ВИЩА МАТЕМАТИКА для електротехніків

у трьох модулях

В. В. Бізюк
А. В. Якунін

МОДУЛЬ 3

Числові та функціональні ряди

Функції декількох змінних

Елементи теорії поля. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Рівняння математичної фізики

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА
для електротехніків

у трьох модулях

Модуль 3

В. В. Бізюк, А. В. Якунін

Числові та функціональні ряди. Функції декількох змінних. Елементи теорії поля. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Рівняння математичної фізики

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України

Харків
ХНАМГ
2011

УДК [514.1+517.2+517.3+517.5+517.9](075)
ББК 22.11я7
В 55

***Рецензенти*:**

Ю. Л. Геворкян, кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики (Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут");

В. К. Дубовий, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного аналізу (Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна);

О. М. Литвин, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики (Українська інженерно-педагогічна академія);

М. А. Мартиненко, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики (Національний університет харчових технологій)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів електротехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів
(*лист № 1/11-6050 від 14.07.2011 р.*)

Вища математика для електротехніків: у 3-х модулях:
В55 навч. посіб. / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова та ін.; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2009. –
ISBN 978-966-695-165-9
Модуль 3: Числові та функціональні ряди. Функції декількох змінних. Елементи теорії поля. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Рівняння математичної фізики / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – 2011. – 383 с.
ISBN 978-966-695-219-9

За модульною технологією навчання викладено розділи, що відповідають третьому семестру за діючою програмою для електротехнічних спеціальностей. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання для самостійної роботи.

Модуль 1 і модуль 2 вийшли з друку відповідно в 2009 р. і в 2010 р.

УДК [514.1+517.2+517.3+517.5+517.9](075)
ББК 22.11я7

ISBN 978-966-695-165-9
ISBN 978-966-695-219-9 (Модуль 3)

Передмова

У навчальному посібнику за модульною технологією викладено розділи, що відповідають третьому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів електротехнічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю на застосування до електротехнічних задач. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах, частина з яких розрахована на самостійне опрацювання. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання.

Основою даного посібника є цикли лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті електропостачання і освітлення міст Харківської національної академії міського господарства.

Посібник призначений для студентів електротехнічних спеціальностей, а також може використовуватися для самоосвіти електротехніків-практиків.

Автори щиро вдячні своєму колезі Станішевському С.О. за сприяння у підготовці посібника.

Критичні зауваження і пропозиції щодо посібника надсилайте на кафедру вищої математики за адресою:

61002, Україна, Харків, вул. Революції, 12, ХНАМГ,
каф. ВМ;
e-mail: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

Змістовий модуль 1.

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

1.1. Числові ряди. Основні поняття. Необхідна ознака збіжності

Нехай $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – нескінченна числова послідовність. Нескінченна сума $\boxed{u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n}$ називається ***числовим рядом***, а її доданки $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – відповідними (за номером) ***членами ряду***, причому n***-й член*** u_n також має назву ***загального члена***.

Скінченна сума $\boxed{S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k}$ всіх перших членів ряду до u_n включно називається n***-ю частковою сумою ряду*** ($n = 1, 2, ...$).

Ряд називається ***збіжним***, якщо існує скінченна границя при $n \to \infty$ послідовності $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ його часткових сум: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S}$. При цьому число S називають ***сумою ряду*** і пишуть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Якщо вказана границя нескінченна чи взагалі не існує, то ряд називається ***розбіжним***.

Зауваження 1. Розбіжний ряд суми не має. Проте інколи у випадку $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ або $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ відповідно покладають $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$ або $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = -\infty$.

Ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+k} + ...$, який утворюється з початкового ряду $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ відкиданням перших n членів називається n***-м залишком ряду*** ($n = 1, 2, ...$).

Розглянемо ***геометричний ряд*** (***ряд геометричної прогресії***)

$$\boxed{a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}}$$

з ***першим членом*** $a \neq 0$ і ***знаменником*** q. Знайдемо границю при $n \to \infty$ послідовності його часткових сум:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = \begin{cases} (a - aq^n)/(1-q) \text{ } при \text{ } q \neq 1, \\ na \qquad при \text{ } q = 1; \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Якщо $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ і

$$\lim_{n\to\infty} S_n = (a/(1-q)) \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = a/(1-q) .$$

Ряд збігається і його сума $\boxed{S = a/(1-q)}$.

Якщо $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$ і тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Таким чином, ряд розбігається.

Якщо $q = 1$, то ряд має вигляд $a + a + a + \ldots + a + \ldots$ і тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. Отже, ряд розбігається.

Якщо $q = -1$, то ряд має вигляд $a - a + \ldots + (-1)^{n-1}a + \ldots$. У цьому разі

$$S_n = a(1-(-1)^n)/2 = \begin{cases} 0 \quad при \quad n = 2k, \\ a \quad при \text{ } n = 2k-1; \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Отже, S_n при $n \to \infty$ границі не має – ряд є розбіжним.

Таким чином, *ряд геометричної прогресії збігається при* $|q| < 1$ *і розбігається при* $|q| \geq 1$.

При розгляді числових рядів розв’язують дві основні задачі:

1) дослідити ряд на збіжність; 2) знайти суму збіжного ряду.

Приклад 1. Користуючись означенням, дослідити ряд на збіжність. Для збіжного ряду вказати його суму:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 1/n)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(5n-2)(5n+3)}$.

□ а) Перетворимо загальний член ряду

$$u_n = \ln(1 + 1/n) = \ln\big((n+1)/n\big) = \ln(n+1) - \ln n .$$

Тоді часткову суму S_n можна подати у замкненій формі

$$S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + ... + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1),$$

вигляд якої не залежить від числа n. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty .$$

Отже, ряд розбігається.

б) Розкладемо загальний член ряду на найпростіші дроби:

$$u_n = \frac{1}{(5n-2)(5n+3)} = \frac{A}{5n-2} + \frac{B}{5n+3} =$$

$$= \left| A(5n+3) + B(5n-2) = 1; \quad \begin{matrix} n = 2/5: \\ n = -3/5: \end{matrix} \begin{cases} 5A = 1; & A = 1/5; \\ -5B = 1; & B = -1/5 \end{cases} \right| =$$

$$= \frac{1/5}{5n-2} + \frac{-1/5}{5n+3} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3} \right).$$

Тоді часткову суму S_n можна подати у замкненій формі, де кількість доданків не залежить від числа n:

$$S_n = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{18} + ... + \frac{1}{5n-7} - \frac{1}{5n-2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3} \right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3} \right).$$

Знайдемо границю:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}.$$

Отже, ряд збігається і його сума $S = 1/15$. ■

Властивості числових рядів:

1) *Збіжність або розбіжність ряду не порушиться, якщо змінити, відкинути чи добавити скінченне число членів.* (Для збіжного ряду значення суми при цьому, в загальному випадку, змінюється).

Зокрема, *ряд і будь-який його залишок збігаються чи розбігаються одночасно.*

2) *Для збіжного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ *його* n*-й залишок*

$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} = R_n$ *служить похибкою наближення* $\boxed{S \approx S_n}$ *суми ряду* S *його* n*-ю частковою сумою* S_n*. При цьому* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0}$.

Зауваження 2. Якщо враховувати похибки округлення при обчисленні самих залишених в S_n членів ряду, то задана точність ε наближення $S \approx S_n$ служить граничною загальною абсолютною похибкою $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, яка складається з граничної абсолютної похибки обчислення ε_1 модуля залишку ряду R_n та граничної абсолютної похибки округлення ε_2 при обчисленні суми залишених в S_n членів. Звичайно беруть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon / 2$. Кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати члени ряду після округлення, щоб виконувалася задана точність ε_2 обчислення їх суми, визначається з умови: $0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot n \le \varepsilon_2$, де n – кількість залишених членів.

3) *Якщо члени ряду помножити на один і той самий відмінний від нуля сталий множник* $C = \mathrm{const} \neq 0$*, то його збіжність не порушиться. У випадку збіжного ряду його сума буде помножена на* C:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C u_n = C \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ ;$$

4) *Два збіжні ряди*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ ,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

можна почленно додавати і віднімати. Одержані ряди також збігаються і при цьому:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = (u_1 + v_1) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) = (u_1 - v_1) + \ldots + (u_n - v_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ .$$

5) *Сума (різниця) збіжного і розбіжного рядів є розбіжним рядом.*

6) *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігається, то довільний ряд, отриманий з даного групуванням його членів, що не змінює порядку їх розташування, також збігається і має ту саму суму.*

Зауваження 3. Про суму (різницю) розбіжних рядів нічого певного стверджувати не можна: результуючий ряд може як збігатися, так і розбігатися.

На практиці часто досить знати лише відповідь на принципове питання про збіжність ряду. Для цього використовуються ***ознаки збіжності***, що ґрунтуються на властивостях загального члена ряду.

Теорема (***необхідна ознака збіжності***). *Якщо ряд збігається, то його загальний член* u_n *прямує до нуля при* $n \to \infty$: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0}$.

□ Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, де S – сума ряду (стала величина). Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, бо при $n \to \infty$ і $n-1 \to \infty$. Віднімаючи з першої рівності другу, дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Але $S_n - S_{n-1} = u_n$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. ■

Зауваження 4. Розглянута ознака є тільки необхідною, але не є достатньою. Тобто, з того що загальний член u_n при $n \to \infty$ прямує до нуля, ще не випливає, що ряд збігається. Наприклад, для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+1/n)$ з прикладу 1.а) необхідна ознака виконується $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+1/n) = \ln 1 = 0$, але ряд розбігається.

Наслідок (***достатня ознака розбіжності***). *Якщо границя загального члена* u_n *при* $n \to \infty$ *відмінна від нуля, тобто* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0}$, *то ряд розбігається.*

Приклад 2. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3n+5}$ на збіжність.

□ Знайдемо границю n-го члена u_n при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+5} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+5/n} = \frac{1}{3} \neq 0 .$$

За достатньою ознакою розбіжності ряд розбігається. ■

1.2. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Числовий ряд $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***знакододатним***, якщо всі його члени – невід'ємні числа:

$$u_n \geq 0 , \quad n = 1, 2, ...$$

Послідовність часткових сум знакододатного ряду є зростаючою. Згадуючи, що обмежена монотонна змінна має границю, дістаємо ***необхідну і достатню умову збіжності знакододатного ряду***:

знакододатний ряд збігається, якщо послідовність його часткових сум обмежена зверху, і розбігається в противному разі.

Далі розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності таких рядів.

Зауваження. При вивченні знакосталих рядів можна обмежитися розглядом тільки знакододатних, оскільки з них множенням на –1 одержуються ряди з недодатними членами.

1.2.1. Інтегральна ознака Коші

Ця ознака заснована на порівнянні числового ряду з невласним інтегралом.

