24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(2n^2-1)}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{2n}(n+3)}{(n+3)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^3+n+1}}{n^3-n+4}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n^3-1}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3(n+8)}{n+8}$	$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{n^4}$
26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{(3n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}n^2 tg\frac{\pi}{n^5}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt[3]{n}}{3^n+4^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}arctg^{3n}\frac{n+1}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n+2}{8n^2+3n+4}\right)^n$
28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+4}}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^{3n}\frac{\pi}{4n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\, tg\frac{\pi}{3n^2}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}n}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((n+1)/n)^{n^2}}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+1/n)}{n^2+1}$
30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{3^{n+1}\sqrt[4]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{3n}\frac{\pi}{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln 9n}}$

Завдання 2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність знакопочергові числові ряди. Для ряду з пункту а) знайти третій його член (з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми).

№ в-та	Ряд а)	Ряд б)
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{4n}}{\sqrt{2n^2+n+2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^4}{5n^4+3}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n+2}}{2n^3+1}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[4]{n}}{5^{2n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4^n}{(2n)!}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^{2n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n^2+9)}{(2n+1)!}$

5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n\sqrt[3]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{1}{n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt[5]{n^3}}{3n^4+n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{n+6}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\ln 3n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin^{2n}\frac{1}{\sqrt{n}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[4]{n^4-1}}{(3n+1)^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+4)}{\sqrt{6^n}}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^n(2n+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n^5}}{n^2-2n+5}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{8n^4+2n+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\arcsin\frac{\pi}{6n}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{(3n-1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n^9}}{2n^3+5}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}4^n n}{(n+3)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(7n+2)}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)^{2n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n+1)!}{(2n+5)^2}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(3n+5)}{3^{2n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(5n+2)\ln(5n+2)}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(4n+2)^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{4n-1}}{(2n+1)!}$
16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{2n}}{(2n+1)^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^3+8)}{n(n^2+4)}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^{2n}+n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2-1}{5n^2+1}$

18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(5n+1)}{\sqrt{n^2+n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^{\sqrt{n}}}{3n-2}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^n+5)}{n^2+4}$
20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln 2n}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{3n}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^3\frac{\pi}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+7)}{\sqrt{n}\,(3n-1)}$
22	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{6n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+3)}{\sqrt[3]{4n^2+7}}$
23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n+3}}{(2n+1)n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(5n+2)}{\sqrt[4]{n^5+1}}$
24	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{3n}}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{2n^2+1}}{3n-1}$
25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{\sqrt{2n^6+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{2n^4+3}}{6n-1}$
26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[3]{n^2+9}}{2n^2-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{3n}(2n-1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln^7(n+1)}$
28	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n^2+4}}{(2n-1)!}$
29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[3]{n^3-1}}{\sqrt{4n^4+9}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin^4\frac{\pi}{n}$
30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln 7n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n-1}n!}$

Завдання 3. Знайти радіус, інтервал і область збіжності степеневого ряду.

№ в-та	Ряд	№ в-та	Ряд
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n}x^{2n-1}}{n(n+1)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n}(x-3)^n}{\sqrt{n+2}}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{8^n(n+4)}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{n\,25^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{5n}}{(3n+4)^n}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n+3}}{4^n n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{2^n+7^n}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+3n)^n x^n$	20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+4)^{2n}}{n^3+2}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n-1}}{2^{3n}\sqrt{n}}$	21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-4)^{3n}}{27^n}$
7	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-2)^{3n-1}}{n\ln^2 n}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{4n}}{n^2+1}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 x^n}{(3n)!}$	23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+3)^n}{3^n(n+1)}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{9^n n^2}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n\sqrt{n}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(x+5)^{3n}}{n!}$	25	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n(n^2+1)x^{2n}}{n+1}$
11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x+3)^n}{n+1}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}(x+1)^{2n-1}}{n!}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-5)^n}{\sqrt{n^2+1}}$	27	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x-7)^{2n}}{\sqrt[3]{n+1}}$

13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x-3)^{2n}}{(2n)!}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^{3n}}{n^2+3n}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-4)^{3n}}{n\sqrt{\ln 3n}}$	29	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{3n-2}}{(n+1)\ln(n+1)}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16^n(x+2)^{2n}}{\sqrt{4n-1}}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)x^{5n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

Завдання 4. Розвинути дану функцію в ряд Маклорена. Знайти область збіжності отриманого ряду.

№ в-та	Функція $f(x)$	№ в-та	Функція $f(x)$
1	$\frac{x^4}{\sqrt[3]{8-x}}$	16	$\frac{3}{1+x-2x^2}$
2	$x^3\sqrt{9-16x}$	17	$\ln(1+2x-3x^2)$
3	$\frac{x^3}{4+x^2}$	18	$\frac{6x}{12+x-x^2}$
4	$(1+x)e^{-x}$	19	$\sqrt{x}\,\ln(1+x-2x^2)$
5	$\frac{x^5}{\sqrt{9+x^2}}$	20	$\frac{6}{8+2x-x^2}$
6	$\frac{x^4}{\sqrt{4-5x}}$	21	$\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$
7	$x^2\,arctg\,(x/2)$	22	$x^2\ln(1+x-2x^2)$
8	$\frac{\cos 2x-1}{x}$	23	$\frac{\sin x^2}{x^2}$
9	$\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$	24	$\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}$
10	$x^2\sqrt{16-3x}$	25	$\ln(1-x-6x^2)$

11	$\frac{arctg\,x}{x}-1$	26	$\frac{3x}{2-x-x^2}$
12	$x^3\cos 2x$	27	$\sin x - x\cos x$
13	$\frac{\sin\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}$	28	$\frac{x^5}{\sqrt[4]{16-3x}}$
14	$\frac{x^6}{\sqrt{4+x^2}}$	29	$\frac{e^x-e^{-x}}{2x}-1$
15	$(1+x^2)e^{-x^2}$	30	$x^3\ln(x^2+3x+2)$

Завдання 5. Наближено обчислити даний визначений інтеграл з граничною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0{,}001$, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд і потім інтегруючи його почленно.

№ в-та	Інтеграл	№ в-та	Інтеграл
1	$\int_0^1 \frac{e^{-x^2/4}-1}{x^2}dx$	16	$\int_0^{0,5} \frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x}dx$
2	$\int_0^{1/2} \frac{x-arctg\,x}{x^2}dx$	17	$\int_0^{0,2} \frac{e^{-x^2}-1}{x}dx$
3	$\int_0^{0,4} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$	18	$\int_0^{1/2} \frac{\sin x^2}{x}dx$
4	$\int_0^{0,5} \frac{\sin x^3}{x^2}dx$	19	$\int_0^{1/2} \frac{arctg\,x^2}{x^2}dx$
5	$\int_0^{1/4} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}dx$	20	$\int_0^1 \frac{e^{-x^3}-1}{x^2}dx$
6	$\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx$	21	$\int_0^{1/4} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

7	$\int\limits_0^1 x(e^{-x^2/2}-1)\ dx$	22	$\int\limits_0^{1/4} \sqrt{x}\cos x^2 dx$
8	$\int\limits_0^{0,5} \frac{1-\cos x^3}{x^5}\ dx$	23	$\int\limits_0^{1/4} \frac{e^{-2x^2}-1}{x\sqrt{x}} dx$
9	$\int\limits_0^{1/4} \sqrt{x}\ arctg\, x^2 dx$	24	$\int\limits_0^{1/8} \sqrt[3]{x^2}\ln(1+x^2)\ dx$
10	$\int\limits_0^{1/4} \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$	25	$\int\limits_0^{1/8} \sqrt[3]{x^2}(\cos 2x-1)\ dx$
11	$\int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin x^2 dx$	26	$\int\limits_0^{1/4} \sqrt{x}(\cos x-1)\,dx$
12	$\int\limits_0^{1/4} xe^{-\sqrt{x}} dx$	27	$\int\limits_0^{1/4} \sqrt{x}\ e^{-2x} dx$
13	$\int\limits_0^{3/4} \frac{1-\cos x^3}{x^4}\ dx$	28	$\int\limits_0^{1/4} \frac{arctg\, x}{\sqrt{x}}\ dx$
14	$\int\limits_0^{1/4} \sqrt{x^3}\sin x\ dx$	29	$\int\limits_0^1 x\ \sqrt[3]{1+x^2/4}\ dx$
15	$\int\limits_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^3)}{x^2} dx$	30	$\int\limits_0^{0,4} \frac{\sin x^2}{x^2} dx$

Завдання 6. Знайти k перших членів розвинення в ряд Тейлора

$$y = y(x_0) + y'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{y^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}\cdot(x-x_0)^{k-1} + \ldots$$

в околі початкової точки x_0 частинного розв'язку $y = y(x)$ даного диференціального рівняння, що задовольняє вказаним початковим умовам.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y''=xy$, $y(1)=-1$, $y'(1)=2$, $k=4$	16	$y'=y\sin x+y^2$, $y(0)=-1$, $k=3$
2	$y'=x^2-y^4$, $y(2)=-1$, $k=3$	17	$y'=ye^x-e^y$, $y(0)=0$, $k=3$
3	$y'=(3-2x)/y$, $y(2)=1$, $k=3$	18	$y'=x^4-y^2$, $y(-1)=1$, $k=3$
4	$y'=e^y+x^2y$, $y(-1)=0$, $k=4$	19	$y'=y^3-2xy$, $y(2)=-1$, $k=3$
5	$y'=2\cos x-y^2$, $y(0)=1$, $k=3$	20	$y''=y^2+e^x$, $y(0)=-1$, $y'(0)=2$, $k=4$
6	$y''=x/y'$, $y(1)=2$, $y'(1)=-1$, $k=4$	21	$y'=x^2+y^3$, $y(2)=-1$, $k=3$
7	$y'=e^x-y^3$, $y(0)=-1$, $k=3$	22	$y'=(1+y)/(2-x^2)$, $y(-1)=1$, $k=3$
8	$y'=y^2+3xy$, $y(-2)=1$, $k=3$	23	$y''=xy-(y')^2$, $y(2)=1$, $y'(2)=-1$, $k=4$
9	$y'=e^y+xy$, $y(-1)=0$, $k=3$	24	$y''=2x-(y')^2$, $y(1)=2$, $y'(1)=-1$, $k=4$
10	$y'=x^2y$, $y(2)=-1$, $k=3$	25	$y''=xy'+y^2$, $y(3)=-1$, $y'(3)=1$, $k=4$
11	$y'=x^2y-y^3$, $y(-1)=-1$, $k=3$	26	$y''=xy+4\sqrt{y'}$, $y(-1)=2$, $y'(-1)=1$, $k=4$
12	$y'=2\sqrt{x+y}-y^3$, $y(0)=1$, $k=3$	27	$y''=y^2-2\sqrt{y'}$, $y(1)=2$, $y'(1)=1$, $k=4$
13	$y'=xy-\ln y$, $y(3)=1$, $k=3$	28	$y''=y'/\cos x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $k=4$

14	$y'=\sin x-y^3$, $y(0)=1$, $k=3$	29	$y''=(y')^3-y\cos x$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$, $k=4$
15	$y'=x^3-y^3$, $y(-1)=1$, $k=3$	30	$y''=yy'-x^2$, $y(1)=2$, $y'(1)=1$, $k=4$

Завдання 7. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y=f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi;\pi]$ довжиною в період $T=2\pi$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графік даної функції $y=f(x)$ і графік суми $y=S(x)$ одержаного її розвинення на відрізку $[-3\pi;3\pi]$.

№ в-та	Функція $f(x)$	№ в-та	Функція $f(x)$
1	$\begin{cases}\pi, & -\pi<x<0;\\ 2x-\pi, & 0<x<\pi\end{cases}$	16	$\begin{cases}\sin(x/2), & -\pi<x<0;\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases}$
2	$x\sin x$, $x\in(-\pi;\pi)$	17	$\|x\|-2x$, $-\pi<x<\pi$
3	$\|\pi-2x\|$, $x\in(-\pi;\pi)$	18	$(\pi-x)/2$, $x\in(-\pi;\pi)$
4	$\begin{cases}x+\pi, & -\pi<x<0;\\ x-2\pi, & 0<x<\pi\end{cases}$	19	$\begin{cases}-2\pi, & -\pi<x\le 0;\\ 2x, & 0<x<\pi\end{cases}$
5	$x\cos x$, $x\in(-\pi;\pi)$	20	$x^2-\pi^2/2$, $x\in(-\pi;\pi)$
6	$\begin{cases}x+2\pi, & -\pi<x\le 0;\\ \pi-x, & 0<x<\pi\end{cases}$	21	$\begin{cases}x-\pi, & -\pi<x<0;\\ \pi, & 0<x<\pi\end{cases}$
7	$\begin{cases}x+3\pi, & -\pi<x<0;\\ \pi, & 0<x<\pi\end{cases}$	22	$\begin{cases}x, & -\pi<x<0;\\ \pi, & 0<x<\pi\end{cases}$
8	$\begin{cases}\pi/2, & -\pi<x<0;\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$	23	$\begin{cases}-\pi/2, & -\pi<x<0;\\ \pi/2-x, & 0<x<\pi\end{cases}$
9	$\begin{cases}2\pi, & -\pi<x<0;\\ 3x, & 0<x<\pi\end{cases}$	24	$\begin{cases}\pi/2+x, & -\pi\le x<0;\\ \pi, & 0\le x<\pi\end{cases}$
10	$\begin{cases}x/\pi, & -\pi\le x<0;\\ -1, & 0<x<\pi\end{cases}$	25	$\begin{cases}x, & -\pi<x\le 0;\\ \pi-x, & 0<x<\pi\end{cases}$

11	$\begin{cases} -x, & x\in(-\pi;0); \\ -\pi, & x\in(0;\pi) \end{cases}$	26	$\begin{cases} -x, & -\pi<x<0; \\ \pi, & 0<x<\pi \end{cases}$
12	$\begin{cases} 1, & -\pi<x<0; \\ e^{-x/\pi}, & 0<x<\pi \end{cases}$	27	$\begin{cases} -1, & -\pi<x<0; \\ \sin(x/2), & 0\le x\le\pi \end{cases}$
13	$\begin{cases} e^{x/\pi}, & -\pi<x<0; \\ -1, & 0<x<\pi \end{cases}$	28	$\begin{cases} -1, & -\pi<x<0; \\ \cos(x/2), & 0\le x\le\pi \end{cases}$
14	$\begin{cases} \pi\cos(x/2), & -\pi<x<0; \\ 0, & 0\le x<\pi \end{cases}$	29	$\begin{cases} -x/\pi, & -\pi<x\le 0; \\ x/\pi-1, & 0<x<\pi \end{cases}$
15	$\begin{cases} x^2/\pi^2, & -\pi<x\le 0; \\ -1, & 0<x<\pi \end{cases}$	30	$\begin{cases} \pi, & -\pi<x<0; \\ \pi/2-x, & 0<x<\pi \end{cases}$

Завдання 8.

Варіанти 1 – 15. Розвинути в ряд Фур'є за синусами неперіодичну функцію $y=f(x)$, що задана на відрізку $[0;l]$, спочатку продовживши її непарним способом на симетричний відрізок $[-l;l]$, а потім довизначивши до періодичної функції з періодом $T=2l$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графік продовженої періодичної непарної функції $y=f_*(x)$ і графік суми $y=S(x)$ одержаного її розвинення на відрізку $[-3l;3l]$. Знайти значення $S(0)$ і $S(l/2)$. Зобразити діаграму амплітудного спектра $A_n=A_n(\omega_n)$, $n=\overline{1,4}$.

Варіанти 16 – 30. Розвинути в ряд Фур'є за косинусами неперіодичну функцію $y=f(x)$, що задана на відрізку $[0;l]$, спочатку продовживши її парним способом на симетричний відрізок $[-l;l]$, а потім довизначивши до періодичної функції з періодом $T=2l$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графік продовженої періодичної парної функції $y=f_*(x)$ і графік суми $y=S(x)$ одержаного її розвинення на відрізку $[-3l;3l]$. Знайти значення $S(0)$ і $S(l/2)$. Зобразити діаграму амплітудного спектра $A_n=A_n(\omega_n)$, $n=\overline{1,4}$.

№ в-та	Функція $f(x)$	№ в-та	Функція $f(x)$
1	$\begin{cases} x, & 0<x<3; \\ 6-x, & 3\le x\le 6 \end{cases}$	16	$\begin{cases} x, & 0<x<3; \\ 6-x, & 3\le x\le 6 \end{cases}$
2	$(e^x+e^{-x})/2$, $x\in(0;2)$	17	$(e^x-e^{-x})/2$, $x\in(0;2)$
3	$\begin{cases} 2x, & 0\le x<1; \\ 3-x, & 1\le x<2 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x, & 0\le x<1; \\ 2-x, & 1\le x<2 \end{cases}$
4	$(\pi-2x)/4$, $0<x<\pi$	19	$x\sin x$, $x\in(0;\pi)$
5	$x\sin x$, $x\in(0;\pi)$	20	$e^x/2$, $x\in(0;2)$
6	$\begin{cases} x, & 0<x<2; \\ 4-x, & 2\le x<4 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 2x, & 0<x<2; \\ 6-x, & 2\le x<4 \end{cases}$
7	$\cos(x/2)$, $x\in(0;\pi)$	22	$x/2$, $x\in(0;2)$
8	$2e^{-x}$, $x\in(0;1)$	23	$\sin(x/2)$, $x\in(0;\pi)$
9	x^2/π^2, $x\in(0;\pi)$	24	x^2/π^2, $x\in(0;\pi)$
10	$x\cos x$, $x\in(0;\pi)$	25	$x\cos x$, $x\in(0;\pi)$
11	$\cos 2x$, $x\in(0;\pi/2)$	26	$\pi\sin x$, $x\in(0;\pi/2)$
12	$\pi\cos x$, $x\in(0;\pi/2)$	27	e^x+e^{-x}, $x\in(0;1)$
13	e^x-e^{-x}, $x\in(0;1)$	28	$\sin 2x$, $x\in(0;\pi/2)$
14	$\begin{cases} x^2, & 0<x<1; \\ 2x-x^2, & 1<x<2 \end{cases}$	29	$\begin{cases} x^2, & 0<x<1; \\ 2x-x^2, & 1<x<2 \end{cases}$
15	$1-\cos x$, $0<x<\pi/2$	30	$1-\sin x$, $0<x<\pi/2$

Завдання 9. Розвинути в ряд Фур’є в комплексній формі періодичну функцію $y=f(x)$, що задана на відрізку $[-l;l]$ довжиною в період $T=2l$, $l>0$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графік функції $y=f(x)$ і графік суми $y=S(x)$ одержаного її розвинення на відрізку $[-3l;3l]$.

№ в-та	Функція $f(x)$	№ в-та	Функція $f(x)$
1	$\cos(x/2),\ -\pi\le x\le\pi$	16	$3e^{-2x},\ \ -\pi\le x<\pi$
2	$\begin{cases}2, & -4<x<0;\\ 3e^{-x/4}, & 0<x<4\end{cases}$	17	$\begin{cases}1, & -1\le x<0;\\ e^{x}, & 0<x<1\end{cases}$
3	$\begin{cases}2e^{x}, & -1\le x<0;\\ 2e^{-x}, & 0\le x<1\end{cases}$	18	$\begin{cases}2, & -\pi/2\le x\le 0;\\ \cos x, & 0<x<\pi/2.\end{cases}$
4	$\begin{cases}3\pi, & -\pi<x<0;\\ \pi-2x, & 0<x<\pi\end{cases}$	19	$\begin{cases}2\pi-x, & -\pi\le x<0;\\ 2x+\pi, & 0\le x<\pi\end{cases}$
5	$\begin{cases}2x, & -3<x<0;\\ 4, & 0<x<3\end{cases}$	20	$\begin{cases}4, & -1\le x<0;\\ 4e^{-x}, & 0\le x<1\end{cases}$
6	$\begin{cases}x^{2}, & -1<x\le 0;\\ 0, & 0<x<1\end{cases}$	21	$\begin{cases}2x, & -2<x<0;\\ 3, & 0<x<2\end{cases}$
7	$3\sin(x/2),\ \ -\pi<x\le\pi$	22	$e^{2x}+e^{-2x},\ \ -\pi\le x<\pi$
8	$xe^{-2x},\ \ -1<x\le 1$	23	$4x^{2},\ \ -1\le x\le 1$
9	$\begin{cases}\pi-2x, & -\pi/2\le x<0;\\ 2x+\pi, & 0\le x<\pi/2\end{cases}$	24	$\begin{cases}2+x, & -3<x<0;\\ 3-x, & 0<x<3\end{cases}$
10	$e^{3x}-e^{-3x},\ \ -1<x<1$	25	$(x+2)e^{-x},\ -2<x<2$
11	$\begin{cases}\sin x, & -\pi/2\le x<0;\\ 2, & 0\le x<\pi/2\end{cases}$	26	$\begin{cases}-2, & -\pi/2<x\le 0;\\ \pi\cos x, & 0<x<\pi/2\end{cases}$
12	$e^{-2x}\cos x,\ \ -\pi<x<\pi$	27	$2e^{-x}\sin x,\ \ -\pi\le x\le\pi$
13	$\begin{cases}x^{2}-1, & -1<x\le 0;\\ -1, & 0<x<1\end{cases}$	28	$\begin{cases}3-x, & -2<x<0;\\ 3e^{-x}, & 0<x<2\end{cases}$
14	$\begin{cases}1+x, & -2<x<0;\\ e^{-3x}, & 0<x<2\end{cases}$	29	$\begin{cases}xe^{x}, & -\pi<x<0;\\ 2, & 0<x<\pi\end{cases}$
15	$\begin{cases}\sin 2x, & -\pi/2\le x<0;\\ 2, & 0\le x\le\pi/2\end{cases}$	30	$\begin{cases}\cos 2x, & -\pi/2\le x<0;\\ e^{-2x}, & 0\le x<\pi/2\end{cases}$

Змістовий модуль 2.

ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

2.1. Поверхні другого порядку та інші поверхні

Поверхні розглядаються в декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$.

Форма і властивості поверхні встановлюються за допомогою ***методу паралельних перерізів***: побудови і дослідження просторових ліній перетину поверхні координатними площинами (***головні перерізи***) і площинами, що їм паралельні.

2.1.1. Сфера як поверхня другого порядку

Сферичною поверхнею (***сферою***) називається множина всіх точок $M(x, y, z)$ простору, кожна з яких віддалена від заданої точки $C(x_0, y_0, z_0)$ (***центра*** сфери) на задану відстань R (***радіус*** сфери) (рис. 14).

Зауваження 1. Сфера є обмеженою замкненою поверхнею, яка симетрична відносно центра. Довільна пряма, що проходить через її центр, служить віссю симетрії сфери. Довільна площина, що проходить через центр сфери, служить її площиною симетрії.

Для довільної точки $M(x, y, z)$ сфери виконується рівність $CM = R$. Але $CM = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. Тому

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R.$$

Підносячи до квадрата, отримуємо

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2}.$$

– ***рівняння сфери зі зміщеним центром***. Це рівняння другого степеня. Отже, сфера – одна з поверхонь другого порядку.

