходити в подвійному інтегралі від прямокутних до полярних координат?
55. Яка плоска область D називається правильною (стандартною) у напрямі координатних променів полярної системи координат?
56. Наведіть приклади області інтегрування D, якій відповідають сталі як зовнішні, так і внутрішні межі інтегрування у полярних координатах.
57. Наведіть означення потрійного інтеграла.
58. У чому полягає фізичний зміст потрійного інтеграла?
59. Сформулюйте достатні умови існування потрійного інтеграла.
60. Яка тривимірна область V називається правильною (стандартною) у напрямі осі Oz? Осі Oy? Осі Ox?
61. Як обчислюється потрійний інтеграл у прямокутних координатах?
62. Запишіть загальну формулу заміни змінних у потрійному інтегралі.
63. Наведіть якобіан $J(u,v,w)$ перетворення $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ і $z = z(u,v,w)$. У чому полягає геометричний зміст модулю якобіана $J(u,v,w)$?
64. Як задається циліндрична система координат? Якими поверхнями утворюється координатна сітка цієї системи?
65. Наведіть формули, що зв'язують прямокутні та циліндричні координати точки у просторі.
66. Запишіть формулу переходу в потрійному інтегралі від прямокутних до циліндричних координат.
67. При яких умовах рекомендується переходити в потрійному інтегралі від прямокутних до циліндричних координат?
68. Наведіть приклади області інтегрування V, якій відповідають

сталі як зовнішні, так і внутрішні межі інтегрування у циліндричних координатах.

69. Як задається сферична система координат? Якими поверхнями утворюється координатна сітка цієї системи?
70. Наведіть формули, що зв'язують прямокутні та сферичні координати точки у просторі.
71. Запишіть формулу переходу в потрійному інтегралі від прямокутних до сферичних координат.
72. При яких умовах рекомендується переходити в потрійному інтегралі від прямокутних до сферичних координат?
73. Наведіть приклади області інтегрування V, якій відповідають сталі як зовнішні, так і внутрішні межі інтегрування у сферичних координатах.
74. Як обчислити площу замкненої обмеженої плоскої області D за допомогою подвійного інтеграла?
75. Як обчислити об'єм правильного в напрямі осі Oz просторового тіла V за допомогою подвійного інтеграла?
76. Яка поверхня σ називається правильною (стандартною) у напрямі осі Oz? Осі Oy? Осі Ox?
77. Як обчислити площу правильної в напрямі осі Oz поверхні σ за допомогою подвійного інтеграла?
78. Як за допомогою подвійного інтеграла обчислити масу і середню густину плоскої пластини D з відомою поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y)$?
79. Як за допомогою подвійного інтеграла обчислити статичні моменти і моменти інерції відносно координатних осей, координати центра маси плоскої пластини D з відомою поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y)$?
80. Як обчислити об'єм просторового тіла V за допомогою потрійного інтеграла?
81. Як за допомогою потрійного інтеграла обчислити масу і середню густину просторового тіла V з відомою об'ємною густиною $\mu = \mu(x, y, z)$?
82. Як за допомогою потрійного інтеграла обчислити статичні моменти відносно координатних площин і моменти інерції відносно координатних осей, координати центра маси просторового тіла V з відомою об'ємною густиною $\mu = \mu(x, y, z)$?

2.5. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Поверхня S задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$. У прямокутній системі координат $Oxyz$ побудувати частину цієї поверхні, що відповідає вказаним нерівностям, користуючись методом паралельних перерізів.

№ в-та	$S: \ F(x, y, z) = 0$	№ в-та	$S: \ F(x, y, z) = 0$
1	$x^2 + 4y^2 + z - 8 = 0$ (Еліптичний параболоїд); $z \geq 0$	16	$9x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0$ (Конус другого порядку); $-3 \leq z \leq 3$
2	$x^2 + 4y^2 - 3z^2 - 16 = 0$ (Однопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq z \leq 4$	17	$x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 16 = 0$ (Двопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq y \leq 4$
3	$9x^2 + y^2 + 9z^2 - 81 = 0$ (Еліпсоїд); $z \geq 0$	18	$x^2 - 4y = 0$ (Параболічний циліндр); $-4 \leq z \leq 4$
4	$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ (Еліптичний циліндр); $-4 \leq z \leq 4$	19	$4x^2 + y^2 - 4z^2 + 48 = 0$ (Двопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq z \leq 4$
5	$16x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 48 = 0$ (Двопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq y \leq 4$	20	$x + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$ (Еліптичний параболоїд); $x \geq 0$
6	$x^2 - 4y^2 - 4z = 0$ (Гіперболічний параболоїд); $-4 \leq x \leq 4$; $-2 \leq y \leq 2$	21	$4x^2 + 16y^2 + z^2 - 16 = 0$ (Еліпсоїд); $x \geq 0$
7	$x^2 - 4y + 4z^2 = 0$ (Еліптичний параболоїд); $0 \leq y \leq 9$	22	$25x^2 - 9y^2 - 225 = 0$ (Гіперболічний циліндр); $-4 \leq z \leq 4$
8	$x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 32 = 0$ (Однопорожнинний гіперболоїд); $-4 \leq z \leq 4$	23	$2x^2 + 3y^2 - z^2 - 36 = 0$ (Однопорожнинний гіперболоїд); $-2 \leq z \leq 2$

9	$x^2+12y^2+3z^2-48=0$ (Еліпсоїд); $y\ge 0$	24	$3y-9x^2-4z^2=0$ (Еліптичний параболоїд); $0\le y\le 12$
10	$9x^2-y^2+4z^2=0$ (Конус другого порядку); $-6\le y\le 6$	25	$2x^2-4y^2-z^2+32=0$ (Однопорожнинний гіпербо-лоїд); $-4\le x\le 4$
11	$x+4y^2+9z^2-36=0$ (Еліптичний параболоїд); $x\ge 0$	26	$3x^2+y^2-z^2+16=0$ (Двопорожнинний гіпербо-лоїд); $-5\le z\le 5$
12	$16x^2-2y^2+z^2-32=0$ (Однопорожнинний гіпербо-лоїд); $-4\le y\le 4$	27	$6x^2+y^2+4z^2-36=0$ (Еліпсоїд); $z\ge 0$
13	$4x^2-8y^2+z^2+16=0$ (Двопорожнинний гіпербо-лоїд); $-2\le y\le 2$	28	$9x^2-4y^2-4z=0$ (Гіперболічний параболоїд); $-2\le x\le 2$; $-3\le y\le 3$
14	$x^2+4y^2-2z=0$ (Еліптичний параболоїд); $0\le z\le 8$	29	$4x^2+y^2-2z^2-32=0$ (Однопорожнинний гіпербо-лоїд); $-4\le z\le 4$
15	$x^2-9z=0$ (Параболічний циліндр); $-4\le y\le 4$	30	$x^2+y^2+z^2=25$ (Сфера); $z\ge 0$

Завдання 2. Знайти область визначення D функції двох змінних $z=z(x,y)$. Зробити рисунок області D у прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$z=\arcsin(x-y)-\ln x$	16	$z=\ln(4-x^2-y^2)+\sqrt{x}$
2	$z=\sqrt{9-x^2-y^2}+$ $+\ln(x^2+y^2-4)$	17	$z=\ln(x^2-y^2)+$ $+\sqrt{2-x^2-y^2}$

3	$z=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$	18	$z=\dfrac{\ln x+\ln y}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$
4	$z=\ln(x^2+y^2-1)+$ $+\sqrt{x-2}$	19	$z=\dfrac{\sqrt{y-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{-y+x+2}}$
5	$z=\sqrt{x-2y}\Big/\sqrt{y^2-x}$	20	$z=\arcsin(x/y)+\ln y$
6	$z=\dfrac{\ln(y^2-x)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$	21	$z=\sqrt{x^2+y^2-1}+$ $+\ln(9-x^2-y^2)$
7	$z=\ln y+\sqrt{x^2-y^2}$	22	$z=\sqrt{x}\cdot\ln(y^2-x^2).$
8	$z=\dfrac{\sqrt{1+x-y^2}}{\sqrt{1-x-y^2}}$	23	$z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-1}{4-x^2-y^2}}$
9	$z=\ln y+\sqrt{1-x^2-y^2}$	24	$z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$
10	$z=\arccos\left(x/(x+y)\right)+$ $+\ln(x+y)$	25	$z=\sqrt{16-x^2-y^2}-$ $-\ln(y-x^2)$
11	$z=\sqrt{1-(x+y^2)^2}.$	26	$z=\arcsin(x^2+y^2-1)$
12	$z=\arcsin\left(x/y^2\right)+\ln y$	27	$z=\arcsin(x/2)+\sqrt{xy}$
13	$z=\arcsin(x+y)-\ln y$	28	$z=\sqrt{1-(x^2+y)}+\ln y$
14	$z=\dfrac{\ln(9-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$	29	$z=\dfrac{\sqrt{16-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$
15	$z=\dfrac{\ln(x-y)}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$	30	$z=\dfrac{\ln(4-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2-y^2-1}}$

Завдання 3. Перевірити, що дана функція $u=u(x,y)$ задовольняє вказаній умові. Переконатися, що $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$u = y\ln(x^2 - y^2)$; $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}$	16	$u = \arcsin\left(x/(x+y)\right)$; $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$
2	$u = x^y$; $\frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$	17	$u = e^{x/y}\ln y$; $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{\ln y}$
3	$u = x\ arctg\,(y/x)$; $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$	18	$u = (x^2 + y^2)\big/(x - y)$; $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2(x+y)}{x-y}$
4	$u = \sqrt{x}\sin(y/x)$; $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{2}$	19	$u = (x^2 + y^2)\,tg\,(x/y)$; $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$
5	$u = xy + xe^{y/x}$; $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = xy + u$	20	$u = (2x + 3y)\big/(x^2 + y^2)$; $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$
6	$u = \sqrt{2xy + y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{u}$	21	$u = e^{x/y}$; $y\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\ u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
7	$u = e^{-x-3y}\sin(x + 3y)$; $9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	22	$u = x\ln(y/x)$; $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$
8	$u = \ln(x/y) + x^3 - y^3$; $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3u - 3\ln\frac{x}{y}$	23	$u = y\ln(x^2 - y^2)$; $y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

9	$u = y\sin(x^2 - y)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2u}{y} - 4x^2 u$	24	$u = y^2 \big/ (3x) + \arcsin(xy)$; $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$
10	$u = y \big/ (x^2 - y^2)$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = -u$	25	$u = y^2 \sin(x^2 - y^2)$; $y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xu$
11	$u = \cos y + (y - x)\sin y$; $(x - y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$	26	$u = xy\cos(x - y)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2u}{y} - u$
12	$u = arctg\ (2x - y)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$	27	$u = e^{x/y^2}$; $2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
13	$u = x \cdot \sin xy + \cos xy$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = x \sin xy$	28	$u = \arcsin\big((x - y)/(x + y)\big)$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
14	$u = x^y y^x$; $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u(x + y + \ln u)$	29	$u = xe^{-y/x}$; $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
15	$u = y \big/ (y^2 - 16x^2)$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	30	$u = 2e^{-x^2/y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{u}{2y}$

Завдання 4. Задано функцію $u = u(x, y, z)$ і дві точки M_0 та M_1. Для даної функції в указаній точці M_0 знайти:

1. Градієнт $grad\, u\big|_{M_0}$ і модуль градієнта $\left|grad\, u\right|\big|_{M_0}$.

2. $\partial u / \partial l\big|_{M_0}$ – похідну за напрямом вектора $\vec{l} = \overrightarrow{M_0 M_1}$.

3. Кут φ між градієнтом $grad\, u\big|_{M_0}$ і вектором $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$;

4. Загальне рівняння дотичної площини α_d у точці M_0 до відповідної поверхні рівня $S: u(x, y, z) = u\big|_{M_0}$.