Теорема (***інтегральна ознака Коші***). *Якщо члени знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0$, $n = 1, 2, ...$ *утворюють спадну послідовність* ($u_{n+1} \leq u_n$, $n = 1, 2, ...$) *і на проміжку* $[1;+\infty]$ *існує спадна неперервна невід'ємна функція* $f(x)$ *така, що при натуральних значеннях аргументу співпадає з членами ряду* ($f(n) = u_n$, $n = 1, 2, ...$), *тоді вказаний ряд і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *ведуть себе однаково: збігаються чи розбігаються одночасно.*

□ Зобразимо даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ геометрично точками на координатній площині Oxy, відкладаючи на осі Ox номери 1, 2, ..., n, ..., а на осі Oy – відповідні значення його членів $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$, …, $u_n = f(n)$, … (рис. 1).

Побудуємо на цьому рисунку також графік указаної функції $f(x)$. Площа відповідної криволінійної трапеції, що спирається на відрізок $[1;n]$, дорівнює визначеному інтегралу $I_n = \int_1^n f(x)dx$.

Впишемо в цю трапецію і опишемо навколо неї ступінчасті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є проміжки $[1;2]$, $[2;3]$, …, а висоти дорівнюють u_1, u_2, …, u_n.

Порівнюючи площі цих об’єктів, дістанемо:

$$u_2 + u_3 + ... + u_n < I_n < u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$$

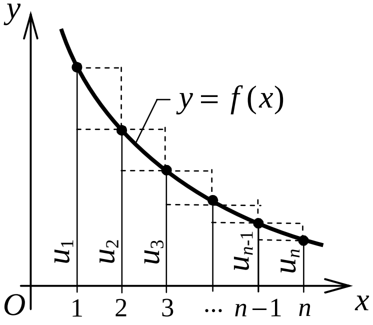

Рис. 1

або $S_n - u_1 < I_n < S_n - u_n$,

де $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ – часткова сума ряду. Звідси

$$S_n < u_1 + I_n \quad \text{і} \quad S_n > u_n + I_n .$$

Нехай інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним. Його значення $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Тоді $S_n < u_1 + I$.

Отже, зростаюча послідовність часткових сум S_n обмежена зверху і тому має границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається.

Нехай тепер інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним. У даному випадку це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = +\infty$. Тоді, переходячи у нерівності $S_n > u_n + I_n$ до границі при $n \to \infty$, отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Отже, послідовність часткових сум S_n необмежена і має нескінченну границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається. ■

Зауваження 1. Інтегральна ознака справджується, коли послідовність членів ряду задовольняє відповідним умовам, починаючи хоча б з деякого номера.

Зауваження 2. На практиці функцію $f(x)$ одержують, заміняючи у виразі загального члена u_n ряду дискретну змінну n на неперервну x.

З наведеного доведення випливає

наслідок. *Для суми S і n-го залишку R_n збіжного знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ справедливі оцінки*:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx < S < u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx\,;\;\; R_n < \int_n^{+\infty} f(x)dx\,,$$

остання з яких дозволяє судити, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми S ряду частковою сумою S_n отримати задану похибку.

Приклад 1. За допомогою інтегральної ознаки дослідити на збіжність узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$.

□ Покладемо $f(x) = 1/x^p$. Ця функція задовольняє умовам інтегральної ознаки. Розглянемо невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} (1/x^p)\, dx$.

При $p = 1$ маємо ***гармонічний ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Для нього $\int_1^{+\infty} (1/x)\, dx = \lim\limits_{N\to\infty} \ln|x|\Big|_1^N = +\infty$. Інтеграл і ряд розбіжні.

Нехай $p \neq 1$. Тоді

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right).$$

Коли $p > 1$, то $\int_1^{+\infty} (1/x^p)\, dx = 1/(p-1)$. Інтеграл і ряд збіжні. Коли $p<1$, то $\int_1^{+\infty}(1/x^p)\,dx=+\infty$. Інтеграл і ряд розбіжні.

Остаточно маємо:

узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p$ *збігається при* $p>1$ *і розбігається при* $p\le 1$. ■

Приклад 2. Знайти наближено суму S збіжного узагальненого гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^4$ з даною абсолютною похибкою $\varepsilon=0{,}01$.

□ Заданий узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^4$ збігається, оскільки $p=4>1$. Оцінимо його n-й залишок R_n:

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}1/k^4<\int_n^{+\infty}(1/x^4)\,dx=\lim_{N\to\infty}\left.\frac{x^3}{-3}\right|_n^N=\frac{1}{3n^3}.$$

Для заданої точності $\varepsilon=0{,}01$ наближення $S\approx S_n$ маємо

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2=0{,}01/2=0{,}005.$$

Знайдемо спочатку, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми S ряду частковою сумою S_n отримати граничну абсолютну похибку $\varepsilon_1=0{,}005$ залишку:

$$R_n<\frac{1}{3n^3}\le\varepsilon_1=0{,}005;\;\; n^3\ge\frac{200}{3};\;\; n\ge\sqrt[3]{200/3};\;\; n=5.$$

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати члени ряду після округлення, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon_2=0{,}005$ обчислення їх суми:

$$0{,}5\cdot 10^{-k}\cdot 5\le\varepsilon_2=0{,}005;\;\; 10^{-k}\le 0{,}002;\;\; k\ge\lg 500;\;\; k=3.$$

Таким чином $S=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^4\approx S_5=1/1^4+1/2^4+1/3^4+$

$$+1/4^4+1/5^4\approx 1{,}000+0{,}063+0{,}012+0{,}004+0{,}002=1{,}081$$

Остаточно $S\approx 1{,}08$. ■

Приклад 3. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\sqrt[3]{\ln(5n-2)}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}.$$

□ а) Розглянемо функцію $f(x)=1/(x\ln^3 x)$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[4;+\infty)$, причому $f(n)=u_n$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{N\to+\infty}\int_2^N \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{N\to+\infty}\int_2^N \frac{d\ln x}{\ln^3 x} =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\int_2^N \ln^{-3} x d(\ln x) = \lim_{N\to+\infty}\left.\frac{\ln^{-2} x}{-2}\right|_x^N = -\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left.\frac{1}{\ln^2 x}\right|_2^N =$$

$$= -(1/2)\lim_{N\to+\infty}\left(1/\ln^2 N - 1/\ln^2 2\right) = 1/(2\ln^2 2) \neq \infty.$$

Отже, цей невласний інтеграл збігається, а тому даний ряд теж збігається.

б) Введемо функцію $f(x)=\dfrac{1}{(5x-2)x\sqrt[3]{\ln(5x-2)}}$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[1;+\infty)$, причому $f(n)=u_n$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{(5x-2)\sqrt[3]{\ln(5x-2)}} = \lim_{N\to+\infty}\int_1^N \frac{dx}{(5x-2)\sqrt[3]{\ln(5x-2)}} =$$

$$\left|\begin{matrix} u=\ln(5x-2);\ du=5dx/(5x-2) \\ u_1=\ln 3; \qquad u_2=\ln(5N-2) \end{matrix}\right| = \frac{1}{5}\lim_{N\to+\infty}\int_{\ln 3}^{\ln(5N-2)} u^{-1/3}du =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{N\to+\infty}\left.\frac{u^{2/3}}{2/3}\right|_{\ln 3}^{\ln(5N-2)} = \frac{3}{10}\lim_{N\to+\infty}(\ln^{2/3}(5N-2)-\ln^{2/3}3) = +\infty.$$

Оскільки цей невласний інтеграл розбігається, то даний ряд теж розбігається.

в) Введемо функцію $f(x) = x \cdot e^{-x}$, що на інтервалі $[1;+\infty)$ задовольняє умовам інтегральної ознаки. Розглянемо відповідний невласний інтеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_1^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{N\to+\infty}\int\limits_1^N xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x;\ dv = e^{-x}dx \\ du = dx;\ v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_1^N - \int_1^N e^{-x}dx\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(-Ne^{-N} + e^{-1} - e^{-x}\Big|_1^N\right) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(-Ne^{-N} + e^{-1} - e^{-N} + e^{-1}\right) = -\lim_{N\to+\infty}\frac{N+1}{e^N} + 2e^{-1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)'}{(e^x)'} + 2e^{-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} + 2e^{-1} = 0 + 2e^{-1} = 2e^{-1} \neq \infty\,.$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то і даний ряд теж збігається. ■

1.2.2. Ознаки порівняння

При застосуванні ознак порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що досліджується на збіжність, порівнюється з ***еталонним рядом*** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, про який відомо збігається він чи розбігається.

За еталонні ряди часто приймають:

а) ***узагальнений гармонічний ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} 1\big/n^p$, що збігається, коли $p > 1$, і розбігається при $p \leq 1$;

б) ***геометричний ряд*** (ряд геометричної прогресії) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$, що збігається при $q < 1$ і розбігається при $q \geq 1$.

Теорема 1 (***перша*** (***основна***) ***ознака порівняння***).

а) *Нехай маємо збіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *причому* $u_n \leq v_n$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *теж збігається.*

(Якщо $u_n > v_n$, то жодних висновків робити не можна).

б) *Нехай маємо розбіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *причому* $u_n \geq v_n$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *теж розбігається.*

(Якщо $u_n < v_n$, то ніяких висновків робити не можна).

Таким чином, з розбіжним рядом порівнюємо "у бік більше"; а зі збіжним рядом – "у бік менше".

□ Нехай S_n і σ_n відповідні n-і часткові суми рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

а) З нерівності $u_n \leq v_n$ випливає, що $S_n \leq \sigma_n$. Оскільки "більший" знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то існує границя його часткових сум $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, причому $\sigma_n \leq \sigma$. Тоді $S_n \leq \sigma$. Тобто, часткові суми S_n обмежені.

З того, що послідовність S_n зростаюча і обмежена, випливає існування скінченної границі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, причому $S \leq \sigma$. Отже, "менший" ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збіжний.

б) З нерівності $u_n \geq v_n$ випливає, що $S_n \geq \sigma_n$. Оскільки "менший" знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Отже, "більший" ряд теж розбіжний. ■

Зауваження 1. Основна ознака порівняння справджується, коли члени рядів задовольняють відповідні нерівності, починаючи хоча б з деякого номера.

Наслідок. *Якщо всі члени збіжного знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *не перевищують відповідних членів іншого знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *тобто* $u_n \leq v_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *тоді* n*-й залишок першого ряду* $R_n^{(u)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ *не перевищує* n*-го залишку*

$R_n^{(v)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}v_k$ *другого*: $R_n^{(u)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k\le\sum_{k=n+1}^{\infty}v_k=R_n^{(v)}$.