Якщо центр сфери співпадає з початком координат $O(0,0,0)$, то маємо ***канонічне рівняння сфери***

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}.$$

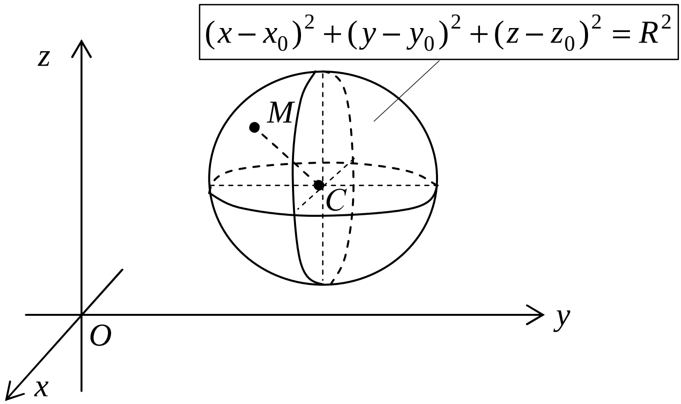

Рис. 14

2.1.2. Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина всіх точок простору, координати яких задовольняють її ***загальне рівняння***

$$\boxed{Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0},$$

де A,B,C,D,E,F,G,H,I,J – ***сталі коефіцієнти***, причому хоча б один з коефіцієнтів A,B,C,D,E,F відмінний від нуля, тобто

$$\boxed{A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2\neq 0}.$$

Існує дев'ять типів дійсних невироджених поверхонь другого порядку: три циліндра – еліптичний, гіперболічний і параболічний; конус другого порядку; еліпсоїд (зокрема, сфера); однопорожнинний гіперболоїд; двопорожнинний гіперболоїд; еліптичний параболоїд; гіперболічний параболоїд.

Тип поверхні визначається зведенням її рівняння до відповідного стандартного вигляду. Завжди можна вибрати таку систему координат, в якій указане стандартне подання набуває ***канонічної*** (***найпростішої***) ***форми***.

Зауваження. Крім зазначених поверхонь, загальному рівнянню другого порядку може відповідати один з вироджених випадків: сукупність двох площин чи прямих, площина, пряма, точка чи порожня множина. Порожній множині відповідає певна уявна поверхня, при цьому загальне рівняння втрачає геометричний смисл. Надалі обмежимося розглядом тільки дійсних невироджених поверхонь.

Приклад. Показати, що задане рівняння є рівнянням сфери, та знайти її центр і радіус:

а) $4x^2+4y^2+4z^2-16x+24y+12z+25=0$;

б) $3x^2+3y^2+3z^2-6y+5z+3=0$.

□ а) Згрупуємо окремо члени з x, y і z, а потім виділимо повні квадрати двочленів відповідного вигляду $x\pm a$, $y\pm b$ і $z\pm c$:

$$4x^2+4y^2+4z^2-16x+24y+12z+25=0;$$

$$4(x^2-4x)+4(y^2+6y)+4(z^2+3z)+25=0;$$

$$(x^2-2\cdot 2x+2^2-2^2)+(y^2+2\cdot 3y+3^2-3^2)+$$

$$+\left(z^2+2\cdot(3/2)z+(3/2)^2-(3/2)^2\right)+25/4=0;$$

$$(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+(z+3/2)^2-9/4+25/4=0;$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+3/2)^2=9.$$

Одержане рівняння описує сферу з центром у точці $C\left(2,-3,\,-3/2\right)$ і радіусом $R=3$.

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь:

$$x^2+(y-1)^2+(z+5/6)^2=25/36;\;\; C\left(0,1,\,-5/6\right);\;\; R=5/6.\ \blacksquare$$

2.1.3. Довільна циліндрична поверхня

Циліндричною поверхнею (***циліндром***) називається поверхня, утворена рухом прямої (***твірної***) l, яка перетинає задану лінію (***напрямну***) l_0, залишаючись паралельною заданій прямій a_0, причому вказані лінії l_0 і a_0 не лежать в одній площині.

Поверхні, твірні яких є прямими лініями, називаються ***лінійчатими***. Оскільки лінійчаті поверхні конструюються з прямолінійних рейок, то такі поверхні широко використовують у будівництві (опори, башти, перекриття, покрівлі і т.п.).

Зауваження 1. Циліндр є лінійчатою поверхнею. Його можна уявити як “огорожу” з прямих, виставлену вздовж лінії l_0.

Теорема. *У просторі* $Oxyz$ *кожне рівняння з двома змінними* $\boxed{F(x,y)=0}$, *що не містить координати* z, *визначає циліндричну поверхню* S, *твірні якої паралельні осі* Oz, *а напрямною служить лінія*

$$l_0:\begin{cases}F(x,y)=0;\\ z=0,\end{cases}$$

що лежить у площині Oxy (рис. 15).

□ Для довільної точки $M(x,y,z)$ вертикальної циліндричної поверхні S з напрямною

$$l_0:\begin{cases}F(x,y)=0;\\ z=0\end{cases}$$

її проекція $N(x,y,0)$ на площину Oxy лежить на цій лінії l_0, а значить, задовольняє її рівняння: $F(x,y)=0$; $0=0$.

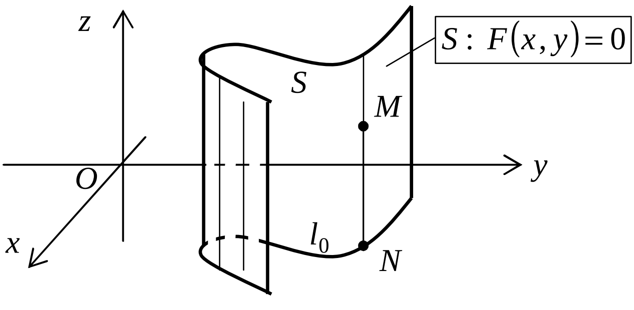

Рис. 15

Отже, координати точки $M(x,y,z)$ задовольняють рівняння $F(x,y)=0$, оскільки воно не містить змінної z.

Очевидно, що координати точок, які не лежать на поверхні S, це рівняння не задовольняють, оскільки вони проектуються на площину Oxy поза лінією l_0. ■

<u>Зауваження 2</u>. Рівняння $F(y,z)=0$, що не містить змінну x, у просторі визначає циліндричну поверхню з твірними, які паралельні осі Ox. Рівняння $F(x,z)=0$, що не містить змінну y, у просторі визначає циліндричну поверхню з твірними, які паралельні осі Oy.

2.1.4. Циліндричні поверхні другого порядку

Розглянемо ***циліндричні поверхні другого порядку***:

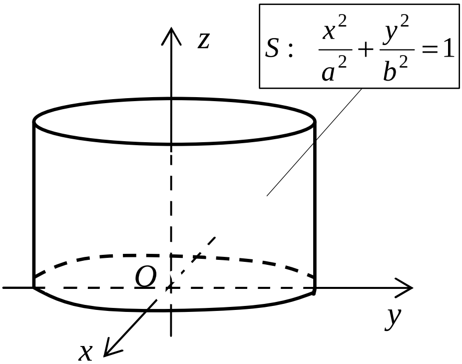

Рис. 16

1) ***Еліптичний циліндр*** (рис. 16) має канонічне рівняння

$$\boxed{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1}.$$

Зокрема, якщо $a=b=R$, то рівняння

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

визначає ***круговий циліндр***.

Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії еліптичного циліндра. Вісь Oz називається ***прямою центрів*** еліптичного циліндра, оскільки кожна точка цієї осі є його центром симетрії.

2) ***Гіперболічний циліндр*** (рис. 17) має канонічне рівняння

$$\boxed{x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1}.$$

Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії гіперболічного циліндра. Вісь Oz називається ***прямою центрів*** гіперболічного циліндра, оскільки кожна точка цієї осі є його центром симетрії.

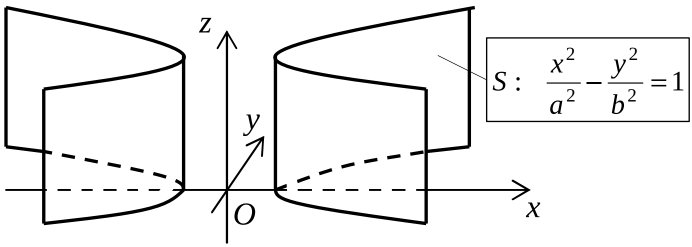

Рис. 17

3) ***Параболічний циліндр*** (рис. 18) має канонічне рівняння

$$\boxed{y^2 = 2px}\ .$$

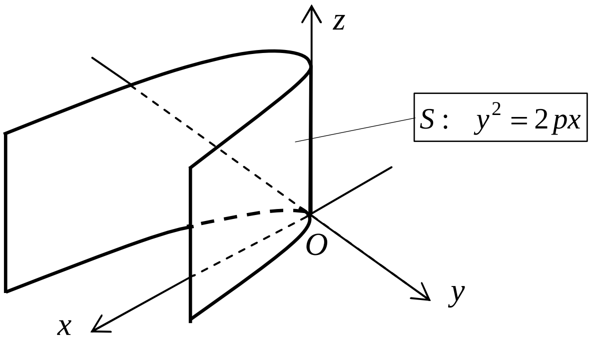

Рис. 18

Дві координатні площини Oxy і Oxz служать площинами симетрії, а координатна вісь Ox – віссю симетрії параболічного циліндра.

Приклад. Звести рівняння заданої циліндричної поверхні до канонічного вигляду і побудувати зображення її відповідної частини:

а) $9x^2+16y^2=144$, $|z|\le 4$; б) $16x^2-25y^2=400$, $|z|\le 4$; в) $y^2-8x=0$, $|z|\le 4$. (Виконати самостійно).

2.1.5. Довільна конічна поверхня. Конус другого порядку

Конічною поверхнею (***конусом***) називається поверхня, утворена рухом прямої (***твірної***) l, яка проходить через задану точку $C(x_0, y_0, z_0)$ (***вершину***) і перетинає задану лінію (***напрямну***) l_0, причому задана точка C не лежить на заданій лінії l_0.

Нехай напрямна l_0 задана як перетин двох поверхонь

$$l_0: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0; \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Конус є лінійчатою поверхнею. Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка конічної поверхні. Тоді рівняння твірної, на якій лежить ця точка, можна подати у вигляді рівняння прямої, що проходить через дві точки – вершину $C(x_0, y_0, z_0)$ і точку $N(X, Y, Z)$ перетину твірної та напрямної:

$$\frac{x - x_0}{X - x_0} = \frac{y - y_0}{Y - y_0} = \frac{z - z_0}{Z - z_0}.$$

Якщо вилучити з наведених рівнянь для довільної точки твірної $M(x, y, z)$ (ця точка одночасно належить конічній поверхні) координати точки перетину $N(X, Y, Z)$, використовуючи співвідношення

$$\begin{cases} F_1(X, Y, Z) = 0; \\ F_2(X, Y, Z) = 0. \end{cases}$$

то отримаємо рівняння конічної поверхні

$$F(x, y, z) = 0.$$

Складемо рівняння конуса з вершиною в початку координат $O(0,0,0)$, напрямною якого служить еліпс

$$\begin{cases} x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1; \\ z = c \end{cases}$$

з півосями a і b, що лежить у площині $z = c$, яка перпендикулярна до осі Oz .

Канонічні рівняння твірної, що проходить через точку $N(X, Y, Z)$ напрямної, мають вигляд

$$x/X = y/Y = z/Z, \text{ де } X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1, \; Z = c.$$

Враховуючи $Z = c$, з рівнянь твірної маємо:

$$X = xZ/z = xc/z; \; Y = yZ/z = yc/z.$$

Підставимо ці вирази у перше співвідношення для координат точки N і дістанемо:

$$(xc/z)^2/a^2 + (yc/z)^2/b^2 = 1; \quad \boxed{x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0}$$

– ***канонічне рівняння конуса другого порядку*** (***еліптичного конуса***) (рис. 19).

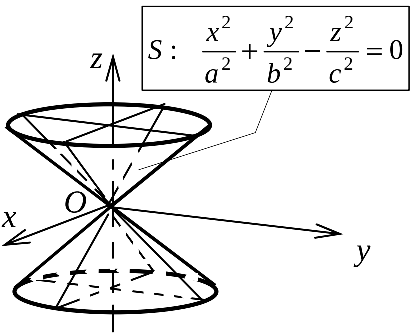

Рис. 19

Вершина $O(0,0,0)$ є центром симетрії, вісь Oz – віссю симетрії, а координатні площини – площинами симетрії даного конуса.

Зокрема, якщо $a = b$, то рівняння

$$\boxed{x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/c^2 = 0}$$

визначає ***круговий конус***.

Зауваження. Коло, еліпс, гіперболу і параболу можна одержати як лінії перетину кругового конуса площиною.

Приклад 1. Звести рівняння заданого конуса другого порядку до канонічного вигляду і побудувати зображення його відповідної частини:

а) $4x^2 + 9y^2 = 36z^2$, $|z| \le 2$; б) $x^2 + y^2 = z^2$, $|z| \le 1$.

(Виконати самостійно).

Приклад 2. Побудувати лінію перетину кругового конуса $x^2/9 + y^2/9 - z^2/4 = 0$ заданою площиною і вказати її тип:

а) $z=2$; б) $x=3$; в) $z=(2/3)x+4$.

□ (Розв'язати самостійно). Відповідь: а) коло $\begin{cases} x^2+y^2=9; \\ z=2; \end{cases}$

б) гіпербола $\begin{cases} z^2/4-y^2/9=1; \\ x=3; \end{cases}$ в) парабола $\begin{cases} y^2=12(x+3); \\ z=(2/3)x+4. \end{cases}$ ■

2.1.6. Поверхні обертання

Поверхня, утворена обертанням плоскої лінії (***твірної***, ***меридіана***) l навколо заданої прямої a_0 (***осі обертання***), що лежить у площині лінії l, називається ***поверхнею обертання***.

Коло, яке описує довільна точка твірної l при обертанні, називається ***паралеллю***. Площина паралелі перпендикулярна до осі обертання a_0.

Теорема. *Нехай лінія* l *лежить у площині* Oyz *і задається рівняннями*

$$\begin{cases} F(y,z)=0; \\ x=0. \end{cases}$$

Якщо ця лінія обертається навколо осі Oz, *то утворюється поверхня обертання, рівняння якої*

$$\boxed{F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\,,\,z\right)=0}\,.$$

□ Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка поверхні обертання (рис. 20). Проведемо через цю точку паралель, яка перетинає твірну l у точці $N(0,Y,z)$. Таким чином, точці $M(x,y,z)$ при обертанні відповідає єдина точка $N(0,Y,z)$ твірної.

Нехай $K(0,0,z)$. – центр кола паралелі. Оскільки MK і NK – радіуси одного і того ж кола, то $NK=MK$. Але $NK=|Y|$; $MK=\sqrt{x^2+y^2}$. Тоді $|Y|=\sqrt{x^2+y^2}$; $Y=\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Оскільки точка $N\left(0,\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)$ належить твірній, то її координати задовольняють рівняння цієї лінії:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0 .$$

Одержане рівняння є рівнянням поверхні обертання, оскільки його задовольняють координати x,y,z довільної точки цієї поверхні, а координати інших точок простору це рівняння не задовольняють (їм при обертанні відповідають точки, що лежать поза твірною). ■

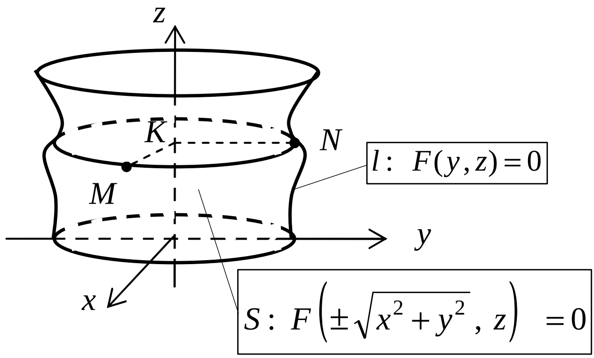

Рис. 20

<u>Правило</u>: *Щоб одержати рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї площини, треба у рівнянні лінії зробити заміну змінних: змінну, що відповідає осі обертання, залишити тією самою, а іншу змінну замінити на "плюс / мінус" квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат.*

Наприклад

$$\begin{array}{c} F\left(y,z\right)=0 \\ \circlearrowleft Oz \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} z\to z \\ y\to\pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right)=0 .$$

<u>Приклад</u>. Знайти рівняння поверхні, отриманої обертанням прямої $y=z$, що лежить у площині Oyz, навколо осі Oz.

□ Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{matrix} y = z \\ \lrcorner Oz \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \pm\sqrt{x^2+y^2} = z .$$

Підносячи до квадрата ліву та праву частини останнього рівняння, отримаємо $x^2 + y^2 = z^2$. Звідси маємо

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

– канонічне рівняння кругового конуса. ■

2.1.7. Еліпсоїд обертання. Еліпсоїд загального вигляду

Якщо еліпс $y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо осі Oz, то дістанемо ***еліпсоїд обертання*** навколо осі Oz (***сфероїд***) (рис. 21).

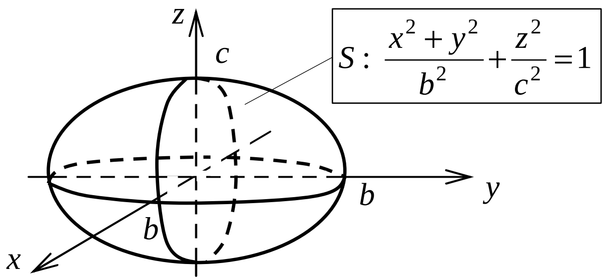

Рис. 21

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{matrix} y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 \\ \lrcorner Oz \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 / b^2 + z^2/c^2 = 1 .$$

Звідси одержуємо

$$\boxed{(x^2+y^2)/b^2 + z^2/c^2 = 1}$$

– ***канонічне рівняння*** еліпсоїда обертання.

Зокрема, якщо $b = c = R$, то маємо канонічне рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Піддаючи еліпсоїд обертання $(x^2 + y^2)/b^2 + z^2/c^2 = 1$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну $x \to kx$; $y \to y$; $z \to z$.

У результаті дістанемо

$$\left(((b/a)x)^2 + y^2\right)/b^2 + z^2/c^2 = 1; \quad \boxed{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1}$$

– ***канонічне рівняння еліпсоїда загального вигляду*** (***еліпсоїда***) (рис. 22).

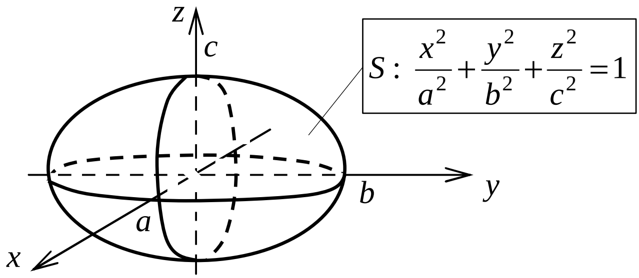

Рис. 22

Еліпсоїд має форму обмеженої замкненої овальної поверхні. Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається ***центром*** еліпсоїда.

Величини a, b і c називаються ***півосями*** еліпсоїда. Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, то маємо еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою, то – сферу.

Зауваження. Лінією перетину еліпсоїда довільною площиною є еліпс.

Приклад. Звести рівняння заданого еліпсоїда до канонічного вигляду і побудувати його зображення:

а) $16x^2+9y^2+36z^2=144$; б) $9x^2+4y^2+9z^2=36$.

(Виконати самостійно).

2.1.8. Однопорожнинний гіперболоїд обертання. Однопорожнинний гіперболоїд загального вигляду

Якщо гіперболу $y^2/b^2-z^2/c^2=1$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо уявної осі Oz, то отримаємо ***однопорожнинний гіперболоїд обертання*** навколо осі Oz.

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\underset{\circlearrowleft Oz}{y^2/b^2-z^2/c^2=1} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} z\to z \\ y\to\pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2/b^2-z^2/c^2=1.$$

Звідси маємо

$$\boxed{(x^2+y^2)/b^2-z^2/c^2=1}$$

– ***канонічне рівняння*** однопорожнинного гіперболоїда обертання.

Піддаючи однопорожнинний гіперболоїд обертання

$$(x^2+y^2)/b^2-z^2/c^2=1$$

рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k=b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну $x\to kx$; $y\to y$; $z\to z$.

У результаті одержимо

$$\left(((b/a)x)^2+y^2\right)/b^2-z^2/c^2=1; \quad \boxed{x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1}$$

– ***канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда загального вигляду*** (***однопорожнинного гіперболоїда***) (рис. 23).

Величини a, b і c називаються ***півосями*** однопорожнинного гіперболоїда.

Однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, що розширюється в обидва боки від площини симетрії $z=0$ вздовж осі симетрії Oz. Поперечним перерізом є еліпс. Найвужчий

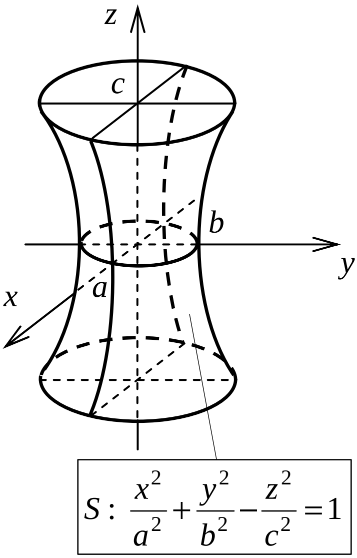

Рис. 23

з перерізів – при $z = 0$. Він називається ***горловим***. Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається ***центром*** однопорожнинного гіперболоїда.

Зауваження. Однопорожнинний гіперболоїд є лінійчатою поверхнею.

Приклад. Звести рівняння заданого однопорожнинного гіперболоїда до канонічного вигляду і побудувати зображення його відповідної частини:

а) $36x^2 + 9y^2 - 16z^2 = 144$,

$$|z| \le 3\sqrt{3};$$

б) $4x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$, $|z| \le 2$.

(Виконати самостійно).

2.1.9. Двопорожнинний гіперболоїд обертання. Двопорожнинний гіперболоїд загального вигляду

Якщо гіперболу $y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо дійсної осі Oz, то дістанемо ***двопорожнинний гіперболоїд обертання*** навколо осі Oz.

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\underset{\circlearrowleft Oz}{y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \Big/ b^2 - z^2/c^2 = -1.$$

Звідси отримуємо

$$\boxed{(x^2+y^2)\big/b^2 - z^2\big/c^2 = -1}$$

– ***канонічне рівняння*** двопорожнинного гіперболоїда обертання.

Піддаючи двопорожнинний гіперболоїд обертання

$$(x^2+y^2)\big/b^2 - z^2\big/c^2 = -1$$

рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну $x \to kx$; $y \to y$; $z \to z$.

У результаті одержимо

$$\left(((b/a)\,x)^2 + y^2\right)\big/b^2 - z^2\big/c^2 = -1;\quad \boxed{x^2\big/a^2 + y^2\big/b^2 - z^2\big/c^2 = -1}$$

– ***канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда загального вигляду*** (***двопорожнинного гіперболоїда***) (рис. 24).

Величини a, b і c називаються ***півосями*** двопорожнинного гіперболоїда.

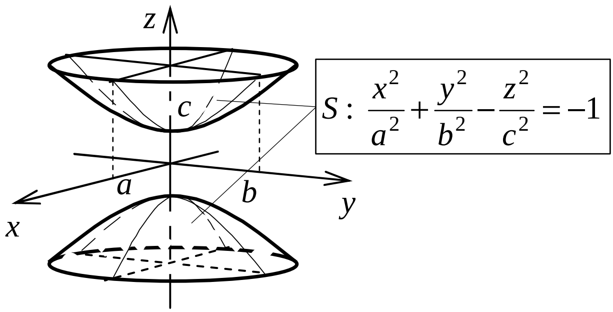

Рис. 24

Двопорожнинний гіперболоїд складається з двох симетричних порожнин, кожна з яких має форму нескінченної опуклої чаші. Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається ***центром*** двопорожнинного гіперболоїда.

Приклад. Звести рівняння заданого двопорожнинного гіперболоїда до канонічного вигляду і побудувати зображення його відповідної частини:

а) $144x^2 + 225y^2 - 400z^2 = -3600$, $|z| \le 3\sqrt{5}$;

б) $4x^2 + 4y^2 = z^2 - 16$, $|z| \le 4\sqrt{2}$.

(Виконати самостійно).