5. Канонічні рівняння нормальної прямої l_n до відповідної поверхні рівня $S: u(x, y, z) = u\big|_{M_0}$ у точці M_0, а також параметричні рівняння цієї прямої.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$u = 4x^3y - y^2z + 3xyz^2$; $M_0(1;-1;2)$; $M_1(2;1;4)$	16	$u = xy^4 - 4y^2z + 3yz^2$; $M_0(-3;-1;2)$; $M_1(3;1;5)$
2	$u = x^3z - xy^2 - 2xyz$; $M_0(-1;3;-2)$; $M_1(5;5;-5)$	17	$u = 2x^3 - 4xy^2 - 3xyz$; $M_0(1;3;-5)$; $M_1(0;5;-3)$
3	$u = \frac{x^2}{y} - \frac{2y}{z^2} - \frac{x}{z}$; $M_0(2;2;2)$; $M_1(3;0;4)$	18	$u = \frac{9x}{y} + \frac{2y}{z^2} - \frac{x^2}{z}$; $M_0(-1;3;2)$; $M_1(0;1;4)$
4	$u = ze^{x^3 - 4xyz}$; $M_0(2;-1;-1)$; $M_1(5;-7;1)$	19	$u = ye^{x^2 - yz}$; $M_0(2;2;2)$; $M_1(7;-8;12)$
5	$u = 2x^3y - xy^2z + 20z$; $M_0(1;5;0)$; $M_1(5;1;2)$	20	$u = x^4y + 2xy^2z - 10xz$; $M_0(1;-3;1)$; $M_1(3;-1;2)$
6	$u = \sqrt{xy^2 + 2xyz + z^2}$; $M_0(1;-3;-1)$; $M_1(-1;-4;1)$	21	$u = 2x^3y - xy^2 - z^2 - 3xyz$; $M_0(1;-1;2)$; $M_1(5;-1;5)$
7	$u = y\sin(4xy + z^2)$; $M_0(1;-1;2)$; $M_1(5;-1;5)$	22	$u = z\sin(xy^2z - 3z)$; $M_0(3;1;-1)$; $M_1(6;-3;11)$
8	$u = \ln(x^2z + y^3 - 4yz^2)$; $M_0(-1;2;1)$; $M_1(-3;1;-1)$	23	$u = \ln\left(x^2 - y^3 - xyz^2 + 1\right)$; $M_0(-2;2;1)$; $M_1(-5;8;7)$

9	$u=\sqrt{y^2z+2xz+z^4}$; $M_0(2;\,2;\,1)$; $M_1(5;-4;\,7)$	24	$u=\sqrt{x^2+y^4-2xyz^2}$; $M_0(1;-1;\,1)$; $M_1(1;\,2;\,5)$
10	$u=xy^2z-2xz^3+z^4$; $M_0(-1;\,2;\,1)$; $M_1(-3;\,1;\,3)$	25	$u=x\sin(4xy+z^2-1)$; $M_0(1;-2;\,3)$; $M_1(1;\,4;-5)$
11	$u=2y^2-xyz^3-z^4$; $M_0(3;\,1;-1)$; $M_1(6;-3;\,11)$	26	$u=y^2-2xz^3+yz^2$; $M_0(5;\,3;\,1)$; $M_1(8;-1;\,13)$
12	$u=z\sqrt{y^2-xyz+x^3}$; $M_0(1;-3;-2)$; $M_1(3;\,1;\,2)$	27	$u=xe^{x-y-z^2}$; $M_0(1;-3;-2)$; $M_1(7;-1;1)$
13	$u=\ln(x^3-3z-xyz^2)$; $M_0(2;\,2;\,1)$; $M_1(5;-4;\,7)$	28	$u=\ln(x^4-2xz+xyz^2)$; $M_0(1;-1;-2)$; $M_1(7;\,2;\,0)$
14	$u=ye^{3x-y-z^2}$; $M_0(1;-1;-2)$; $M_1(4;\,3;-2)$	29	$u=y\ln(x-2y^3+yz^2)$; $M_0(3;-1;-2)$; $M_1(4;\,1;\,0)$
15	$u=z\ln(x+3y^3-yz^2)$; $M_0(0;-1;-2)$; $M_1(3;\,5;\,0)$	30	$u=x\sin(x^2+y^3)+e^{2x+z}$; $M_0(1;-1;-2)$; $M_1(5;-1;\,1)$

Завдання 5. Дослідити на екстремум функцію $z=z(x,y)$.

№ в-та	$z=z(x,\,y)$
1	а) $z=x^2+xy+y^2-6x-9y+3$; б) $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+2$
2	а) $z=2+15x-2x^2-xy-2y^2$; б) $z=2x^3+2y^3-6xy+9$
3	а) $z=2x^2+y^2-xy-20x-30y-2$; б) $z=2x^3+4x^2+y^2+2xy-1$
4	а) $z=x^2+y^2-xy+x+y-5$; б) $z=2-x^4-y^4+2x^2-4xy+2y^2$

5	а) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y - 6$; б) $z = y^3 - 3ye^{-x^2}$
6	а) $z = 5 + 6x - x^2 - xy - y^2$; б) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy - 3$
7	а) $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 4$; б) $z = x^2 + 2y^3 + 4y^2 - 2xy - 4$
8	а) $z = 4x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 10y - 1$; б) $z = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x - 2$
9	а) $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2 - 3$; б) $z = y^3 + 3x^2 y - 30y - 18x + 2$
10	а) $z = 2x - y - x^2 + xy - y^2 + 3$; б) $z = (5 - 2y + x)e^{y^2 - x}$
11	а) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 4$; б) $z = x^3 + y^3 - 3xy - 5$
12	а) $z = 2x^2 - xy + y^2 - 4x - 6y + 5$; б) $z = e^{-xy/2}(x + y)$
13	а) $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1$; б) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 2$
14	а) $z = 2x^2 + xy - y^2 - 7x + 5y - 2$; б) $z = (25 - 5x - 7y)e^{-x^2 - xy - y^2}$
15	а) $z = x^2 - 3xy - y^2 - 2x + 6y - 1$; б) $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 3$
16	а) $z = 2x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x - 16y + 1$; б) $z = (5 - 2x + y)e^{x^2 - y}$

17	а) $z=6xy-2x^2-y^2-14x+2$; б) $z=(2x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$
18	а) $z=2x^2-y^2+3xy-2x+7y+2$; б) $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2-5$
19	а) $z=10xy-3x^2-2y^2-26x+18y-3$; б) $z=3x^2-x^3+3y^2+6y-1$
20	а) $z=3x^2+2y^2-2xy+18x+8y-2$; б) $z=x^3-3xe^{-y^2}$
21	а) $z=3x^2+xy-6y^2-6x-y+6$; б) $z=(8x^2-6xy+3y^2)e^{2x+3y}$
22	а) $z=x^2-3xy+2y^2-4x+6y-3$; б) $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2+4$
23	а) $z=4x^2-2xy+y^2-2x-4y+4$; б) $z=(2x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2}$
24	а) $z=x^2+2xy+2y^2-2x-4y+2$; б) $z=3x^2y+y^3-12x-15y-5$
25	а) $z=8x^2-xy+2y^2-16x+y-5$; б) $z=(7x+5y-25)e^{-x^2-xy-y^2}$
26	а) $z=5-3x^2+5y^2-8xy+4x+26y$; б) $z=(x-1)\Big/\sqrt{1+x^2+y^2}$
27	а) $z=2x^2-3y^2-2xy+8x+10y-4$; б) $z=(x^2+2y^2)e^{-x^2-y^2}$
28	а) $z=5x^2-3y^2+2xy-18x-10y-3$; б) $z=x^4+y^4-2(x-y)^2-4$

29	а) $z=2-7x^2-5y^2+2xy-34x+34y$; б) $z=x^2y-2y^2+x^2+5y$
30	а) $z=2x^2-3y^2+2xy-10x+16y-1$; б) $z=x^3+y^2+12xy-2$

Завдання 6. Знайти найменше та найбільше значення заданої функції $z=z(x,y)$ в указаній замкненій області D. Зробити рисунок області D у прямокутній системі координат Oxy.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$z=x^2+3y^2+x-y+3$; $D: x=1,\ y=1,\ x+y=1$	16	$z=x^2-2xy-4$; $D: y=8,\ y=2x^2$
2	$z=x^2+y^2-xy-x-y$; $D: x=0,\ y=0,\ x+y=3$	17	$z=x^2+2y^2-2x+4$; $D: x=0,\ y=0,\ x+y=3$
3	$z=x^2+y^2-2xy-x+y$; $D: y=0,\ y=4-x^2$	18	$z=3x^2+3y^2-2x-2y+3$; $D: x=0,\ y=0,\ x+y=1$
4	$z=y^2-4xy-2$; $D: x=0,\ x=1-y^2$	19	$z=x^2+xy-3$; $D: y=4x^2-4,\ y=0$
5	$z=5-2x^2-y^2-xy$; $D: x=1, y=0, y=x$	20	$z=x^2+2xy-y^2-4x+2$; $D: x=3, y=0, x-y+1=0$
6	$z=x^2-2xy-y^2+4x+2$; $D: x=-3, y=0, x+y=-1$	21	$z=4x^2+4xy-y^2-8x-5$; $D: x=0,\ y=2,\ y=2x$
7	$z=x^2+4xy-2y^2-6x+1$; $D: x=0, y=0, x+y=3$	22	$z=x^2-6xy+6y-3$; $D: x=0, y=0, x-y=2$
8	$z=x^2+3y^2+x-y+6$; $D: x=1, y=-1, x+y=1$	23	$z=5x^2+y^2-3xy+3$; $D: x=-1, y=-1, x+y=1$
9	$z=x^2-2xy-y^2+4x-3$; $D: x=3, y=0, x+y=-1$	24	$z=x^2-2y^2+4xy-6x-5$; $D: x=0, y=0, x+y=3$

10	$z=-x^2+2xy+8$; $D:\ y=0,\ y=4-x^2$	25	$z=x^2-y^2+2xy+4x-3$; $D:\ x=0, y=0,\ x+y=-2$
11	$z=4x^2+4xy-y^2-4x+1$; $D:\ y=2x,\ y=2,\ \ x=0$	26	$z=-x^2+4xy+2y^2-6x$; $D:\ x=0,\ x=9-y^2$
12	$z=x^2+2xy-4x+8y-2$; $D:\ y=x-1,\ y=0, x=-3$	27	$z=3x^2+3y^2-2x-2y+1$; $D:\ x+y=1,\ y=0,\ x=0$
13	$z=x^2+2xy-y^2-4x-1$; $D: y=x+1, x=3,\ y=0$	28	$z=x^2+4xy-y^2-6x-2y$; $D:\ x=0,\ y=0,\ x+y=4$
14	$z=x^2-4xy-y^2-6x-2y$; $D:\ x=0,\ y=0,\ x-y=4$	29	$z=-x^2+y^2-2xy-3y+2$; $D:\ y=0,\ y=4-x^2$
15	$z=2xy-4x-2y-1$; $D:\ x=0,\ y=0,\ x+y=6$	30	$z=x^2+y^2-2x-2y+6$; $D:\ x=0,\ y=0,\ x+y=1$

Завдання 7. Знайти екстремум функції $z=z(x,y)$ за умови $\varphi(x,y)=0$.

№ в-та	$z=z(x,y)$; $\varphi(x,y)=0$	№ в-та	$z=z(x,y)$; $\varphi(x,y)=0$
1	$z=x^2+xy+y^2$; $x+2y-1=0$	16	$z=2x+y$; $x^2+y^2-5=0$
2	$z=2x+y$; $x^2+y^2-1=0$	17	$z=3-4x-8y$; $x^2-8y^2-8=0$
3	$z=x^2+y^2$; $2x+3y-6=0$	18	$z=x^2+y^2$; $2x+2y-3=0$
4	$z=x+y$; $x^2+y^2-5=0$	19	$z=xy^2$; $x+2y-1=0$
5	$z=x^2-2y^2$; $2x+3y-6=0$	20	$z=x-2y$; $x^2+y^2-3=0$
6	$z=xy$; $x+y-1=0$	21	$z=xy^2$; $x-y-1=0$

7	$z=x^2-y^2$; $2x-y-3=0$	22	$z=2x^2+y^2$; $x+y+2=0$
8	$z=xy$; $2x+y-1=0$	23	$z=2x+y$; $x+y^2+2=0$
9	$z=x^2-y^2$; $x+2y-1=0$	24	$z=x^2+y^2$; $3x+2y-6=0$
10	$z=2-3x-4y$; $x^2+y^2-25=0$	25	$z=x+2y$; $x^2+y^2-4=0$
11	$z=x^2+xy+y^2$; $x^2+y^2-1=0$	26	$z=2x^2+12xy+y^2$; $x^2+4y^2-25=0$
12	$z=x^2+y^2$; $3x+y-1=0$	27	$z=x+2y$; $x^2+xy+y^2-1=0$
13	$z=x^2+y^2$; $2x-3y-6=0$	28	$z=x^2-y^2$; $2x-y-6=0$
14	$z=2x+y$; $x^2-y-4=0$	29	$z=x^2+y^2$; $x+y-1=0$
15	$z=x^2+y^2$; $3x-2y-6=0$	30	$z=x^2-y^2$; $x-2y-1=0$

Завдання 8. Для подвійного інтеграла $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ вказано підінтегральну функцію $f(x,y)$ і область інтегрування D, яка задана рівняннями ліній, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

1. Зобразити область інтегрування D у прямокутній системі координат Oxy.

2. Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Oy, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до двократного повторного інтеграла з зовнішнім інтегруванням за змінною x і внутрішнім інтегруванням за змінною y.

3. Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Ox, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповід-

ний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до двократного повторного інтеграла з зовнішнім інтегруванням за змінною y і внутрішнім інтегруванням за змінною x.