Приклад 1. За допомогою основної ознаки порівняння дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n\ln(3n)};\quad\text{б) }\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{n^2-2n-1};\quad\text{в) }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$$

□ а) Застосуємо основну ознаку порівняння з “більшим” збіжним рядом геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(1/5)^n$ зі знаменником $q=1/5<1$:

$$u_n=1/(5^n\ln(3n))<1/5^n=(1/5)^n=v_n,\ n=1,2,\dots.$$

Оскільки $u_n\le v_n$, то “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n\ln(3n)}$ також збігається.

б) Оскільки $u_n=\frac{\sqrt{n^3}}{n^2-2n-1}\ge\frac{\sqrt{n^3}}{n^2}=\frac{1}{\sqrt{n}}=v_n$ при всіх $n\ge3$ і “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{1/2}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом з $p=1/2\le1$, то за основною ознакою порівняння “більший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{n^2-2n-1}$ також розбігається.

в) Оскільки при $n\ge2$ справджується нерівність $u_n=1/n^n\le$ $\le1/2^n=v_n$ і “більший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/2^n$ є збіжним геометричним рядом з $q=1/2<1$, то за основною ознакою порівняння “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^n$ теж збігається. ■

Приклад 2. Довести, що знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/\left(6^n\sqrt{n}\right)$ збігається, і знайти наближено його суму S з точністю до $\varepsilon=0{,}01$.

□ Оскільки при всіх $n\ge1$ виконується нерівність

$$u_n = 1\Big/\left(6^n\sqrt{n}\right) \le 1/6^n = (1/6)^n = v_n$$

і "більший" ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (1/6)^n$ є збіжним геометричним рядом зі знаменником $q = 1/6 < 1$, то за основною ознакою порівняння "менший" ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1\Big/\left(6^n\sqrt{n}\right)$ теж збігається.

Для заданої точності $\varepsilon = 0{,}01$ наближення $S \approx S_n$ маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2 = 0{,}01/2 = 0{,}005.$$

За наслідком з основної ознаки порівняння $R_n \le R_n^{(v)}$, де $R_n^{(v)}$ – залишок $R_n^{(v)}$ збіжного ряду геометричної прогресії

$$R_n^{(v)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} (1/6)^k = (1/6)^{n+1} + (1/6)^{n+2} + \ldots,$$

що також є збіжним геометричним рядом з тим же знаменником $q = 1/6$ і першим членом $a = (1/6)^{n+1}$. Знайдемо його суму:

$$R_n^{(v)} = a/(1-q) = (1/6)^{n+1}/(1-1/6) = 5/6^{n+2}.$$

Тоді для залишку R_n маємо оцінку: $R_n \le R_n^{(v)} = 5/6^{n+2}$.

Знайдемо, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми S ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ частковою сумою S_n отримати граничну абсолютну похибку $\varepsilon_1 = 0{,}005$ залишку R_n:

$$R_n \le 5/6^{n+2} \le \varepsilon_1 = 0{,}005;\; 6^{n+2} \ge 1000;\; n \ge 3/\lg 6 - 2;\; n = 2.$$

Визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати члени ряду після округлення, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon_2 = 0{,}005$ обчислення їх суми:

$$0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot 2 \le \varepsilon_2 = 0{,}005;\; 10^{-k} \le 0{,}005;\; k \ge \lg 200;\; k = 3.$$

Таким чином

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n\sqrt{n}} \approx S_2 = \frac{1}{6^1\sqrt{1}} + \frac{1}{6^2\sqrt{2}} \approx 0{,}167 + 0{,}020 = 0{,}187.$$

Остаточно $S \approx 0{,}19$. ■

Теорема 2 (***друга* (*гранична*) *ознака порівняння***). *Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c\,,\ (0<c<+\infty)}$ *відношення загальних членів двох знакододатних рядів* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *, то обидва ряди поводять себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються чи розбігаються.*

□ Оскільки існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c$, то для довільного $\varepsilon>0$ можна знайти такий номер N, що для всіх $n\ge N$ буде виконуватися нерівність $|u_n/v_n-c|<\varepsilon$. Звідки $c-\varepsilon<u_n/v_n<c+\varepsilon$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ збігається. З нерівності $u_n/v_n<c+\varepsilon$ маємо $u_n<(c+\varepsilon)v_n$, $n\ge N$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(c+\varepsilon)v_n$ також збігається. Звідси за основною ознакою порівняння випливає збіжність "меншого" ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ розбігається. З нерівності $u_n/v_n>c-\varepsilon$ маємо $u_n>(c-\varepsilon)v_n$, $n\ge N$. З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(c-\varepsilon)v_n$. Тоді згідно з основною ознакою порівняння "більший" ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ також розбігається. ■

Зауваження 2. Існування вказаної границі говорить про те, що загальні члени u_n і v_n цих рядів при $n\to\infty$ є нескінченно малими одного порядку $u_n=O^*(v_n)$ (зокрема, можуть бути еквівалентними $u_n\sim v_n$). Таким чином, *для порівняння треба підбирати еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *, загальний член якого* v_n *є нескінченно малою того ж порядку, що і загальний член* u_n *ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *, який до-*

сліджується.

Приклад 3. За допомогою граничної ознаки порівняння дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+4/n); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5}+4}{6n^4-n^2+3}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} arctg \frac{5n}{n^3+8}.$$

□ а) Відомо, що $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$. Звідси при $n \to \infty$ маємо: $4/n \to 0$; $\ln(1+4/n) \sim 4/n = O^*(1/n)$. Тому для даного ряду застосуємо граничну ознаку порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається:

$$u_n = \ln(1+4/n),\ v_n = 1/n; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+4/n)}{1/n} =$$

$$= 4\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+4/n)}{1/n} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left| \alpha = 4/n \to 0 \ \textit{при} \ n \to \infty \right| =$$

$$= 4\lim_{\alpha\to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 4 \ (\neq 0, \neq \infty). \ \text{ Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+4/n) \text{ розбігається.}$$

б) Оскільки $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^5}+4}{6n^4-n^2+3} \sim \dfrac{\sqrt[3]{n^5}}{6n^4} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{n^{7/3}} = O^*(1/n^{7/3})$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{7/3}$, $p = 7/3 > 1$, що збігається:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{7/3}(n^{5/3}+4)}{6n^4-n^2+3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1+4/n^{5/3}}{6-1/n^2+3/n^4} =$$

$$= 1/6 \quad (\neq 0, \neq \infty). \ \text{ Даний ряд теж збігається.}$$

в) Відомо, що $arctg\,\alpha \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$. Звідси при $n \to \infty$ маємо:

$$\frac{5n}{n^3+8} \to 0; \qquad arctg \frac{5n}{n^3+8} \sim \frac{5n}{n^3+8}.$$

Тоді

$$u_n = \frac{1}{n^2} arctg \frac{5n}{n^3+8} \sim \frac{1}{n^2} \cdot \frac{5n}{n^3+8} \sim \frac{1}{n^2} \cdot \frac{5n}{n^3} = \frac{5}{n^4} = O^*(1/n^4).$$

Порівняємо цей ряд зі збіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$, $p = 4 > 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} arctg \frac{5n}{n^3+8} : \frac{1}{n^4} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(arctg \frac{5n}{n^3+8} : \frac{1}{n^2} \right) =$$

$$= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n}{n^3+8} : \frac{1}{n^2} \right) = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+8} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+8/n^3} =$$

$$= 5 \ (\neq 0, \neq \infty).$$ Даний ряд збігається. ■

Зауваження 3. Застосування ознак порівняння часто викликає труднощі, пов’язані з необхідністю підбирати еталонний ряд. Загальних способів для цього не існує. Далі наведені більш зручні для користування ознаки, де фігурує тільки ряд, що досліджується.

1.2.3. Ознака Даламбера

Теорема (***ознака Даламбера***). *Якщо для знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує границя* $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l}$ *відношення наступного члена до попереднього, то*

а) *при* $l < 1$ *ряд збігається*; б) *при* $l > 1$ *ряд розбігається*;

в) *при* $l = 1$ *не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.*

□ а) Нехай $l < 1$. Візьмемо число q, що задовольняє нерівності $l < q < 1$. Для відношення u_{n+1}/u_n з означення границі випливає, що існує такий номер N, що для всіх $n \geq N$ буде справджуватися умова $u_{n+1}/u_n < q$. Таким чином, для $n \geq N$ маємо:

$$u_{N+1} < qu_N, \quad u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N,$$
$$u_{N+3} < qu_{N+2} < q^2 u_{N+1} < q^3 u_N, \ \dots .$$

Розглянемо два ряди $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots$

і $u_N + qu_N + q^2u_N + q^3u_N + \ldots$, де другий збігається як геометричний ряд зі знаменником $q < 1$.

Члени першого ряду не перевищують відповідних членів другого ряду. Тому за основною ознакою порівняння перший ряд теж збігається.

б) Нехай $l > 1$. Тоді для відношення u_{n+1}/u_n з означення границі випливає, що існує такий номер N, що для всіх $n \geq N$ буде справджуватися нерівність $u_{n+1}/u_n > 1$. Звідси $u_{n+1} > u_n$ для всіх $n \geq N$. Це означає, що члени ряду зростають, починаючи з номера $N+1$. Тому загальний член ряду не прямує до нуля $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. За достатньою ознакою розбіжності даний ряд розбігається. ■

Якщо $l = +\infty$, то ряд також розбігається, оскільки існує такий номер N, що для всіх $n \geq N$ буде справджуватися нерівність $u_{n+1}/u_n > 1$. Звідки $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. ■

Зауваження 1. З наведеного доведення випливає: якщо за ознакою Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, то його загальний член u_n не прямує до нуля при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

Зауваження 2. Ця достатня ознака в своїй основі має порівняння даного ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом.

Приклад 1. Довести, що

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^n / n!) \neq 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^n /(2n)!) = 0$.

□ а) Побудуємо знакододатний ряд із загальним членом $u_n = n^n / n!$ і дослідимо його на збіжність за допомогою ознаки Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e > 1. \quad \text{Ряд розбігається.}$$

З розбіжності ряду за ознакою Даламбера випливає

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Тобто $\lim\limits_{n\to\infty} (n^n / n!) \neq 0$.