2.1.10. Параболоїд обертання. Параболоїд загального вигляду

Якщо параболу $y^2 = 2pz$, $p > 0$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо її осі Oz, то дістанемо ***параболоїд обертання*** навколо осі Oz.

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{matrix} y^2 = 2pz \\ \lrcorner Oz \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 2pz \ .$$

Звідси маємо

$$\boxed{\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z}$$

– ***канонічне рівняння*** параболоїда обертання.

Піддаючи параболоїд обертання $x^2/(2p) + y^2/(2q) = z$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Oy з коефіцієнтом деформації $k = \sqrt{p/q}$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну

$$x \to x\ ;\ \ y \to ky\ ;\ \ z \to z\ .$$

У результаті одержимо

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{\left(\sqrt{p/q}\, y\right)^2}{2p} = z\ ; \quad \boxed{\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z}$$

– ***канонічне рівняння параболоїда загального вигляду*** (***еліптичного параболоїда***) (рис. 25).

Величини p і q називаються ***параметрами*** еліптичного параболоїда, $p > 0$, $q > 0$.

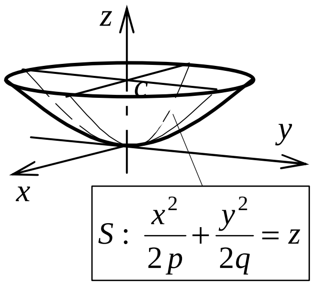

Рис. 25

Еліптичний параболоїд має форму нескінченної опуклої чаші. Дві координатні площини Oxz і Oyz служать площинами симетрії, а координатна вісь Oz – віссю симетрії. Початок координат називається ***вершиною*** еліптичного параболоїда.

<u>Зауваження</u>. Еліптичний параболоїд можна утворити рухом однієї параболи $y^2 = 2qz$, $q > 0$ вздовж іншої параболи $x^2 = 2pz$, $p > 0$ так, що площина першої параболи залишається паралельною координатній площині Oyz, а її вершина ковзає по другій параболі. Площини цих парабол перпендикулярні між собою. При цьому рухома і нерухома параболи повернуті опуклостями в один бік – вершиною вниз.

<u>Приклад</u>. Звести рівняння заданого еліптичного параболоїда до канонічного вигляду і побудувати зображення його відповідної частини:

а) $4x^2 + 9y^2 = 36z$, $0 \le z \le 4$; б) $x^2 + y^2 - 16z = 0$, $0 \le z \le 1$.

(Виконати самостійно).

2.1.11. Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня (рис. 26), що задається ***канонічним рівнянням***

$$\boxed{\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z}$$

Величини p і q називаються ***параметрами*** гіперболічного параболоїда, $p > 0$, $q > 0$.

Ця поверхня утворюється рухом однієї параболи $y^2 = -2qz$, $q > 0$ вздовж іншої параболи $x^2 = 2pz$, $p > 0$ так, що площина першої параболи залишається паралельною координатній площині

Oyz, а її вершина ковзає по другій параболі. Площини цих парабол перпендикулярні між собою. При цьому рухома і нерухома параболи повернуті опуклостями у протилежні боки: перша напрямлена вершиною вверх, а друга – вершиною вниз.

Гіперболічний параболоїд має форму сідла. Початок координат $O(0,0,0)$ (***вершина*** гіперболічного параболоїда) є ***сідловою точкою*** (***точкою перевалу***) цієї поверхні. Дві координатні площини Oxz і Oyz служать площинами симетрії, а координатна вісь Oz – віссю симетрії.

Зауваження. Гіперболічний параболоїд є лінійчатою поверхнею.

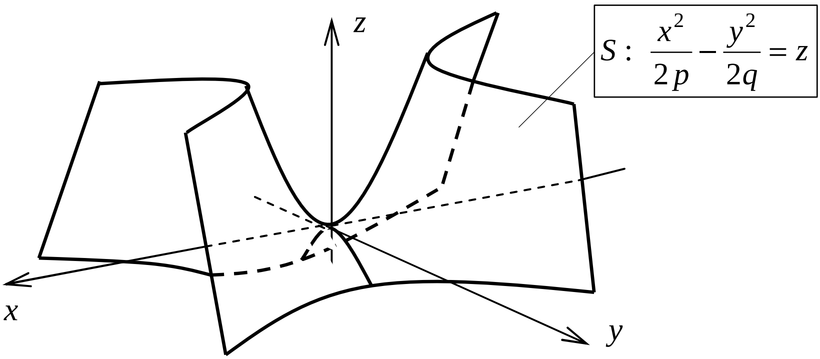

Рис. 26

Приклад 1. Звести рівняння заданого гіперболічного параболоїда до канонічного вигляду і побудувати зображення його відповідної частини:

а) $9x^2 - 16y^2 = 144z$, $|z| \le 4$; б) $x^2 - y^2 - 4z = 0$, $|z| \le 1$.

(Виконати самостійно).

Приклад 2. Визначити тип заданої поверхні другого порядку, звівши її рівняння до відповідного канонічного вигляду:

а) $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0$; б) $36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 0$;

в) $16x^2 + 9y^2 - z^2 - 144 = 0$; г) $9x^2 - 4y^2 - 16z^2 - 144 = 0$;

д) $4x^2+25y^2-100z=0$; е) $9x^2-25y^2-225z=0$;

є) $4x^2-25y^2-100=0$; ж) $x^2+4y^2-4=0$; з) $x^2-4y=0$.

□ (Розв'язати самостійно). Відповідь:

а) еліпсоїд; б) конус другого порядку; в) однопорожнинний гіперболоїд; г) двопорожнинний гіперболоїд; д) еліптичний параболоїд; е) гіперболічний параболоїд; є) гіперболічний циліндр; ж) еліптичний циліндр; з) параболічний циліндр. ■

2.2. Диференціальне числення функцій декількох змінних

Поняття і методи диференціального числення узагальнюються на випадок функцій двох чи більшого числа змінних.

2.2.1. Поняття функції багатьох змінних. Область визначення

Нехай n – деяке фіксоване натуральне число. Упорядкована множина n довільних дійсних чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називаються n-***вимірною точкою*** і позначається однією буквою, наприклад, M. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються ***координатами*** точки M. Позначається $M(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Множина всіх n-вимірних точок називається n-***вимірним точковим простором*** R^n.

Нехай задано деяку n-вимірну непорожню множину D. Якщо за вказаним правилом (***законом відповідності***) f кожній точці M цієї множини відповідає одне цілком певне значення дійсної змінної u, то кажуть, що задано ***функцію*** n ***змінних*** $u=f(M)=$ $=f(x_1, x_2, ..., x_n)$. При цьому множину D називають ***областю визначення*** функції $u=f(M)$. Незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ називають ***аргументами***, а залежну змінну u – ***функцією***.

Якщо D – область на координатній площині Oxy (плоска, двовимірна), то функція $z=f(M)=f(x,y)$ є ***функцією двох змінних*** x, y.

Якщо D – область у тривимірному координатному просторі

$Oxyz$, то функція $u = f(M) = f(x, y, z)$ є ***функцією трьох змінних*** x, y, z.

Нехай $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ – деяка точка n-вимірного простору. Множина всіх точок цього простору, для кожної з яких $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ відстань $\rho = M_0M$ від точки M_0 менша ε, тобто виконується умова

$$\rho = M_0M = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2} < \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – деяке додатне число, називається ε***-околом*** точки M_0 і позначається $U(M_0, \varepsilon)$.

У випадку двовимірного простору (площини) ε-околом точки M_0 є внутрішня частина круга радіуса ε з центром M_0.

Зауваження 1. Надалі обмежимось, в основному, розглядом функцій лише двох і, рідше, трьох змінних. На випадок функцій більшого числа змінних відповідні результати поширюються за аналогією.

Зауваження 2. Якщо функція задана аналітично (формулами) без будь-яких додаткових умов, то розглядають її ***природну область визначення*** (***область допустимих значень***) D – множину всіх тих точок, у яких дані аналітичні вирази мають смисл.

Приклад 1. Знайти і зобразити штриховкою на координатній площині Oxy природну область визначення D заданої функції:

а) $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$; б) $z = \sqrt{y^2 - 1 - x}$;

в) $z = \arcsin\left((x - 3y)/6\right) + 1 \big/ \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

□ а) Природна область визначення D даної функції $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$ – множина всіх тих точок (x, y), для яких $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, бо логарифм визначений тільки для додатних значень аргументу, а жодних інших обмежень на змінні x, y немає.

Щоб зобразити область D геометрично, знайдемо її межу:

$$9 - x^2 - 9y^2 = 0; \quad x^2 + 9y^2 = 9; \quad x^2/9 + y^2/1 = 1.$$

Це рівняння еліпса з півосями $a = 3$ та $b = 1$. Даний еліпс у залежності від знака виразу $9 - x^2 - 9y^2$ ділить всю координатну площину Oxy на дві частини – внутрішню і зовнішню (рис. 27).

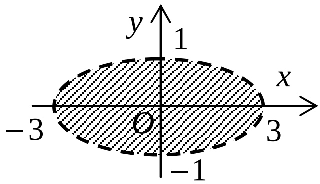

Рис. 27

Щоб виявити, яка з частин входить у область визначення, тобто задовольняє умову $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, треба взяти довільно по одній пробній внутрішній точці з кожної частини і для них перевірити цю умову. Наприклад, для точки $O(0,0)$ умова виконується $9 - 0^2 - 9 \cdot 0^2 = 9 > 0$, тому внутрішня область, обмежена еліпсом, входить в D. Для точки $B(0,2)$ ця умова не виконується $9 - 0^2 - 9 \cdot 2^2 = -27 < 0$, тому область, що лежить поза еліпсом, не входить в D.

Отже, внутрішніми точками області визначення D даної функції є точки, обмежені еліпсом. Сам еліпс не належить області D, тому що для його точок $9 - x^2 - 9y^2 = 0$. Область D – відкрита, її межа позначена пунктиром (рис. 27).

б) Квадратний корінь добувається тільки з невід’ємних чисел, тому $y^2 - 1 - x \ge 0$. Жодних інших обмежень на аргументи x, y немає.

Щоб зобразити область визначення D геометрично, знайдемо її межу: $y^2 - 1 - x = 0$; $y^2 = x + 1$.

Це рівняння визначає параболу, яка в залежності від знака виразу $y^2 - 1 - x$ поділяє координатну площину на дві частини – внутрішню і зовнішню.

Точка $O(0,0)$ лежить усередині параболи і не задовольняє належній умові. Точка $A(-2,0)$ лежить зовні параболи і задовольняє цій умові. Отже, область визначення D складається з точок, що лежать ззовні параболи. Область D – замкнена, її межа позначена суцільною лінією (рис. 28).

в) Природна область визначення D даної функції

$$z=\arcsin\big((x-3y)/6\big)+1\Big/\sqrt{9-x^2-y^2}$$

– множина всіх тих точок (x,y), які задовольняють системі

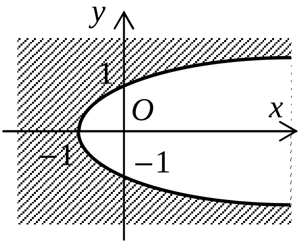

Рис. 28

$$\begin{cases}-1\le(x-3y)/6\le 1;\\ 9-x^2-y^2>0.\end{cases}$$

Межа області D визначається рівняннями

$$(x-3y)/6=-1;\ (x-3y)/6=1;$$

$$9-x^2-y^2=0$$

або $x-3y+6=0$;

$$x-3y-6=0;\qquad x^2+y^2=9.$$

Перші два рівняння визначають пару паралельних прямих, а третє рівняння – коло з центром у початку координат і радіусом $R=3$. Кожна пряма ділить координатну площину на дві півплощини. Коло ділить координатну площину на внутрішню і зовнішню частини (всередині круга і поза кругом).

Використовуючи пробні точки, знаходимо область визначення D (рис. 29). ■

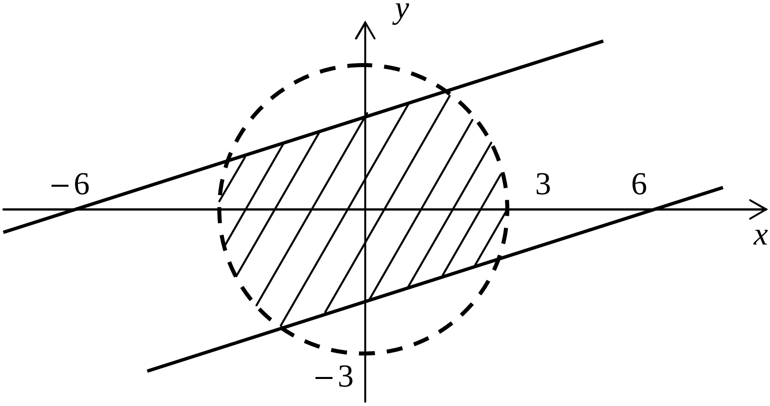

Рис. 29

2.2.2. Геометричне зображення функції двох змінних

Множина всіх точок $P(x, y, z)$ простору, координати яких задовольняють рівняння $z = f(x, y)$, називається ***графіком*** функції двох змінних $z = f(x, y)$.

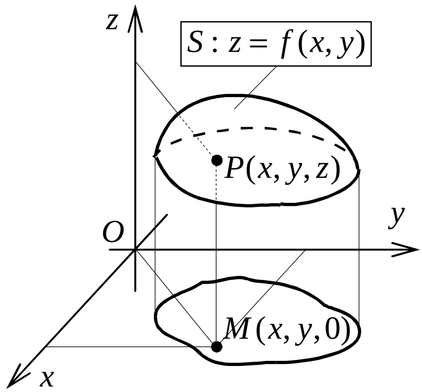

Рис. 30

Звичайно графіком є деяка поверхня S, що проектується на площину Oxy на область визначення D (рис. 30). (Поверхня $z = f(x, y)$ – це “дах”, що “нависає” над плоскою областю D).

<u>Приклад</u>. Побудувати поверхню, яка є графіком функції $z = x^2 + y^2/4$ (еліптичний параболоїд).

□ Використовуємо метод паралельних перерізів.

Знаходимо головні перерізи (перерізи координатними площинами).

Oyz: $x = 0$; $z = y^2/4$; $y^2 = 4z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz.

Oxz: $y = 0$; $z = x^2$; $x^2 = z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz.

Oxy: $z = 0$; $x^2 + y^2/4 = 0$; $O(0,0)$ – початок координат (вершина параболоїда).

Додатково знаходимо переріз поверхні площиною, що паралельна координатній площині Oxy: $z = 0$.

$z = 9$; $x^2 + y^2/4 = 9$; $x^2/9 + y^2/36 = 1$ – еліпс з великою піввіссю $a = 6$, що паралельна осі Oy, і з малою піввіссю $b = 3$, що паралельна осі Ox.

Еліптичний параболоїд $z = x^2 + y^2/4$ зображений на рис. 31.

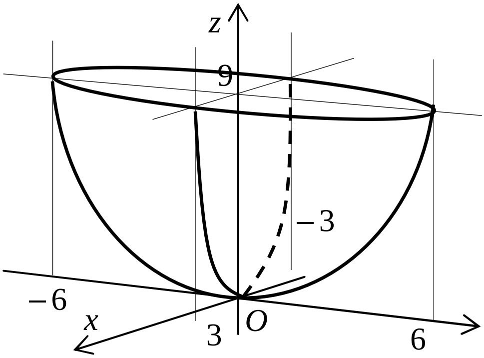

Рис. 31

<u>Зауваження 1</u>. Функцію трьох чи більше змінних зобразити за допомогою графіка неможливо.

<u>Зауваження 2</u>. Для функції двох чи більше змінних не можна ввести поняття монотонності (зростання чи спадання). Наприклад, для функції $z = f(x, y)$, що зображена на рис. 32, у точці $M(x, y)$ у напрямку променя l_1 ця функція спадає $f(M_1) < f(M)$, а у напрямку променя l_2 ця функція зростає $f(M_2) > f(M)$.

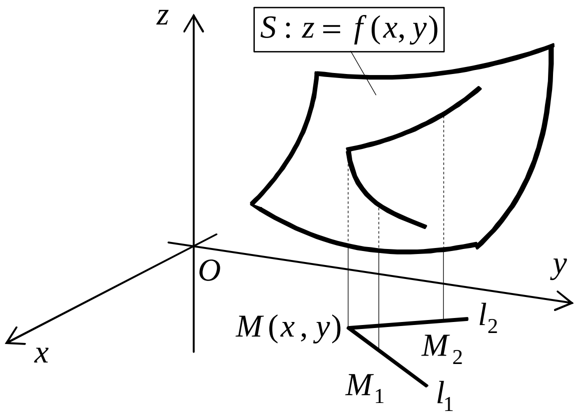

Рис. 32

2.2.3. Лінії та поверхні рівня

Для графічного зображення функцій двох і трьох змінних використовуються також відповідно лінії та поверхні рівня.

Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок координатної площини Oxy, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $z = C$, $C = const$. Рівняння лінії рівня

$$\boxed{f(x, y) = C}.$$

Через кожну точку $M_0(x_0, y_0)$ області D проходить єдина лінія рівня $f(x, y) = f(M_0)$.

При різних C дістанемо різні лінії рівня для даної функції $z = f(x, y)$, кожна з яких служить проекцією лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ площиною $z = C$ (рис. 33).

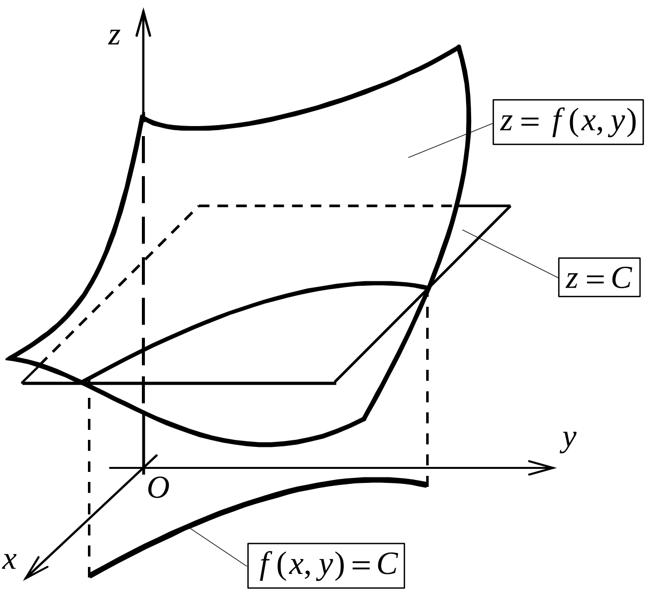

Рис. 33

Якщо вибрати числа $C_1, C_2, ..., C_n$ так, щоб вони утворювали арифметичну прогресію з різницею d $C_{n+1} = C_n + d$, то отримаємо топографічну карту рельєфу поверхні $z = f(x, y)$. По взаємному розміщенню ліній рівня можна судити про характер рельєфу: там, де лінії розміщуються густіше, функція $z = f(x, y)$ змінюється швидше (поверхня крутіша); там, де лінії розміщуються рідше, функція змінюється повільніше (поверхня більш полога).

Приклади ліній рівня: ізотерми, ізобари на географічних картах; еквіпотенціальні лінії плоского електростатичного поля в електротехніці; криві байдужості функції загальної корисності $TU(Q_1, Q_2)$ споживання товарів двох видів Q_1, Q_2 у мікроекономіці.

Приклад 1. Побудувати сім'ю ліній рівня функції $z = x^2 + y^2 + 2$ при $C_1 = 2,\ C_2 = 3,\ C_3 = 4,\ C_4 = 5$.

□ $x^2 + y^2 + 2 = C$; $x^2 + y^2 = C - 2$.

$C_1 = 2$: $x^2 + y^2 = 0$ – точка $O(0;0)$ (вироджене коло).

$C_2 = 3$: $x^2 + y^2 = 1$ – коло радіуса $R = 1$ з центром $O(0;0)$.

$C_3 = 4$: $x^2 + y^2 = 2$ – коло радіуса $R = \sqrt{2}$ з центром $O(0;0)$.

$C_4 = 5$: $x^2 + y^2 = 3$ – коло радіуса $R = \sqrt{3}$ з центром $O(0;0)$.

Сім'я ліній рівня $x^2 + y^2 = C - 2$ – це сім'я концентричних кіл з центром у початку координат $O(0;0)$ (рис. 34).

Функція $z = f(x, y)$ зростає вздовж кожного радіального напрямку. Поверхня $z = f(x, y)$ – це симетрична "чаша" з круто зростаючими краями (параболоїд обертання). ■

Приклад 2. Побудувати сім'ю ліній рівня функції $z = 4x + 2y$ при $C_1 = 0,\ C_2 = 2,\ C_3 = 4$.

□ Лінії рівня $4x + 2y = C$ – це сім'я паралельних прямих. На рис. 35 зображено лінії рівня при $C_1 = 0,\ C_2 = 2,\ C_3 = 4$. ■

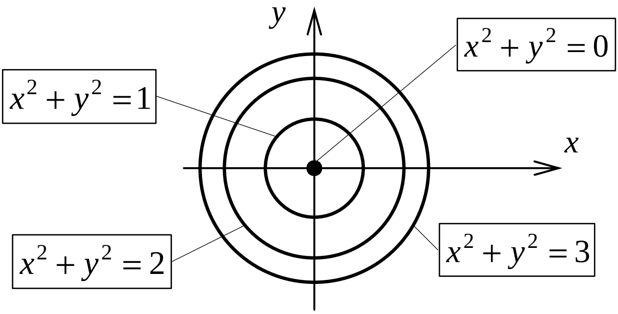

Рис. 34

Поверхнею рівня функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $Oxyz$, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $u = C$, $C = const$. Рівняння поверхні рівня

$$\boxed{f(x, y, z) = C}.$$

Прикладом поверхонь рівня служать еквіпотенціальні поверхні просторового електростатичного поля.

<u>Приклад 3</u>. Побудувати сім'ю поверхонь рівня функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ при $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 4$.

□ Поверхні рівня $x^2 + y^2 + z^2 = C$ – це сім'я концентричних сфер з центром у початку координат $O(0;0;0)$. На рис. 36 зображено поверхні рівня при $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 4$. ■

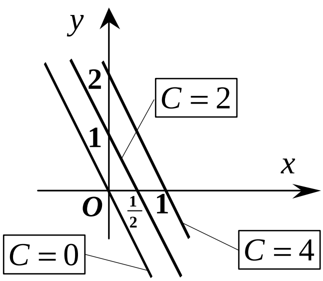

Рис. 35

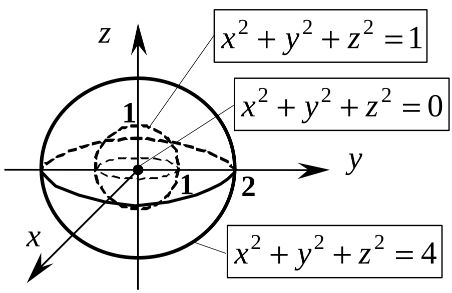

Рис. 36

2.2.4. Частинні прирости. Повний приріст. Границя. Неперервність. Точки розриву

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y фіксованою (рис. 37).

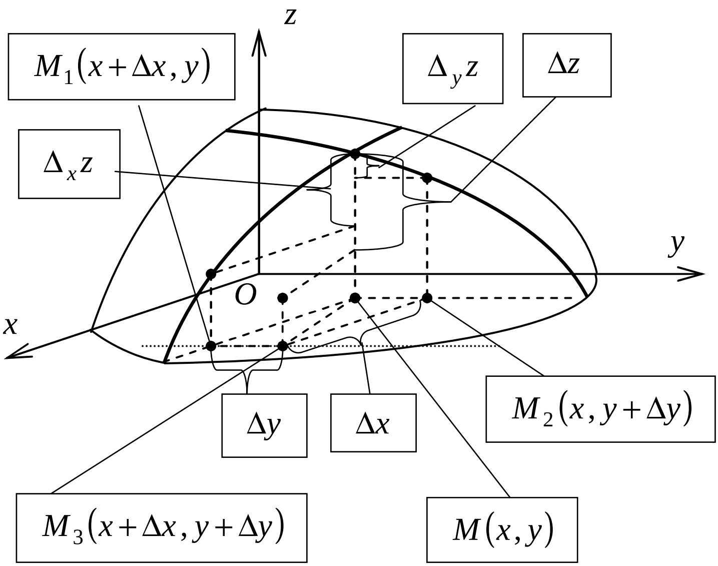

Рис. 37

Різниця $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ називається ***частинним приростом по*** x функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x.