№ в-та	Завдання
1	$f(x,y)=x^3+6xy^2$; D: $x^2/2-y=0$; $x-y=0$
2	$f(x,y)=xy-x^3y$; $D: y-3=-x^2$; $2x-y=0$
3	$f(x,y)=6xy$; D: $\sqrt{2-x^2}+y=0$; $x^2+y=0$
4	$f(x,y)=6xy^3$; $D: y-x^2+2=0$, $y=x$
5	$f(x,y)=2y-x^2y^3$; D: $4x-y^2=0$; $x-9=0$
6	$f(x,y)=2x^3+3y^2$; D: $y=x^2$; $x+y-2=0$
7	$f(x,y)=2y/x^3$; $D: xy=1$, $y=x$, $x=3$
8	$f(x,y)=2x-3y$; D: $x^2+y^2\le 9$, $y\ge 2x/3+3$
9	$f(x,y)=6x^3y-4xy^3$; D: $y-3=-x^2$; $y+5=x^2$
10	$f(x,y)=3x^2+xy^2$; D: $y=1$, $y-2x=0$, $y+x=6$
11	$f(x,y)=2x^3+xy^2$; D: $x^2-y=0$; $2x-y=0$
12	$f(x,y)=y\cos xy$; D: $xy=\pi$; $y=0$; $x=\pi$; $x=2\pi$
13	$f(x,y)=y(1-x^2)$; D: $y=x^3$, $y-4x=0$ $(x\ge 0)$
14	$f(x,y)=6xy^3$; $D: y=x^2-2$, $x-y=0$
15	$f(x,y)=3x^3y-2xy^3$; $D: y=x$, $y+x^2-2=0$
16	$f(x,y)=(x-2y)e^{-x}$; D: $x=0$; $y=2$; $x-y=0$
17	$f(x,y)=3x^2-4xy$; $D: y^2+x-3=0$; $y^2=x+1$
18	$f(x,y)=2x+3y$; $D: y=x^3$; $y=-2x^3$; $x=1$
19	$f(x,y)=-2x^3y$; D: $x^2+y^2=4$
20	$f(x,y)=4x^3-5xy^4$; $D: y=2$, $y^2=x$, $x=0$
21	$f(x,y)=6x^2-y$; $D: y^2=x+4$, $y=x+2$
22	$f(x,y)=x^3y-3xy^2$; $D: y+x=0$; $y-2=-x^2$

23	$f(x,y)=6y^2/x^3$; D: $y=x,\ xy=4,\ x=4$
24	$f(x,y)=xy-y^2$; $D: y=0, 3x+y=6, 3x+2y=12$
25	$f(x,y)=2y/x^2$; $D: y=1,\ xy=16,\ y=x^3$
26	$f(x,y)=y\sin xy$; D: $xy=\pi;\ y=0;\ x=\pi;\ x=2\pi$
27	$f(x,y)=y\ln x$; $D: xy=1,\ y=\sqrt{x},\ x=4$
28	$f(x,y)=6x-yx^3$; D: $2x-y-1=0;\ x^2+y-2=0$
29	$f(x,y)=xy^2-x^3$; $D: y=x^3,\ y=8,\ x=0$
30	$f(x,y)=y^2/x^2$; D: $xy=9,\ x-y=0,\ x=9$

Завдання 9. Для потрійного інтеграла $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ вказано підінтегральну функцію $f(x,y,z)$ і область інтегрування V, яка задана рівняннями поверхонь, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

1. Зобразити область інтегрування V у прямокутній системі координат $Oxyz$.

2. Спроектувати область інтегрування V на координатну площину Oxy і подати її як правильну в напрямі координатної осі Oz. Зробити відповідний рисунок правильної просторової області V та її проекції D_{xy} в просторовій системі координат $Oxyz$.

3. Подати плоску область D_{xy} як правильну в напрямі однієї з координатних осей Oy чи Ox і зробити відповідний рисунок у плоскій системі координат Oxy.

4. Обчислити даний потрійний інтеграл переходом до трикратного повторного інтеграла з самим внутрішнім інтегруванням за змінною z.

№ в-та	Завдання
1	$f(x,y,z)=2y^2-2z$; $V: x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=x^2+y^2$
2	$f(x,y,z)=3y+2xz$; V: $x+y=1,\ z=x^2,\ y=0,\ z=0$

3	$f(x,y,z)=x^2+y^2$; $\quad V:\ z=y^2-x^2,\ z=0,\ y=1$
4	$f(x,y,z)=2yz$; $\quad V:\ x^2+y^2=9,\ z=x^2,\ z=0$
5	$f(x,y,z)=3y^2-2z$; $\quad V:\ x^2+y^2=4z,\ z=4$
6	$f(x,y,z)=xy^2z^3$; $\quad V: z=2xy,\ y=x,\ x=1,\ z=0$
7	$f(x,y,z)=4xz$; $\quad V:\ z=\sqrt{3-x^2-y^2},\ 2z=x^2+y^2, y\ge 0$
8	$f(x,y,z)=y^2e^{xy}$; $\quad V: x=0,\ y=3,\ y=3x,\ z=0,\ z=1$
9	$f(x,y,z)=3xz^2$; $\quad V:\ y=4-x^2,\ z=y,\ z\ge 0$
10	$f(x,y,z)=2xyz$; $\quad V:\ x^2+y^2=1,\ y\ge 0,\ z=0,\ z=y^2$
11	$f(x,y,z)=2xy^2z$; $\quad V:\ x^2+y^2=1,\ y\ge 0,\ z=0,\ z=\sqrt{y}$
12	$f(x,y,z)=2y^2z$; $\quad V:\ x=1,\ y^2=x,\ z=1-x,\ z=2-2x$
13	$f(x,y,z)=3xyz^2$; $\quad V:\ x=0,\ 2x+y-4=0,\ z=y^2,\ z\ge 0$
14	$f(x,y,z)=xy$; $\quad V:\ x^2+y^2=1, z=0,\ z=8-x-2y$
15	$f(x,y,z)=2x^2yz$; $\quad V:\ y^2=4x,\ x=1,\ z^2=4x, z\ge 0$
16	$f(x,y,z)=3x^2-4z$; $V:\ x^2+y^2=1,\ x-2y+z=4,\ z=0$
17	$f(x,y,z)=xyz$; $\quad V:\ y=x^2,\ x=y^2,\ z=0,\ z=2x-3y$
18	$f(x,y,z)=2z$; $\quad V:\ z=\sqrt{2-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2}, y\ge 0$
19	$f(x,y,z)=y-2xz$; $\quad V:\ x=0,\ y=1,\ y=x,\ z=y^2,\ z=0$
20	$f(x,y,z)=y^2e^{-xy}$; $\quad V: x=0,\ y=-2,\ y=2x,\ z=0,\ z=1$
21	$f(x,y,z)=3xyz^2$; $\quad V:\ y^2=4-x,\ x-z=0,\ z\ge 0$
22	$f(x,y,z)=2yz$; $\quad V:\ x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2\le 1,\ z\ge 0$
23	$f(x,y,z)=6xyz$; $\quad V:\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=2-x^2-y^2,\ x\ge 0$
24	$f(x,y,z)=2xyz$; $\quad V:\ y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ z=0,\ z+x=4$
25	$f(x,y,z)=6xyz$; $\quad V:\ x^2+y^2=4,\ x\ge 0,\ z=0,\ z=y$
26	$f(x,y,z)=x^2+3y^2-z$; $V: x=1, y=0, y=x, z=0, z=x^2+3y^2$
27	$f(x,y,z)=3x^2-2z$; $\quad V:\ y=1, y=x^2, z=0, z=3x^2+2y^2$

28	$f(x,y,z)=4-x^2-y^2-6z$; $V:\ x^2+y^2+z=4.\ z=0$
29	$f(x,y,z)=2x^2+y^2-z$; $V:\ y=x^2, y=1, z=0, z=2x^2+y^2$
30	$f(x,y,z)=x^2+y^2-4z$; $V:\ x^2+y^2=4, z=0,\ z=x^2+y^2$

Завдання 10. Для матеріальної пластини вказаної форми D із заданою поверхневою густиною $\mu=\mu(x,y)$ за допомогою подвійного інтеграла, переходячи до полярних координат, знайти:

1. Площу S, масу m і середню густину $\mu_{сер}$ пластини.

2. Статичні моменти M_x і M_y відносно координатних осей Ox і Oy та центр маси $C(x_c, y_c)$ пластини.

3. Момент інерції I_0 пластини відносно початку координат O.

№ в-та	Завдання
1	$D:\ x=1+\sqrt{1-y^2}$; $y=x$; $x=2$; $\mu=y/x^2$
2	$D:\ 1\le x^2+y^2\le 4$; $x\ge 0$; $y\ge 0$; $\mu=xy^2\big/(x^2+y^2)$
3	$D:\ y=\sqrt{2x-x^2}$; $y=0$; $\mu=xy\big/(x^2+y^2)$
4	$D:\ \rho=1+\cos\varphi$; $x\ge 0$; $y\ge 0$; $\mu=xy\big/(x^2+y^2)$
5	$D:\ y=\sqrt{9-x^2}$; $y=x$; $x=3$; $\mu=y/x^2$
6	$D:\ x=\sqrt{4-y^2}$; $y=x$; $y=2$; $\mu=x/y^2$
7	$D:\ y=1+\sqrt{1-x^2}$; $y=x$; $y=-x$; $\mu=y\big/\sqrt{x^2+y^2}$
8	$D:\ 4\le x^2+y^2\le 16$; $x\ge 0$; $y\ge 0$; $\mu=x\sqrt{x^2+y^2}$
9	$D:\ \dfrac{\pi^2}{4}\le x^2+y^2\le\pi^2$; $y\ge 0$; $x\ge 0$; $\mu=-\dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$
10	$D:\ y=\sqrt{1-x^2}$; $y=x$; $x=0$; $\mu=x\big/\sqrt{x^2+y^2}$

11	$D:\ x^2+y^2\le 1;\ x\ge 0;\ y\ge x;$ $\mu = y\sqrt{x^2+y^2}$
12	$D:\ e^2\le x^2+y^2\le e^4;\ x\ge 0;\ y\ge 0;$ $\mu = x\ln(x^2+y^2)$
13	$D:\ x^2+y^2-4y=0;\ y\ge 2;$ $\mu = x^2/y^3$
14	$D:\ y=\sqrt{4x-x^2};\ y=0;$ $\mu = y\Big/\sqrt{x^2+y^2}$
15	$D:\ x^2+y^2\le 4;\ x\ge 0;\ y\ge x\sqrt{3};$ $\mu = x(x^2+y^2)$
16	$D:\ 4\le x^2+y^2\le 9;\ y\ge x;\ x\ge 0;$ $\mu = x^2y\sqrt{x^2+y^2}$
17	$D:\ (x^2+y^2)^2=2x^3;\ x\ge 0;\ y\ge 0;$ $\mu = x\Big/\sqrt{x^2+y^2}$
18	$D:\ y=\sqrt{4-x^2};\ y=x;\ y=2;$ $\mu = y\big/(x^2+y^2)$
19	$D:\ \rho=2+\sin\varphi;\ x\ge 0;\ y\ge 0;$ $\mu = y\Big/\sqrt{x^2+y^2}$
20	$D:\ \rho=2+\cos\varphi;\ x\ge 0;\ y\ge 0;$ $\mu = x\Big/\sqrt{x^2+y^2}$
21	$D:\ \rho=6\sin 2\varphi;\ x\ge 0;\ y\ge x;$ $\mu = xy\big/(x^2+y^2)$
22	$D:\ x=\sqrt{6y-y^2};\ y=x;\ y=6;$ $\mu = x/y^2$
23	$D:\ (x^2+y^2)^2=y^3;\ x\ge 0;\ y\ge 0;$ $\mu = xy\big/(x^2+y^2)$
24	$D:\ y=\sqrt{4-x^2};\ y\ge x\big/\sqrt{3};\ y\le x;$ $\mu = y\Big/\sqrt{x^2+y^2}$
25	$D:\ 1\le x^2+y^2\le 9;\ x\ge 0;\ y\ge 0;$ $\mu = y\sqrt{x^2+y^2}$
26	$D:\ \rho=4\cos 2\varphi;\ x\ge 0;\ y\ge 0;$ $\mu = xy\big/(x^2+y^2)$
27	$D:\ e\le x^2+y^2\le e^2;\ x\ge 0;\ y\ge 0;$ $\mu = y\ln(x^2+y^2)$
28	$D:\ x=\sqrt{2y-y^2};\ x=0;$ $\mu = x\Big/\sqrt{x^2+y^2}$
29	$D:\ y=\sqrt{6x-x^2};\ y=0;$ $\mu = y\Big/\sqrt{x^2+y^2}$
30	$D:\dfrac{\pi^2}{9}\le x^2+y^2\le\dfrac{\pi^2}{4};\ y\ge 0;\ x\ge 0;$ $\mu = \dfrac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Змістовий модуль 3.