б) Побудуємо знакододатний ряд із загальним членом $u_n = n^n/(2n)!$ і дослідимо його на збіжність за допомогою ознаки Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \frac{(n+1)^n}{2(2n)!(2n+1)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(2n)!}{2(2n)!(2n+1)n^n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}(1/(2n+1)) = (1/2)\cdot e \cdot 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збіжний.}$$

Оскільки ряд збігається, то за необхідною ознакою $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Тобто $\lim\limits_{n\to\infty} (n^n/(2n)!) = 0$. ■

Зауваження 3. На практиці при дослідженні на збіжність найчастіше використовується саме ознака Даламбера. *Щоб не натрапити на випадок невизначеності* $l = 1$, *її застосовують до таких рядів, загальний член яких містить у своєму складі факторіал і/або показникову функцію від* n, наприклад

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^{2n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{(3n+2)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{3n}\sqrt{n}}{(2n-1)!}.$$

Приклад 2. За допомогою ознаки Даламбера дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n-4}{\sqrt[3]{n^2\cdot 10^{2n}}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n^2+2n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 5^{n-1}}{(2n-1)!};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \arcsin\frac{n^2}{3^n}; \qquad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 11^n}{2^{3n-2}}.$$

□ а) Загальний член цього ряду можна записати у вигляді $u_n = \dfrac{7n-4}{10^{(2/3)n}\sqrt[3]{n^2}}$. До його складу входить показникова функція

$10^{(2/3)n}$. Тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$u_{n+1}=\frac{7(n+1)-4}{10^{(2/3)(n+1)}\sqrt[3]{(n+1)^2}}=\frac{7n+3}{10^{(2/3)n+2/3}\sqrt[3]{(n+1)^2}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(7n+3)10^{(2/3)n}\sqrt[3]{n^2}}{10^{(2/3)n+2/3}\sqrt[3]{(n+1)^2}\,(7n-4)}=\frac{1}{10^{2/3}}\lim_{n\to\infty}\frac{7n+3}{7n-4}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2}{(n+1)^2}}=10^{-2/3}\lim_{n\to\infty}\frac{7+3/n}{7-4/n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{(1+1/n)^2}}=$$

$$=10^{-2/3}\cdot1\cdot\sqrt[3]{1}=10^{-2/3}<1.$$ Ряд збігається.

б) У загальний член цього ряду $u_n=(n-1)!\big/(n^2+2n)$ входить факторіал $(n+3)!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_{n+1}=\frac{(n+1-1)!}{(n+1)^2+2(n+1)}=\frac{n!}{n^2+4n+3}=\frac{(n-1)!n}{n^2+4n+3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n(n^2+2n)}{(n^2+4n+3)(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2}{n^2+4n+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1/n+4/n^2+3/n^3}=\left|\frac{1}{0}\right|=+\infty>1.$$ Ряд розбігається.

в) У загальному члені ряду $u_n=\dfrac{n^2\cdot5^{n-1}}{(2n-1)!}$ є показникова функція 5^{n-1} і факторіал $(2n-1)!$ Отже, застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n=\frac{n^2\cdot5^{n-1}}{(2n-1)!};\quad u_{n+1}=\frac{(n+1)^2\cdot5^n}{(2(n+1)-1)!}=\frac{(n+1)^2\cdot5^n}{(2n+1)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 5^n(2n-1)!}{(2n+1)!\;n^2 5^{n-1}}=5\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(2n-1)!}{n^2(2n-1)!\,2n(2n+1)}=\frac{5}{2}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(2n-1)}=\frac{5}{2}\cdot1\cdot0=0<1.$$ Ряд збігається.

г) У складі загального члена ряду $u_n = n^3 \arcsin\,(n^2/3^n)$ є показникова функція 3^n. Отже, можемо застосувати ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = (n+1)^3 \arcsin((n+1)^2/3^{n+1});$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \arcsin((n+1)^2/3^{n+1})}{n^3 \arcsin(n^2/3^n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin\,((n+1)^2/3^{n+1})}{\arcsin\,(n^2/3^n)} = \left|\frac{0}{0}\right|.$$

За правилом Лопіталя знаходимо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{(3^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3^x \ln 3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \frac{2}{\ln 3} \lim_{x\to+\infty} \frac{x'}{(3^x)'} = \frac{2}{\ln 3} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3^x \ln 3} = 0.$$

Оскільки $\arcsin\alpha \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$, то $\arcsin\frac{n^2}{3^n} \sim \frac{n^2}{3^n}$ при $\alpha = \frac{n^2}{3^n} \to 0$ і $\arcsin\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \sim \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$ при $\alpha = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \to 0$. Замінюючи еквівалентні нескінченно малі у відношенні, одержимо:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \big/ 3^{n+1}}{n^2 \big/ 3^n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^2 = \frac{1}{3} < 1.$$ Ряд збігається.

д) У загальному члені ряду $u_n = \frac{n\,11^n}{2^{3n-2}}$ є показникові функції 11^n і 2^{3n-2}, тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)\,11^{n+1}}{2^{3(n+1)-2}}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)11^{n+1}\,2^{3n-2}}{2^{3n+1} n\ 11^n} =$$

$$= \frac{11}{8} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{11}{8} > 1.$$ Ряд розбігається. ■

1.2.4. Радикальна ознака Коші

Теорема (***радикальна ознака Коші***). *Якщо для знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує границя* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l}$, *то*

а) *при* $l < 1$ *ряд збігається*; б) *при* $l > 1$ *ряд розбігається*;

в) *при* $l = 1$ *не можна зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду*.

Ця ознака базується, як і ознака Даламбера, на порівнянні даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом. Доведення аналогічне.

Зауваження 1. Подібно ознаці Даламбера, якщо за радикальною ознакою ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

Зауваження 2. *Радикальну ознаку зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від* n, *з яких досить просто добувається корінь* n*-го степеня.* Наприклад

$$\sum_{n=1}^{\infty} tg^{n+3} \frac{n^2-1}{n^4+1};\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln^{5n} \frac{4n+1}{2n+3};\ \sum_{n=1}^{\infty} \left((4n-3)/(9n+2)\right)^{n^2}.$$

Приклад 1. За допомогою радикальної ознаки Коші дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \left(n^2/(n^3+1)\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left((4n-1)/(4n+7)\right)^{2n^2-5}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n/arctg^{\,n-4}\left(n^2/(n+3)\right)$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{2n} \left(n^4/(n+1)\right)$.

□ а) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\sin\left(n^2/(n^3+1)\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin^n \left(n^2/(n^3+1)\right)} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(n^2/(n^3+1)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin\left((1/n)/(1+1/n^3)\right) = \sin 0 = 0 < 1.$$ Ряд збігається.

б) Загальний член ряду є степенем з показником $2n^2-5$ виразу $(4n-1)/(4n+7)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left((4n-1)/(4n+7)\right)^{2n^2-5}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1}{4n+7}\right)^{\frac{2n^2-5}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-8}{4n+7}\right)^{\frac{4n+7}{-8}\cdot\left(-\frac{8}{4n+7}\cdot\frac{2n^2-5}{n}\right)} =$$

$$= e^{-8\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-5}{4n^2+7n}} = e^{-8\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-5/n^2}{4+7/n}} = e^{-4} < 1.$$ Ряд збігається.

в) Загальний член ряду $u_n = 2^n : arctg^{n-4}\left(n^2/(n+3)\right)$ містить степені з показниками n та $n-4$, що залежать від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n : arctg^{n-4}\left(n^2/(n+3)\right)} =$$

$$= 2 : \lim_{n\to\infty} arctg^{(n-4)/n}\frac{n^2}{n+3} = 2 : \lim_{n\to\infty} arctg^{1-4/n}\frac{1}{1/n+3/n^2} =$$

$$= 2 : arctg\,(+\infty) = 4/\pi > 1.$$ Ряд розбігається.

г) Загальний член ряду є степенем з показником $2n$ виразу $\ln\left(n^4/(n+1)\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln^{2n}\frac{n^4}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\ln^2\frac{n^4}{n+1} = \ln^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/n^3+1/n^4} =$$

$$= \left|\ln(1/+0) = \ln(+\infty) = +\infty\right| = +\infty > 1.$$ Ряд розбігається. ■

<u>Зауваження 3</u>. У випадку невизначеності $l = 1$, радикальна ознака, як і "рівносильна" їй ознака Даламбера, відповіді не дає. Потрібні додаткові дослідження на основі інших більш "сильних" ознак, до яких відносяться всі наведені вище.

<u>Приклад 2</u>. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n(e+1/n)$.

□ а) Загальний член цього знакододатного ряду є степенем з показником n виразу $\ln(e+1/n)$, тому можна застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln^n(e+1/n)} = \lim_{n\to\infty}\ln(e+1/n) = \ln e = 1.$$

У даному випадку ця ознака відповіді не дає. Застосування ознаки Даламбера приводить до того самого результату (переконайтеся в цьому самостійно). Треба звернутися до більш “сильної” ознаки.

Перевіримо виконання необхідної ознаки:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \ln^n(e+1/n) = \left|1^\infty\right| = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln\ln^n(e+1/n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\ln(e+1/n)}.$$

Скористаємося правилом Лопіталя:

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\ln(e+1/n) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\ln(e+1/x) = \left| y=1/x;\ y\to+0\right.$$

$$\left. при\, x\to+\infty \right| = \lim_{y\to+0} \frac{\ln\ln(e+y)}{y} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{y\to+0} \frac{(\ln\ln(e+y))'}{y'} =$$

$$= \lim_{y\to+0} \left(1\big/\left((e+y)\ln(e+y)\right)\right) = 1\big/\left(e\ln e\right) = 1/e.$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^{1/e} \neq 0$. Необхідна ознака не справджується. Отже, ряд розбігається. ■

1.3. Знакозмінні ряди

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну кількість членів обох знаків + і -, називається ***знакозмінним***.

1.3.1. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбниця

Знакозмінний ряд, два довільні сусідні члени якого мають різні знаки, називається ***знакопочерговим*** або ***рядом Лейбниця***. Його вигляд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \text{ де } a_n = |u_n| \geq 0}.$$

<u>Теорема</u> (***достатня ознака Лейбниця***). *Якщо для знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n \geq 0$ *виконуються дві умови*: 1) $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і пря-*

мує до нуля, тоді цей ряд є збіжним, причому його сума S *додатна і не перевищує модуля першого члена*: $0 < S \le a_1$.

□ Розглянемо часткову суму з парним числом членів:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Кожна різниця в дужках додатна, оскільки $a_n > a_{n+1}$. Тому $S_{2n} > 0$ і послідовність $\{S_{2n}\}$ – зростаюча.

Крім того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1,$$

оскільки кожна дужка знову-таки додатна. Тобто послідовність $\{S_{2n}\}$ обмежена зверху.

Отже, послідовність $\{S_{2n}\}$ монотонно зростає і обмежена, тому має границю. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, тоді $0 < S \le a_1$.

Обчислимо границю сум з непарними номерами:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = S + 0 = S.$$

Таким чином, часткові суми як з парними, так і з непарними номерами мають спільну границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$.

Звідси випливає, що вся послідовність часткових сум $\{S_n\}$ також має, причому ту ж саму границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, Тобто ряд збігається. При цьому $0 < S \le a_1$. ■

<u>Наслідок</u>. *Абсолютна похибка* Δ_n *від заміни суми* S *збіжного знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *будь-якою його частковою сумою* S_n *не перевищує модуля першого з відкинутих членів*. Іншими словами, *модуль залишку* R_n *збіжного знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *не перевищує модуля першого з відкинутих членів*. Тобто $\Delta_n = |S - S_n| = |R_n| \le a_{n+1}$.