Аналогічно $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ – ***частинний приріст по*** y.

Якщо одночасно надати змінній x приросту Δx, а змінній y приросту Δy, то різниця $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ називається ***повним приростом*** функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$.

Зауваження 1. Із рис. 37 зрозуміло, що повний приріст Δz, у загальному випадку, не дорівнює сумі частинних приростів:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z .$$

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, крім, можливо, самої точки M_0. Число A називається ***границею функції*** $z = f(x, y)$ ***в точці*** M_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якої точки M із δ-околу точки M_0, крім, можливо, самої точки M_0, виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Позначається

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{x \to x_0,\, y \to y_0} f(x, y) = A .$$

Іншими словами, число A називається ***границею функції*** $z = f(x, y)$ ***в точці*** M_0, якщо їх різниця $\alpha = f(x, y) - A$ є нескінченно малою величиною при $M \to M_0$:

$$\alpha = f(x, y) - A \to 0 \quad \text{при } M \to M_0 .$$

Зауваження 2. Точка M необмежено наближається до точки M_0 довільним способом. Важливо лише, що відстань $\rho = M_0M$ від точки M_0 прямує до нуля.

Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною в точці*** M_0, якщо виконуються умови:

1) функція $z = f(x, y)$ визначена в самій точці M_0 і в деякому її околі;

2) існує скінченна границя $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Оскільки для неперервної функції $z = f(x, y)$ її приріст прямує до нуля .при $M \to M_0$: $\Delta z = f(M) - f(M_0) \to 0$ і при цьому прирости всіх аргументів прямують до нуля:

$$\Delta x = x - x_0 \to 0 ; \quad \Delta y = y - y_0 \to 0 ,$$

то означення неперервної в точці функції можна подати так.

Функція $z=f(x,y)$ називається ***неперервною в точці*** M_0, якщо в цій точці нескінченно малим приростам Δx і Δy її аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції Δz:

$$\lim_{\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0} \Delta z = 0 .$$

Функція $z=f(x,y)$ називається ***неперервною в області*** D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Властивості функції багатьох змінних, що неперервна в обмеженій замкненій області, аналогічні відповідним властивостям функції однієї змінної, що неперервна на відрізку.

Властивість 1. Функція $z=f(x,y)$, що неперервна в обмеженій замкненій області D, є обмеженою і досягає в ній свого найменшого m і найбільшого M значення.

Властивість 2. Якщо функція $z=f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, а m і M – відповідно її найменше і найбільше значення у цій області, то для будь-якого числа μ, що задовольняє нерівність $m\le\mu\le M$, у області D знайдеться хоча б одна точка $N\in D$, в якій значення функції дорівнює числу μ.

Якщо в точці M_0 порушується хоча б одна з умов неперервності, то ця точка називається ***точкою розриву*** функції $z=f(x,y)$, а сама функція $z=f(x,y)$ називається ***розривною*** в точці M_0.

Зауваження 3. Точка M_0 є точкою розриву функції $z=f(x,y)$, зокрема, в таких випадках: 1) функція визначена в деякому околі точки M_0, крім самої точки M_0; 2) функція визначена в усіх точках деякого околу точки M_0, але не існує скінченної границі $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$; 3) функція визначена в усіх точках деякого околу точки $M_0(x_0,y_0)$ та існує скінченна границя $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$, але $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)\neq f(M_0)$.

Зауваження 4. У випадку функції двох змінних точки розриву можуть бути ***ізольованими*** чи утворювати ***лінії розриву***. Для функції трьох змінних точки розриву, крім цього, можуть утворювати ***поверхні розриву***.

Наприклад, функція $z = 1/(x^2 + y^2)$ має ізольовану точку розриву $O(0,0)$, для функції $z = 1/(2x + y + 2)$ пряма $2x + y + 2 = 0$ служить лінією розриву, а функція $u = 1/(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ має поверхню розриву – сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Зауваження 5. Розглянута вище неперервність функції "за сукупністю всіх аргументів одночасно" є дещо більше, ніж неперервність цієї функції "за всіма аргументами нарізно".

Наприклад, функція

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

є розривною в точці $M_0(0,0)$ "за сукупністю змінних x, y одночасно", хоча функції $\varphi_1(x) = f(x,0)$ і $\varphi_2(y) = f(0,y)$ неперервні відповідно при $x = 0$ і $y = 0$.

Дійсно, з одного боку

$$\lim_{x \to 0} \varphi_1(x) = 0 = \varphi_1(0); \quad \lim_{y \to 0} \varphi_2(y) = 0 = \varphi_2(0).$$

З іншого боку, на довільній прямій $y = kx$, $k = const \neq 0$ маємо

$$f(x, y) = f(x, kx) = \begin{cases} xkx/(x^2 + k^2x^2) = k/(1 + k^2), & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$$

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = \lim_{x \to 0} f(x, kx) = \frac{k}{1 + k^2} = const \neq 0 = f(0,0).$$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0,\ y \to 0} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$.

□ $$\lim_{x\to 0,\ y\to 0} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \left| \begin{matrix} x\to 0, \\ y\to 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \right| = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+4}-2} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right)}{\rho^2+4-4} = \lim_{\rho\to 0} \left(\sqrt{\rho^2+4}+2\right) = 4. \quad ■$$

2.2.5. Частинні похідні та їх обчислення

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y фіксованою (рис. 37).

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x називається границя відношення частинного приросту по x цієї функції $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ до відповідного приросту аргументу Δx, коли останній прямує до нуля:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}.$$

Застосовуються також позначення:

$$z_x^I;\ f_x^I;\ f_x^I(x, y);\ f_x^I(M);\ \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial f}{\partial x};\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x};\ \frac{\partial f(M)}{\partial x};\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M.$$

Аналогічно

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}.$$

Таким чином,

$$\partial z/\partial x = \left[dz/dx\right]_{y=const};\quad \partial z/\partial y = \left[dz/dy\right]_{x=const}.$$

Зауваження. Якщо у функції багатьох змінних $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ всі аргументи, крім вибраного x_j, зафіксувати, то отримаємо функцію $u = \varphi_j(x_j) = f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ тільки однієї вибраної змінної x_j. До цієї функції можна застосувати весь апарат математичного аналізу функцій однієї змінної. Зокрема, *частинна похідна за вибраною змінною обчислюється за правилами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи всі інші аргументи сталими* (*фіксованими*, “*замороженими*”):

$$\boxed{\partial u / \partial x_j = \left[du / dx_j \right]_{x_i = const,\ i = \overline{1,n};\ i \neq j},\quad j = \overline{1,n}}.$$

Приклад. Знайти всі частинні похідні заданої функції:

а) $z = x^2 / y - \sin y + \pi$; б) $z = x^y$; в) $u = e^{xy^2 z} / z$;

г) $u = x\cos(xy^3 - z)$; д) $u = tg\left(xy^4 / z^2\right)$.

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2/y - \sin y + \pi\right)'_x = \left(x^2/y\right)'_x - (\sin y)'_x + \pi'_x =$

$= (1/y)\,(x^2)'_x - 0 + 0 = (1/y) \cdot 2x = 2x/y$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2/y - \sin y + \pi\right)'_y = \left(x^2/y\right)'_y - (\sin y)'_y + \pi'_y = x^2\,(1/y)'_x -$

$- \cos y + 0 = x^2 \cdot \left(-1/y^2\right) - \cos y = -\,x^2/y^2 - \cos y$;

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = y\,x^{y-1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \ln x$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{xy^2 z}/z\right)'_x = \dfrac{1}{z}\,(e^{xy^2 z})'_x = \dfrac{1}{z} \cdot e^{xy^2 z}(xy^2 z)'_x =$

$= (1/z) \cdot e^{xy^2 z} \cdot y^2 z = y^2\, e^{xy^2 z}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{xy^2 z}/z\right)'_y = \dfrac{1}{z}\,(e^{xy^2 z})'_y =$

$= (1/z) \cdot e^{xy^2 z}(xy^2 z)'_y = (1/z) \cdot e^{xy^2 z} \cdot xz \cdot 2y = 2xye^{xy^2 z}$;

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = \left(e^{xy^2 z}/z\right)'_z = \dfrac{(e^{xy^2 z})'_z \cdot z - e^{xy^2 z}\, z'_z}{z^2} = \dfrac{e^{xy^2 z}\,(xy^2 z)'_z \cdot z - e^{xy^2 z}}{z^2} =$

$= (e^{xy^2 z}\, xy^2 z - e^{xy^2 z}) / z^2$. (Завдання г) і д) виконати самостійно). ■

2.2.6. Геометричний зміст частинних похідних

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 38). Графіком функції $z = f(x,y)$ є деяка поверхня. Рівняння $y = y_0$ визначає січну площину, яка перпендикулярна до осі Oy. Ця площина перетинає поверхню $z = f(x,y)$ по деякій плоскій лінії l. Оскільки $\partial z/\partial x = [dz/dx]_{y=y_0}$, то виходячи з геометричного змісту звичайної похідної, маємо $\partial z/\partial x\big|_{M_0} = tg\,\alpha$.

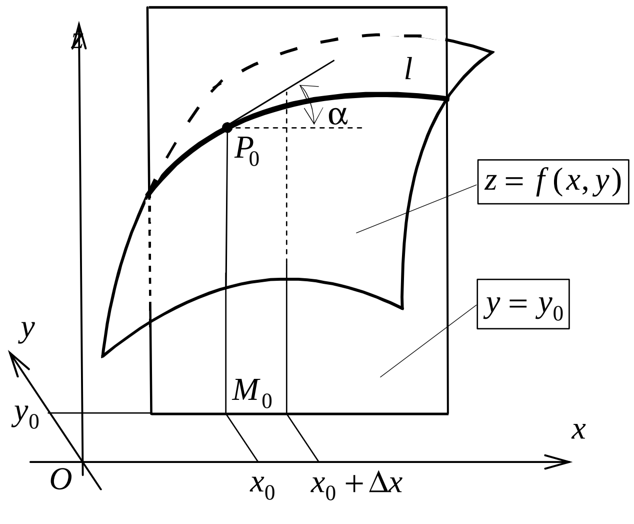

Рис. 38

Частинна похідна $\partial z/\partial x\big|_{M_0}$ *чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу* α *дотичної до лінії перерізу* l *поверхні* $z = f(x,y)$ *площиною* $y = y_0$ *у відповідній точці* $P_0(x_0, y_0, z_0)$, *де* $z_0 = f(x_0, y_0)$. (<u>Геометричний зміст</u> частинної похідної).

Загальні рівняння дотичної прямої до лінії перерізу l поверхні $z = f(x,y)$ площиною $y = y_0$: $\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0); \\ y = y_0. \end{cases}$

Аналогічно $\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \\ x = x_0 \end{cases}$

– загальні рівняння дотичної прямої до лінії перерізу l поверхні $z = f(x, y)$ площиною $x = x_0$.

2.2.7. Частинні та повний диференціали

Нехай задано функцію багатьох змінних $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Якщо всі аргументи, крім вибраного x_j, зафіксувати, то одержимо функцію $u = \varphi_j(x_j) = f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ тільки однієї вибраної змінної x_j, диференціал якої називається ***частинним диференціалом функції*** $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***за змінною*** x_j і позначається $d_{x_j}u$.

Частинний диференціал зв'язаний з відповідною частинною похідною співвідношенням

$$\boxed{d_{x_j}u = \frac{\partial z}{\partial x_j}\, dx_j},$$

де dx_j – диференціал незалежної змінної x_j. Диференціал незалежної змінної збігається з її приростом $\boxed{dx_j = \Delta x_j}$.

Приклад 1. Знайти частинні диференціали функції:

а) $z = arctg(y/x)$; б) $u = 3x^2yz - x\ln y$.

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+(y/x)^2} \cdot y \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$d_x z = -\frac{y\,dx}{x^2+y^2}; \quad d_y z = \frac{x\,dx}{x^2+y^2};$$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3yz \cdot 2x - \ln y \cdot 1 = 6xyz - \ln x$;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 z \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{y} = 3x^2 z - x/y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2 y \cdot 1 - 0 = 3x^2 y;$$

$$d_x u = (6xyz - \ln x)\,dx; \; d_y u = (3x^2 z - x/y)\,dy; \; d_z u = 3x^2 y \; dz. \; ■$$

Функція $z = f(M) = f(x, y)$ називається ***диференційовною*** в точці $M(x, y)$, якщо її повний приріст $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - - f(x, y)$ можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

де A, B – незалежні від Δx і Δy величини; $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ і $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ функції.

Повним диференціалом dz функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ називається головна частина її повного приросту в цій точці, лінійна щодо приростів Δx і Δy аргументів:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Теорема 1 (***необхідна умова диференційовності***). *Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в деякій точці $M(x, y)$, то вона неперервна в цій точці.*

$$\square \lim_{\Delta x \to 0,\, \Delta y \to 0} \Delta z = \lim_{\Delta x \to 0,\, \Delta y \to 0} \big(A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x +$$

$$+ \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y\big) = A \lim_{\Delta x \to 0,\, \Delta y \to 0} \Delta x + B \lim_{\Delta x \to 0,\, \Delta y \to 0} \Delta y +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0,\, \Delta y \to 0} \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0,\, \Delta y \to 0} \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y = 0. \; ■$$

Оскільки диференціали незалежних змінних збігаються з їх приростами $dx = \Delta x$ і $dy = \Delta y$, то $\boxed{dz = A\,dx + B\,dy}$.

Теорема 2. *Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x; y)$, тобто $dz = A\,dx + B\,dy$, то ця функція має в точці $M(x; y)$ частині похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$, причому*

$$\partial z/\partial x = A; \quad \partial z/\partial y = B.$$

Іншими словами, *повний диференціал функції* $z = f(x,y)$ *дорівнює сумі добутків частинних похідних цієї функції на диференціали відповідних аргументів* $\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$.

□ $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y$;

$$y = const \Rightarrow \Delta y = 0: \quad \Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x,\, 0)\Delta x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x,\, 0)\Delta x}{\Delta x} = A;$$

$$x = const \Rightarrow \Delta x = 0: \quad \Delta_y z = B\Delta y + \beta(0,\, \Delta y)\Delta y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{B\Delta y + \beta(0,\, \Delta y)\Delta y}{\Delta y} = B. \ \blacksquare$$

Теорема 3 (***Достатня умова диференційовності***). *Якщо функція* $z = f(x,y)$ *має в деякій точці* $M(x;y)$ *неперервні частинні похідні* $\partial z/\partial x$ *і* $\partial z/\partial y$ *, то ця функція диференційовна в точці* M .

□ $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = (f(x+\Delta x, y+\Delta y) -$

$$- f(x, y+\Delta y)) + (f(x, y+\Delta y) - f(x,y)).$$

Використовуємо формулу скінченних приростів Лагранжа

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\bar{x})(b-a), \quad \bar{x} \in (a;b)$$

для функції однієї змінної та отримуємо

$$\Delta z = f'_x(\bar{x}, y+\Delta y)\cdot\Delta x + f'_y(x,\bar{y})\cdot\Delta y.$$

Із неперервності частинних похідних f'_x і f'_y випливає

$$f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) = f'_x(x,y) + \alpha(\Delta x,\Delta y);$$

$$f'_y(x,\bar{y}) = f'_y(x,y) + \beta(\Delta x,\Delta y),$$

де $\lim\limits_{\Delta x\to 0,\, \Delta y\to 0}\alpha(\Delta x,\Delta y) = 0$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0,\, \Delta y\to 0}\beta(\Delta x,\Delta y) = 0$.

Тоді

$$\Delta z = f'_x(x,y)\,\Delta x + f'_x(x,y)\,\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\,\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\,\Delta y\,;$$

$$dz = A\,dx + B\,dy\,, \quad \text{де} \quad A = f'_x(x,y)\,; \qquad B = f'_x(x,y)\,. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти повний диференціал функції:

$$\text{а)}\ u = \ln\left(x + \sqrt{y+z^2}\right); \qquad \text{б)}\ u = e^{z^2} \sin^2(x+y^3)\,.$$

□ а) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x+\sqrt{y+z^2}}\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x+\sqrt{y+z^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+z^2}} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)}\,; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x+\sqrt{y+z^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+z^2}} \cdot 2z =$$

$$= \frac{z}{\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)}\,; \quad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz =$$

$$= \frac{2\sqrt{y+z^2}\,dx + dy + 2z\,dz}{2\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)}\,;$$

б) $$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{z^2} \cdot 2\sin(x+y^3)\cdot\cos(x+y^3) = e^{z^2}\sin 2(x+y^3)\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{z^2}\, 2\sin(x+y^3)\cos(x+y^3)\cdot 3y^2 = 3y^2 e^{z^2}\sin 2(x+y^3)\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sin^2(x+y^3)\cdot e^{z^2} \cdot 2z = 2z e^{z^2}\sin^2(x+y^3)\,;$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = e^{z^2}\sin 2(x+y^3)\,dx +$$

$$+ 3y^2 e^{z^2}\sin 2(x+y^3)\,dy + 2z\,e^{z^2}\sin^2(x+y^3)\,dz\,. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. При достатньо малих приростах аргументів Δx і Δy повний приріст Δz функції $z = f(x,y)$ можна наближено замінити повним диференціалом $\boxed{\Delta z \approx dz}$. Звідси маємо формулу

для наближеного обчислення значення функції

$$\boxed{f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y}.$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти повний приріст і повний диференціал функції $z = x/y$ в точці $M(9,3)$ при $\Delta x = 0{,}1$ і $\Delta y = -0{,}2$.

□ $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) =$

$$= \frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} - \frac{x}{y} = \frac{(x+\Delta x)y - x(y+\Delta y)}{y(y+\Delta y)} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y+\Delta y)};$$

$$\Delta z = \frac{3\cdot 0{,}1 - 9\cdot(-0{,}2)}{3\cdot(3-0{,}2)} = \frac{2{,}1}{3\cdot 2{,}8} = 0{,}25; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2};$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \frac{1}{y}\,\Delta x - \frac{x}{y^2}\,\Delta y;$$

$$dz = (1/3)\cdot 0{,}1 - (9/3^2)\cdot(-0{,}2) \approx 0{,}233. \quad ■$$

<u>Приклад 4</u>. Знайти наближене значення

а) $A = 1{,}98\cos 1$; б) $A = \sqrt{17}\ln 3$.

□ а) Розглянемо функцію $z = z(x,y) = x\cos y$. Нехай $x = 2$; $y = \pi/3$. Тоді $\Delta x = 1{,}98 - 2 = -0{,}02$; $\Delta y = 1 - \pi/3 \approx -0{,}047$.

Дістанемо:

$$A = 1{,}98\cos 1 = z(2+\Delta x,\ \pi/3+\Delta y) \approx z(2,\pi/3) +$$

$$+ \frac{\partial z(2,\pi/3)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z(2,\pi/3)}{\partial y}\,\Delta y; \quad z(2,\pi/3) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y; \quad \frac{\partial z(2,\pi/3)}{\partial x} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x\sin y;$$

$$\frac{\partial z(2,\pi/3)}{\partial y} = -2\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \approx -1{,}73;$$

$$A = 1{,}98\cos 1 \approx 1 + (1/2)\cdot(-0{,}02) + (-1{,}73)\cdot(-0{,}047) \approx$$

$$\approx 1 - 0{,}01 + 0{,}081 \approx 1{,}07.$$

б) Розв’язати самостійно. ■

2.2.8. Похідні складених функцій

Обмежимось розглядом трьох важливих випадків у припущенні, що всі частинні похідні неперервні.

1) Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, аргументи якої самі є функціями незалежної змінної t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тоді повна похідна складеної функції однієї змінної t $z = f\left(x(t), y(t)\right)$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}\ .$$

□ $$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y\,,$$

де $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$;

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t}\ .$$

При $\Delta t \to 0$ із неперервності функцій $x = x(t)$, $y = y(t)$ випливає, що $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ і, значить, $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$.

Оскільки $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$; $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$; $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$, то при $\Delta t \to 0$ маємо $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$. ■

2) Якщо аргументи функції двох змінних $z = f(x, y)$ самі є функціями інших двох незалежних змінних $x = x(u, v)$ і $y = y(u, v)$. Тоді частинні похідні складеної функції двох змінних $z = f\left(x(u, v),\ y(u, v)\right)$ обчислюються за формулами:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}}\ ; \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}}\ .$$

□ При $v = const$ маємо:

$$\Delta_u z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta_u x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta_u y + \alpha_u \Delta_u x + \beta_u \Delta_u y\ ,$$

де $\alpha_u \to 0$ і $\beta_u \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

$$\frac{\Delta_u z}{\Delta u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta_u y}{\Delta u} + \alpha_u \cdot \frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \beta_u \cdot \frac{\Delta_u y}{\Delta u} .$$

Перейдемо до границі при $\Delta u \to 0$ і дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u z}{\Delta u}; \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u x}{\Delta u}; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u y}{\Delta u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} .$$

Аналогічно, при $u = const$ маємо:

$$\Delta_v z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta_v x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta_v y + \alpha_v \Delta_v x + \beta_v \Delta_v y ,$$

де $\alpha_v \to 0$ і $\beta_v \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$;

$$\frac{\Delta_v z}{\Delta v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta_v x}{\Delta v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta_v y}{\Delta v} + \alpha_v \frac{\Delta_v x}{\Delta v} + \beta_v \frac{\Delta_v y}{\Delta v} .$$

Перейдемо до границі при $\Delta v \to 0$ і отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} . \qquad \blacksquare$$

3) Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, де другий аргумент y сам є функцією першого аргументу x: $y = y(x)$. Тоді ***повна похідна*** за x складеної функції однієї змінної $z = f(x, y(x))$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}} .$$

Зауваження 1. Праворуч у цій формулі перший доданок $\partial z / \partial x$ – це частинна похідна за x, обчислена в припущенні, що $y = const$. У лівій частині маємо dz/dx – повну похідну за x, обчислену при умові, що y є функцією від x: $y = y(x)$.