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ. КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

3.1. Криволінійний інтеграл за довжиною

3.1.1. Задача про масу дуги. Криволінійний інтеграл за довжиною (першого роду)

Нехай у деякій області D координатної площини Oxy задано неперервне плоске скалярне поле $\mu = f(x, y)$. Припустимо, що в цій області D лежить кусково-гладка матеріальна крива L. Нехай неперервна функція $\mu = f(x, y)$ визначає лінійну густину розподілу маси вздовж кривої L. Потрібно обчислити масу дуги L_{AB} (рис. 90).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних частин Δl_i, $i = \overline{1, n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Розглянемо одну з елементарних дуг Δl_i. Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що її густину можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \in \Delta l_i$. Тоді $\Delta m_i \approx f(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \Delta l_i$ – маса елементарної дуги Δl_i. А маса всієї дуги L_{AB}:

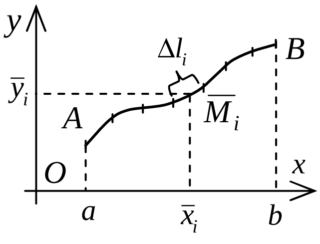

Рис. 90

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \Delta l_i .$$

Одержана сума називається ***інтегральною*** для функції $f(x, y)$ по довжині дуги L_{AB}.

Очевидно, що $m = \lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \Delta l_i$.

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i$ *при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається* ***криволінійним інтегралом за довжиною*** (***криволінійним інтегралом першого роду***) *і позначається*:

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i},$$

де dl – ***диференціал*** (***елемент***) ***довжини дуги***.

Таким чином, $\boxed{m = \int_{L_{AB}} \mu\, dl = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl}$ (фізичний зміст криволінійного інтеграла за довжиною).

Якщо покласти $f(x,y) \equiv 1$, то криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює довжині l дуги L_{AB}: $\boxed{l = \int_{L_{AB}} dl}$ (геометричний зміст криволінійного інтеграла за довжиною).

Зауваження 1. При $f(x,y) \geq 0$ криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює площі S_c частини вертикальної циліндричної поверхні (рис. 91) з напрямною L_{AB} і паралельними осі Oz твірними, що розміщена між координатною площиною $z = 0$ і поверхнею $z = f(x,y)$:

$$\boxed{S_c = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl}.$$

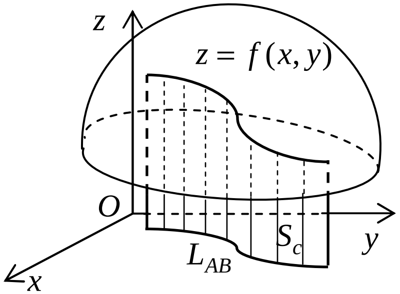

Рис. 91

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в деякій області D, що містить в собі кусково-гладку криву L, то існує криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ (достатні умови існування криволінійного інтеграла за довжиною).

Зауваження 3. Криволінійний інтеграл за довжиною не залежить від напряму руху по дузі: $\boxed{\int_{L_{BA}} f(x,y)\,dl = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl}$. Інші *властивості цього інтеграла аналогічні властивостям звичайного одновимірного інтеграла*.

Зауваження 4. Поняття криволінійного інтеграла за довжиною поширюється на випадок дуги L_{AB} просторової лінії L, розміщеної в просторовому скалярному полі $u = f(x, y, z)$:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} f(x, y, z)\, dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \Delta l_i}.$$

3.1.2. Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною

Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Випадок 1. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$, причому коли параметр t змінюється на відрізку $[\alpha;\beta]$, біжуча точка $(x(t); y(t))$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Диференціал дуги такої кривої записується у вигляді $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної і отримуємо:

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\, dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt}.$$

Приклад 1. Обчислити $\int_L e^y\, tg\, x\, dl$, якщо

$$L: \ x = arctg\ t; \quad y = \ln(1 + t^2); \quad 0 \le t \le \sqrt{2}.$$

□ Обчислимо:

$$x' = \frac{1}{1+t^2}; \ y' = \frac{2t}{1+t^2}; \ dl = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} dt = \frac{\sqrt{1+4t^2}}{1+t^2} dt.$$

Підставимо в інтеграл:

$$\int\limits_L e^y\, tg\, x\, dl = \int\limits_0^{\sqrt{2}} e^{\ln(1+t^2)}\, tg\,(arctg\, t) \frac{\sqrt{1+4t^2}}{1+t^2} dt = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4t^2}\, t\, dt =$$

$$= \left| u = 1 + 4t^2;\ du = 8t\,dt;\ u_1 = 1;\ u_2 = 9 \right| = (1/8) \int_1^9 u^{1/2} du =$$

$$= (1/12) u^{3/2} \Big|_1^9 = 13/6 . \ \blacksquare$$

<u>Випадок 2</u>. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x),\ a \le x \le b$. Тоді $dl = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx$. Відповідно

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\, dl = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx}.$$

<u>Приклад 2</u>. Обчислити $I = \int\limits_{AB} \dfrac{xy\, dl}{24 - 5x^2 - 8y^2}$, якщо AB є чвертю еліпса $x^2/4 + y^2 = 1 \quad (x \ge 0, \quad y \ge 0)$.

□ $AB: y = (1/2)\sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \le x \le 2; \quad y' = -(1/2)\, x \Big/ \sqrt{4 - x^2}$;

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = (1/2)\left(\sqrt{16 - 3x^2} \Big/ \sqrt{4 - x^2}\right) dx;$$

$$I = \int\limits_0^2 \frac{x(1/2)\sqrt{4 - x^2}}{24 - 5x^2 - 8 \cdot (1/4)(4 - x^2)} \cdot \frac{\sqrt{16 - 3x^2}}{2\sqrt{4 - x^2}} dx = \frac{1}{4} \int\limits_0^2 x\, dx =$$

$$= (1/8)\ x^2 \Big|_0^2 = 1/2 . \ \blacksquare$$

<u>Випадок 3</u>. Нехай дуга L_{AB} задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta$. Тоді $dl = \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2} d\varphi$. Відповідно

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x, y)\, dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2} d\varphi}.$$

<u>Приклад 3</u>. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_L \dfrac{y\, dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ за довжиною

дуги равлика Паскаля $L:\ \rho = 2+\cos\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/2$.

$\square$ $\rho' = -\sin\varphi;\ dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi = \sqrt{(2+\cos\varphi)^2 + (-\sin\varphi)^2}\,d\varphi =$

$$= \sqrt{5+4\cos\varphi}\,d\varphi; \quad f(x,y) = y\Big/\sqrt{x^2+y^2} = \rho\sin\varphi/\rho = \sin\varphi;$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\sqrt{5+4\cos\varphi}\,d\varphi = \Big| u = 5+4\cos\varphi;\ du = -4\sin\varphi\,d\varphi;$$

$$u_1 = 9;\ u_2 = 5 \Big| = -(1/4)\int_9^5 u^{1/2}\,du = -(1/6)\cdot u^{3/2}\Big|_9^5 =$$

$$= (1/6)\left(27-5\sqrt{5}\right). \quad \blacksquare$$

<u>Випадок 4</u>. Якщо просторова дуга L_{AB} задана параметричними рівняннями $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то відповідний криволінійний інтеграл за довжиною обчислюється за формулою

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt}.$$

<u>Приклад 4</u>. Обчислити інтеграл $I = \int_L (x^2 - y^2)\,z^{-3}\,dl$ за довжиною дуги гвинтової лінії $L:\ x = 2e^t\cos t;\ y = 2e^t\sin t;\ z = e^t$, $0 \le t \le \pi/4$.

$\square$ $x' = 2(e^t\cos t - e^t\sin t);\ y' = 2(e^t\sin t + e^t\cos t);\ z' = e^t;$

$$dl = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt = 3e^t dt;$$

$$f(x,y,z) = \left((2e^t\cos t)^2 - (2e^t\sin t)^2\right)(e^t)^{-3} = 4e^{-t}\cos 2t;$$

$$I = 4\int_0^{\pi/4} 4e^{-t}\cos 2t\cdot 3e^t\,dt = 6\cdot\sin 2t\Big|_0^{\pi/4} = 6. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 5</u>. Обчислити криволінійний інтеграл за довжиною $I = \int_{AB} (2x+y)z^{-2}\,dl$, де AB – відрізок прямої між точками $A(3;-5;6)$ і $B(5;-8;12)$.

(Розв’язати самостійно). Відповідь: $I = (7/36)\ln 2$.

3.1.3. Застосування криволінійного інтеграла за довжиною

За допомогою криволінійного інтеграла за довжиною можна обчислити довжину дуги і площу циліндричної поверхні.

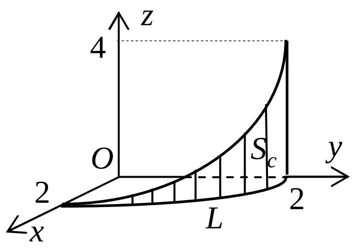

Рис. 92

Приклад 1. Обчислити площу S_c частини параболічного циліндра $y=\sqrt{4-2x}$, $0 \le x \le 2$, що розміщена між площиною $z=0$ і циліндром $z=y^3/2$ (рис. 92).

□ $L:\ y=\sqrt{4-2x},\quad 0\le x\le 2;$

$$y' = -1\big/\sqrt{4-2x};$$

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{4-2x}}\,dx;\ \ S_c=\int_L\frac{y^3}{2}\,dl=\frac{1}{2}\int_0^2\left(\sqrt{4-2x}\right)^3\times$$

$$\times\frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{4-2x}}\,dx=\int_0^2(2-x)\sqrt{5-2x}\ dx=\left|5-2x=u^2;\ x=(5-u^2)\big/2;\right.$$

$$dx=-u\,du;\ u=\sqrt{5-2x};\ u_1=\sqrt{5};\ u_2=1\left|=\int_{\sqrt{5}}^{1}\left(2-(5-u^2)/2\right)u\times\right.$$

$$\times(-u\,du)=(1/2)\int_{\sqrt{5}}^{1}(u^2-u^4)\,du=(1/2)\int_{\sqrt{5}}^{1}u^2du-(1/2)\times$$

$$\times\int_{\sqrt{5}}^{1}u^4du=(1/6)\cdot u^3\Big|_{\sqrt{5}}^{1}-(1/10)\cdot u^5\Big|_{\sqrt{5}}^{1}=\left(25\sqrt{5}+1\right)\big/15.\ \blacksquare$$

Маса плоскої матеріальної дуги L з лінійною густиною $\mu=\mu(x,y)$ визначається за формулою $\boxed{m=\int_L \mu(x,y)\,dl}$. Якщо густина стала $\mu_0=const$, то $m=\mu_0\int_L dl$.

Криволінійний інтеграл за довжиною можна застосувати для обчислення статичних моментів дуги L плоскої матеріальної кривої відносно осей Ox і Oy відповідно

$$\boxed{M_x=\int_L y\mu(x,y)\,dl};\quad \boxed{M_y=\int_L x\mu(x,y)\,dl},$$

а також моментів інерції відносно осей Ox і Oy відповідно

$$\boxed{I_x = \int_L y^2 \mu(x,y)\,dl}; \quad \boxed{I_y = \int_L x^2 \mu(x,y)\,dl},$$

чи відносно початку координат $\boxed{I_0 = \int_L (x^2 + y^2)\mu(x,y)\,dl}$.

Координати центра маси дуги L плоскої кривої

$$\boxed{x_c = M_y/m; \quad y_c = M_x/m}.$$

<u>Приклад 2</u>. Обчислити масу m, статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox і Oy, координати центра маси $C(x_c, y_c)$ і момент інерції I_x відносно осі Ox плоскої матеріальної дуги L з лінійною густиною $\mu = \mu(x,y)$:

а) $L:\ y = 2x^{3/2},\ 0 \le x \le 1; \quad \mu(x,y) = y/\sqrt{1+9x}$;

б) $L:\ x = 2\cos t;\ y = 2\sin t,\ 0 \le t \le \pi/2;\ \mu(x,y) = xy^2$.