Дійсно, даний залишок $R_n = (-1)^{n+2} a_{n+1} + (-1)^{n+3} a_{n+2} + \ldots$ – це також збіжний ряд Лейбниця. Модуль суми цього ряду не перевищує абсолютної величини його першого члена, тобто $|R_n| \le a_{n+1}$.

Цей наслідок широко використовується при наближених обчисленнях.

Зауваження 1. Ознака Лейбниця справджується, якщо послідовність членів ряду є спадною хоча б з деякого номера N.

Зауваження 2. Друга умова ознаки Лейбниця $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, як розглянуто раніше, є необхідною для збіжності. Тому спочатку перевіряють саме її.

Приклад 1. За допомогою ознаки Лейбниця дослідити на збіжність дані знакопочергові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^3 - 1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n^2}$.

□ а) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{4n^3 - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{4 - 1/n^3} = 0$;

1) $|u_n| = \frac{n}{4n^3 - 1} > \frac{n+1}{4(n+1)^3 - 1} = |u_{n+1}|$, $n = 1, 2, \ldots$ (доведіть самостійно, безпосередньо переконавшись, що $|u_n| - |u_{n+1}| > 0$).

Отже, умови виконуються. Даний ряд збігається.

б) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Двічі скористаємося правилом Лопіталя:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{(5^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x \ln 5}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \frac{\ln 5}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{(5^x)'}{x'} = \frac{\ln 5}{2} \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x \ln 5}{1} = +\infty.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = +\infty \neq 0$. Оскільки друга умова ознаки Лейбниця не виконується, то даний ряд розбігається. ■

Приклад 2. Довести, що даний знакопочерговий ряд збігається, і знайти наближено його суму S з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/(3n)^3$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/(2n)!$.

□ а) Очевидно, обидві умови ознаки Лейбниця виконуються:

1) модулі його членів монотонно спадають;

2) n-й член ряду прямує до нуля при $n \to \infty$.

Отже, ряд збіжний і має певну суму S.

Для заданої точності $\varepsilon = 0{,}001$ наближення $S \approx S_n$ маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2 = 0{,}001/2 = 0{,}0005.$$

Знайдемо спочатку, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми S ряду частковою сумою S_n отримати граничну абсолютну похибку $\varepsilon_1 = 0{,}0005$ залишку.

За наслідком з ознаки Лейбниця $|R_n| \leq |u_{n+1}|$. Тоді:

$$|R_n| \leq |u_{n+1}| = 1/(3(n+1))^3 \leq \varepsilon_1 = 0{,}0005;\ (n+1)^3 \geq 2000/27;$$

$$n \geq 10\sqrt[3]{2}\big/3 - 1;\ n = 4.$$

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати члени ряду після округлення:

$$0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot n \leq \varepsilon_2; \quad 0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot 4 \leq \varepsilon_2 = 0{,}0005;$$

$$10^{-k} \leq 0{,}00025; \quad k \geq \lg 4000; \quad k = 4.$$

Таким чином

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/(3n)^3 \approx S_4 = 1/(3\cdot1)^3 - 1/(3\cdot2)^3 + 1/(3\cdot3)^3 -$$

$$-1/(3\cdot4)^3 \approx 0{,}0370 - 0{,}0046 + 0{,}0014 - 0{,}0006 = 0{,}0332.$$

Остаточно $S \approx 0{,}033$.

б) (Розв'язати самостійно. Відповідь: $S \approx 0{,}460$). ■

1.3.2. Абсолютна й умовна збіжність знакозмінних рядів

Теорема (***достатня ознака збіжності знакозмінного ряду***). *Якщо для знакозмінного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збігається ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, *складений з модулів його членів, то даний ряд також збігається.*

□ Нехай $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ і $S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$ – часткові суми відповідно даного ряду і ряду з абсолютних величин його членів.

Позначимо через $S_n^{(+)}$ і $S_n^{(-)}$ суми модулів відповідно всіх невід'ємних і всіх від'ємних членів серед перших n членів даного ряду. Тоді $S_n = S_n^{(+)} - S_n^{(-)}$ і $S_n^{(m)} = S_n^{(+)} + S_n^{(-)}$.

За умовою ряд з модулів збігається, тобто існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(m)} = S^{(m)}$, $S^{(m)} > 0$.

$S_n^{(+)}$ і $S_n^{(-)}$ – додатні зростаючі величини, що менші $S^{(m)}$. Значить, вони мають границі: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(+)} = S^{(+)}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(-)} = S^{(-)}$. Тоді існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^{(+)} - S_n^{(-)}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(+)} - \lim_{n\to\infty} S_n^{(-)} = S^{(+)} - S^{(-)}.$$

Отже, даний знакозмінний ряд збігається. ■

Зауваження 1. Наведена ознака є лише достатньою, але не необхідною: існують збіжні знакозмінні ряди, яким відповідають розбіжні ряди, утворені з модулів їх членів. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ збіжний за ознакою Лейбниця, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ з модулів його членів, розбіжний як гармонічний ряд.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів його членів, збігається, та ***умовно збіжним***, коли сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ з модулів його членів розбігається.

З попередньої ознаки випливає, що *довільний абсолютно* *збіжний ряд є збіжним.*

Зауваження 2. В абсолютно збіжному ряді, подібно до скінченної суми, члени можна переставляти як завгодно. При цьому він залишається абсолютно збіжним і його сума не змінюється. Навпаки, в умовно збіжному ряді перестановка членів може привести до зміни його суми і навіть до розбіжності.

Зауваження 3. Дослідження знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на збіжність доцільно розпочинати з виявлення абсолютної збіжності як більш “сильної”, застосовуючи відомі ознаки збіжності знакододатних рядів до ряду з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Якщо ряд з модулів збігається, то сам знакозмінний ряд абсолютно збіжний і дослідження завершене. Якщо ж ряд з модулів розбігається, то інколи можна відразу зробити висновок про розбіжність і самого знакозмінного ряду (наприклад, при невиконанні необхідної ознаки збіжності). Але частіше далі треба провести більш “тонке” дослідження безпосередньо самого знакозмінного ряду на умовну збіжність.

Приклад. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність дані знакозмінні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^4}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1+1/n)^{3n^2}.$$

□ а) До ряду з модулів членів даного ряду застосуємо основну ознаку порівняння:

$$|u_n| = \left|\frac{\sin n}{n^4}\right| = \frac{|\sin n|}{n^4} \le \frac{1}{n^4} = v_n.$$

Оскільки більший ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$ є збіжним узагальненим гармонічним рядом з $p = 4 > 1$, то менший ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ теж збіжний. Отже, даний ряд абсолютно збіжний.

б) Ряд з модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом з $p = 1/2 \le 1$.

Сам даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n^{1/2}$ є знакопочерговим. Він задовольняє обидві умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0;\ |u_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=|u_{n+1}|,\ n=1,2,...$$

і тому є збіжним. Отже, даний ряд умовно збіжний.

в) Модуль загального члена даного ряду $|u_n|=(1+1/n)^{3n^2}$ є степенем з показником $3n^2$ виразу $(1+1/n)$, тому до ряду з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+1/n)^{3n^2}}=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{3n}=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n\right)^3=e^3>1.$$ Ряд з модулів розбігається.

З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ за радикальною ознакою випливає $\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$. Звідси $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$.

Таким чином, для даного ряду не виконується необхідна ознака збіжності, тому він розбігається. ■

1.4. Функціональні ряди

1.4.1. Збіжність функціональних рядів

Функціональним називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, членами якого є функції $u_n(x)$, $n=1,2,...$, визначені на деякій непорожній множині D зміни аргументу x.

Якщо аргументу x надати деякого значення x_0 з ***області визначення*** D ряду, то дістанемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$, що може збігатися чи розбігатися. Відповідно x_0 називається ***точкою збіжності*** чи ***точкою розбіжності*** функціонального ряду.

Множина D_s всіх точок збіжності називається ***областю збіж-***

ності функціонального ряду. Очевидно, що D_s є деякою підмножиною області визначення D: $D_s \subseteq D$.

В області збіжності ряду його сума S є функцією x: $S = S(x)$. Записують $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і кажуть, що ***функція*** $S(x)$ **розвивається (*розкладається*) *в ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Для залишку $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ збіжного функціонального ряду виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається ***абсолютно збіжним*** в деякій області D_a, якщо в довільній точці x_0 цієї області абсолютно збігається відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та неперервні на деякому відрізку $[a;b]$.

Рівномірною нормою функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $\boxed{\| f \|_1 = \max\limits_{a\le x\le b} | f(x)|}$.

Рівномірною відстанню між функціями $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається рівномірна норма їх різниці:

$$\boxed{\rho_1(f,g) = \| f - g \|_1 = \max_{a\le x\le b} | f(x) - g(x)|}.$$

Нехай відрізок $[a;b]$ міститься в області визначення D функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Цей ряд називається ***рівномірно збіжним*** на відрізку $[a;b]$ до суми $S(x)$, якщо виконується умова

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \rho_1(S, S_n) = 0}.$$

<u>Теорема Вейєрштрасса</u> (***достатня ознака рівномірної збіжності функціонального ряду***). Якщо *для всіх значень* x *з деякого відрізка* $[a;b]$ *члени функціонального ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *за абсолютною величиною не перевищують відповідних членів збіжного зна-*

кододатного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, то функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно на цьому відрізку* $[a;b]$.

□ а) За умовою $|u_n(x)| \le a_n$, $\forall x \in [a;b]$, $n = 1, 2, \ldots$ і "більший" ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тому за основною ознакою порівняння "менший" ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ також збігається. Тобто функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно збіжний на $[a;b]$.

Оцінимо рівномірну відстань між сумою $S(x)$ і частковою сумою $S_n(x)$ цього ряду на відрізку $[a;b]$:

$$\rho_1(S, S_n) = \max_{a \le x \le b} |S(x) - S_n(x)| = \max_{a \le x \le b} |R_n(x)| =$$

$$= \max_{a \le x \le b} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \le \max_{a \le x \le b} \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n^{(a)}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} R_n^{(a)} = 0$ як залишок збіжного ряду, то, переходячи в нерівності $0 \le \rho_1(S, S_n) \le R_n^{(a)}$ до границі при $n \to \infty$, дістанемо $0 \le \lim\limits_{n \to \infty} \rho_1(S, S_n) \le \lim\limits_{n \to \infty} R_n^{(a)} = 0$.

Звідси $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_1(S, S_n) = 0$. ■

Приклад. Знайти область збіжності D_s даного функціонального ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-4)^n}{5^n} \arcsin \dfrac{x}{2n+1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{nx}}{n!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n x}{4n-3}$.

□ а) Очевидно, що областю визначення D даного ряду є вся множина дійсних чисел: $D = R$.