Третій випадок безпосередньо випливає з першого, якщо прийняти $t = x$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти значення вказаних похідних складеної функції у відповідній точці:

а) dz/dt, якщо $z = x e^{xy}$, де $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $t_0 = \pi$;

б) $\partial z/\partial u$ і $\partial z/\partial v$, якщо $z = arctg(x^2 + y)$, де $x = u\ln v$, $y = v\cos u$, $u_0 = \pi$, $v_0 = 1$;

в) dz/dx, якщо $z = \arcsin(xy)$, де $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

□ а) $x_0 = x(t_0) = \pi\cos\pi = -\pi$; $y_0 = y(t_0) = \pi\sin\pi = 0$;

$$dx/dt = \cos t - t\sin t; \quad dx/dt\big|_{t=\pi} = \cos\pi - \pi\sin\pi = -1;$$

$$dy/dt = \sin t + t\cos t; \quad dy/dt\big|_{t=\pi} = \sin\pi + \pi\cos\pi = -\pi;$$

$$\partial z/\partial x = e^{xy} + xy\,e^{xy}; \quad \partial z/\partial x\big|_{t=\pi} = e^{-\pi\cdot 0} - \pi\cdot 0\cdot e^{-\pi\cdot 0} = 1;$$

$$\partial z/\partial y = x^2 e^{xy}; \quad \partial z/\partial y\big|_{t=\pi} = (-\pi)^2 e^{-\pi\cdot 0} = \pi^2;$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}; \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\pi} = 1\cdot -1) + \pi^2\cdot(-\pi) = -(\pi^3 + 1).$$

б) $x_0 = x(u_0, v_0) = \pi\cdot\ln 1 = 0$; $y_0 = y(u_0, v_0) = 1\cdot\cos\pi = -1$;

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \ln v; \quad \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{u=\pi,\, v=1} = \ln 1 = 0; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v}; \quad \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{u=\pi,\, v=1} = \frac{\pi}{1} = \pi;$$

$$\partial y/\partial u = -v\sin u; \ \partial y/\partial u\big|_{u=\pi,\, v=1} = -1\cdot\sin\pi = 0; \ \partial y/\partial v = \cos u;$$

$$\partial y/\partial v\big|_{u=\pi,\, v=1} = \cos\pi = -1; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + (x^2 + y)^2};$$

$$\partial z/\partial x\big|_{u=\pi,\, v=1} = \frac{2\cdot 0}{1 + (0^2 - 1)^2} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x^2 + y)^2};$$

$$\partial z/\partial y\big|_{u=\pi,\, v=1} = \frac{1}{1 + (0^2 - 1)^2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\partial z/\partial u\big|_{u=\pi,\,v=1}=0\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0=0;\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v};$$

$$\partial z/\partial v\big|_{u=\pi,\,v=1}=0\cdot\pi+(1/2)\cdot(-1)=-1/2;$$

в) $y_0=y(x_0)=\ln 1=0;\quad dy/dx=1/x;\quad dy/dx\big|_{x=1}=1/1=1;$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}};\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}=\frac{0}{\sqrt{1-(1\cdot 0)^2}}=0;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=1}=\frac{1}{\sqrt{1-(1\cdot 0)^2}}=1;\ \frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx};\ \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=1}=0+1\cdot 1=1.\ \blacksquare$$

Зауваження 2. Очевидно, значення похідних будуть ті самі, якщо у вираз для зовнішньої функції $z=f(x,y)$ попередньо підставити замість x та y відповідні внутрішні функції, а потім знайти шукані похідні за внутрішніми аргументами звичайним способом.

2.2.9. Інваріантність форми повного диференціала

Теорема (***Інваріантність форми повного диференціала***). *Повний диференціал складеної функції* $z=f(x,y)$, *де* $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, *можна подати у вигляді*

$$\boxed{dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy},$$

який збігається з виглядом повного диференціала звичайної функції.

Іншими словами, *вигляд повного диференціала функції не залежить від того, чи є її аргументи незалежними змінними чи функціями інших змінних*.

$$\square\quad dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+$$

$$+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv=\frac{\partial z}{\partial x}\underbrace{\big((\partial x/\partial u)du+(\partial x/\partial v)dv\big)}_{dx}+$$

$$+\frac{\partial z}{\partial y}\underbrace{\left((\partial y/\partial u)du+(\partial y/\partial v)dv\right)}_{dy}=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \quad \blacksquare$$

2.2.10. Диференціювання неявно заданих функцій

Теорема 1. (***умови існування неявної функції***). *Якщо функція* $F(x,y)$ *та її частинні похідні* $F'_y(x,y), F'_x(x,y)$ *визначені та неперервні в деякому околі точки* $M(x_0,y_0)$*, причому* $F(x_0,y_0)=0$*, а* $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$*, то рівняння* $F(x,y)=0$ *в деякому околі точки* $M(x_0,y_0)$ *визначає єдину неявну неперервну і диференційовну функцію* $y=y(x)$*, причому* $y_0=y(x_0)$.

(Без доведення).

Теорема 2. *Нехай функція* $y=y(x)$ *задається неявно рівнянням* $F(x,y)=0$*, де функція* $F(x,y)$ *та її частинні похідні* $F'_y(x,y)$ *і* $F'_x(x,y)$ *неперервні в околі деякої точки* $M(x,y)$*, координати якої задовольняють це рівняння, причому* $F'_y(x,y)\neq 0$. *Тоді в цій точці*

$$\boxed{y'_x=-F'_x(x,y)\big/F'_y(x,y)}.$$

$$\square \quad z=F(x,y);\ y=y(x);\ \frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=F'_x+F'_y\cdot y'_x;$$

$$F(x,y)=0;\ dz/dx=0;\ F'_x+F'_y\cdot y'_x=0;\ y'_x=-F'_x\big/F'_y. \quad \blacksquare$$

Приклад 1. Написати рівняння дотичної до кривої

$$l:\quad x^3y^4-3y^2=4 \quad \text{у точці} \quad M_0(1;2).$$

□ Перевіримо, чи задовольняє точка $M_0(1;2)$ рівняння лінії

$$l:\ F(x,y)=x^3y^4-3y^2-4=0;$$

$$M_0(1;2):\ F(x_0,y_0)=1^3\cdot 2^4-3\cdot 2^2-4=0;\ 0=0;\ M_0\in l.$$

Рівняння дотичної прямої $\quad y-y_0=y'_0\cdot(x-x_0)$.

Знайдемо шукану похідну $y_0^I = y_x^I\big|_{M_0}$:

$$y_x^I = -F_x^I \big/ F_y^I\ ;\quad F_x^I = 3x^2y^4\,;\quad F_y^I = 4x^3y^3 - 6y\,;$$

$$y_x^I = -\frac{3x^2y^4}{4x^3y^3-6y} = -\frac{3x^2y^3}{4x^3y^2-6}\,;$$

$$y_0^I = y_x^I\big|_{M_0} = -3\cdot 1^2\cdot 2^3 \big/ (4\cdot 1^2\cdot 2^2 - 6) = -12/5\,.$$

Рівняння шуканої дотичної

$$y-2 = -\frac{12}{5}(x-1)\,;\quad y = -\frac{12}{5}x + \frac{22}{5}\,.\ \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Нехай рівняння $F(x,y,z)=0$ задає неявно функцію двох змінних $z=z(x,y)$. Тоді, фіксуючи y, за теоремою 2 дістаємо $\partial z/\partial x = -F_x^I(x,y)\big/F_z^I(x,y)$. Фіксуючи x, аналогічно маємо $\partial z/\partial y = -F_y^I(x,y)\big/F_z^I(x,y)$.

<u>Приклад 2</u>. Знайти значення частинних похідних функції $z=z(x,y)$, яка задана неявно рівнянням $x^2+2e^y+xz=5$, у точці $M_0(1;0;2)$.

□ Перевіримо, чи задовольняє точка $M_0(1;0;2)$ задане рівняння, що визначає деяку поверхню

$$S:\ F(x,y,z) = x^2+2e^y+xz-5=0\,;\ M_0(1;0;2):\ F(x_0,y_0,z_0) =$$

$$= 1^2 + 2\cdot e^0 + 1\cdot 2 - 5 = 0\,;\quad 0=0\,;\quad M_0\in S\,.$$

Знайдемо шукані похідні:

$$F_x' = 2x+z\,;\quad F_y' = 2e^y\,;\quad F_z' = x\,;\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'}\,;\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+z}{x}\,;$$

$$\partial z/\partial x\big|_{M_0} = -(2\cdot 1+2)/1 = -4\,;\ \partial z/\partial x = -F_y'\big/F_z'\,;\ \partial z/\partial x = -2e^y\big/x\,;$$

$$\partial z/\partial y\big|_{M_0} = -2e^0\big/1 = -2\,.\ \blacksquare$$

2.2.11. Границя та похідна вектор-функції

Нехай у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$ деяка просторова лінія l (рис. 39) задана в параметричній формі

$$l: \; x = x(t); \;\; y = y(t); \;\; z = z(t), \quad t \in (\alpha;\beta).$$

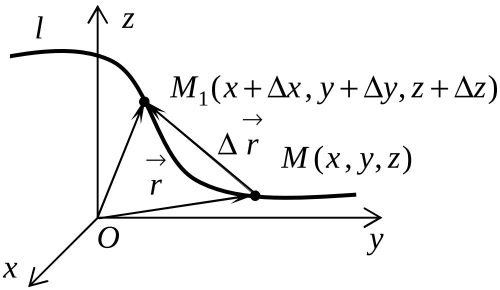

Рис. 39

Тоді радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ довільної точки $M(x,y,z)$ кривої l визначається рівністю

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} =$$

$$= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Таким чином, радіус-вектор довільної точки просторової кривої може розглядатися як деяка функція аргументу t. При зміні параметра t змінюються довжина і напрям вектора $\vec{r}$.

Якщо кожному значенню змінної t з деякого проміжку $(\alpha;\beta)$ поставлено у відповідність один і тільки один радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то кажуть, що на проміжку $(\alpha;\beta)$ визначено ***вектор-функцію*** $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ***скалярного аргументу*** t:

$$\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}}.$$

Просторову криву l, утворену рухом кінця радіус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при змінні t на проміжку $(\alpha;\beta)$, називають ***графіком вектор-функції*** або ***годографом***.

Сталий вектор $\vec{r}_0 = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}$ називається ***границею*** вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у точці t_0, якщо

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0; \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0; \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = z_0 .$$

Позначається $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$. Ясно, що $\lim\limits_{t\to t_0} \left| \vec{r}(t) - \vec{r}_0 \right| = 0$.

Вектор $\Delta \vec{r}(t) = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ називається ***приростом*** вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у точці t, що відповідає приросту аргументу Δt.

Вектор-функцію $\vec{r} = \vec{r}(t)$ називають ***неперервною*** в точці t, якщо $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta \vec{r}(t) = 0$.

Границя відношення $\Delta \vec{r}(t) / \Delta t$ при $\Delta t \to 0$ називається ***похідною*** вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у точці t і позначається $\vec{r}\,'(t)$ або $d\vec{r}/dt$: $\boxed{\vec{r}\,'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}}$.

При цьому $\boxed{\vec{r}\,'(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}}$.

Властивості похідної вектор-функції:

1) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3) = d\vec{r}_1/dt + d\vec{r}_2/dt - d\vec{r}_3/dt$;

2) $\dfrac{d}{dt}\left(\lambda\ \vec{r}\ \right) = \lambda\, d\vec{r}/dt$, де λ – довільне число;

3) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2\right) = d\vec{r}_1/dt \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2/dt$;

4) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right) = d\vec{r}_1/dt \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times d\vec{r}_2/dt$.

2.2.12. Дотична пряма і нормальна площина до просторової лінії

Вектор $\Delta \vec{r}(t_0)/\Delta t$ паралельний вектору $\Delta \vec{r}(t_0)$ і напрямлений вздовж січної M_0M_1 до годографа (рис. 40). Коли $\Delta t \to 0$, точка M_1 необмежено наближається до точки M_0, а січна M_0M_1 переходить у ***дотичну*** l_k до кривої у точці M_0. Звідси випливає, що *напрям похідної* $\vec{r}\,'(t_0)$ *вектор-функції* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *збігається з напрямом дотичної до годографа у відповідній точці* M_0. (Геометричний зміст похідної вектор-функції).

Тобто, вектор $\vec{r}\,'(t_0)$ можна взяти за напрямний вектор дотичної l_k. Тоді ***канонічні рівняння дотичної*** прямої l_k до просторової кривої мають вигляд

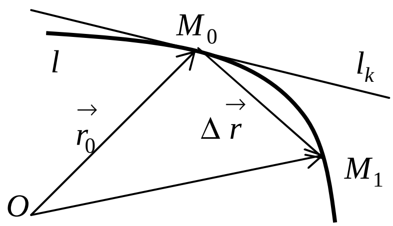

Рис. 40

$$\boxed{l_k: \quad \frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}},$$

де $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$.

Площина α_n, що перпендикулярна до дотичної l_k і проходить через точку дотику M_0, називається ***нормальною площиною*** до просторової лінії.

Вектор $\vec{r}\,'(t_0)$ можна взяти за вектор нормалі цієї площини α_n. Записуючи рівняння площини, яка проходить через дану точку M_0 і перпендикулярна до даного вектора нормалі $\vec{n} = (A, B, C)$,

$$A(x-x_0)+B(x-x_0)+C(x-x_0)=0,$$

отримуємо ***рівняння нормальної площини*** α_n

$$\boxed{\alpha_n: \quad x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0}.$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної прямої l_k та нормальної площини α_n до заданої просторової лінії l у відповідній точці $t = t_0$:

а) l – циліндрична гвинтова лінія (рис. 41) з радіусом $R = 4$ і кроком $h = 4$:

$$l: \; x = 4\cos t; \; y = 4\sin t; \; z = (8/\pi)t, \quad t_0 = \pi/4;$$

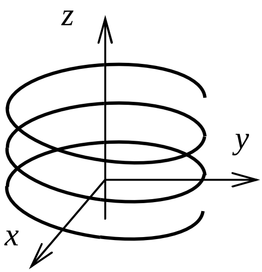

Рис. 41

б) l – конічна гвинтова лінія:

$$l: \; x = 2t\cos t; \; y = 2t\sin t; \; z = 4t,$$

$$t_0 = \pi.$$

□ а) $x_0 = x(t_0) = 4\cos(\pi/4) = 2\sqrt{2}$;

$$y_0 = y(t_0) = 4\sin(\pi/4) = 2\sqrt{2};$$

$$z_0 = z(t_0) = (8/\pi)\cdot(\pi/4) = 2;$$

$$x'(t) = -4\sin t; \quad y'(t) = 4\cos t;$$

$$z'(t) = 8/\pi; \; x'(t_0) = -4\sin(\pi/4) = -2\sqrt{2};$$

$$y'(t_0) = 4\cos(\pi/4) = 2\sqrt{2}; \; z'(t_0) = 8/\pi;$$

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}; \quad \frac{x - 2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{y - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{z - 2}{8/\pi};$$

$$l_k: \; \frac{x - 2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{y - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{z - 2}{4/\pi};$$

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0;$$

$$-2\sqrt{2}\left(x - 2\sqrt{2}\right) + 2\sqrt{2}\left(y - 2\sqrt{2}\right) + (8/\pi)(z - 2) = 0;$$

$$\pi\sqrt{2}\left(x - 2\sqrt{2}\right) - \pi\sqrt{2}\left(y - 2\sqrt{2}\right) - 4(z - 2) = 0;$$

$$\alpha_n: \; \pi\sqrt{2}\,x - \pi\sqrt{2}\,y - 4z + 8 = 0.$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

2.2.13. Фізичний зміст вектор-функції та її похідних

Якщо під t розуміти час, а кінець M радіус-вектора $\vec{OM} = \vec{r}(t)$ розглядати як матеріальну точку, то годограф вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ служить траєкторією руху цієї точки. (Фізичний зміст вектор-функції скалярного аргументу).

Тоді перша похідна $\vec{r}\,'(t)$ вектор функції – швидкість руху матеріальної точки $\vec{v}(t)$, а друга похідна $\vec{r}\,''(t)$ – її прискорення $\vec{a}(t)$. (Фізичний зміст першої та другої похідних вектор-функції скалярного аргументу).

Приклад 1. Матеріальна точка $M(x, y)$ рухається з постійною кутовою швидкістю ω по колу радіуса R (рис. 42):

$$x = R\cos\omega t\,;\;\; y = R\sin\omega t\,.$$

Знайти її швидкість $\vec{v}(t)$ і прискорення $\vec{a}(t)$, а також їх абсолютні величини.

$$\square\;\; \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} = R\cos\omega\,\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j}\,;\;\; |\,\vec{r}(t)\,| =$$

$$= \sqrt{(R\cos\omega t)^2 + (R\sin\omega t)^2} = R\,;\;\; \vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} =$$

$$= (R\cos\omega t)'\,\vec{i} + (R\sin\omega t)'\,\vec{j} = -R\omega\sin\omega t\,\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j}\,;$$

$$|\,\vec{v}(t)\,| = \sqrt{(-R\omega\sin\omega t)^2 + (R\omega\cos\omega t)^2} = \omega R\,;$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = \vec{v}\,'(t) = (-R\omega\sin\omega t)'\,\vec{i} + (R\omega\cos\omega t)'\,\vec{j} =$$

$$= -R\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t\,\vec{j} = -\omega^2(R\cos\omega t\,\vec{i} + R\sin\omega t\,\vec{j}) =$$

$$= -\omega^2\,\vec{r}(t)\,;\;\; |\,\vec{a}(t)\,| = |-\omega^2\,\vec{r}(t)\,| = \omega^2\,|\,\vec{r}(t)\,| = \omega^2 R\,.$$

Таким чином, швидкість напрямлена по дотичній до кола, а прискорення – вздовж радіус-вектора до центра кола, при цьому вони залишаються сталими за величиною. ■

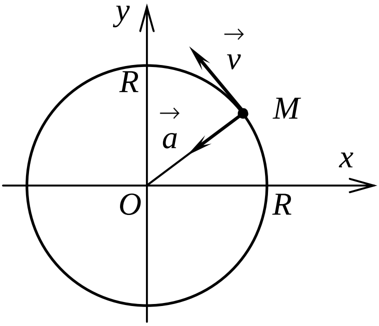

Рис. 42

Приклад 2. Знайти модулі швидкості $\vec{v}(t)$ і прискорення $\vec{a}(t)$ матеріальної точки $M(x, y, z)$ у момент часу $t_0 = \pi/3$, що рухається по циліндричній гвинтовій лінії (рис. 41) за законом:

$$x = 2\cos 3t;\ y = 2\sin 3t;\ z = 8t.$$

(Розв'язати самостійно).

2.2.14. Дотична площина і нормаль до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала

Нехай поверхня S задана рівнянням $z = f(x, y)$ і $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – деяка точка цієї поверхні (рис. 43). Рівняння дотичної площини α_d у точці P_0 будемо шукати у вигляді

$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$, де $A,\ B$ – невизначені коефіцієнти.

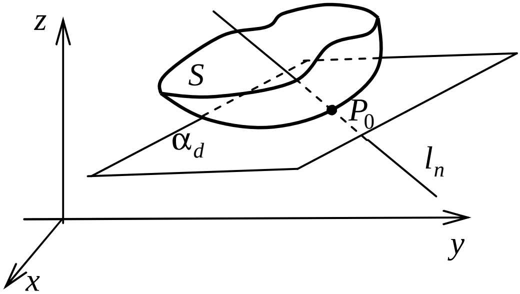

Рис. 43

З геометричного змісту частинних похідних $f'_x(x_0, y_0)$ і $f'_y(x_0, y_0)$ випливає, що рівняння дотичних у точці P_0 до ліній перетину поверхні S: $z = f(x, y)$ площинами $y = y_0$ і $x = x_0$ мають відповідно вигляд:

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0); \\ y = y_0; \end{cases} \qquad \begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \\ x = x_0. \end{cases}$$

Ці дві прямі лежать у дотичній площині α_d при перетині її відповідно з площинами $y = y_0$ і $x = x_0$. Тому рівняння дотичних прямих можна подати відповідно у вигляді:

$$\begin{cases} z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0); \\ y = y_0; \end{cases} \qquad \begin{cases} z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0); \\ x = x_0. \end{cases}$$

Порівнюючи ці рівняння з попередніми рівняннями дотичних прямих, знаходимо $A = f'_x(x_0, y_0)$; $B = f'_y(x_0, y_0)$.

Отже, ***рівняння дотичної площини*** α_d має вигляд:

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}\,.$$

Вектор нормалі дотичної площини

$$\boxed{\vec{n} = (A,\, B,\, C) = \left(f'_x(x_0, y_0),\ f'_y(x_0, y_0),\, -1\right)}$$

називається також ***вектором нормалі до поверхні*** $S:\ z = f(x, y)$ у точці дотику $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пряма l_n, яка проходить через точку P_0 перпендикулярно до дотичної площини α_d у цій точці, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***) до поверхні $S:\ z = f(x, y)$ у цій точці P_0.

Взявши вектор нормалі дотичної площини за напрямний вектор, можна записати ***канонічні рівняння нормальної прямої***

$$\boxed{l_n:\ \frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}}\,.$$

<u>Зауваження 1</u>. Якщо поверхня S задана неявно рівнянням $F(x; y; z) = 0$, то: 1) рівняння дотичної площини

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_d:\ F'_x(x_0, y_0, z_0)\cdot(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)\cdot(y - y_0) + \\ + F'_z(x_0, y_0, z_0)\cdot(z - z_0) = 0 \end{aligned}}$$

і вектор нормалі $\boxed{\vec{n} = \left(F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z(x_0, y_0, z_0)\right)}$;

2) канонічні рівняння нормальної прямої

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}}.$$

Приклад. Написати рівняння дотичної площини α_d та нормальної прямої l_n до заданої поверхні S в указаній точці $P_0(x_0;y_0;z_0)$:

а) $x_0=0$, $y_0=2$, а поверхня S задана явно рівнянням $z=x^2-y\cos x+y^3-2x$;

б) $P_0(1;-2;-1)$, а поверхня S задана неявно рівнянням $x^2+y^2/x-z^3+4yz=14$.

□ а) $z=f(x,y)=x^2-y\cos x+y^3-2x$;

$$z_0=f(x_0,y_0)=0^2-2\cos 0+2-0^3=6;\quad P_0(0;2;6);$$

$$f'_x=2x+y\sin x-2;\quad f'_x\big|_{P_0}=2\cdot 0+2\cdot\sin 0-2=-2;$$

$$f'_y=-\cos x+3y^2;\quad f'_y\big|_{P_0}=-\cos 0+3\cdot 2^2=11;$$

$$\alpha_d:\ z-z_0=f'_x\big|_{P_0}(x-x_0)+f'_y\big|_{P_0}(y-y_0);$$

$$z-6=-2(x-0)+11(y-2);\quad -2x+11y-22-z+6=0;$$

$-2x+11y-z-16=0$; $2x-11y+z+16=0$ – дотична площина;

$$l_n:\ \frac{x-x_0}{f'_x\big|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{f'_y\big|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{-1};\quad \frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{11}=\frac{z-6}{-1}$$

– нормальна пряма;

б) Перевіримо спочатку, чи лежить вказана точка $P_0(1;-2;-1)$ на даній поверхні S:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2/x-z^3+4yz-14=0;\ 1^2+(-2)^2/1-(-1)^3+$$
$$+4\cdot(-2)\cdot(-1)-14=0;\quad 0=0\ \text{вірно};\quad P_0(1;-2;-1)\in S.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці дотику P_0:

$$F'_x = 2x - y^2 \big/ x^2\ ;\ \ F'_x\big|_{P_0} = 2\cdot 1 - (-2)^2 \big/ 1^2 = -2\,;\ \ F'_y = 2y/x + 4z\,;$$

$$F'_y\Big|_{P_0} = 2\cdot(-2)/1 + 4\cdot(-1) = -8\,;\ \ F'_z = -3z^2 + 4y\,;\ \ F'_z\Big|_{P_0} = -3\times$$

$$\times(-1)^2 + 4\cdot(-2) = -11\,.$$

Складаємо рівняння дотичної площини і нормальної прямої:

$$\alpha_d:\quad F'_x\big|_{P_0}(x - x_0) + F'_y\big|_{P_0}(y - y_0) + F'_z\big|_{P_0}(z - z_0) = 0\,;$$

$$-2\cdot(x-1) - 8\cdot(y+2) - 11\cdot(z+1) = 0\,;\ \ 2x - 2 + 8y + 16 +$$

$$+11z + 11 = 0\,;\quad 2x + 8y + 11z + 25 = 0$$ – дотична площина;

$$l_n:\quad \frac{x - x_0}{F'_x\big|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{F'_y\big|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{F'_z\big|_{P_0}}\,;\quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z+1}{-11}\,;$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{8} = \frac{z+1}{11}$$ – нормальна пряма. ■

Порівнюючи рівняння дотичної площини

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$

з формулою повного диференціала

$$dz = f'_x(x_0, y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\cdot\Delta y\,,$$

яку можна подати у вигляді

$$dz = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)\,,$$

бачимо, що праві частини цих виразів збігаються. Отже, й ліві частини є рівними. Тобто,

повний диференціал функції dz *дорівнює приросту* $\Delta z = z - z_0$ *аплікати дотичної площини* α_d, *проведеної до поверхні* $S:\ z = f(x, y)$ *у точці* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 44). (Геометричний зміст повного диференціала).