□ а) $L:\ y = 2x^{3/2};\ \ y' = 3x^{1/2};\ \ dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+9x}\,dx$;

$$m = \int_L \mu(x,y)\,dl = \int_L \left(y/\sqrt{1+9x}\right)dl = \int_0^1 \left(2\,x^{3/2}/\sqrt{1+9x}\right)\times$$

$$\times\sqrt{1+9x}\,dx = 2\int_0^1 x^{3/2}\,dx = (4/5)\cdot x^{5/2}\Big|_0^1 = 4/5;$$

$$M_x = \int_L y\mu(x,y)\,dl = \int_L y\left(y/\sqrt{1+9x}\right)dl =$$

$$= \int_0^1 \left((2\,x^{3/2})^2/\sqrt{1+9x}\right)\sqrt{1+9x}\,dx = 4\int_0^1 x^3\,dx = x^4\Big|_0^1 = 4;$$

$$M_y = \int_L x\mu(x,y)\,dl = \int_L x\left(y/\sqrt{1+9x}\right)dl = \int_0^1 x\left(2x^{3/2}/\sqrt{1+9x}\right)\times$$

$$\times\sqrt{1+9x}\,dx = 2\int_0^1 x^{5/2}\,dx = (4/7)\cdot x^{7/2}\Big|_0^1 = 4/7;$$

$$x_c = M_y/m = 4/(4/5) = 5; \quad y_c = M_x/m = (4/7)/(4/5) = 5/7;$$

$$I_x = \int_L y^2\mu(x,y)\,dl = \int_L y^2\left(y/\sqrt{1+9x}\right)dl = \int_0^1 \left((2\,x^{3/2})^3 :\right.$$

$$\left.:\sqrt{1+9x}\right)\sqrt{1+9x}\,dx = 8\int_0^1 x^{9/2}\,dx = (16/11)\cdot x^{11/2}\Big|_0^1 = 16/11.$$

б) Розв’язати самостійно. ■

3.2. Векторне поле. Криволінійний інтеграл за координатами

3.2.1. Поняття векторного поля. Векторні лінії

Якщо кожній точці $M(x, y, z)$ деякої області D простору поставлений у відповідність вектор $\boxed{\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}}$, де $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ - скалярні функції, то говорять, що задано ***просторове векторне поле***.

У випадку плоскої області D і двовимірного вектора $\vec{F}(M)$, що лежить у площині цієї області, говорять про ***плоске векторне поле***. Зокрема, якщо область D лежить на координатній площині Oxy, то розглядається плоске векторне поле $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j}$, де $P = P(x, y)$ і $Q = Q(x, y)$.

Надалі вважатимемо, що координатні функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Геометричними характеристиками векторного поля є векторні (силові) лінії.

Векторною (силовою) лінією поля $\vec{F} = \vec{F}(M)$ називається крива $\vec{r} = \vec{r}(t)$, дотична до якої в кожній її точці співпадає з вектором $\vec{F} = \vec{F}(M)$, що визначає поле в цій точці.

Прикладами векторних ліній в електротехніці є лінії вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ чи лінії вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$.

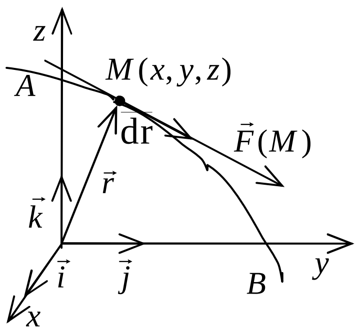

Рис. 93

З умови $d\vec{r} \parallel \vec{F}(M)$ (рис. 93) маємо <u>диференціальні рівняння векторних ліній</u>:

$$\boxed{\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}}.$$

<u>Приклад</u>. Постійний електричний струм I тече по нескінченно довгому провіднику, співпадаючому

з віссю Oz, в напрямі цієї осі (рис. 94). Вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}$, створюваного цим струмом, у довільній точці $M(x, y, z)$ дорівнює

$$\vec{H} = \left(I/(2\pi\rho^2)\right)\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right),$$

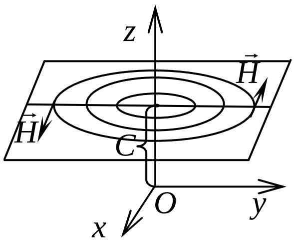

Рис. 94

де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ - відстань від точки M до осі Oz. Знайти векторні лінії магнітного поля $\vec{H}$.

□ Запишемо векторне поле у вигляді

$$\vec{H} = -\frac{Iy}{2\pi\rho^2}\vec{i} + \frac{Ix}{2\pi\rho^2}\vec{j} + 0\cdot\vec{k},$$

тобто $P = -\dfrac{Iy}{2\pi\rho^2}$, $Q = \dfrac{Ix}{2\pi\rho^2}$, $R = 0$.

Диференціальні рівняння векторних ліній після очевидних спрощень набувають вигляду:

$$\begin{cases} dx/(-y) = dy/x; \\ z = C_1 \ (C_1 = const) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x\,dx = -y\,dy; \\ z = C_1. \end{cases}$$

Після інтегрування одержуємо $\begin{cases} x^2 + y^2 = C_2^2 \quad (C_2 = const); \\ z = C_1 \end{cases}$

– двопараметрична сім'я кіл з центрами на осі Oz. ■

3.2.2. Дивергенція та ротор векторного поля

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Дивергенцією (***розбіжністю***) векторного поля $\vec{F}$ у точці $M(x, y, z)$ називається число

$$\boxed{div\vec{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}}.$$

Дивергенція є скалярною характеристикою векторного поля.

Якщо $div\vec{F}(M) > 0$, то точка M називається ***джерелом*** (***ви-***

током), а якщо $div\vec{F}(M) < 0$, то точка M називається ***стоком***.

Незамкнені векторні лінії починаються в джерелах і закінчуються в стоках.

Дивергенція характеризує потужність джерел і стоків. Кожному векторному полю $\vec{F}$ відповідає скалярне поле $div\vec{F}$ розподілу джерел та стоків поля $\vec{F}$.

Векторне поле $\vec{F}$ називається ***соленоїдальним*** (***трубчатим***), якщо в кожній точці його дивергенція дорівнює нулю: $\boxed{div\vec{F} = 0}$.

Соленоїдальне поле не має ані джерел, ані стоків. Його векторні лінії не можуть ні починатися, ні закінчуватися всередині поля. Вони або замкнуті, або мають кінці на межі поля, або мають нескінченні гілки (у випадку необмеженого поля).

Приклад 1. Знайти дивергенцію даного векторного поля в указаних точках:

$$\vec{F} = x^2z^3\vec{i} + 2yz^2\vec{j} + xy^4\vec{k}\,;\;\; M_1(1{,}0{,}-2)\,;\;\; M_2(-2{,}1{,}-1)\,.$$

□ $P = x^2z^3$; $Q = 2yz^2$; $R = xy^4$; $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 2xz^3$; $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 2z^2$; $\dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$;

$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2xz^3 + 2z^2\,;\;\; div\vec{F}(M_1) = -8 < 0\,,$$

M_1 - точка стоку; $div\vec{F}(M_2) = 6 > 0$, M_2 - точка витоку. ■

Приклад 2. Перевірити, що дане векторне поле є соленоїдальним: $\vec{F} = \left(y\sin(x^2 - y^2) - x^2\right)\vec{i} + x\sin(x^2 - y^2)\;\vec{j} + 2xz\,\vec{k}$.

□ $P = y\sin(x^2 - y^2) - x^2$; $Q = x\sin(x^2 - y^2)$; $R = 2xz$;

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2xy\cos(x^2 - y^2) - 2x\,;\;\; \frac{\partial Q}{\partial y} = -\,2xy\cos(x^2 - y^2)\,;\;\; \frac{\partial R}{\partial z} = 2x\,;$$

$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2xy\cos(x^2 - y^2) - 2x -$$

$-\,2xy\cos(x^2 - y^2) + 2x = 0$. Отже, поле соленоїдальне. ■

Ротором (***вихором***) векторного поля $\vec{F}$ у точці $M(x, y, z)$

називається вектор

$$\boxed{rot\,\vec{F}(\mathrm{M})=\left|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R\end{matrix}\right|\Bigg|_M=\left(\frac{\partial R(M)}{\partial y}-\frac{\partial Q(M)}{\partial z}\right)\vec{i}\,-}$$

$$\boxed{-\left(\frac{\partial R(M)}{\partial x}-\frac{\partial P(M)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q(M)}{\partial x}-\frac{\partial P(M)}{\partial y}\right)\vec{k}\,.}$$

Ротор є *векторною характеристикою* поля $\vec{F}$.

Кожному векторному полю $\vec{F}$ відповідає векторне поле його роторів $rot\,\vec{F}$, що характеризує обертання поля $\vec{F}$ в кожній точці.

Векторне поле $\vec{F}$ називається ***безвихровим***, якщо в кожній точці його ротор дорівнює нулю: $\boxed{rot\,\vec{F}=\vec{0}}$.

Зауваження 1. Для плоского векторного поля $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ ротор $rot\,\vec{F}=\left(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y\right)\vec{k}$ перпендикулярний до площини Oxy.

Зауваження 2. Кожне векторне поле $\vec{F}$ може бути подане як сума безвихрового та соленоїдального полів.

Приклад 3. Знайти ротор даного векторного поля в указаній точці: $\vec{F}=y^2\,\vec{i}-2xz\,\vec{j}-yx^2\,\vec{k}$; $M(1,-1,0)$.

$$\square\quad rot\,\vec{F}=\left|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ y^2 & -2xz & -yx^2\end{matrix}\right|=$$

$$=\left(\frac{\partial(-yx^2)}{\partial y}-\frac{\partial(-2xz)}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial(-yx^2)}{\partial x}-\frac{\partial(y^2)}{\partial z}\right)\vec{j}+$$

$$-\left(\frac{\partial(-2xz)}{\partial x}-\frac{\partial(y^2)}{\partial y}\right)\vec{k}=(2x-x^2)\,\vec{i}+2xy\,\vec{j}-2(z+y)\vec{k}\,;$$

$$rot\,\vec{F}(M)=(2\cdot1-1^2)\cdot\vec{i}+2\cdot1\cdot(-1)\cdot\vec{j}-2(0-1)\vec{k}=\vec{i}-2\,\vec{j}+2\vec{k}\,.\ \blacksquare$$

Приклад 4. Перевірити, що дане векторне поле є безвихровим:

$$\vec F=(6xz+y^3)\,\vec i+3xy^2\,\vec j+(3x^2-4z^3)\,\vec k\,.$$

$$\square\quad rot\,\vec F=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 6xz+y^3 & 3xy^2 & 3x^2-4z^3\end{vmatrix}=$$

$$=(0-0)\vec i-(6x-6x)\,\vec j+(3y^2-3y^2)\vec k=\vec 0\,.$$

Отже, векторне поле безвихрове. ■

Щільністю циркуляції векторного поля $\vec F$ у точці $M(x,y,z)$ у напрямі вектора $\vec n$ називається число

$$\boxed{C_{\vec n}\,(M)=np_{\vec n}\;rot\,\vec F(M)}.$$

Щільність циркуляції $C_{\vec n}\,(M)$ *в даній точці* M *досягає максимуму в напрямі ротора* $\mathrm{rot}\,\vec F(M)$ *і дорівнює його модулю*:

$$\boxed{C_{\max}\,(M)=\left|rot\,\vec F(M)\right|,\;\;\vec n_{\max}=rot\,\vec F(M)}.$$

Приклад 5. Знайти максимальну щільність циркуляції даного векторного поля в указаній точці:

$$\vec F=\left(xz/y\right)\vec i-2y^2z\,\vec j+x^2y^3\,\vec k\,;\quad M(-1,1,2)\,.$$

$$\square\quad rot\,\vec F=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ xz/y & -2y^2z & x^2y^3\end{vmatrix}=\left(3x^2y^2+2y^2\right)\vec i\,-$$

$$-\left(2xy^3-x/y\right)\vec j+\left(xz/y^2\right)\vec k\,;\;\;rot\,\vec F(M)=5\vec i+\vec j-2\vec k\,;$$

$$C_{\max}\,(M)=\left|rot\,\vec F(M)\right|=\sqrt{5^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{30}\,;$$

$$\vec n_{\max}=rot\,\vec F(M)=5\vec i+\vec j-2\vec k\,.\quad ■$$

Векторне поле $\vec F$ називається ***гармонічним***, якщо воно одночасно соленоїдальне і безвихрове.

Векторне поле $\vec F$ *гармонічне, якщо в кожній його точці дивергенція і ротор дорівнюють нулю*: $\boxed{div\vec F=0\,,\;rot\,\vec F=\vec 0}$.

Приклад 6. Перевірити, що дане векторне поле є гармонічним:

$$\vec{F} = (yz + 5x)\vec{i} + (xz - 3y)\vec{j} + (xy - 2z)\vec{k} .$$

□ $$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(yz + 5x) + \frac{\partial}{\partial y}(xz - 3y) + \frac{\partial}{\partial z}(xy -$$

$$- 2z) = 5 - 3 - 2 = 0; \quad rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz + 5x & xz - 3y & xy - 2z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(xy - 2z)}{\partial y} - \frac{\partial(xz - 3y)}{\partial z} \right)\vec{i} -$$

$$- \left(\frac{\partial(xy - 2z)}{\partial x} - \frac{\partial(yz + 5x)}{\partial z} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(xz - 3y)}{\partial x} - \frac{\partial(yz + 5x)}{\partial y} \right)\vec{k} =$$

$$= (x - x)\vec{i} - (y - y)\vec{j} + (z - z)\vec{k} = \vec{0}.$$

Отже, векторне поле гармонічне. ■

3.2.3. Криволінійний інтеграл за координатами (другого роду). Циркуляція векторного поля

Задача про роботу векторного поля. Розглянемо плоске векторне поле сили $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Нехай під дією змінної сили $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ матеріальна точка M рухається деякою плоскою кусково-гладкою напрямленою лінією L . Необхідно обчислити роботу $\tilde{A}$, яка виконується при переміщенні цієї точки M по дузі L_{AB} від початкової точки A до кінцевої точки B (рис. 95).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i = \overline{1, n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b$. Розглянемо елементарну дугу Δl_i, якій відповідає вектор переміщення $\Delta\vec{l_i} = \Delta x_i\vec{i} + \Delta y_i\vec{j}$. Не-

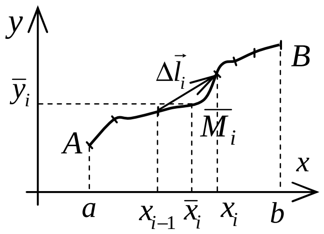

Рис. 95

хай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що на ній вектор сили $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $\vec{F} = \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \Delta l_i$.