Для ряду з модулів членів даного ряду знайдемо "більший" числовий ряд:

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{2^n}\right| = \frac{|\cos nx|}{2^n} \le \frac{1}{2^n} = (1/2)^n = v_n, \quad x \in R.$$

При $x \in R$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n$ є збіжним геометричним рядом зі знаменником $q = 1/2 < 1$. Тоді з нерівності $|u_n(x)| \le v_n$, $x \in R$ за достатньою ознакою рівномірної збіжності випливає, що функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при $x \in R$ збігається абсолютно і рівномірно.

Отже, область збіжності $D_s = (-\infty; +\infty)$.

б) Знайдемо область визначення D даного ряду з умови, що аргумент арксинуса належить відрізку $[-1;1]$:

$$-1 \le x/(2n+1) \le 1,\ n = 1, 2, ...;\ -(2n+1) \le x \le (2n+1),$$

$$n = 1, 2, ...; \quad -3 \le x \le 3; \quad D = [-3;3].$$

За ознакою Даламбера ряд абсолютно збігається для всіх таких x з області визначення D, що справджується нерівність $\lim\limits_{n\to\infty} \left|u_{n+1}(x)/u_n(x)\right| < 1$. При $x \in D$, для яких виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} \left|u_{n+1}(x)/u_n(x)\right| > 1$, ряд розбігається. Кожне сумнівне значення $x \in D$, для якого $\lim\limits_{n\to\infty} \left|u_{n+1}(x)/u_n(x)\right| = 1$, потребує додаткового дослідження.

При $x = 0$ всі члени даного ряду дорівнюють нулю і, очевидно, він збігається до нуля. При $x \ne 0$ знайдемо границю і розв'яжемо першу нерівність:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{(x-4)^{n+1}}{5^{n+1}} \arcsin\frac{x}{2n+3} \right) : \right.$$

$$\left. :\left(\frac{(x-4)^n}{5^n} \arcsin\frac{x}{2n+1} \right) \right| = \frac{|x-4|}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\arcsin\left(x/(2n+3)\right)}{\arcsin\left(x/(2n+1)\right)} \right| =$$

$$= \left|0/0\right| = \left|\ \arcsin\left(x/(2n+3)\right) \sim x/(2n+3)\ при\, n \to \infty;\right.$$

$$\arcsin\left(x/(2n+1)\right) \sim x/(2n+1) \;\; \textit{при } n \to \infty \Big| =$$

$$= \frac{|x-4|}{5} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x/(2n+3)}{x/(2n+1)} \right| = \frac{|x-4|}{5} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \frac{|x-4|}{5} \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{2+1/n}{2+3/n} = \frac{|x-4|}{5}; \;\; \frac{|x-4|}{5} < 1; \;\; |x-4| < 5;$$

$$-5 < x-4 < 5; \;\; -1 < x < 9.$$

Враховуючи область визначення $-3 \le x \le 3$, одержимо, що при $-1 < x \le 3$ ряд збігається абсолютно.

У сумнівній точці $x = -1$ маємо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1-4)^n}{5^n} \arcsin\frac{-1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arcsin\frac{1}{2n+1},$$

що є знакопочерговим.

Спочатку дослідимо його на абсолютну збіжність, користуючись граничною ознакою порівняння:

$$|u_n(-1)| = \arcsin\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n+1} = O^*(1/n) = v_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n(-1)|}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\arcsin\frac{1}{2n+1} : \frac{1}{n} \right) = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n+1} : \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1/(2+1/n)\right) = 1/2.$$

Оскільки гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ розбігається, то ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(-1)|$ також розбігається.

Далі дослідимо знакопочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-1)$ на умовну збіжність за допомогою ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty} |u_n(-1)| = \lim_{n\to\infty} \arcsin\left(1/(2n+1)\right) = \arcsin 0 = 0;$$

$$|u_n(-1)| = \arcsin\frac{1}{2n+1} > \arcsin\frac{1}{2n+3} = |u_{n+1}(-1)|, \;\; n = 1, 2, \ldots.$$

Умови виконуються. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-1)$ збігається умовно.

Отже, область збіжності $D_s = [-1;3]$.

в) (Розв'язати самостійно. До ряду з модулів застосувати ознаку Даламбера. Відповідь: $D_s = (-\infty;+\infty)$ – область збіжності).

г) (Розв'язати самостійно. До ряду з модулів застосувати ознаку Даламбера. Сумнівні точки дослідити за допомогою граничної ознаки порівняння й ознаки Лейбниця. Відповідь: $D_s = [e^{-1};e)$ – область збіжності). ■

1.4.2. Властивості рівномірно збіжних рядів

Наведемо без доведення основні властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

1) (***Неперервність***). *Якщо члени рівномірно збіжного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *неперервні на деякому відрізку* $[a;b]$, *то його сума* $S(x)$ *також неперервна на цьому відрізку.*

2) (***Граничний перехід***). *Рівномірно збіжний на деякому відрізку* $[a;b]$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *допускає всередині цього відрізка почленний граничний перехід*:

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x), \quad x_0 \in (a;b).$$

3) (***Інтегрування***). *Якщо на деякому відрізку* $[a;b]$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *рівномірно збіжний, а його члени неперервні на* $[a;b]$, *то на цьому відрізку ряд можна почленно інтегрувати*:

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Big) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx.$$

4) (***Диференціювання***). *Збіжний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *з диференційовних на деякому відрізку* $[a;b]$ *функцій можна почленно диференціювати на цьому відрізку за умови, що продиференційований*

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *рівномірно збіжний*:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a;b].$$

5) (***Множення на обмежену функцію***). *Якщо рівномірно збіжний на деякому відрізку* $[a;b]$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *почленно помножити на обмежену на цьому проміжку функцію* $\varphi(x)$, *то одержаний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x) u_n(x)$ *також рівномірно збіжний на відрізку* $[a;b]$.

1.5. Степеневі ряди

1.5.1. Збіжність степеневих рядів

Найбільш важливим для прикладних задач окремим випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$ називається функціональний ряд вигляду:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots},$$

де x – дійсна змінна (***аргумент***); x_0 – дійсне фіксоване число (***центр розвинення*** або ***опорна точка***); $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – дійсні сталі (***коефіцієнти***).

При $\boxed{x_0 = 0}$ одержується більш зручний за формою степеневий ряд $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ за степенями x. До цього спрощеного вигляду довільний степеневий ряд зводиться лінійною заміною $x - x_0 = t$.

Очевидно, що довільний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ збіжний в точці $x = x_0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку $x = x_0$ – центр розвинення. Детальніші відомості про збіжність дає наступна теорема Абеля. а) *Якщо степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збігається при деякому* $x = x_1 \neq 0$, *то він абсолютно збігається при всіх значеннях* x, *для яких* $|x| < |x_1|$. *б) Якщо степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *розбігається при деякому* $x = x_2$, *то він розбігається при всіх значеннях* x, *для яких* $|x| > |x_2|$.

□ а) Оскільки за умовою ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний в точці $x = x_1 \neq 0$, то збіжним є числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$. За необхідною ознакою $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. Звідси випливає, що послідовність $\left\{a_n x_1^n\right\}$ обмежена, тобто існує таке додатне число M, що

$$|a_n x_1^n| \leq M, \; n = 0,1,2,\dots .$$

Враховуючи, що для $|x| < |x_1|$ величина $q = |x/x_1| < 1$, маємо:

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot |x/x_1|^n \leq Mq^n, \; n = 0,1,2,\dots .$$

Тобто модуль кожного члена степеневого ряду не перевищує відповідного члена збіжного геометричного ряду $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ зі знаменником $|q| < 1$. Тоді за основною ознакою порівняння при $|x| < |x_1|$ цей ряд абсолютно збіжний.

б) Нехай тепер існує таке значення $x = x_2$, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбіжний. Доведемо методом від супротивного, що тоді цей ряд буде розбіжним і для всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_2|$. Справді, припускаючи, що ряд збіжний в якій-небудь точці x_*, яка задовольняє цю нерівність, за доведеним в пункті а) дістанемо, що він повинен бути збіжним і в точці x_2, бо $|x_2| < |x_*|$. Але це суперечить умові, що в точці x_2 ряд розбігається. ■

Теорема Абеля дозволяє розділити множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Якщо x_1 – точка збіжності ряду, то весь інтервал $(-|x_1|;|x_1|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду (рис. 2). Якщо x_2 – точка розбіжності ряду, то півпряма $(-\infty;|x_2|)$ зліва від точки $-|x_2|$ і півпряма $(|x_1|;+\infty)$ справа від точки $|x_2|$ (рис. 2) складаються з точок розбіжності цього ряду. Зближуючи $|x_1|$ і $|x_2|$ простим перебором значень x між ними, звужуватимемо зону невизначеності $(-|x_2|;-|x_1|)\cup(|x_1|;|x_2|)$ і дістанемо:

існує таке невід'ємне число R, яке називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду, що при $|x|<R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x|>R$ – розбіжний (рис. 3). Симетричний інтервал $(-R;R)$ називається ***інтервалом збіжності*** степеневого ряду. Його довжина дорівнює подвоєному радіусу.

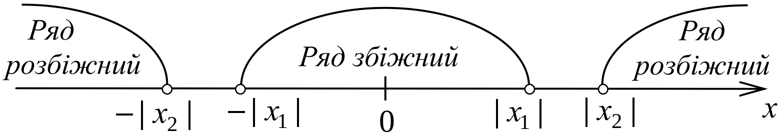

Рис. 2

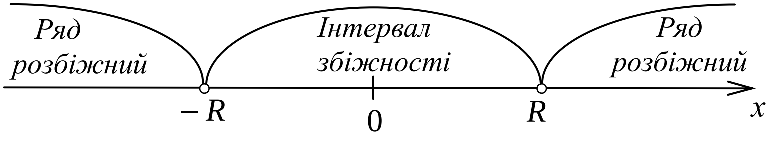

Рис. 3

Зауваження 1. На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x=\pm R$, питання про збіжність розв'язується окремо для кожного конкретного ряду. Таким чином, область збіжності степеневого ряду може відрізнятись від інтервалу $(-R;R)$ не більше ніж двома точками $x=\pm R$.

Зауваження 2. У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку ($R=0$), у інших – інтервалом збіжності є вся числова пряма $(-\infty;+\infty)$ ($R=+\infty$).

Зауваження 3. Інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ за степенями двочлена $x-x_0$ знаходять з нерівності $|x-x_0|<R$, тобто він має вигляд $(x_0-R;x_0+R)$ і є симетричним відносно центру розвинення x_0.

Зауваження 4. Інтервал збіжності степеневого ряду можна знайти безпосередньо за ознакою Даламбера або за радикальною ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів даного ряду. Для дослідження кінців інтервалу використовуються більш "сильні" ознаки.