Зауваження 2. З геометричної точки зору наближеній формулі обчислення повного приросту функції через її повний диференціал

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx dz$$

відповідає заміна поверхні дотичною площиною в достатньо малому околі точки дотику.

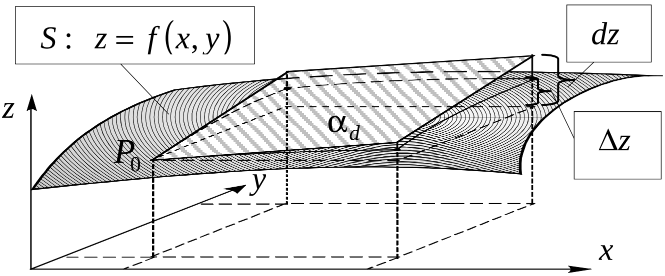

Рис. 44

Нехай поверхня S задається рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними z'_x і z'_y в області визначення D. Тоді у кожній точці поверхні S можна побудувати дотичну площину. Ця площина неперервно змінює своє положення при переході від однієї точки до іншої.

Поверхня S, у кожній точці якої існує дотична площина, що неперервно змінює своє положення при переході від точки до точки, називається ***гладкою***.

Поверхня S називається ***кусково-гладкою***, якщо вона складається зі скінченного числа гладких поверхонь зі спільною кусково-неперервною межею.

2.2.15. Частинні похідні вищих порядків. Диференціали вищих порядків. Формула Тейлора

Частинні похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$ функції двох змінних $z = f(x, y)$ також є функціями двох змінних x і y, а тому самі можуть мати частинні похідні.

Частинна похідна по x від частинної похідної по x називається ***другою чистою частинною похідною по*** x, x і позначається

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \text{ або } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \text{ або } z''_{xx}. \text{ Таким чином, } \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}.$$

Аналогічно частинна похідна по y від частинної похідної по y називається ***другою чистою частинною похідною по*** y, y і позначається $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, або z''_{yy}. Отже, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}$.

Якщо від частинної похідної по x взяти частинну похідну по y, то отримаємо ***другу мішану частинну похідну по*** x ***і*** y, яка позначається $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, або z''_{xy}. Отже, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}$.

Якщо від частинної похідної по y взяти частинну похідну по x, то одержимо ***другу мішану частинну похідну по*** y ***і*** x (з іншим порядком диференціювання), яка позначається

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, або z''_{yx}. Отже, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}$.

У загальному випадку $\partial^2 z/\partial y\partial x\neq\partial^2 z/\partial x\partial y$.

<u>Зауваження 1</u>. Аналогічно частинним похідним другого порядку вводяться частинні похідні третього, четвертого і т.д., порядку. Наприклад,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right);\qquad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right).$$

<u>Теорема</u>. *Для неперервних мішаних частинних похідних порядок диференціювання значення не має, зокрема* $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}$.

□ Розглянемо вираз

$$A=\left[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)\right]-\left[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\right].$$

Фіксуючи y, введемо допоміжну функцію однієї змінної x:

$$\varphi(x)=f(x,y+\Delta y)-f(x,y).\quad \text{Тоді}\quad A=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x).$$

Застосуємо формулу скінченних приростів Лагранжа й одержимо

$$A=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\varphi'(\bar{x})\Delta x;\quad \bar{x}\in(x,\,x+\Delta x).$$

Але $\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y)$.

Застосуємо формулу Лагранжа до функції $f'_x(\bar{x}, y)$ однієї змінної y і дістанемо

$$f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta y\,; \quad \bar{y} \in (y, y + \Delta y)\,.$$

Тоді $A = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\,\Delta x\,\Delta y$.

З іншого боку, переставляючи середні доданки, вираз A можна подати у вигляді

$$A = \left[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)\right] - \left[f(x + \Delta x, y) - f(x, y)\right].$$

Фіксуючи x, введемо допоміжну функцію однієї змінної y

$$\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)\,.$$

Тоді $A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y) = \psi'(\tilde{y})\Delta y =$

$$= \left[f'_y(x + \Delta x, \tilde{y}) - f'_y(x, \tilde{y})\right]\Delta y = f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y})\,\Delta x\,\Delta y\,,$$

де $\tilde{x} \in (x, x + \Delta x)$, $\tilde{y} \in (y, y + \Delta y)$.

Порівнюючи одержані зображення виразу A, маємо

$$f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta y \Delta x = f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y})\Delta x \Delta y\;; \quad f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y})\;.$$

Переходячи до границі при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, маємо $\bar{x} \to x, \bar{y} \to y, \tilde{x} \to x, \tilde{y} \to y$. Отже, $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$. ■

<u>Приклад 1</u>. Для заданої функції $z = f(x, y)$ перевірити рівність указаних мішаних частинних похідних:

а) $z = \sin(xy)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; б) $z = y \ln x$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (\sin(xy))'_x = y\cos(xy)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (y\cos(xy))'_y =$

$$= \cos(xy) - xy\sin(xy)\,; \quad \partial z/\partial y = (\sin(xy))'_y = x\cos(xy)\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (x\cos(xy))'_x = \cos(xy) - xy\sin(xy)\,; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,;$$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x^2};\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2};$$

$$\partial^3 z\big/\partial x\partial y\partial x=\partial^3 z\big/\partial x^2\partial y. \quad ■$$

<u>Приклад 2</u>. Перевірити, що задана функція $z=f(x,y)$ задовольняє вказаній умові:

$$\text{а)}\ z=arctg\frac{x}{y};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-4\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0;$$

$$\text{б)}\ z=x\sin(x-y);\quad x\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2z=0.$$

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\quad -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}-4\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\times$$

$$\times\left(-x\big/(x^2+y^2)\right)=0;\quad (-2xy-2xy+4xy)\big/(x^2+y^2)^2=0;\quad 0=0.$$

Таким чином, задана функція задовольняє вказаній умові.

б) $\partial z/\partial x=\sin(x-y)+x\cos(x-y)$; $\partial z/\partial y=-x\cos(x-y)$;

$$\partial^2 z\big/\partial y^2=-x\sin(x-y);\quad x\big(\sin(x-y)+x\cos(x-y)-$$

$$-x\cos(x-y)\big)-\big(-x\sin(x-y)\big)-2x\sin(x-y)=0;\quad 0=0.$$

Отже, задана функція задовольняє вказаній умові. ■

<u>Приклад 3</u>. Для заданої функції $u=f(x,y,z)$ знайти значення вказаної частинної похідної в заданій точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$u=x^2yz^4+x^3y^2z+yz^2;\quad M_0(-1;2;1);\quad \partial^4 u\big/\partial x^2\partial y\partial z.$$

□ $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xyz^4+3x^2y^2z$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2yz^4+6xy^2z$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=$

$$= 2z^4 + 12xyz\,;\;\; \partial^4 u \big/ \partial x^2 \partial y \partial z = 8z^3 + 12xy\,;\;\; \partial^4 u \big/ \partial x^2 \partial y \partial z \Big|_{M_0} =$$

$$= 8 \cdot 1^3 + 12 \cdot (-1) \cdot 2 = 8 - 24 = -16\,. \quad \blacksquare$$

Диференціалом другого порядку (***другим диференціалом***) функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається диференціал від її повного диференціала, тобто $\boxed{d^2 z = d(dz)}$.

Зауваження 2. Аналогічно визначаються диференціали більш високого порядку: $d^3 z = d(d^2 z)$; $\boxed{d^n z = d(d^{n-1} z)}$.

Зауваження 3. Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то $\boxed{d^2 z = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2}$.

Зауваження 4. Диференціали вищих порядків властивості інваріантності форми не мають.

Зауваження 5. Нехай функція n змінних $u = f(x_1\, x_2, \ldots, x_n)$ $(m+1)$ раз диференційовна в деякому околі $U(M_0, \varepsilon)$ точки $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$. Тоді для довільної точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ з цього околу справджується ***формула Тейлора***, яку компактно можна подати в диференціальній формі

$$\boxed{u(M) = u\big|_{M_0} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k u\big|_{M_0} + o(\rho^m)},$$

де $\rho = M_0 M = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2} < \varepsilon$.

Цю формулу до членів другого порядку включно для функції двох змінних $z = f(x, y)$ можна записати в розгорнутому вигляді:

$$\boxed{f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \right) +}$$

$$\boxed{+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \right.}$$

$$\boxed{\left.+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right)+o(\rho^2)}.$$

Приклад 4. Розкласти функцію $z = x\ln(x+2y)$ за формулою Тейлора до членів другого порядку включно в околі точки $M_0(1,0)$

□ Обчислимо значення заданої функції, її перших та других частинних похідних у вказаній точці $M_0(1,0)$:

$z = x\ln(x+2y)$; $\quad z(M_0) = 0$;

$\partial z/\partial x = \ln(x+2y) + x/(x+2y)$; $\quad \partial z(M_0)/\partial x = 1$;

$\partial z/\partial y = 2x/(x+2y)$; $\quad \partial z(M_0)/\partial y = 2$;

$\partial^2 z/\partial x^2 = (x+4y)/(x+2y)^2$; $\quad \partial^2 z(M_0)/\partial x^2 = 1$;

$\partial^2 z/\partial x\partial y = 4y/(x+2y)^2$; $\quad \partial^2 z(M_0)/\partial x\partial y = 0$;

$\partial^2 z/\partial y^2 = -4x/(x+2y)^2$; $\quad \partial^2 z(M_0)/\partial y^2 = -4$.

Запишемо розвинення заданої функції за формулою Тейлора:

$$x\ln(x+2y) = 0 + \big(1\cdot(x-1) + 2\cdot(y-0)\big) + (1/2)\big(1\cdot(x-1)^2 +$$

$$+ 2\cdot 0\cdot(x-1)(y-0) + (-4)\cdot(y-0)^2\big) + o(\rho^2);$$

$$x\ln(x+2y) = (x-1) + 2y + (1/2)(x-1)^2 - 4y^2 + o(\rho^2),$$

де $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. ■

2.2.16. Скалярне поле та його зображення. Похідна за напрямом

Нехай у деякій області D простору задано скалярну функцію трьох змінних $u = f(M) = f(x,y,z)$. Тоді кажуть, що в області D задане ***просторове скалярне поле*** $u = f(M)$.

Функція двох змінних $z = f(x,y)$, яка визначена у плоскій області D, задає ***плоске скалярне поле*** $z = f(x,y)$.

Поле – це функція $u = f(M)$, що розглядається разом з її областю визначення D. (Фізичний зміст функції багатьох змінних).

Приклади скалярних фізичних полів: поля температури, атмосферного тиску, електричного потенціалу.

Для геометричного зображення скалярного поля використовуються лінії рівня $f(x,y)=C$ (на площині) та поверхні рівня $f(x,y,z)=C$ (у просторі), де $C=const$.

Поверхні рівня (у просторі) та лінії рівня (на площині) є основними ***геометричними характеристиками*** скалярного поля.

Нехай у деякому околі фіксованої точки $M(x,y,z)$ задано просторове скалярне поле $u=u(M)=u(x,y,z)$. Проведемо з цієї точки M довільний ненульовий вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$. У напрямі цього вектора на деякій відстані Δl від початку M візьмемо іншу точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ (рис. 45). Тоді

$$\Delta l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\ ;$$

$$\Delta x=\Delta l\,\cos\alpha;\ \ \Delta y=\Delta l\,\cos\beta;\ \ \Delta z=\Delta l\,\cos\gamma .$$

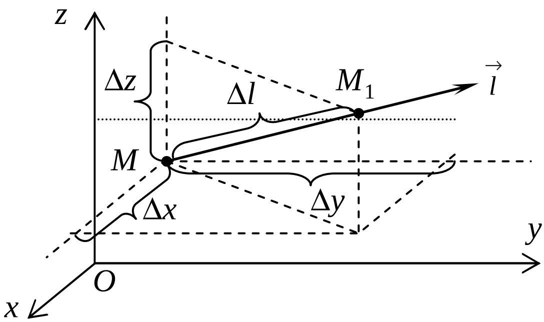

Рис. 45

Різниця $\Delta_l u=u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-u(x,y,z)$ значень функції в точках M_1 і M називається ***приростом функції*** $u=u(x,y,z)$ ***у напрямі вектора*** $\vec{l}$.

Якщо функція $u=u(x,y,z)$ неперервна і має неперервні частинні похідні, то

$$\Delta_l u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z ,$$

де $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$ при $\Delta l \to 0$.

Тоді $$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta l \cos\gamma +$$

$$+\varepsilon_1 \Delta l \cos\alpha + \varepsilon_2 \Delta l \cos\beta + \varepsilon_3 \Delta l \cos\gamma \text{ .ё}$$

Похідною функції $u = u(x, y, z)$ ***у точці*** $M(x, y, z)$ ***за напрямом вектора*** $\vec{l}$ називається границя $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}}$.

Похідна за напрямом обчислюється за формулою:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}$$

і визначає швидкість змінювання функції (скалярного поля) за напрямом вектора $\vec{l}$ у точці $M(x, y, z)$.

Якщо похідна $\partial u/\partial l$ додатна, то поле у цьому напрямі зростає. Якщо ж $\partial u/\partial l < 0$, то поле – спадає.

<u>Зауваження 1</u>. Нехай $z = f(x, y)$ – задане плоске скалярне поле. Функції $z = f(x, y)$ відповідає деяка поверхня S. Якщо через точку $M_0(x_0, y_0)$ і відкладений від неї вектор $\vec{l}$ провести вертикальну площину α ($\alpha \parallel Oz$), то ця площина перетне поверхню S вздовж деякої просторової лінії l. Тангенс кута α_d між дотичною до лінії перерізу l у точці $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ і горизонтальною координатною площиною Oxy дорівнює значенню похідної за напрямом $\partial z/\partial l$ у відповідній точці $M_0(x_0, y_0)$ (<u>геометричний зміст</u> похідної за напрямом) (рис. 46): $\boxed{tg\,\alpha_d = \partial z/\partial l\,_{M_0}}$.

<u>Зауваження 2</u>. Якщо напрям вектора $\vec{l}$ співпадає з напрямом одного з координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ чи $\vec{k}$, то похідна за напрямом $\partial u/\partial l$ співпадає з відповідною частинною похідною:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial i}=\frac{\partial u}{\partial x}};\quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial j}=\frac{\partial u}{\partial y}};\quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial k}=\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

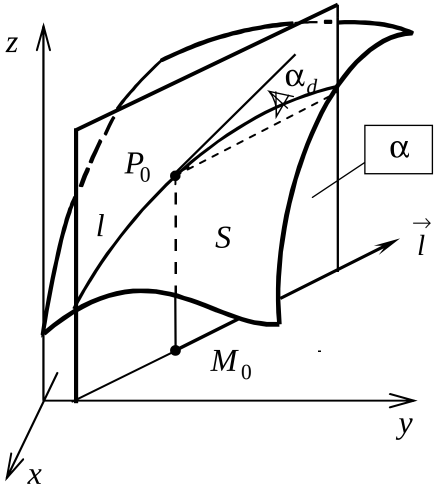

Рис. 46

<u>Приклад</u>. Для заданої функції $u=u(x,y,z)$ і вказаного вектора $\vec{l}$ знайти похідну за напрямом $\partial u/\partial l$ у зазначеній точці M:

а) $u=(x^2+y^2)tg\,z$; $\vec{l}(-1;\,2;\,-2)$; $M(1;-2;\,\pi/4)$;

б) $u=\sqrt{x^2+2y}\ln(x+y+z)$; $\vec{l}(-6;\,2;\,-3)$; $M(3;-4;2)$.

□ а) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\ tgz$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y\ tgz$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{x^2+y^2}{\cos^2 z}$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=2\cdot 1\cdot tg\frac{\pi}{4}=2;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=2\cdot(-2)\cdot tg\frac{\pi}{4}=-4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x^2+y^2}{\cos^2 z};\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\frac{1^2+(-2)^2}{\cos^2(\pi/4)}=10;\ |\vec{l}\,|=\sqrt{l_x^2+l_y^2+l_y^2};$$

$$|\vec{l}\,|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=3;$$

$$\cos\alpha=l_x\big/|\vec{l}\,|;\ \cos\beta=l_y\big/|\vec{l}\,|;\ \cos\gamma=l_z\big/|\vec{l}\,|;\ \cos\alpha=-1/3;$$

$$\cos\beta=\frac{2}{3};\ \cos\gamma=\frac{-2}{3};\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma;$$

$$\partial u/\partial l\,\big|_M=2\cdot(-1/3)+(-4)\cdot(2/3)+10\cdot(-2/3)=-10.$$

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь: $\partial u/\partial l\big|_M = -1$. ■

2.2.17. Градієнт. Зв'язок між градієнтом, похідною за напрямом і нормаллю до поверхні рівня

Градієнтом функції (скалярного поля) $u = u(x, y, z)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції: $\boxed{grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}}$.

Основні правила обчислення градієнта:

1) $\boxed{grad\,(u + v - w) = grad\, u + grad\, v - grad\, w}$;

2) $\boxed{grad\,(uv) = v\ grad\, u + u\ grad\, v}$;

2а) $\boxed{grad\,(Cu) = C\ grad\, u\ ;\quad C = const}$;

3) $\boxed{grad\,(u/v) = (v\ grad\, u - u\ grad\, v)\big/v^2}$.

Теорема (***Зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом***). *Похідна* $\partial u/\partial l$ *за напрямом вектора* $\vec{l}$ *дорівнює проекції градієнта* $grad\, u$ *на цей вектор* (рис. 47):

$$\boxed{\partial u/\partial l = np_{\vec{l}}\, grad\, u} .$$

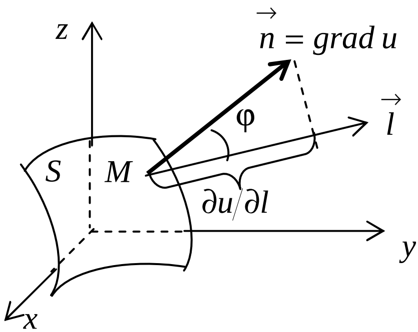

Рис. 47

□ Розглянемо одиничний вектор $\vec{l_0} = \vec{l}\big/|\vec{l}|$, $|\vec{l_0}| = 1$, що відповідний вектору $\vec{l}$:

$$\vec{l_0} = \cos\alpha\ \vec{i} + \cos\beta\ \vec{j} + \cos\gamma\ \vec{k} .$$

Знайдемо у координатній формі скалярний добуток градієнта $grad\, u$ на одиничний вектор $\vec{l_0}$ $\quad grad u \cdot \vec{l_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

Вираз у правій частині одержаної рівності є похідною за напрямом $\partial u/\partial l$. Отже, $grad\, u \cdot \vec{l_0} = \partial u/\partial l$.

Нехай φ – кут між векторами $grad\, u$ і $\vec{l}$. Тоді за означенням скалярного добутку, враховуючи, що $|\vec{l_0}|=1$, маємо

$$\partial u/\partial l = grad\, u \cdot \vec{l_0} = |grad\, u| \cdot |\vec{l_0}| \cdot \cos\varphi = |grad\, u| \cdot \cos\varphi .$$

Вираз у правій частині цієї рівності є проекцією градієнта на вектор $\vec{l}$. Отже, $\partial u/\partial l = np_{\vec{l}}\, grad\, u$. ■

Основні <u>властивості градієнта</u>:

1) *Похідна* $\partial u/\partial l$ *скалярного поля* $u = u(x, y, z)$ *у даній точці* $M(x, y, z)$ *за напрямом вектора* $\vec{l}$ *має найбільше значення, коли напрям цього вектора співпадає з напрямом градієнта* $grad\, u$. *Це найбільше значення похідної* $\partial u/\partial l$ *дорівнює модулю градієнта*:

$$\boxed{(\partial u/\partial l)_{max} = |grad\, u|} \quad \text{при} \quad \boxed{\vec{l}_{\max} = grad\, u}.$$

(<u>Фізичний зміст</u> градієнта).

Іншими словами, *градієнт указує напрям найшвидшого зростання скалярного поля в даній точці, а його модуль дорівнює цій найбільшій швидкості*:

$$\boxed{\vec{l}_{\max} = grad\, u}; \quad \boxed{|grad\, u| = (\partial u/\partial l)_{max}}.$$

□ $\partial u/\partial l = |grad\, u| \cdot \cos\varphi$; $(\partial u/\partial l)_{max} = |grad\, u|$ при $\cos\varphi_{\max} = 1$.

Тоді $\varphi_{\max} = 0 \Rightarrow \vec{l}_{\max} \uparrow\uparrow grad u$. ■

<u>Зауваження</u>. Згідно з цією властивістю *градієнт скалярного поля визначається самим полем і не залежить від вибору системи координат*.

2) *Похідна* $\partial u/\partial l$ *скалярного поля* $u = u(x, y, z)$ *у довільній точці* $M(x, y, z)$ *за напрямом вектора, який перпендикулярний до градієнта* $grad\, u$, *дорівнює нулю*: $\boxed{\vec{l} \perp grad u \;\Rightarrow\; \partial u/\partial l = 0}$.

□ $\partial u/\partial l = |grad\,u| \cdot \cos\varphi$; $\vec{l} \perp grad u$; $\varphi = \pi/2$; $\cos\varphi = 0$;

$$\partial u/\partial l = 0. \quad \blacksquare$$

3) *градієнт* $grad\,u$ *скалярного поля* $u = u(x, y, z)$ *у кожній точці* $M(x, y, z)$ *перпендикулярний до поверхні рівня* $S:\ u(x, y, z) = C$, *яка проходить через цю точку* (рис. 47). (<u>Геометричний зміст</u> градієнта). Іншими словами, *градієнт* $grad\,u$ *можна прийняти за вектор нормалі* $\vec{n}$ *до поверхні рівня* $S:\ u(x, y, z) = C$ *у відповідній точці* $M(x, y, z)$

$$S:\ u(x, y, z) = C; \quad grad\,u \perp S \Rightarrow \boxed{\vec{n} = grad\,u}.$$

□ Оскільки поверхня рівня S задається неявно рівнянням $F(x, y, z) = u(x, y, z) - C = 0$, то її вектор нормалі $\vec{n} = \left(\partial F/\partial x|_M,\ \partial F/\partial y|_M,\ \partial F/\partial z|_M\right)$. Але $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(u - C) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$;

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(u - C) = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(u - C) = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Тоді $\vec{n} = \left(\partial u/\partial x|_M,\ \partial u/\partial y|_M,\ \partial u/\partial z|_M\right) = grad\,u|_M$. $\blacksquare$

<u>Приклад 1</u>. Для заданої функції знайти градієнт і модуль градієнта в указаній точці:

а) $z = x^2 y - 5\sin(3x - 2y)$; $M_0(2, 3)$;

б) $u = 3xyz - 2x^3 y + y^2/z$; $M_0(-1, 2, 1)$.