Елементарна робота $\Delta\tilde{A}_i$ на ділянці Δl_i визначається скалярним добутком

$$\Delta\tilde{A}_i \approx \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta\vec{l}_i = P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i .$$

Якщо обчислити елементарну роботу на всіх ділянках Δl_i, $i = \overline{1, n}$ і скласти суму, то $\tilde{A} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\tilde{A}_i \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta\vec{l}_i =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i \right).$$

Одержана сума називається ***інтегральною*** для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ по напрямленій дузі L_{AB}.

Очевидно, що $\tilde{A} = \lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\tilde{A}_i$.

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i \right)$ *при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається* ***криволінійним інтегралом за координатами*** (***криволінійним інтегралом другого роду***) *і позначається*

$$\boxed{\int_{L_{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =}$$

$$\boxed{= \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i \right)},$$

де для скорочення запису в підінтегральному виразі опущені зовнішні дужки.

Криволінійний інтеграл за координатами у векторному полі також називається ***циркуляцією вектора*** $\vec{F}$ ***по дузі*** L_{AB} і позначається $\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta\vec{l}_i}$,

де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$ – ***вектор диференціала*** (***елемента***) ***довжини плоскої дуги***.

Таким чином, $\boxed{\widetilde{A} = \int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l}}$

(фізичний зміст криволінійного інтеграла за координатами).

Якщо лінія L замкнена, то інтеграл по ній записується так

$$\boxed{\oint_L \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy},$$

причому початкова точка вибирається довільно і вказується напрям обходу. Якщо напрям обходу замкненого контуру L явно не зазначено, то приймається додатний напрям (при цьому область, обмежена контуром, залишається зліва – рух проти годинникової стрілки (правило "правого гвинта")).

Зауваження. Для просторового векторного поля інтеграл має вигляд

$$\boxed{\oint_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \oint_{L_{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz},$$

де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ – ***вектор диференціала*** (***елемента***) ***довжини просторової дуги***.

3.2.4. Властивості криволінійного інтеграла за координатами

Криволінійний інтеграл за координатами визначається підінтегральним виразом, довжиною і формою кривої інтегрування та її напрямом.

Властивість 1. *При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл за координатами тільки змінює знак*

$$\boxed{\int_{L_{BA}} \vec{F}\,d\vec{l} = -\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l}}.$$

Це випливає з означення, оскільки при цьому вектор $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$, а відповідно і його проекції dx, dy і dz, змінюють знак.

Властивість 2. Векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна розглядати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно, *повний криволінійний інтеграл за координатами можна розглядати як суму трьох інтегралів*

$$\boxed{\int_L \vec{F}\,d\vec{l} = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_L P\,dx + \int_L Q\,dy + \int_L R\,dz},$$

де кожен з трьох інтегралів справа також називається відповідно ***криволінійним інтегралом за координатою*** x***,*** y ***чи*** z .

Властивість 3. Розглянемо циркуляцію $\oint_L \vec{F}\,d\vec{l}$ по замкненому контуру L . З'єднаємо дві довільні точки A і B цього контура дугою L_{AB} (рис. 96). Таким чином, одержимо два замкнені контури $L_1 = AmB$ і $L_2 = BnA$. Тоді

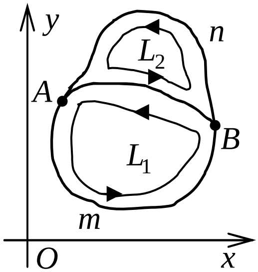

Рис. 96

$$\boxed{\oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = \oint_{L_1} \vec{F}\,d\vec{l} + \oint_{L_2} \vec{F}\,d\vec{l}},$$

оскільки $\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} + \int_{L_{BA}} \vec{F}\,d\vec{l} = 0$.

Тобто, *при розбитті замкненого контура на замкнені підконтури значення сумарного криволінійного інтеграла не змінюється*. Ця властивість виражає закон збереження обертального руху.

Властивість 4 (зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого роду). Оскільки $|d\vec{l}\,| = dl$, то $dx = dl\cos\alpha$, $dy = dl\cos\beta$, $dz = dl\cos\gamma$, де α, β, γ – напрямні кути вектора $d\vec{l}$. Тоді *криволінійний інтеграл за координатами зводиться до криволінійного інтеграла за довжиною*

$$\boxed{\int_L \vec{F}\,d\vec{l} = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_L P\,dl\cos\alpha + Q\,dl\cos\beta +}$$

$$\boxed{+ R\,dl\cos\gamma = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl}.$$

Зауваження . Інші властивості аналогічні властивостям звичайного визначеного інтеграла.

3.2.5. Обчислення криволінійного інтеграла за координатами

Обчислення криволінійного інтеграла за координатами здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Випадок 1. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах у параметричній формі $x = x(t)$; $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, причому коли параметр t змінюється на відрізку $[\alpha;\beta]$, біжуча точка $(x(t); y(t))$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Тоді $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =}$$

$$\boxed{= \int_{\alpha}^{\beta} \left[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\right] dt}.$$

Приклад 1. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F} = (x/y)\vec{i} + 2\vec{j}$ по дузі циклоїди L: $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$, $\pi/3 \le t \le \pi/2$.

□ $dx = (1-\cos t)\,dt$; $dy = \sin t\,dt$; $\int_L \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int_L (x/y)\,dx +$

$$+ 2\,dy = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\big((t-\sin t)/(1-\cos t)\big)(1-\cos t) + 2\sin t\right]dt =$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} (t - \sin t + 2\sin t)\,dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} t\,dt + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin t\,dt =$$

$$= (1/2)t^2\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} - \cos t\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = 5\pi^2/72 + 1/2. \quad ■$$

Випадок 2. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x)$, $a \le x \le b$, причому коли x змінюється на відрізку $[a;b]$, біжуча точка $(x;y)$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Можна використати попередній спосіб, записавши рівняння дуги у параметричній формі

$$\begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases} \quad a \le x \le b. \text{ Тоді } \begin{cases} dy = y'(x)\,dx \\ dx = dx \end{cases} \text{ і маємо}$$

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =}$$

$$\boxed{= \int_a^b \left[P\big(x, y(x)\big) + Q\,\big(x, y(x)\big)\,y'(x)\right] dx}\,.$$

Приклад 2. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^5/y)\,\vec{j}$ по дузі кубічної параболи $L: y = x^3$, $1 \le x \le 2$.

□ $L: y = x^3$, $1 \le x \le 2$; $y' = 3x^2$; $dy = 3x^2 dx$;

$$\int_L \vec{F}\,d\vec{l} = \int_L 2xy\,dx + (x^5/y)\,dy = \int_1^2 \left[2x\,x^3 + (x^5/x^3)\times\right.$$

$$\left.\times 3x^2\right] dx = 5\int_1^2 x^4\,dx = x^5\Big|_1^2 = 31. \quad ■$$

Випадок 3. Розглянемо просторове векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Нехай просторова дуга L_{AB} задана в параметричній формі $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, причому коли параметр t змінюється на відрізку $[\alpha;\beta]$, біжуча точка $\big(x(t); y(t); z(t)\big)$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Тоді $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$; $dz = z'(t)\,dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P\,(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy +}$$

$$\boxed{+ R(x,y,z)\,dz = \int_\alpha^\beta \left[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,x'(t) + \right.}$$

$$\boxed{\left. + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)\,z'(t)\right] dt}\,.$$

Приклад 3. Обчислити циркуляцію просторового векторного поля $\vec{F} = xz\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + (x + y - 2)\,\vec{k}$ по відрізку L_{AB} прямої, який з'єднує точки $A(1, 0, -3)$ та $B(2, -2, 0)$.

□ Знайдемо канонічні рівняння прямої AB:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{-2-0}=\frac{z+3}{0+3};\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{3}.$$

Перейдемо до параметричного запису прямої і обчислимо диференціали:

$$x=t+1;\ y=-2t;\ z=3t-3;\ dx=dt;\ dy=-2dt;\ dz=3dt.$$

Врахуємо, що при заміні змінної змінюються межі інтегрування, а саме, якщо на відрізку L_{AB} $1\le x\le 2$, то $0\le t\le 1$.

Отже, $\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l}=\int_{L_{AB}} xz\ dx+2y\ dy+(x+y-2)\,dz=$

$$=\int_0^1 \left[(t+1)(3t-3)+2(-2t)\cdot(-2)+(t+1-2t-2)\cdot 3\right]dt=$$

$$=\int_0^1 (3t^2-3+8t-3t-3)\ dt=3\int_0^1 t^2dt+5\int_0^1 t\,dt-6\int_0^1 dt=$$

$$=t^3\Big|_0^1+(5/2)\cdot t^2\Big|_0^1-6t\Big|_0^1=-2/5.\quad ■$$

3.2.6. Формула Гріна

Встановимо зв'язок між подвійним інтегралом по деякій плоскій області D та криволінійним інтегралом по межі L цієї області.

Теорема. (Зв'язок між криволінійним і подвійним інтегралом). *Нехай задано плоске векторне поле* $\vec{F}(M)=P\vec{i}+Q\vec{j}$ *де* $P=P(x,y)$ та $Q=Q(x,y)$ - *функції двох змінних, неперервні разом з частинними похідними* $\partial P/\partial y$ *і* $\partial Q/\partial x$. *Якщо* L - *замкнена лінія, що обмежує однозв'язну область* D, *то*

$$\boxed{\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy}$$

(***формула Гріна***).

□ Обмежимось розглядом області D, правильної в напрямі осі Oy (рис. 97). Обчислимо

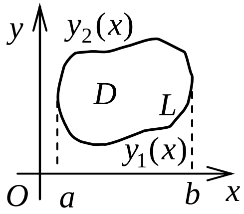

Рис. 97

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy =$$

$$= \int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b \big(P(x, y_2(x)) -$$

$$- P(x, y_1(x))\big)\,dx = -\int_b^a P(x, y_2(x))\,dx -$$

$$- \int_a^b P(x, y_1(x))\,dx = -\oint_L P(x,y)\,dx\,.$$

Аналогічно $\displaystyle\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy = \oint_L Q(x,y)\,dx\,.$

Склавши відповідні вирази, маємо

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy\,. \ \blacksquare$$

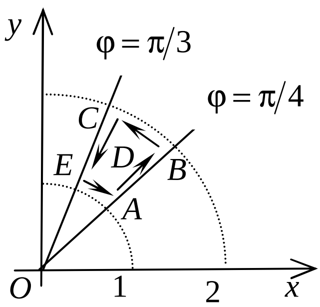

Рис. 98

Приклад 1. Використовуючи формулу Гріна, обчислити циркуляцію $I = \oint_L \ln(x^2 + y^2)\,dx + 2\,arctg\,(y/x)\,dy$, якщо L - замкнений контур $ABCE$, утворений колами $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ та прямими $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, де $x > 0$, $y > 0$ (рис. 98).

□ У прийнятих позначеннях

$$P(x,y) = \ln(x^2 + y^2)\,;$$

$$Q(x,y) = 2\,arctg\,(y/x)\,.$$

Знайдемо $\displaystyle\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}\,;\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2 + y^2}\,.$

Тоді за формулою Гріна

$$I=\oint_L \ln(x^2+y^2)\,dx+2\,arctg\,(y/x)\,dy=-4\iint_D \frac{y\,dxdy}{x^2+y^2},$$

де область D обмежена контуром L.

Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, де $1\le\rho\le 2$, $\pi/4\le\varphi\le\pi/3$. Отже,

$$I=-4\iint_D \frac{y\,dxdy}{x^2+y^2}=-4\iint_D \frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2}\rho\,d\rho\,d\varphi=-4\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin\varphi\,d\varphi\int_1^2 d\rho=$$

$$=-4\int_{\pi/4}^{\pi/3}\rho\Big|_1^2\sin\varphi\;d\varphi=4\cos\varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}=2-2\sqrt{2}.\quad\blacksquare$$

Зауваження. Нехай замкнений контур L обмежує однозв'язну область D. За формулою Гріна

$$\oint_L -y\,dx+x\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}x-\frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)dxdy=\iint_D(1+1)\,dxdy=$$

$$=2\iint_D dxdy=2S_D.\quad \text{Звідси}\quad \boxed{S_D=(1/2)\oint_L -y\,dx+x\,dy},$$

де S_D – площа плоскої області D, що обмежена контуром L.