Приклад. Знайти інтервал і область збіжності даного степеневого ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^{6n}};$$

$$\text{в) } \sum_{n=6}^{\infty}\frac{(-1)^n n!\,(x-2)^{n+5}}{3^n}; \qquad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n\sqrt{\ln(4n)}}.$$

□ а) Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n};\ u_{n+1}=\frac{(x-1)^{3(n+1)}}{(4(n+1)+5)8^{n+1}}=\frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}}:\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}\right|=\frac{|x-1|^3}{8}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{4n+9}=\frac{|x-1|^3}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{4+5/n}{4+9/n}=\frac{|x-1|^3}{8};\ \frac{|x-1|^3}{8}<1;$$

$$|x-1|^3<8;\ |x-1|<2;\ -2<x-1<2;\ -1<x<3.$$

Таким чином, $(-1;3)$ – інтервал збіжності даного ряду і $R=(3-(-1))/2=2$ – його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $x=-1$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{4n+5},$$

який є умовно збіжним за ознакою Лейбниця. (Переконайтеся в цьому самостійно).

При $x=3$ дістаємо знакododатний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(3)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+5},$$

який розбігається за граничною ознакою порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n=\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. (Переконайтеся в цьому самостійно).

Отже, областю збіжності даного ряду є півінтервал $[-1;3)$.

б) Для даного ряду скористаємося радикальною ознакою:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(x+4)^n/n^{6n}\right|}=|x+4|\lim_{n\to\infty}1/n^6=0$$

Оскільки $0<1$ при всіх дійсних значеннях x, то інтервалом і областю збіжності ряду є вся числова пряма $(-\infty;+\infty)$ і його радіус збіжності $R=+\infty$.

в) До даного ряду застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n=(-1)^n n!\,(x-2)^{n+5}/3^n\,; \quad u_{n+1}=(-1)^{n+1}(n+1)!\times$$

$$\times\,(x-2)^{n+1+5}/3^{n+1}=(-1)^{n+1}n!\,(n+1)(x-2)^{n+6}/3^{n+1}\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}n!\,(n+1)(x-2)^{n+6}/3^{n+1}}{(-1)^n n!\,(x-2)^{n+5}/3^n}\right|=$$

$$=\frac{|x-2|}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\begin{cases}0 & при\ x=2;\\ +\infty & при\ x\neq 2.\end{cases}$$

Отже, інтервалом і областю збіжності ряду є тільки одна точка $x=2$ і його радіус збіжності $R=0$.

г) (Розв’язати самостійно. До ряду з модулів застосувати ознаку Даламбера. Кінці інтервалу збіжності дослідити за інтегральною ознакою. Відповідь: $(-1;1)$ – інтервал і область збіжності). ■

Зауваження 5. У випадку степеневого ряду стандартного вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ чи $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ для радіуса збіжності одержуються формули: $\boxed{R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right|}$ – за ознакою Даламбера;

$\boxed{R=1\Big/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\,a_n\,|}}$ – за радикальною ознакою.

1.5.2. Властивості степеневих рядів

Враховуючи властивості рівномірно збіжних рядів і теорему Абеля, сформулюємо основні властивості степеневих рядів.

1) *Степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку* $[a;b]$, *який цілком міститься в інтервалі збіжності* $(-R;R)$.

2) *Сума степеневого ряду* $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *неперервна на інтервалі збіжності* $(-R;R)$.

3) *Степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку* $[a;b]$, *який належить інтервалу збіжності* $(-R;R)$. *Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності.*

$$\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

$$[a;b]\subset(-R;R).$$

4) *Степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *можна почленно диференціювати в інтервалі збіжності* $(-R;R)$. *Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності.*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},\quad x\in(-R;R).$$

Зауваження 1. При диференціюванні чи інтегруванні степеневого ряду інтервал збіжності не змінюється, але може змінитися збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

Зауваження 2. Збіжні степеневі ряди можна перемножувати за звичайними правилами:

якщо $S_a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ *для* $|x| < R_a$

і $S_b(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots$ *для* $|x| < R_b$, *тоді*

$$S_a(x) \cdot S_b(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \ldots + \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n + \ldots$$

$$\text{для } |x| < \min\{R_a, R_b\}.$$

Аналогічно виконується ділення збіжних степеневих рядів.

Зазначені властивості степеневих рядів широко використовуються в теоретичних дослідженнях і наближених обчисленнях.

Приклад 1. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, інтервал збіжності якого $(-1;1)$.

□ Нехай $S(x)$ – сума даного ряду. Тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \big/ (2n+1)\right)(x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n.$$

Одержаний ряд геометричної прогресії з першим членом $a = 1$ і знаменником $q = -x^2$ при $x \in (-1;1)$ є збіжним, оскільки $|q| < 1$. Знайдемо його суму: $S'(x) = 1 \big/ (1 + x^2)$.

Інтегруючи цю рівність на відрізку $[0; x] \subset (-1;1)$, дістанемо:

$$S(x) = \int_0^x S'(x)\,dx = \int_0^x dx/(1 + x^2) = arctg\, x, \ |x| < 1. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти область збіжності та суму степеневого ряду $\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$.

(Розв’язати самостійно, використовуючи почленне інтегрування). Відповідь: $\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = (2x - x^2) \big/ (1-x)^2$, $|x| < 1$.

1.5.3. Ряди Тейлора і Маклорена

В області збіжності сумою степеневого ряду є деяка функція. Вище висвітлені основні властивості та на прикладах розглянуті деякі способи знаходження цієї функції в скінченному вигляді.

Вважатимемо тепер, що функція задана, і з’ясуємо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти його коефіцієнти.

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки x_0 і в цій точці нескінченне число разів диференційовна. Припустимо, що в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ функцію $f(x)$ можна подати у вигляді степеневого ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

У цьому разі кажуть, що ***функція*** $f(x)$ ***розвинена*** (***розкладена***) ***в степеневий ряд*** в околі точки x_0 (за степенями двочлена $x - x_0$).

Знайдемо коефіцієнти цього ряду через значення самої функції $f(x)$ та її похідних у центрі розвинення x_0. Для цього послідовно диференціюватимемо ряд і підставлятимемо в ліву та праву частини одержаних розкладів значення $x = x_0$, а потім розв’язуватимемо знайдені вирази відносно шуканих коефіцієнтів:

$$f(x_0) = a_0 = 1 \cdot a_0 = 0! a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)/0!;$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + n\,a_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots;$$

$$f'(x_0) = a_1 = 1 \cdot a_1 = 1!\, a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(x_0)/1!;$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots;$$

$$f''(x_0) = 2a_2 = 1 \cdot 2a_2 = 2! a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = f''(x_0)/2!;$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots;$$

$$f'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 = 3!\, a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = f'''(x_0)/3!;$$

… … … … … … ... … … … … … … … … …

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2a_n + (n+1)n\ldots 2a_{n+1}(x - x_0) + \ldots;$$

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2)\dots 2a_n = n!a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = f^{(n)}(x_0)\big/n!\,;$$

… … … … … … ... … … … … … … … … … …

Підставляючи одержані значення коефіцієнтів, дістанемо ***ряд Тейлора*** для даної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) +}$$

$$\boxed{+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots}\,.$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0 = 0$, то отримаємо ***ряд Маклорена*** для даної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots}\,.$$

Зауваження. Після побудови для даної функції $f(x)$ її ряду Тейлора треба знайти його область збіжності та встановити, чи збігається він саме до цієї функції $f(x)$.

Наведемо без доведення декілька важливих теорем про єдиність, збіжність і умови існування ряду Тейлора.

Теорема 1. *Якщо функцію* $f(x)$ *в інтервалі* $(x_0 - R; x_0 + R)$ *можна подати у вигляді ряду* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *за степенями двочлена* $x - x_0$, *то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції, тобто* $a_n = f^{(n)}(x_0)\big/n!$, $n = 0,1,2,\dots$.

Теорема 2. *Для того, щоб ряд Тейлора* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ *збігався до самої функції* $f(x)$ *в інтервалі* $(x_0 - R; x_0 + R)$, *тобто* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x)$, *необхідно і достатньо, щоб ця функція мала похідні всіх порядків на цьому інтервалі і залишковий член*

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$ *її формули Тейлора прямував до нуля при* $n \to \infty$ *для всіх* x *з цього інтервалу, тобто* $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$.

Теорема 3. *Якщо функція* $f(x)$ *в інтервалі* $(x_0 - R; x_0 + R)$ *має похідні всіх порядків та існує число* $M > 0$ *таке, що* $|f^{(n)}(x)| \le M$, $n = 0,1,2,...$ *для всіх* $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, *то цю функцію можна розкласти в ряд Тейлора* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

1.5.4. Розвинення функцій у ряди Тейлора і Маклорена

Розвинення функцій в степеневі ряди в загальному випадку ґрунтується на використанні рядів Тейлора чи Маклорена.

За ***способом безпосередньої побудови*** для даної функції $f(x)$ здійснюють наступне:

а) знаходять похідні $f'(x)$, $f''(x)$ ..., $f^{(n)}(x)$, ...;

б) обчислюють значення похідних у заданій точці $x = x_0$;

в) записують шуканий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}(x_0)/n! \right)(x - x_0)^n$;

г) знаходять інтервал і область його збіжності;

д) визначають проміжок, в якому виконуються умови теореми 2 чи теореми 3 з попереднього пункту 1.5.3. Якщо такий проміжок існує, то в ньому дана функція $f(x)$ і сума її ряду Тейлора співпадають, тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}(x_0)/n! \right)(x - x_0)^n$.

Згідно теореми 1 про єдиність розвинення (попередній пункт 1.5.3), ряд Тейлора чи ряд Маклорена для даної функції $f(x)$ не залежить від способу його побудови. Тому на практиці частіше застосовують ***спосіб формальних перетворень*** – без знаходження виразів для похідних довільного n-го порядку, а за допомогою формальних перетворень уже відомих (стандартних) розвинень. Тоді залишається обґрунтувати збіжність і саме до даної функції отриманого розкладу на певному проміжку. Зокрема, корисно використовувати почленне диференціювання чи інтегрування відомих рядів, оскільки в інтервалах збіжності одержані ряди збігаються до відповідних функцій.

У наступній таблиці подані ряди Маклорена і області їх збіжності для деяких елементарних функцій. Вони використовуються як ***стандартні розвинення*** при знаходженні степеневих рядів для інших функцій. (Виведення цих співвідношень здійсніть самостійно).