□ а) $grad\,z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 15\cos(3x - 2y)$;

$$\partial z/\partial y = x^2 + 10\cos(3x - 2y); \quad \partial z/\partial x|_{M_0} = 2\cdot 2\cdot 3 -$$

$$-15\cos(3\cdot 2 - 2\cdot 3) = -3; \ \partial z/\partial y|_{M_0} = 2^2 + 10\cos(3\cdot 2 - 2\cdot 3) = 14;$$

$$grad\,z|_{M_0} = -3\vec{i} + 14\vec{j}; \ |grad\,z| = \sqrt{(\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2};$$

$$|\,grad\,z\,|_{M_0} = \sqrt{(-3)^2 + 14^2} = \sqrt{205}\,;$$

б) $grad\,u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$; $\partial u/\partial x = 3yz - 6x^2 y$;

$\partial u/\partial y = 3xz - 2x^3 + 2y/z$; $\partial u/\partial z = 3xy - y^2/z^2$; $\partial u/\partial x\big|_{M_0} =$

$= 3\cdot 2\cdot 1 - 6\cdot(-1)^2\cdot 2 = -6$; $\partial u/\partial y\big|_{M_0} = 3\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot(-1)^3 +$

$+ 2\cdot 2/1 = 3$; $\partial u/\partial z\big|_{M_0} = 3\cdot(-1)\cdot 2 - 2^2/1^2 = -8$; $grad\,u\big|_{M_0} =$

$= -6\vec{i} + 3\vec{j} - 8\vec{k}$; $|\,grad\,u\,| = \sqrt{(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial z)^2}$;

$$|grad\,u|_{M_0} = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-8)^2} = \sqrt{109}\,. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти найбільшу швидкість зростання скалярного поля $u = \ln(2x^4 + y^2 - 2z^4)$ у точці $M_0(1, -2, -1)$.

□ Напрям найбільшої швидкості зростання скалярного поля співпадає з напрямом градієнта, а її величина дорівнює модулю градієнта:

$$(\partial u/\partial l)_{max}\big|_{M_0} = |\,grad\,u\,|_{M_0} \quad \text{при} \quad \vec{l}_{\max} = grad\,u\big|_{M_0}\,.$$

Знайдемо градієнт і його модуль у заданій точці M_0:

$$grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\,; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 8x^3/(2x^4 + y^2 - 2z^4)\,;$$

$\partial u/\partial y = 2y/(2x^4 + y^2 - 2z^4)$; $\partial u/\partial z = -8z^3/(2x^4 + y^2 - 2z^4)$;

$\partial u/\partial x\big|_{M_0} = (8\cdot 1^3)/\left(2\cdot 1^4 + (-2)^2 - 2\cdot(-1)^4\right) = 2$; $\partial u/\partial y\big|_{M_0} =$

$= 2\cdot(-2)/\left(2\cdot 1^4 + (-2)^2 - 2\cdot(-1)^4\right) = -1$; $\partial u/\partial z\big|_{M_0} = -8\cdot(-1)^3 :$

$:\left(2\cdot 1^4 + (-2)^2 - 2\cdot(-1)^4\right) = 2$; $grad\,u\big|_{M_0} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$;

$|\,grad\,u\,| = \sqrt{(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial x)^2}$; $|grad\,u|_{M_0} =$

$$=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3.$$

Тоді $\left(\partial u/\partial l\right)_{max}\Big|_{M_0}=3$ при $\vec{l}_{\max}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. ■

<u>Приклад 3</u>. Задано функцію $u=u(x,y,z)$ і дві точки M_0 та M_1. Для даної функції в указаній точці M_0 знайти:

1) градієнт $grad\,u\big|_{M_0}$ і модуль градієнта $\left|grad\,u\right|\big|_{M_0}$;

2) $\partial u/\partial l\,\big|_{M_0}$ – похідну за напрямом вектора $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M_1}$;

3) кут φ між градієнтом $grad\,u\big|_{M_0}$ і вектором $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M_1}$;

4) загальне рівняння дотичної площини α_d у точці M_0 до відповідної поверхні рівня $S:\ u(x,y,z)=u\big|_{M_0}$;

5) канонічні рівняння нормальної прямої l_n до відповідної поверхні рівня $S:\ u(x,y,z)=u\big|_{M_0}$ у точці M_0, а також параметричні рівняння цієї прямої.

а) $u=z\,e^{x^3-2x^2yz}$; $M_0(2;-1;-1)$; $M_1(5;-7;1)$;

б) $u=x^3+z^2+\sin xyz$; $M_0(-1;0;2)$; $M_1(-3;2;3)$.

□ а) $\partial u/\partial x=z\,e^{x^3-2x^2yz}(3x^2-4xyz)$; $\partial u/\partial y=-2x^2z^2\,e^{x^3-2x^2yz}$;

$$\partial u/\partial z=e^{x^3-2x^2yz}+z\,e^{x^3-2x^2yz}\cdot(-2x^2y)=(1-2x^2yz)\,e^{x^3-2x^2yz};$$

$$\partial u/\partial x\,\big|_{M_0}=-4;\ \ \partial u/\partial y\,\big|_{M_0}=-8;\ \ \partial u/\partial z\,\big|_{M_0}=-7;$$

$$grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k};\quad grad\,u\big|_{M_0}=-4\vec{i}-8\vec{j}-7\vec{k};$$

$$\left|\,grad\,u\,\right|=\sqrt{\left(\partial u/\partial x\right)^2+\left(\partial u/\partial y\right)^2+\left(\partial u/\partial x\right)^2};\quad \left|grad\,u\right|\big|_{M_0}=$$

$$=\sqrt{(-4)^2+(-8)^2+(-7)^2}=\sqrt{129};\quad \vec{l}=\overrightarrow{M_0M_1}=(x_1-x_0;y_1-y_0;$$

$$z_1 - z_0)\ ;\quad \vec{l} = (5-2;\,-7+1;\,-1-1) = (3;\,-6;\,-2)\,;$$

$$|\,\vec{l}\,| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_y^2}\ ;\ \ |\,\vec{l}\,| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = 7\,;$$

$$\cos\alpha = l_x \big/ |\,\vec{l}\,|;\ \ \cos\beta = l_y \big/ |\,\vec{l}\,|;\ \ \cos\gamma = l_z \big/ |\,\vec{l}\,|;\ \ \cos\alpha = 3/7\,;$$

$$\cos\beta = -\frac{6}{7};\ \ \cos\gamma = -\frac{2}{7};\ \ \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma;$$

$$\partial u/\partial l\,\big|_{M_0} = -4\cdot 3/7 + (-8)\cdot(-6/7) - 7\cdot(-2/7) = 50/7\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\,grad\,u\,|\cdot\cos\varphi\,;\ \cos\varphi = \frac{\partial u/\partial l}{|\,grad\,u\,|}\,;\ \cos\varphi = \frac{50/7}{\sqrt{129}} = \frac{50\sqrt{129}}{903}\,;$$

$$S:\ u(x,\,y,\,z) = u\big|_{M_0}\,;\ \ u(x,\,y,\,z) = 1;\ \ \vec{n} = \left(A,\,B,\,C\right) = \ grad\,u\big|_{M_0} =$$

$$= -4\vec{i} - 8\vec{j} - 7\vec{k}\ ;\ \ \alpha_d:\ A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0\,;$$

$$-4(x-2) - 8(y+1) - 7(z+1) = 0;\ \ 4x + 8y + 7z + 7 = 0\,;$$

$$l_n:\ \frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}\,;\ \ \frac{x-2}{-4} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z+1}{-7}\,;$$

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{8} = \frac{z+1}{7};\ \ l_n:\ \frac{x-2}{4} = t\,;\ \ \frac{y+1}{8} = t\,;\ \ \frac{z+1}{7} = t\,;$$

$$x = 4t + 2\,;\ \ y = 8t - 1;\ \ x = 7t - 1\,.$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

2.2.18. Екстремум функції двох змінних. Необхідні умови екстремуму

Нехай функція двох змінних $z = f(M) = f(x, y)$ визначена в деякій області D і $M_0(x_0, y_0)$ – внутрішня точка цієї області. Точка M_0 називається ***точкою максимуму*** функції $z = f(M)$, якщо значення функції в цій точці M_0 більше, ніж значення функції у всіх близьких сусідніх точках:

$$\forall M \in U(M_0, \varepsilon),\ M \neq M_0,\ f(M_0) > f(M) \ \Leftrightarrow\ M_0 - \max,$$

де $U(M_0, \varepsilon)$ – деякий ε-окіл точки M_0, $\varepsilon > 0$.

Аналогічно вводиться поняття ***точки мінімуму***:

$$\forall M \in U(M_0, \varepsilon),\ M \neq M_0,\ f(M_0) < f(M) \ \Leftrightarrow\ M_0 - \min\ .$$

Точки максимуму та мінімуму називаються ***точками екстремуму***. Значення функції $z = f(M_0) = f(x_0, y_0)$ у точці екстремуму M_0 називається її ***екстремальним значенням*** (***екстремумом***).

Зауваження 1. Розглянутий екстремум є ***строгим внутрішнім локальним екстремумом***. Його не треба плутати з ***глобальним екстремумом*** у деякій заданій області D (найбільше $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ та найменше $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ значення функції в області D).

Зауваження 2. Розрізняють ***гладкий екстремум*** (рис. 48), в якому функція диференційовна, і ***гострий екстремум***, в якому хоча б одна частинна похідна першого порядку не існує (рис. 49).

Теорема (***необхідні умови гладкого екстремуму***). *Якщо диференційовна функція* $z = f(x, y)$ *має екстремум у точці* $M_0(x_0, y_0)$, *то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю*:

$$\boxed{\begin{cases} \partial z/\partial x\big|_{M_0} = 0; \\ \partial u/\partial y\big|_{M_0} = 0. \end{cases}}$$

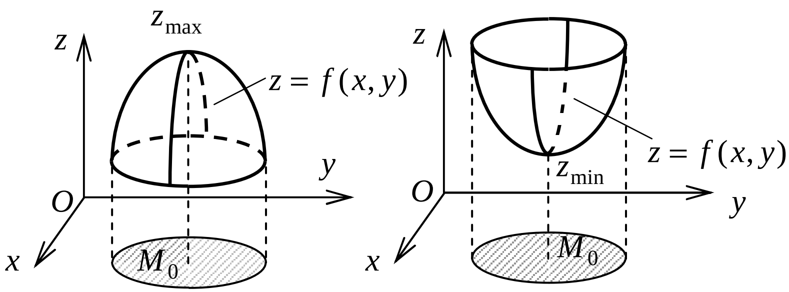

Рис. 48

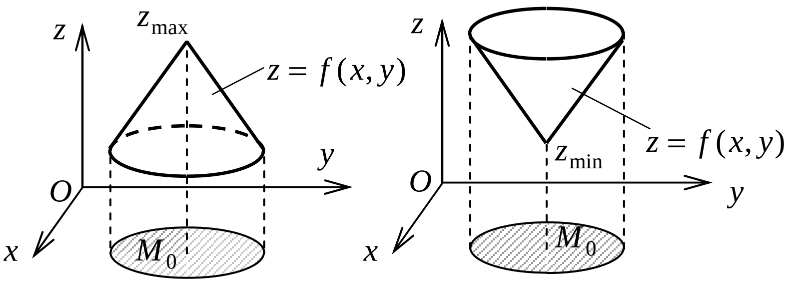

Рис. 50

□ Зафіксуємо змінну y, поклавши $y = y_0 = const$. Тоді точка x_0 є точкою екстремуму диференційовної функції однієї змінної $z = \varphi(x) = f(x, y_0)$. Згідно з необхідною умовою екстремуму функції однієї змінної $d\varphi/dx\big|_{x=x_0} = 0$. Але вказана похідна є частинною похідною по x функції $z = f(x, y)$:

$$d\varphi/dx\big|_{x=x_0} = \partial f/\partial x\big|_{M_0}. \text{ Отже, } \partial f/\partial x\big|_{M_0} = 0.$$

Аналогічно, якщо зафіксувати аргумент x, поклавши $x = x_0 = const$, то отримаємо диференційовну функцію однієї змінної $z = \psi(y) = f(x_0, y)$. Ця функція має екстремум при $y = y_0$. У точці екстремуму y_0 похідна одержаної функції теж дорівнює нулю: $d\psi/dy\big|_{y=y_0} = 0$. Але вказана похідна є частинною похідною по y функції $z = f(x, y)$: $d\psi/dy\big|_{y=y_0} == \partial f/\partial y\big|_{M_0}$.

Отже, $\partial f/\partial y\big|_{M_0} = 0$. У точці екстремуму $M_0(x_0, y_0)$ обидві знайдені умови повинні виконуватись одночасно. ■

Зауваження 3. У точці гострого екстремуму хоча б одна з частинних похідних першого порядку не існує, а всі інші дорівнюють нулю (***необхідні умови гострого екстремуму***).

Точки, в яких виконуються необхідні умови екстремуму, тобто всі частинні похідні або дорівнюють нулю або не існують, називаються ***критичними точками*** функції $z = z(M)$.

Критичні точки, в яких всі перші частинні похідні дорівнюють нулю, називаються ***стаціонарними точками*** функції $z = z(M)$.

Зауваження 4. Стаціонарна точка – це точка, що “підозріла” на гладкий екстремум. Тобто у цій точці екстремум може бути, а може і не бути. Наприклад, для функції $z=(x^2-y^2)/2$ (гіперболічний параболоїд на рис. 50) початок координат $O(0,0)$ є стаціонарною точкою, оскільки

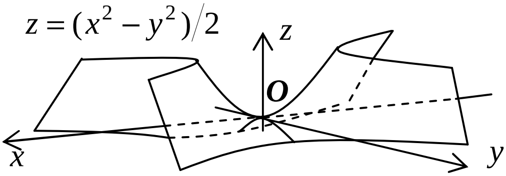

Рис. 50

$$\partial z/\partial x\big|_O = x\big|_O = 0;$$
$$\partial z/\partial y\big|_O = -y\big|_O = 0,$$

але екстремум у ній відсутній ($O(0,0)$ – ***сідлова точка*** функції $z=(x^2-y^2)/2$).

Зауваження 5. Надалі обмежимося розглядом тільки гладкого екстремуму.

Приклад. Знайти стаціонарні точки функції:

а) $u = x^3 + xy + 2yz - x + 5y + 4z - 3$; б) $z=(x-y-2)e^{x^2+y^2}$.

□ а) Для знаходження стаціонарних точок складаємо і розв’язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases}\partial u/\partial x = 0\\ \partial u/\partial y = 0\\ \partial u/\partial z = 0\end{cases} \quad \begin{cases}\partial u/\partial x = 3x^2+y-1\\ \partial u/\partial y = x+2z+5\\ \partial u/\partial z = 2y+4\end{cases} \quad \begin{cases}3x^2+y-1=0\\ x+2z+5=0\\ 2y+4=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=-2\\ 3x^2-2-1=0\\ x+2z+5=0\end{cases} \qquad \begin{array}{c} x_1=1; \quad x_2=-1; \quad z=-(5+x)/2;\\ z_1=-(5+1)/2=-3; \;\; z_2=-(5-1)/2=-2;\\ M_1(1,-2,-3),\;\; M_2(-1,-2,-2)\end{array}$$

– стаціонарні точки.

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь: $M_0(1/2,-1/2)$ ■

2.2.19. Достатні умови екстремуму

Аналогічно функції однієї змінної, наявність і характер екстремуму функції двох змінних у стаціонарній точці визначається знаком другого диференціала

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 .$$

Нехай у деякому околі стаціонарної точки $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Знайдемо значення других частинних похідних у цій точці:

$$\boxed{A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} ; \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} ; \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}}$$

і обчислимо визначник $\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2}$.

<u>Теорема</u> (***достатні умови гладкого екстремуму***). 1) *Якщо визначник* Δ *додатний, то* M_0 *– точка екстремуму, причому*

а) M_0 *– точка мінімуму, якщо* $A > 0$;

б) M_0 *– точка максимуму, якщо* $A < 0$.

2) *Якщо визначник* Δ *від'ємний, то у точці* M_0 *екстремум відсутній* (M_0 – сідлова точка функції $z = f(x, y)$).

3) *Якщо визначник* Δ *дорівнює нулю, то у точці* M_0 *екстремум може бути, а може і не бути.* (Сумнівний випадок. Потрібні додаткові дослідження.) (Без доведення).

<u>Приклад 1</u>. Дослідити функцію на екстремум:

а) $z = x^3 + y^3 - 6xy - 2$; б) $z = x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 28y + 1$.

□ а) Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\partial z/\partial x = 3x^2 - 6y ; \quad \partial z/\partial y = 3y^2 - 6x .$$

Використовуючи необхідні умови екстремуму, знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases}\partial z/\partial x=0\\ \partial z/\partial y=0\end{cases}\begin{cases}3x^2-6y=0\\ 3y^2-6x=0\end{cases}\begin{cases}x^2-2y=0\\ y^2-2x=0\end{cases}\begin{matrix}y=x^2/2;\\ \left(x^2/2\right)^2-2x=0;\end{matrix}$$

$$\frac{x^4}{4}-2x=0;\quad x^4-8x=0;\quad \left[\begin{matrix}x=0\\ x^3-8=0\end{matrix}\right.\quad \left[\begin{matrix}x_1=0 & y_1=0;\\ x_2=2 & y_2=2^2/2=2.\end{matrix}\right.$$

Отже, стаціонарні точки $M_1(0,0)$; $M_2(2,2)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\partial^2 z/\partial x^2=6x;\quad \partial^2 z/\partial y^2=6y;\quad \partial^2 z/\partial x\partial y=-6.$$

Дослідимо на екстремум точку $M_1(0,0)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_1(0,0)$ і значення визначника Δ:

$$A=\partial^2 z/\partial x^2\Big|_{M_1}=6\cdot 0=0;\quad C=\partial^2 z/\partial y^2\Big|_{M_1}=6\cdot 0=0;$$

$$B=\partial^2 z/\partial x\partial y\Big|_{M_1}=-6;\quad \Delta=AC-B^2=0\cdot 0-(-6)^2=-36<0.$$

Оскільки $\Delta<0$, то у точці M_1 екстремуму немає.

Дослідимо на екстремум точку $M_2(2,2)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_2(2,2)$ і значення визначника Δ:

$$A=\partial^2 z/\partial x^2\Big|_{M_2}=6\cdot 2=12;\quad C=\partial^2 z/\partial y^2\Big|_{M_2}=6\cdot 2=12;$$

$$B=\partial^2 z/\partial x\partial y\Big|_{M_2}=-6;\quad \Delta=AC-B^2=12\cdot 12-(-6)^2=108>0.$$

З нерівності $\Delta>0$ випливає, що M_2 – точка екстремуму.

Оскільки $A=12>0$, то M_2 – точка мінімуму. Знайдемо мінімальне значення функції у цій точці:

$$z_{\min}=z(M_2)=2^3+2^3-6\cdot 2\cdot 2-2=-10.$$

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь: $z_{\min}=z(-3,1)=-28$. ■

Приклад 2. Дослідити функцію на екстремум

а) $z=(x+2y)^3/3-x^2/2-3y^2-2xy-2y+2$; б) $z=xe^{-x-y^2}$.

□ а) Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\partial z/\partial x=(x+2y)^2-x-2y; \quad \partial z/\partial y=2(x+2y)^2-6y-2x-2.$$

Для визначення стаціонарних точок прирівнюємо нулю ці похідні. Дістаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}(x+2y)^2-x-2y=0\\ 2(x+2y)^2-6y-2x-2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x+2y)((x+2y)-1)=0\\ (x+2y)^2-3y-x-1=0\end{cases}$$

Ця система розпадається на сукупність двох систем:

$$\begin{cases}x+2y=0\\ (x+2y)^2-3y-x-1=0\end{cases} \text{ або } \begin{cases}(x+2y)-1=0\\ (x+2y)^2-3y-x-1=0\end{cases}$$

Для першої системи:

$$x=-2y; \quad (-2y+2y)^2-3y-(-2y)-1=0;$$

$$-y-1=0; \quad y=-1; \quad x=-2\cdot(-1)=2.$$

Для другої системи:

$$x=-2y+1; \quad (-2y+1+2y)^2-3y-(-2y+1)-1=0;$$

$$-y-1=0; \quad y=-1; \quad x=-2\cdot(-1)+1=3.$$

Отже, маємо дві стаціонарні точки $M_1(2,-1)$; $M_2(3,-1)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\partial^2 z/\partial x^2=2(x+2y)-1; \quad \partial^2 z/\partial y^2=4(x+2y)-6;$$

$$\partial^2 z/\partial x\partial y=4(x+2y)-2.$$

Дослідимо на екстремум точку $M_1(2,-1)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_1 і значення визначника Δ:

$$A=\partial^2 z/\partial x^2\Big|_{M_1}=-1; \quad C=\partial^2 z/\partial y^2\Big|_{M_1}=-6;$$

$$B=\partial^2 z/\partial x\partial y\Big|_{M_1}=-2\,;\;\; \Delta=AC-B^2=(-1)\cdot(-6)-(-2)^2=2>0\,.$$

Оскільки $\Delta>0$, то M_1 – точка екстремуму.

З нерівності $A=-1<0$ випливає, що M_1 – точка максимуму. Знайдемо максимальне значення функції у цій точці:

$$z_{\max}=z(M_1)=(2+2\cdot(-1))^3/3-2^2/2-3\cdot(-1)^2-$$
$$-2\cdot2\cdot(-1)-2\cdot(-1)+2=3\,.$$

Дослідимо на екстремум точку $M_2(3,-1)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_2 і значення визначника Δ:

$$A=\partial^2 z/\partial x^2\Big|_{M_2}=1\,;\; C=\partial^2 z/\partial y^2\Big|_{M_2}=-2\,;\; B=\partial^2 z/\partial x\partial y\Big|_{M_2}=2\,;$$

$$\Delta=AC-B^2=1\cdot(-2)-2^2=-2<0\,.$$

Оскільки $\Delta<0$, то у точці M_2 екстремуму немає.

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь: $z_{\max}=z(1,0)=e^{-1}$. ■

2.2.20. Знаходження найменшого та найбільшого значень функції в замкненій області

Нехай функція $z=f(x,y)$ неперервна і диференційовна в замкненій області D. Тоді вона досягає найменшого (найбільшого) значення на множині D або в одній із стаціонарних точок, що належать цій області D, або в одній із точок межі області D.

<u>Правило знаходження найменшого та найбільшого значень функції $z=f(x,y)$ у замкненій області D</u>:

1) *Побудувати область D в прямокутній системі координат Oxy. Знайти всі кутові точки – точки, що сполучають сусідні ділянки межі області D;*

2) *Знайти стаціонарні точки функції $z=f(x,y)$. Виділити з них ті, що лежать в області D. Обчислити значення функції у виділених точках;*

3) *Знайти значення функції в усіх кутових точках межі об-*

ласті D*;*

4) *На кожній ділянці межі області* D *перейти до функції однієї змінної, що одержується з початкової функції* $z = f(x, y)$ *врахуванням рівняння цієї ділянки. Знайти стаціонарні точки одержаної функції однієї змінної. Виділити з них ті, що лежать на даній ділянці. Обчислити значення функції у виділених точках і на кінцях відрізка зміни аргументу;*

5) *Порівняти всі одержані значення функції між собою і вибрати серед них найменше – глобальний мінімум* $\min\limits_{(x,y)\in D} z$ *– і найбільше – глобальний максимум* $\max\limits_{(x,y)\in D} z$.

<u>Приклад</u>. Знайти найменше та найбільше значення заданої функції в замкненій області D, що обмежена вказаними лініями:

а) $z = 3x^2 + y^2 - 4xy - x$; D: $x = 2$; $y = 1$; $x + y + 1 = 0$;

б) $z = x^2 + 4y^2 - 2xy - 4x + 10y$; D: $x = 0$; $y = -2$; $y = -x$.