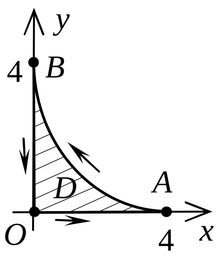

Рис. 99

Приклад 2. За допомогою криволінійного інтеграла за координатами обчислити площу плоскої області D, що обмежена осями координат $x=0$, $y=0$ і дугою астроїди $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$, розміщеною в першому квадранті ($x\ge 0$, $y\ge 0$) (рис. 99).

□ Контур L_{OABO}, що обмежує область D, складається з трьох ділянок OA, AB і BO. Відповідно розіб'ємо криволінійний інтеграл:

$$S_D=(1/2)\oint_{L_{OABO}} -y\,dx+x\,dy=(1/2)\left(\int_{OA}+\int_{AB}+\int_{BO}\right).$$

Тоді OA: $y=0$, $x_1=0$, $x_2=4$; $dy=0$; $\int_{OA} -y\,dx+x\,dy=$

$$=\int_0^4 (-0+x\cdot 0)\,dx=0;$$

$$AB:\ x=4\cos^3 t,\ y=4\sin^3 t,\ t_1=0,\ t_2=\pi/2;$$

$$dx=-12\cos^2 t\sin t\,dt;\quad dy=12\sin^2 t\cos t\,dt;\quad \int_{AB}-y\,dx+x\,dy=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(-4\sin^3 t\cdot(-12)\cos^2 t\sin t+4\cos^3 t\cdot 12\sin^2 t\cos t\right)dt=$$

$$=48\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=12\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=$$

$$=6\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt=6t\Big|_0^{\pi/2}-(3/4)\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}=3\pi;$$

$BO: x=0,\ y_1=4,\ y_2=0;\ dx=0;\quad \int_{BO}-y\,dx+x\,dy=\int_4^0(-y\cdot 0+$ $+0)\,dx=0$. Отже, $S_D=(1/2)(0+3\pi+0)=3\pi/2$. ■

3.2.7. Умови незалежності криволінійного інтеграла за координатами від шляху інтегрування

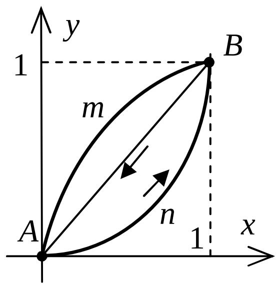

Рис. 100

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_{L_{AB}}\vec{F}\,d\vec{l}=\int_{L_{AB}}2xydx+x^2dy$ по двом різним шляхам, що з'єднують точки $A(0,0)$ та $B(1,1)$ (рис. 100):

а) дуга параболи L_{AmB}: $y=\sqrt{x}$, $x_1=0$, $x_2=1$; б) дуга кубічної параболи L_{AnB}: $y=x^3$, $x_1=0$, $x_2=1$.

□ а) L_{AmB}: $y=\sqrt{x}$; $y'=(1/2)/\sqrt{x}$;

$$\int_{L_{AmB}}\vec{F}\,d\vec{l}=\int_{L_{AmB}}2xydx+x^2dy=$$

$$=\int_0^1\left(2x\sqrt{x}+x^2(1/2)/\sqrt{x}\right)dx=(5/2)\int_0^1 x^{3/2}\,dx=x^{5/2}\Big|_0^1=1;$$

б) L_{AnB}: $y=x^3$; $y'=3x^2$; $\int_{L_{AnB}}\vec{F}\,d\vec{l}=\int_{L_{AnB}}2xydx+x^2dy=$

$$= \int_0^1 \left(2xx^3 + x^2 3x^2\right) dx = 5\int_0^1 x^4\, dx = x^5 \Big|_0^1 = 1 . \quad \blacksquare$$

Аналіз прикладу показує, що значення інтеграла по двом різним за формою шляхам інтегрування співпадають:

$$\int_{L_{AnB}} \vec{F}\, d\vec{l} = \int_{L_{AmB}} \vec{F}\, d\vec{l} .$$

Звідси інтеграл по замкненій лінії $L = AnBmA$, очевидно, дорівнює нулю: $\oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = 0$.

Виникає питання: за яких умов щодо функцій $P = P(x, y)$ і $Q = Q(x, y)$ виконується рівність

$$\oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \,?$$

<u>Теорема</u>. *Нехай у всіх точках деякої однозв'язної області* D *функції* $P(x, y)$ *та* $Q(x, y)$ *неперервні разом зі своїми частинними похідними* $\partial P/\partial y$ *та* $\partial Q/\partial x$. *Тоді для того, щоб криволінійний інтеграл другого роду по довільному замкненому контуру* L, *який цілком лежить в області* D, *дорівнював нулю, необхідно і достатньо виконання умови* $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ *у всіх точках області* D:

$$\boxed{\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x \;\Leftrightarrow\; \oint_L Pdx + Qdy = 0}.$$

□ Нехай контур L обмежує область $D_1 \subseteq D$. Запишемо формулу Гріна

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy .$$

Якщо умова теореми виконана, то подвійний інтеграл у правій частині дорівнює нулю і цим доведено <u>достатність</u>.

Доведемо <u>необхідність</u> методом від супротивного. Припустимо, що $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, а умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ не виконується хоча б в одній точці $M_0(x_0, y_0)$ області D, скажімо, в цій точці $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y > 0$.

Оскільки в лівій частині нерівності функція неперервна, то вона буде додатна у всіх точках деякої досить малої області $D_1 \subseteq D$, яка містить в собі точку $M_0(x_0, y_0)$. Візьмемо подвійний інтеграл по цій області, який матиме додатне значення $\iint_D (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)dxdy > 0$.

Але за формулою Гріна ліва частина одержаної нерівності дорівнює криволінійному інтегралу по контуру L, який обмежує область D_1, і за припущенням дорівнює нулю. Отже, це припущення невірне. Приходимо до висновку, що $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ в усіх точках області D. ■

Коли згадати, що рівність $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ є необхідною і достатньою умовою того, щоб вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ був повним диференціалом, то доведену теорему можна сформулювати так: *для того, щоб криволінійний інтеграл $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не залежав від лінії інтегрування, необхідно і достатньо, щоб його підінтегральний вираз був повним диференціалом.*

Підсумовуючи <u>висновки</u> нашого дослідження, можна стверджувати, що *коли область D однозв'язна і функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\partial P/\partial y$ та $\partial Q/\partial x$ у цій області, то всі чотири наступні твердження рівносильні, тобто якщо виконується одне з них, то виконуються і всі інші:*

1) криволінійний інтеграл $\oint_L Pdx + Qdy$, взятий по довільному замкненому контуру L, цілком розміщеному в області D, дорівнює нулю;

2) криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} P\,dx + Q\,dy$ не залежить від форми лінії інтегрування L_{AB}, що цілком лежить в області D і з'єднує початкову A і кінцеву B точки;

3) вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повний диференціал деякої функції $u(x, y)$, тобто в області D існує така функція $u(x, y)$, що $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, де $P(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ і $Q(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$;

4) у всіх точках області D *має місце рівність* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

<u>Зауваження</u>. На практиці зручно користуватись останньою умовою $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

<u>Приклад 2</u>. Використовуючи умову $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, перевірити, що $\oint_L (x^3 + y\,tg\,x)\,dx + (4y + \ln\cos x)\,dy = 0$.

□ $\partial P/\partial y = tg\,x = \partial Q/\partial x$. ■

3.2.8. Обчислення функції за її повним диференціалом. Розв'язання диференціальних рівнянь у повних диференціалах

Розглянемо функцію $u(x, y)$, задану в деякій області D, де вона неперервна разом зі своїми частинними похідними. Обчислимо її повний диференціал $du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy$.

Позначимо $P(x, y) = \partial u/\partial x, \quad Q(x, y) = \partial u/\partial y$. Тоді для повного диференціалу $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Але за цієї умови криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{M_0 M_1}} Pdx + Qdy$ не залежить від форми шляху інтегрування, а визначається положенням початкової $M_0(x_0, y_0)$ та кінцевої $M_1(x_1, y_1)$ точок. Такий інтеграл записується так $\boxed{\int\limits_{M_0(x_0, y_0)}^{M_1(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy}$, де шлях інтегрування обирається довільно.

<u>Зауваження 1</u>. Найзручніше інтегрувати по ламаній лінії $M_0 N M_1$, ланки $M_0 N$ і NM_1 якої паралельні осям координат. При цьому можливі два способи побудови ламаної, що відображені на рис. 101 і рис. 102.

Для першого способу (рис. 101):

на відрізку $M_0 N$: $y = y_0 = const$; $dy = 0$, а на відрізку NM_1:

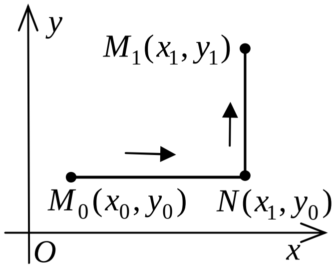

Рис. 101

$x = x_1 = const$; $dx = 0$. Отже, інтеграл набуде вигляду

$$\int_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{M_0(x_0,y_0)}^{N(x_1,y_0)} + \int_{N(x_1,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)dy.$$

Для другого способу (рис. 102):
на відрізку M_0N: $x = x_0 = const$; $dx = 0$, а на відрізку NM_1: $y = y_1 = const$; $dy = 0$. Отже, інтеграл набуде вигляду

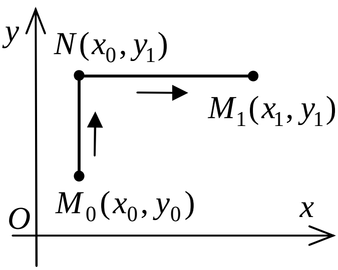

Рис. 102

$$\int_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{M_0(x_0,y_0)}^{N(x_0,y_1)} + \int_{N(x_0,y_1)}^{M_1(x_1,y_1)} =$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0,y)dy + \int_{x_0}^{x_1} P(x,y_1)dx.$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти інтеграл

$$\int_{A(0,1)}^{B(2,2)} \left(x - 2x/y\right)dx + \left(3 + x^2/y^2\right)dy.$$

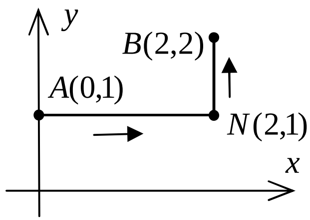

Рис. 103

□ За шлях інтегрування оберемо ламану ANB (рис. 103). На відрізку AN: $y = 1 = const,\ dy = 0$, а на відрізку NB: $x = 2 = const,\ dx = 0$. Тоді

$$\int_{A(0,1)}^{B(2,2)} \left(x - 2x/y\right)dx + \left(3 + x^2/y^2\right)dy =$$

$$= \int_{A(0,1)}^{N(2,1)} + \int_{N(2,1)}^{B(2,2)} = \int_0^2 \left(x - \frac{2x}{1}\right)dx + \int_1^2 \left(3 + 2^2/y^2\right)dy =$$

$$= -(1/2)\,x^2\Big|_0^2 + (3y - 4/y)\Big|_1^2 = 3. \quad ■$$

Зауваження 2. Якщо в криволінійному інтегралі, що не залежить від форми шляху інтегрування, початкову точку $M_0(x_0, y_0)$ зафіксувати, а кінцеву точку $M(x, y)$ розглядати як змінну, то цей інтеграл буде деякою функцією координат x і y точки $M(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x,y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy .$$

Функцію $u(x, y)$ називають ***первісною***. Задача відшукання функції (первісної) $u(x, y)$ за її повним диференціалом розв'язується з точністю до довільної сталої:

$$\boxed{u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy + C\,,\quad C = const},$$

де $M_0(x_0, y_0)$ – довільно вибрана фіксована точка, в якій функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ та їх частинні похідні неперервні.

Використовуючи поняття первісної, дістаємо ***формулу Ньютона – Лейбниця*** для криволінійних інтегралів

$$\boxed{\int_{M_0(x_0, y_0)}^{M_1(x_1, y_1)} P\,dx + Q\,dy = u(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0)}.$$

Приклад 2. Перевірити, що вираз $(ydx + xdy)\sin xy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$ та знайти цю функцію (первісну). За допомогою отриманої первісної обчислити відповідний криволінійний інтеграл $I = \int_{A(1,0)}^{B(1,\pi)} y\sin xy\,dx + x\sin xy\,dy$.

□ Запишемо даний вираз у вигляді $y\sin xy\,dx + x\sin xy\,dy$. Тобто $P(x, y) = y\sin xy$; $Q(x, y) = x\sin xy$. Обчислимо

$$\partial P/\partial y = \sin xy + xy\cos xy\,;\quad \partial Q/\partial x = \sin xy + xy\cos xy\,.$$

Як бачимо, $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Значить, даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$. Знайдемо цю функцію.

Нехай $M_0(0,0)$ – початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану M_0NM, де на відрізку M_0N: $y = 0 = const,\ dy = 0$, а на відрізку NM : $x = x = const,\ dx = 0$. Тоді

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} y\sin xy\,dx + x\sin xy\,dy + C = \int_{M_0(0,0)}^{N(x,0)} + \int_{N(x,0)}^{M(x,y)} +$$

$$+C=\int_0^x 0\cdot\sin(x\cdot 0)\,dx+\int_0^y x\sin xy\,dy + C = 0+$$

$$+x\cdot\left(-(1/x)\cos xy\right)\Big|_0^y + C = -\cos xy + 1 + C.$$

Включивши одиницю в довільну сталу, маємо

$$u(x,y)=\tilde{C}-\cos xy, \text{ де } \tilde{C} \text{ – довільна стала.}$$

Даний інтеграл знайдемо за формулою Ньютона – Лейбниця:

$$I=\int_{A(1,0)}^{B(1,\pi)} y\sin xy\,dx + x\sin xy\,dy = -\cos xy\Big|_{A(1,0)}^{B(1,\pi)} = 2. \quad \blacksquare$$

Зауваження 3. Якщо для диференціального рівняння першого порядку $\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0}$ виконується умова $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$, то воно називається ***рівнянням у повних диференціалах***. Оскільки ліва частина цього рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, то відновлюючи функцію за її повним диференціалом, загальний розв'язок (загальний інтеграл) $u(x,y)=C$ вказаного рівняння можна подати в одній із форм

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy=C};\quad \boxed{\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx=C}.$$

Приклад 3. Пересвідчитися, що диференціальне рівняння

$$(y\sin x+\sin y-1/x^2)\,dx+(x\cos y-\cos x+2y)\,dy=0$$

є рівнянням у повних диференціалах. Знайти його загальний розв'язок.

□ Маємо $P=y\sin x+\sin y-1/x^2$; $Q=x\cos y-\cos x+2y$.

Ці функції неперервні разом з частинними похідними $\partial P/\partial y=\sin x+\cos y$ і $\partial Q/\partial x=\cos y+\sin x$ на всій координатній площині Oxy за винятком точок осі $Oy: x=0$. Оскільки виконується умова $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$, то маємо рівняння у повних диференціалах. Знайдемо його загальний розв'язок за формулою

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy = C,$$

використовуючи початкову точку $M_0(x_0, y_0) = M_0(\pi, 0)$. Тоді

$$\int_{\pi}^{x} (0 \cdot \sin x + \sin 0 - 1/x^2)\,dx + \int_{0}^{y} (x\cos y - \cos x + 2y)\,dy = C:$$

$$(1/x)\Big|_{\pi}^{x} + x \cdot \sin y\Big|_{0}^{y} - \cos x \cdot y\Big|_{0}^{y} + y^2\Big|_{0}^{y} = C;\ \ 1/x - 1/\pi + x(\sin y -$$

$$-\sin 0) - \cos x \cdot (y - 0) + y^2 - 0 = C;\quad 1/x + x\sin y -$$

$$-\,y\cos x + y^2 = \tilde{C},$$ де $\tilde{C} = C + 1/\pi$ – довільна стала. ■

3.2.9. Потенціальне векторне поле

Розглянемо плоске векторне поле

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}\,.$$

Нехай у деякій однозв'язній області D поля виконується умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Тоді вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$du = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}dy, \quad \text{де} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P \ \text{ і } \ \frac{\partial u}{\partial y} = Q\,.$$

При цьому дане векторне поле можна записати так

$$\vec{F}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\vec{j} = grad\,u(x, y)\,.$$

Векторне поле $\vec{F}$, що є градієнтом деякого скалярного поля u: $\boxed{\vec{F} = grad\,u}$, називається ***потенціальним***. Скалярна функція u називається ***потенціалом*** цього векторного поля $\vec{F}$.

Зауваження 1. У прикладних дисциплінах іноді перед градієнтом ставиться знак "-", що не має принципового значення, а лише відповідає конкретному фізичному змісту. Наприклад, для електростатичного поля $\vec{E} = -\,grad\,u$ означає, що в напрямку вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ електричний потенціал u спадає.

Умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ потенціальності плоского векторного поля рівнозначна існуванню повного диференціала. Відповідно, задача обчислення потенціала векторного поля рівнозначна задачі відшукання повного диференціала.

Оскільки $grad\,(u+C) = grad\,u$, то *потенціал векторного поля обчислюється з точністю до довільної сталої* C. *Потенціал векторного поля визначається циркуляцією цього поля по довільній лінії* M_0M *, що з'єднує фіксовану початкову* $M_0(x_0, y_0)$ *і змінну кінцеву* $M(x, y)$ *точки*:

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \vec{F}\,d\vec{l} + C = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + C\,.$$

Зауваження 2. Для вибору конкретного значення довільної сталої C використовуються додаткові умови. Наприклад, для електростатичного поля точкового заряду приймається, що потенціал на нескінченності дорівнює нулю.

Циркуляція градієнта скалярного поля дорівнює різниці потенціалів цього поля градієнтів:

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} grad\,u\;d\vec{l} + C = u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} = u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0)\,.$$

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}\,.$$

Якщо це поле потенціальне, а $u = u(x,y,z)$ - його потенціал, то $P = \partial u/\partial x$; $Q = \partial u/\partial y$; $R = \partial u/\partial z$.

У потенціальному векторному полі $\vec{F} = grad\,u$ циркуляція не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та кінцевої $M(x,y,z)$ точок:

$$\int_{M_0}^{M} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{M_0}^{M} P\,dx + Q dy + R\,dz = \int_{M_0}^{M} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = \int_{M_0}^{M} du =$$

$$= u\Big|_{M_0}^{M} = u(M_0) - u(M).$$

Обчислимо ротор потенціального поля:

$$rot\,\vec{F}=\left.\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R^2\end{vmatrix}\right|_M=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)\vec{k}=\vec{0}\,.$$

Отже, $\boxed{rot\,\vec{F}=\vec{0}}$, якщо поле - потенціальне. Тобто, *потенціальне поле є безвихровим*.

Зворотне твердження також вірне. Тобто, *безвихрове. поле є потенціальним*.

Зокрема, рівність $\boxed{rot\,grad\,u=\vec{0}}$ свідчить про те, що *поле градієнтів завжди потенціальне*.

Висновок: *щоб визначити, чи задане векторне поле потенціальне, достатньо пересвідчитись, що його ротор дорівнює нулю*.

Для потенціального поля справедлива теорема, яка відповідає розглянутим раніше властивостям криволінійного інтеграла за координатами.

Теорема. *Наступні чотири властивості векторного поля* $\vec{F}$, *заданого в однозв'язній області* D, *еквівалентні:*

1) циркуляція поля $\vec{F}$ *по будь-якому замкненому контуру, розміщеному в області* D, *дорівнює нулю; 2) циркуляція поля* $\vec{F}$ *вздовж довільної кривої* L_{AB}, *яка лежить в області* D, *з початком в точці* A *та кінцем в точці* B *залежить тільки від положення точок* A *та* B *і не залежить від форми кривої; 3) існує функція (потенціал)* $u=u(x,y,z)$ *така, що* $\boxed{\vec{F}=grad\,u}$ *(поле* $\vec{F}$ *є потенціальним); 4)* $\boxed{rot\,\vec{F}=\vec{0}}$ *(поле* $\vec{F}$ *є безвихровим).*

Якщо просторове векторне поле $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ потенціальне, то його потенціал $u=u(x,y,z)$ знаходиться за формулою

$$\boxed{u(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz+C},$$

де $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – довільно вибрана фіксована точка, в якій функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ $R(x,y,z)$ та їх частинні похідні неперервні; $C=const$.

Зауваження 3. Найзручніше інтегрувати по ламаній лінії, ланки якої паралельні осям координат. При цьому можливі різні способи побудови такої ламаної.

Приклад 1. Пересвідчитись, що просторове векторне поле

$$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=\frac{2x}{yz}\vec{i}-\frac{x^2}{y^2z}\vec{j}-\frac{x^2}{yz^2}\vec{k}$$

потенціальне. Знайти його потенціал $u=u(x,y,z)$.

□ Обчислимо ротор даного поля:

$$rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 2x/(yz) & -x^2/(y^2z) & -x^2/(yz^2)\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2/(yz^2)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}\left(-x^2/(y^2z)\right)\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2/(yz^2)\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(2x/(yz)\right)\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2/(y^2z)\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2x/(yz)\right)\right)\vec{k}=\left(\frac{x^2}{y^2z^2}-\frac{x^2}{y^2z^2}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(-\frac{2x}{yz^2}+\frac{2x}{yz^2}\right)\vec{j}+\left(-\frac{2x}{y^2z}+\frac{2x}{y^2z}\right)\vec{k}=\vec{0}.$$

Оскільки $rot\,\vec{F}=\vec{0}$, то поле - безвихрове, а значить, і потенціальне.

Знайдемо його потенціал. Нехай $M_0(0,1,1)$ – початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану $M_0N_1N_2M$ (рис. 104), де

$$M_0N_1: y=1=const,\ dy=0;\ \ z=1=const,\ dz=0$$

$$N_1N_2 : x = x = const,\ dx = 0;\quad z = 1 = const,\ dz = 0;$$

$$N_2M : x = x = const,\ dx = 0;\quad y = y = const,\ dy = 0.$$

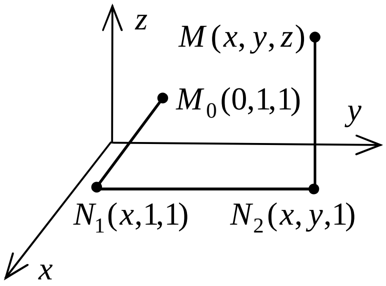

Рис. 104

Тоді

$$u(x,y,z) = \int_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + C = \int_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{N_1(x,y_0,z_0)} + \int_{N_1(x,y_0,z_0)}^{N_2(x,y,z_0)} + \int_{N_2(x,y,z_0)}^{M(x,y,z)} + C =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C.$$

Таким чином,

$$u(x,y,z) = \int_0^x \frac{2x}{1\cdot 1}dx - \int_1^y \frac{x^2}{y^2\cdot 1}dy - \int_1^z \frac{x^2}{yz^2}dz + C = x^2\Big|_0^x +$$

$$= x^2\cdot(1/y)\Big|_1^y + (x^2/y)\cdot(1/z)\Big|_1^z + C =$$

$$= x^2 + x^2/y - x^2 + x^2/(yz) - x^2/y + C = x^2/(yz) + C. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Дано просторове електростатичне поле напруженості $\vec{E} = q\vec{r}\big/\left|\vec{r}\right|^3$ точкового електричного заряду q ($q = const$), де $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Пересвідчитись, що це векторне поле $\vec{E}$ потенціальне, і обчислити його потенціал $u = u(x, y, z)$.

□ $\left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\vec{E} = q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}x\,\vec{i}\, +$

$q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}y\,\vec{j} + q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}z\,\vec{k}$.

Позначимо $P = q(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}x$,

$$Q = q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}y, \quad R = q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}z.$$

Тоді, наприклад, $\partial R/\partial y = -(3/2)qz(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}2y$, $\partial Q/\partial z = -(3/2)qy(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}2z$, тому $\partial Q/\partial z = \partial R/\partial y$.

Аналогічно можна показати, що $\partial R/\partial x = \partial P/\partial z$; $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Звідси дістаємо $rot\,\vec{E} = \vec{0}$. Значить, поле $\vec{E}$ - потенціальне.

Обчислимо його потенціал. Нехай $M_0(0,0,1)$ – початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану $M_0N_1N_2M$, де

$$M_0N_1 : y = 0 = const,\ dy = 0;\ \ z = 1 = const,\ dz = 0$$

$$N_1N_2 : x = x = const,\ dx = 0;\ \ z = 1 = const,\ dz = 0;$$

$$N_2M : x = x = const,\ dx = 0;\ \ y = y = const,\ dy = 0.$$

Тоді $u(x,y,z) = \int\limits_0^x q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}x\,dx +$

$$+\int\limits_0^y q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}y\,dy + \int\limits_1^z q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}z\,dz + C = -q\times$$

$$\times(x^2+1)^{-1/2}\Big|_0^x - q\cdot(x^2+y^2+1)^{-1/2}\Big|_0^y - q\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\Big|_1^z +$$

$$+C = -q\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2} + q + C = -q\big/|\vec{r}| + \tilde{C},\ \tilde{C} = C+q. \ \blacksquare$$

3.3. Оператор Гамільтона та його застосування

Операції обчислення характеристик скалярних і векторних полів можуть бути спрощені, якщо скористатися ***диференціально-векторним оператором*** $\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$, який був введений Гамільтоном і називається ***оператором Гамільтона*** (***"набла"-оператором***).