□ а) У декартовій системі координат Oxy побудуємо вказані лінії межі області D: $x = 2$; $y = 1$; $x + y + 1 = 0$ і позначимо штриховкою саму область D (рис. 51). Кутові точки визначаються як точки попарного перетину цих ліній:

$$\begin{cases} x = 2; \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2; \\ x + y + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1; \\ x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, дістаємо $A(2;1)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

Для визначення стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

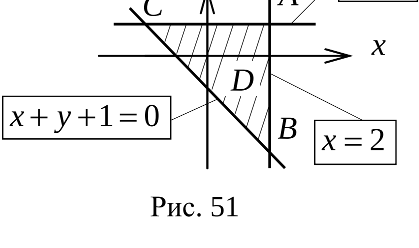

Рис. 51

$$\begin{cases} \partial z/\partial x = 6x - 4y - 1 = 0 \\ \partial z/\partial y = 2y - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ 6x - 4\cdot 2x - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = -1/2; \\ y = -1. \end{matrix}$$

Оскільки стаціонарна точка $M(-1/2; -1) \in D$, то обчислимо відповідне значення функції:

$$z\big|_M = 3(-1/2)^2 + (-1)^2 - 4(-1/2)(-1) - (-1/2) = 1/4.$$

Досліджуємо функцію на межі області D, яка складається з ділянок $AB,\ BC,\ AC$, що сполучаються в кутових точках $A(2;1)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

Обчислюємо значення функції в кутових точках:

$$z\big|_A = 3\cdot 2^2 + 1^2 - 4\cdot 2\cdot 1 - 2 = 3;\ \ z\big|_B = 3\cdot 2^2 + (-3)^2 -$$
$$-4\cdot 2\cdot(-3) - 2 = 43;\ \ z\big|_C = 3\cdot(-2)^2 + 1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1 - (-2) = 23.$$

На кожній ділянці межі, використовуючи її рівняння, перейдемо до функції однієї змінної і знайдемо значення одержаної функції в її стаціонарних точках, що належать відповідній ділянці. (Кінці відрізків зміни аргументу співпадають з кутовими точками, де значення функції вже обчислені).

На відрізку AB: $x = 2,\ y \in [-3, 1]$ маємо:

$$z_1 = f_1(y) = 3\cdot 2^2 + y^2 - 4\cdot 2\cdot y - 2 = y^2 - 8y + 10;$$
$$z_1' = 2y - 8;\quad z_1' = 0;\quad 2y - 8 = 0;\quad y = 4 \notin [-3, 1].$$

На відрізку BC: $y = -x - 1,\ x \in [-2, 2]$ маємо:

$$z_2 = f_2(x) = 3x^2 + (-x-1)^2 - 4x(-x-1) - x = 8x^2 + 5x + 1;$$
$$z_2' = 16x + 5;\quad z_2' = 0;\quad 16x + 5 = 0;\quad x = -5/16 \in \left[-2, 2\right];$$
$$y = -(-5/16) - 1 = -11/16;\quad N\left(-5/16, -11/16\right);$$
$$z\big|_N = f_2(-5/16) = 8\cdot(-5/16)^2 + 5\cdot(-5/16) + 1 = -7/32.$$

На відрізку AC: $y = 1,\ x \in [-2, 2]$ маємо:

$$z_3 = f_3(x) = 3x^2 + 1^2 - 4x\cdot 1 - x = 3x^2 - 5x + 1;$$
$$z_3' = 6x - 5;\ \ z_3' = 0;\ \ 6x - 5 = 0;\ \ x = 5/6 \in [-2, 2];\ \ y = 1;$$
$$P(5/6, 1);\ \ z\big|_P = f_3(5/6) = 3\cdot(5/6)^2 - 5\cdot(5/6) + 1 = -13/12.$$

Порівняємо між собою всі знайдені значення функції:

$$z\big|_M = \frac{1}{4};\ z\big|_A = 3;\ z\big|_B = 43;\ z\big|_C = 23;\ z\big|_N = -7/32;\ z\big|_P = -1\frac{1}{12}.$$

Отже, найменше та найбільше значення функції відповідно

$$\min_{(x,y)\in D} z = z\Big|_{P(5/6,\,1)} = -1\frac{1}{12}; \quad \max_{(x,y)\in D} z = z\Big|_{B(2,-3)} = 43.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

2.2.21. Умовний екстремум функції двох змінних

Розглянутий раніше локальний екстремум є ***безумовним***, тобто не передбачає виконання ніяких додаткових умов чи обмежень.

Умовним екстремумом функції $z = f(x, y)$ двох змінних називається екстремум цієї функції, який досягається за додаткової умови, що змінні x, y зв'язані ***рівнянням зв'язку*** $\boxed{\varphi(x, y) = 0}$.

Зауваження 1. З геометричної точки зору у випадку безумовного екстремуму пошук екстремуму поверхні $z = f(x, y)$ здійснюють у деякій області D, а у випадку умовного екстремуму його відшукують на заданій лінії $\varphi(x, y) = 0$ (рис. 52). Умовний екстремум, якщо він існує, досягається на лінії перетину L заданої поверхні $z = f(x, y)$ з вертикальним циліндром $\varphi(x, y) = 0$, твірні якого паралельні осі Oz.

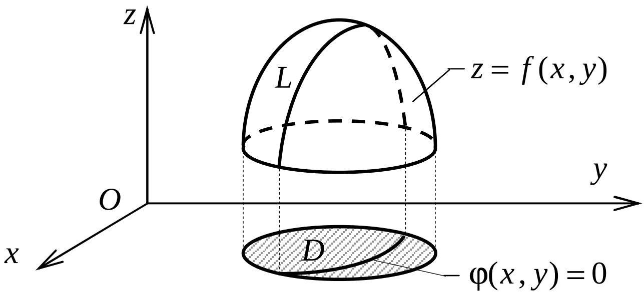

Рис. 52

Зауваження 2. Якщо рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ можна розв'язати відносно однієї зі змінних, тобто подати, наприклад, у вигляді $y = \psi(x)$, тоді цю умову можна врахувати, безпосередньо зводячи функцію $z = f(x, y)$ двох змінних підстановкою $y = \psi(x)$

до функції однієї змінної $z = f(x, \psi(x))$, яка далі досліджується на безумовний екстремум.

Згідно з ***методом множників Лагранжа*** задача знаходження умовного екстремуму зводиться до дослідження на звичайний безумовний екстремум ***функції Лагранжа***

$$\boxed{L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)},$$

де допоміжна змінна (параметр) λ називається ***множником Лагранжа***.

Необхідні умови такого екстремуму задаються системою рівнянь

$$\boxed{\begin{cases} \partial L/\partial x = \partial f/\partial x + \lambda\, \partial\varphi/\partial x = 0; \\ \partial L/\partial y = \partial f/\partial y + \lambda\, \partial\varphi/\partial y = 0; \\ \partial L/\partial\lambda = \varphi(x,y) = 0. \end{cases}}$$

Розв'язки цієї системи визначають стаціонарні точки функції Лагранжа. Якщо $P_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа $L(x,y,\lambda)$, то $M_0(x_0, y_0)$ – точка, що "підозріла" на умовний екстремум функції $z = f(x,y)$.

Достатні умови умовного екстремуму можна встановити за знаком диференціала другого порядку d^2L функції Лагранжа з урахуванням рівняння зв'язку. При визначенні знака d^2L диференціал допоміжної змінної $d\lambda$ не враховується, тобто вважається

$$\boxed{d^2L(x,y,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2},$$

де диференціали dx і dy зв'язані залежністю $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx} = 0$, яка виражає рівність нулю повної похідної за x складеної функції $\varphi(x, y(x))$, що випливає з рівняння зв'язку $\varphi(x,y) = 0$.

Нехай $P_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ *– стаціонарна точка функції Лагранжа* $L(x,y,\lambda)$. *Тоді:* 1) *якщо* $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, *то* $M_0(x_0, y_0)$ *– точка умовного мінімуму;* 2) *якщо* $d^2L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, *то*

$M_0(x_0, y_0)$ *– точка умовного максимуму.*

<u>Приклад 1</u>. Знайти екстремум функції

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 \text{ за умови } 2x + y - 10 = 0 .$$

□ Складаємо функцію Лагранжа:

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 \ ; \quad \varphi(x, y) = 2x + y - 10 = 0 \ ;$$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + 1 + \lambda(2x + y - 10) \ .$$

Згідно з необхідними умовами екстремуму:

$$\begin{cases} \partial L/\partial x = 0 \\ \partial L/\partial y = 0 \\ \partial L/\partial \lambda = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2\lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ 2x + y - 10 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x = -\lambda \ ; \quad y = -\lambda/2 \ ; \\ 2 \cdot (-\lambda) - \lambda/2 - 10 = 0; \\ \lambda = -4 \ ; \ x = 4; \ y = 2. \end{array}$$

Отже, $P_0(4, 2, -4)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа; $M_0(4, 2)$ – точка можливого умовного екстремуму. При $\lambda = -4$ функція Лагранжа набуває вигляду

$$L(x, y, -4) = x^2 + y^2 + 1 - 4(2x + y - 10) = x^2 + y^2 - 8x - 4y + 41 .$$

Дослідимо точку $M_0(4, 2)$ на умовний екстремум, використовуючи достатні умови екстремуму:

$$\partial^2 L/\partial x^2 \Big|_{M_0} = 2 \ ; \ \ \partial^2 L/\partial x \partial y \Big|_{M_0} = 0 \ ; \ \ \partial^2 L/\partial y^2 \Big|_{M_0} = 2 \ .$$

З рівняння зв'язку $2x + y - 10 = 0$, розглядаючи y як функцію від x і знаходячи повну похідну по x від лівої та правої частин цього рівняння, дістаємо $2 + \dfrac{dy}{dx} = 0; \quad dy = -2dx$.

Тоді $d^2 L(x, y, -4)\Big|_{M_0} = 2 \cdot dx^2 + 2 \cdot 0 \cdot dx\,dy + 2 \cdot dy^2 =$

$$= 2\,dx^2 + 2\,(-2dx)^2 = 10\,dx^2 .$$

Оскільки $d^2 L(x, y, -4)\Big|_{M_0} = 10\,dx^2 > 0$, то $M_0(4, 2)$ – точка умовного мінімуму заданої функції.

Обчислимо відповідне її мінімальне значення:

$$z_{\min} = z\big|_{M_0} = 4^2 + 2^2 + 1 = 21. \ \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти екстремум функції $z = xy^2 - 2$ за умови $x + 2y - 1 = 0$.

□ Складаємо функцію Лагранжа:

$$z = f(x, y) = xy^2 - 2; \quad \varphi(x, y) = x + 2y - 1 = 0;$$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = xy^2 - 2 + \lambda(x + 2y - 1) \ .$$

Стаціонарні точки функції Лагранжа знаходимо з необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial L/\partial x = 0 \\ \partial L/\partial y = 0 \\ \partial L/\partial \lambda = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + \lambda = 0 \\ 2xy + 2\lambda = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -y^2 \\ xy - y^2 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(x - y) = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x_2 = 1/3 \\ y_2 = 1/3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -0^2 = 0; \\ \lambda_2 = -(1/3)^2 = -1/9 \end{matrix} .$$

Отже, $P_1(1, 0, 0)$ і $P_2(1/3, 1/3, -1/9)$ – стаціонарні точки функції Лагранжа. Відповідно $M_1(1, 0)$ і $M_2(1/3, 1/3)$ – точки можливого умовного екстремуму.

Знайдемо другі частинні похідні функції Лагранжа:

$$\partial^2 L/\partial x^2 = 0; \quad \partial^2 L/\partial x \partial y\Big| = 2y; \quad \partial^2 L/\partial y^2 = 2x .$$

Тоді другий диференціал функції Лагранжа

$$d^2 L(x, y, \lambda) = 0\,dx^2 + 2 \cdot 2y\,dx\,dy + 2x\,dy^2 = 4y\,dx\,dy + 2x\,dy^2 \ ,$$

З рівняння зв'язку $x + 2y - 1 = 0$, розглядаючи y як функцію від x і знаходячи повну похідну по x від лівої та правої частин цього рівняння, маємо: $1 + 2\,dy/dx = 0$; $dy = -\,dx/2$. Тоді

$$d^2L(x,y,\lambda) = 2y\,dx\left(-\ dx/2\right) + 2x\left(-\ dx/2\right)^2 = (1/2)(-2y+x)\,dx^2,$$

Дослідимо точку $M_1(1,\,0)$, якій відповідає значення $\lambda = 0$ множника Лагранжа, на умовний екстремум, використовуючи достатні умови екстремуму.

Оскільки $d^2L(x,y,0)\Big|_{M_1} = (1/2)(-2\cdot 0+1)\,dx^2 = (1/2)dx^2 > 0$,

то $M_1(1,\,0)$ – точка умовного мінімуму заданої функції.

Її відповідне мінімальне значення $z_{\min} = z\big|_{M_1} = -2$.

Дослідимо точку $M_2(1/3,\,1/3)$, якій відповідає значення $\lambda = -1/9$ множника Лагранжа, на умовний екстремум, використовуючи достатні умови екстремуму.

Оскільки

$$d^2L(x,y,-1/9)\Big|_{M_2} = (1/2)\left(-2\cdot(1/3)+1/3\right)dx^2 = -(1/6)dx^2 < 0,$$

то $M_2(1/3,\,1/3)$ – точка умовного максимуму заданої функції.

Її відповідне максимальне значення $z_{\max} = z\big|_{M_2} = -1\dfrac{26}{27}$. ■

<u>Зауваження 3</u>. Часто характер умовного екстремуму зрозумілий з геометричного чи фізичного змісту задачі, тому немає потреби перевіряти досить складні достатні умови такого екстремуму.

2.2.22. Метод найменших квадратів

Нехай за результатами експериментальних досліджень треба визначити ***модель*** $y = F(x)$ залежності $y = f(x)$ змінної величини y (залежна змінна) від змінної величини x (незалежна змінна). Проведено n випробувань і одержано n пар відповідних значень (з деякими похибками) цих змінних x і y:

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

З теоретичних міркувань чи за характером розташування на координатній площині Oxy експериментальних точок $(x_i\,,y_i)$, $i = \overline{1,n}$ встановлюють вигляд функції $y = F(x)$ (вибір ***структури*** моделі – ***структурна ідентифікація***). Нехай розміщення експериментальних точок нагадує пряму (рис. 53). Тоді природно шукану залежність вважати лінійною функцією $y = F(x) = kx + b$.

При вибраному вигляді шуканої функції залишається знайти всі невідомі коефіцієнти (параметри) k, b так, щоб ця модель у деякому розумінні найкраще описувала розглядуваний процес (вибір значень ***параметрів*** моделі – ***параметрична ідентифікація***).

Найпоширенішим способом оцінювання параметрів є ***метод найменших квадратів*** (***МНК***).

Відхиленням (***нев'язкою***) s_i залежної змінної y, в точці x_i називають різницю $s_i = y_i - (kx_i + b)$ між експериментальним значенням y_i залежної змінної та її значенням $y_{mi} = kx_i + b$, обчисленим за вибраною моделлю. Сума квадратів усіх відхилень

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i - b)^2$$

є функцією параметрів моделі $s = s(k, b)$, оскільки x_i, y_i ($i = \overline{1, n}$) – відомі числа.

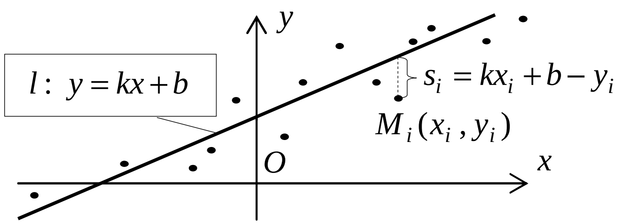

Рис. 53

Згідно з МНК значення параметрів моделі знаходяться з умови мінімуму суми квадратів нев'язок.

Можна показати, що квадратична функція $s = s(k, b)$ має єдиний мінімум (k_0, b_0). Тому для його знаходження досить скористатися тільки необхідними умовами екстремуму:

$$\begin{cases} \partial s / \partial k = 0; \\ \partial s / \partial b = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} x_i (kx_i + b - y_i) = 0; \\ 2\sum_{i=1}^{n} (kx_i + b - y_i) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)k + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,;\\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)k + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i\,.\end{cases}$$

Остання система називається ***нормальною системою*** методу найменших квадратів. Розв'язуючи цю систему, знаходимо шукані ***оптимальні значення*** $(k_0\,,b_0)$ параметрів моделі.

Формула $y = k_0 x + b_0$ зі знайденими оптимальними значеннями параметрів служить ***рівнянням регресії***. Лінію, що визначається цим рівнянням, називають ***лінією регресії***.

Зауваження. При формуванні критерію $s = s(k\,,b)$ якості моделі за методом найменших квадратів припускається, що похибками значень незалежної змінної можна знехтувати.

Приклад. Користуючись методом найменших квадратів, знайти оптимальні значення параметрів k_0 і b_0 лінійної регресії $y = k_0 x + b_0$ за даними результатами n вимірювань

$n = 7$.

x	-5	-3	-2	1	2	3	6
y	$-6{,}3$	$-3{,}5$	$-1{,}1$	$5{,}8$	$6{,}3$	$8{,}1$	$14{,}2$

Вказівка. Обчислення проводити з точністю до двох десяткових знаків після коми.

□ Для складання нормальної системи методу МНК попередньо обчислимо її коефіцієнти та праві частини:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2\,;\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 88\,;\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 172{,}1\,;\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 23{,}5\,.$$

Нормальна система має вигляд $\begin{cases}88k + 2b = 172{,}1;\\ 2k + 7b = 23{,}5.\end{cases}$

Розв'яжемо цю систему за методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix}88 & 2\\ 2 & 7\end{vmatrix} = 612\,;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix}172{,}1 & 2\\ 23{,}5 & 7\end{vmatrix} = 1157{,}7\,;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix}88 & 172{,}1\\ 2 & 23{,}5\end{vmatrix} =$$

$$= 1523{,}8\,;\ k_0 = \Delta_1/\Delta = 1{,}89\,;\ b_0 = \Delta_2/\Delta = 2{,}49\,.$$

Отже, шукане рівняння регресії $y = 1{,}89\,x + 2{,}49$. ■

2.3. Кратні інтеграли

2.3.1. Задача про об'єм циліндричного тіла. Подвійний інтеграл і його властивості

Нехай V – деяка замкнена обмежена просторова область (просторове тіло), а плоска область D_{xy} - її проекція паралельно осі Oz на координатну площину Oxy (рис. 54). Область V називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямі осі*** Oz, якщо виконуються наступні умови: 1) межа L проекції D_{xy} складається зі скінченного числа неперервних кривих; 2) довільна пробна пряма, що проходить хоча б через одну внутрішню точку області V паралельно осі Oz і в тому ж напрямі, перетинає її межу тільки у двох точках – по одній на ближній ***поверхні входу*** σ_1 і дальній ***поверхні виходу*** σ_2; 3) рівняння кожної з поверхонь σ_1 і σ_2 задається в явному вигляді, розв'язаному відносно z, причому тільки однією формулою відповідно $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, де функції $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ неперервні в D_{xy} і $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$.

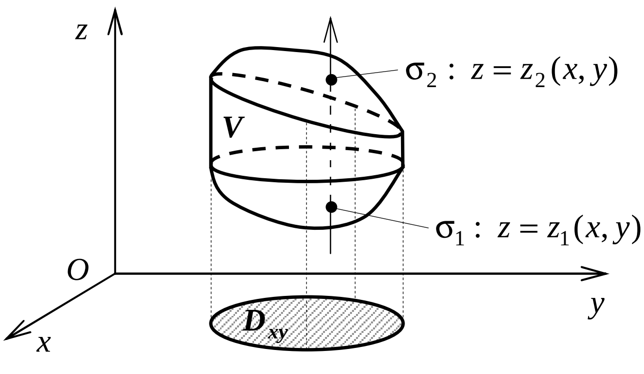

Рис. 54

Така просторова область V має вигляд вертикального циліндричного тіла, що обмежене знизу поверхнею входу $\sigma_1 : z = z_1(x, y)$, зверху – поверхнею виходу $\sigma_2 : z = z_2(x, y)$, а з боків – вертикальною циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямною служить межа L області D_{xy}, в яку проектується це тіло на координатну площину Oxy. Це вертикальне циліндричне тіло V як множину точок можна подати у вигляді

$$\boxed{V:\left\{(x,y,z)\middle|\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy},\ V\xrightarrow{Oz}D_{xy}\right\}}.$$

Аналогічно вводиться означення просторової області V, що ***правильна*** (***стандартна***) ***в напрямі осі*** Ox ***чи*** Oy, відповідно

$$\boxed{V:\left\{(x,y,z)\middle|\ x_1(y,z)\le x\le x_2(y,z),\ (y,z)\in D_{yz},\ V\xrightarrow{Ox}D_{yz}\right\}}$$

і

$$\boxed{V:\left\{(x,y,z)\middle|\ y_1(x,z)\le y\le y_2(x,z),\ (x,z)\in D_{xz},\ V\xrightarrow{Oy}D_{xz}\right\}}.$$

Область V може бути одночасно правильною в напрямі різних осей координат. Якщо просторова область V правильна в напрямі кожної з координатних осей Ox, Oy і Oz, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***). Прикладами такої області служать куля і прямокутний паралелепіпед, всі ребра якого паралельні осям координат.

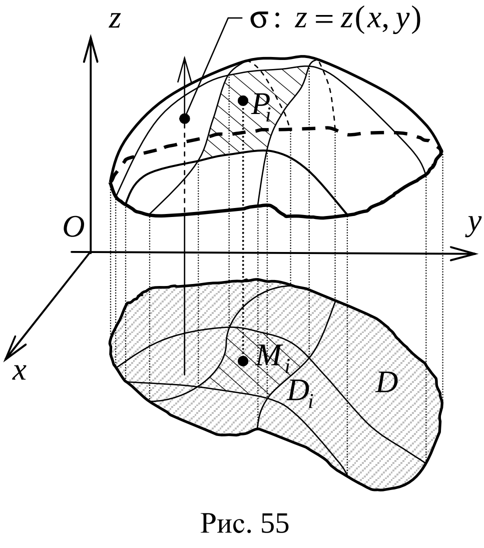

Рис. 55

Зауваження 1. Якщо область V – неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Для цього, звичайно, застосовують координатні чи їм паралельні площини.

Розглянемо окремий випадок правильної в напрямі осі Oz області V, яка обмежена знизу координатною площиною Oxy (тобто, спирається на свою проекцію D), а зверху – поверхнею $z=f(x,y)\ge 0$ (рис. 55). Знайдемо об’єм V такого циліндричного тіла.

Для цього розіб'ємо область D довільними кусково-гладкими лініями на елементарні частини D_i ($i = \overline{1,n}$), що не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо площу майданчика D_i через ΔS_i, а його діаметр (довжину найбільшої хорди, яка з'єднує дві точки межі області D_i) – через d_i, $i = \overline{1,n}$. Через межу кожної елементарної області D_i проведемо циліндричну поверхню з паралельними осі Oz твірними. Тоді тіло V розіб'ється на n циліндричних стовпчиків з основами D_i ($i = \overline{1,n}$), що обмежені зверху шматками поверхні $z = f(x, y)$ (на рис. 55 один з них виділений).

Візьмемо на кожному майданчику D_i довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і замінимо кожний стовпчик прямим циліндром з тією ж основою D_i і висотою $P_iM_i = z_i = f(x_i, y_i)$. Тоді для об'єму ΔV_i циліндричного стовпчика маємо $\Delta V_i \approx f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$. Об'єм тіла V можна наближено подати так: $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$.

Вираз $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$ називається і***нтегральною сумою функції*** $f(x, y)$ ***по області*** D.

Одержана рівність тим точніша, чим менші розміри елементарних областей D_i і, відповідно, більша їх кількість n. Природно границю інтегральної суми при умові, що кожний майданчик D_i стягується в точку $(\max d_i \to 0)$ і, відповідно, їх число n необмежено збільшується $(n \to \infty)$, прийняти за об'єм V циліндричного тіла: $V = \lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$.

Скінченна границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття області D*, якщо вона існує і не залежить від способу поділу на елементарні майданчики* D_i *та від вибору точок* $M_i(x_i, y_i)$ *на них, називається* ***подвійним інтегралом від функції*** $f(x, y)$ ***по області*** D *і позначається* $\iint_D f(x, y)\, dS$ *або*