№ п/п	Функція та її розвинення в ряд Маклорена
1	$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+... = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x\in R$
2	$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+...+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+... = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in R$
3	$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+... = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x\in R$
4	$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+...+\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+... =$ $= x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\ x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)},\ x\in[-1;1]$, де $\begin{cases}(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)\\(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot(2n)\end{cases}$
5	$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+...+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+... = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1;1]$
6	$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+... = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ x\in(-1;1]$
7	$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...\right) = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in(-1;1)$
8	$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+... =$ $=1+\alpha x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-1;1)$

8а	$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $x\in(-1;1)$
9	$sh\,x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^3}{5!}+...+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in R$
10	$ch\,x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in R$

Приклад 1. Розкласти в ряд Маклорена дані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

$$\text{а) } f(x)=\cos^2 x; \qquad \text{б) } f(x)=\frac{12}{x^2-2x-3}.$$

□ а) Спосіб I – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(0)$, $n=0,1,2,...$, що входять у ряд Маклорена $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x)=\cos^2 x; \qquad f(0)=1;$$

$$f'(x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x=\sin(2x+(\pi/2)\cdot 2);\ \ f'(0)=0;$$

$$f''(x)=-2\cos 2x=2\sin(2x+(\pi/2)\cdot 3); \qquad f''(0)=-2;$$

$$f'''(x)=2^2\sin 2x=2^2\sin(2x+(\pi/2)\cdot 4); \qquad f'''(0)=0;$$

$$f^{(4)}(x)=2^3\cos 2x=2^3\sin(2x+(\pi/2)\cdot 5); \qquad f^{(4)}(0)=2^3;$$

… …

$$f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin(2x+\frac{\pi}{2}(n+1));\ \ f^{(n)}(0)=2^{n-1}\sin(\frac{\pi}{2}(n+1));$$

… …

Підставимо отримані значення похідних у формулу ряду Маклорена і дістанемо

$$\cos^2 x=\underbrace{1}_{u_0}+\underbrace{0}_{u_1}-\underbrace{(2/2!)x^2}_{u_2}+\underbrace{0}_{u_3}+\underbrace{(2^3/4!)x^4}_{u_4}+...+$$

$$+\underbrace{\frac{2^{n-1}\sin((\pi/2)\cdot(n+1))}{n!}x^n}_{u_n}+\ldots=\left|\begin{matrix} u_n=\dfrac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!}x^{2m},\ n=2m; \\ u_n=0,\ n=2m+1,\quad m=0,1,2,\ldots \end{matrix}\right|=$$

$$=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots+\frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!}x^{2m}+\ldots=$$

$$=\left|n=m\right|=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 2^{2n-1}/(2n)!\right)x^{2n}.$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!}:\frac{(-1)^n 2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\right|=4x^2\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\left(1/((2n+1)(2n+2))\right)=0<1,\quad x\in R.$$

Отже, інтервал і область збіжності ряду $(-\infty;+\infty)$.

<u>Спосіб 2 – формальні перетворення</u>. Скористаємося відомими тотожностями для перетворення даної функції, основними властивостями збіжних степеневих рядів і стандартними розвиненнями.

Подамо функцію $f(x)=\cos^2 x$ у вигляді:

$$f(x)=\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2=1/2+(1/2)\cos 2x$$

і використаємо відомий розклад

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty),$$

замінюючи x на $2x$. Дістанемо:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=1-$$

$$-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots+\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Як бачимо, обидва способи дають однакове розвинення. Його область збіжності $(-\infty;+\infty)$ знайдена вище.

б) <u>Спосіб I – безпосередня побудова</u>. (Розв’яжіть самостійно).

<u>Спосіб 2 – формальні перетворення</u>. Подамо дану раціональну функцію $f(x)=\dfrac{12}{x^2-2x-3}$ у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{12}{x^2-2x-3}=\frac{12}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=$$

$$=\left| A(x-3)+B(x+1)=12;\quad \begin{matrix} x=-1: \\ x=3: \end{matrix}\begin{cases} -4A=12, & A=-3 \\ 4B=12; & B=3 \end{cases} \right|=$$

$$=\frac{-3}{x+1}+\frac{3}{x-3}=-3\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+(-x/3)}.$$

Застосуємо відоме розвинення

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\ ,\quad x\in(-1;1),$$

де для другого дробу замінимо x на $-x/3$ і отримаємо:

$$\frac{1}{1+(-x/3)}=1-(-x/3)+(-x/3)^2-(-x/3)^3+...+(-1)^n(-x/3)^n+...=$$

$$=1+(1/3)x+(1/3^2)x^2+(1/3^3)x^3+...+(1/3^n)x^n+...=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(1/3^n)\,x^n\ ;$$

$$(-x/3)\in(-1;1);\qquad x\in(-3;3).$$

Враховуючи, що ряд для першого дробу збігається при $x\in(-1;1)$ а ряд для другого дробу – при $x\in(-3;3)$, маємо, що обидва ряди одночасно збігаються при $x\in(-1;1)$. Тоді в інтервалі $(-1;1)$ їх можна почленно додавати зі сталими множниками:

$$\frac{12}{x^2-2x-3}=-3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n}x^n\ .$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{((-1)^{n+2}3^{n+2}-1)\,x^{n+1}}{3^{n+1}}:\frac{((-1)^{n+1}3^{n+1}-1)\,x^n}{3^n}\right|=$$

$$=\frac{|x|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}3^{n+2}-1}{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}\right|=\frac{|x|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}-1/3^{n+2}}{(-1)^{n+1}/3-1/3^{n+2}}\right|=$$

$$=\left(|x|/3\right)\cdot 3=|x|;\ \ |x|<1;\ \ x\in(-1;1).$$

Дослідимо кінці інтервалу збіжності. При $x=-1$ маємо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n}(-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-3^{n+1}}{3^n},$$

що розбігається, бо для нього не виконується необхідна ознака збіжності:

$$\lim_{n\to\infty}u_n(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}-3^{n+1}}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left((-1)^{n+1}/3^n-3\right)=-3\neq 0.$$

При $x=1$ маємо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n}1^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n},$$

що також розбігається, оскільки:

$$\lim_{n\to\infty}u_n(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(3(-1)^{n+1}-1/3^n\right)\ \text{не існує.}$$

Отже, $(-1;1)$ – область збіжності одержаного ряду. ■

Приклад 2. Розкласти в ряд Тейлора дані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

а) $f(x)=1/(4x-5)$ за степенями двочлена $x-3$;

б) $f(x)=\cos(\pi x/4)$ за степенями двочлена $x+2$.

□ а) Спосіб I – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(3)$, $n=0,1,2,...$, що входять у ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n=f(3)+\frac{f'(3)}{1!}(x-3)+$$

$$+\frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n+\ldots$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x)=1/(4x-5)\,; \qquad f(3)=1/7\,;$$

$$f'(x)=-1\cdot 4/(4x-5)^2\,; \quad f'(3)=-1\cdot 4/7^2\,;$$

$$f''(x)=1\cdot 2\cdot 4^2/(4x-5)^3\,; \quad f''(3)=1\cdot 2\cdot 4^2/7^3\,;$$

… …

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,4^n/(4x-5)^{n+1}\,; \quad f^{(n)}(3)=(-1)^n n!\,4^n/7^{n+1}\,;$$

… …

Підставимо знайдені значення похідних в ряд Тейлора і дістанемо:

$$\frac{1}{x-5}=\frac{1}{7}-\frac{1\cdot 4/7^2}{1!}(x-3)+\frac{1\cdot 2\cdot 4^2/7^3}{2!}(x-3)^2+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^n n!\cdot 4^n/7^{n+1}}{n!}(x-3)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}\,.$$

Звернемося до ознаки Даламбера для дослідження отриманого ряду на збіжність:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}(x-3)^{n+1}}{7^{n+2}}:\frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}\right|=$$

$$=(4/7)\,|\,x-3\,|<1;\;\; -7/4<x-3<7/4;\;\; 5/4<x<19/4.$$

На кінцях інтервалу збіжності $(5/4;19/4)$ маємо ряди $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(5/4)=(1/7)\sum_{n=0}^{\infty}1$ і $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(19/4)=(1/7)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, що розбігаються, оскільки для них не виконується необхідна ознака збіжності. Отже, $(5/4;19/4)$ – область збіжності одержаного ряду.

<u>Спосіб 2 – формальні перетворення</u>. Спочатку подамо функцію $f(x)=1/(4x-5)$ через нову змінну $z=x-3$ – відхилення від центру розвинення $x=x_0=3$:

$$x = z + 3\,; \quad f(x) = \frac{1}{4(z+3)-5} = \frac{1}{4z+7} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1+4z/7}\,.$$

Скористаємося рядом

$$1/(1+x) = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\,, \quad x \in (-1;1)\,,$$

в який замість x підставимо $4z/7$. Отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1+4z/7} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4z/7)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n z^n}{7^{n+1}}\,.$$

Поклавши $z = x - 3$, повернемося до початкової змінної x і дістанемо шукане розвинення $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}$.

Його область збіжності $(5/4;19/4)$ знайдена вище.

б) <u>Спосіб I – безпосередня побудова</u>. (Розв’яжіть самостійно).

<u>Спосіб 2 – формальні перетворення</u>. Введемо нову змінну $z = x + 2$ – відхилення від центру розвинення $x = x_0 = -2$. Дістанемо:

$$x = z - 2\,; \; f(x) = \cos\frac{\pi x}{4} = \cos\frac{\pi(z-2)}{4} = \cos\left(\frac{\pi z}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi z}{4}\,.$$

Потім скористаємося відомим розвиненням

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \; x \in R\,,$$

в яке замість x підставимо $\pi z/4$. Отримаємо:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\pi z/4)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \pi^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!\,4^{2n+1}}\,.$$

Далі повернемося до початкової змінної x і дістанемо шуканий розклад $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \pi^{2n+1}(x+2)^{2n+1}}{(2n+1)!\,4^{2n+1}}$.

Область збіжності ряду $(-\infty;+\infty)$. (Переконайтеся в цьому самостійно, застосовуючи ознаку Даламбера). ■

1.5.5. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

У наближених обчисленнях степеневі ряди застосовують, зокрема, для: обчислення значень функцій; обчислення інтегралів; розв’язування диференціальних рівнянь.

Наближене обчислення значень функцій. Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд в деякому інтервалі $(a; b)$, що містить точку x_0, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене – частковій сумі $S_n(x_0)$: $f(x_0) \approx S_n(x_0)$. Абсолютна похибка $\Delta = |f(x_0) - S_n(x_0)|$ характеризує точність наближення. Вона дорівнює модулю залишку ряду $\Delta = |R_n(x_0)|$.

Треба також враховувати похибки округлення при обчисленні самих залишених в $S_n(x_0)$ членів ряду (дивись пункт 1.1).

Приклад 1. Обчислити наближено значення $\sin 12^\circ$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$.

□ Скористаємося розвиненням функції $\sin x$ в ряд Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in R,$$

де покладемо $x = 12^\circ = \pi/15 = 0{,}2094393$ і дістанемо знакопочерговий ряд

$$\sin 12^\circ = \sin\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{15} - \frac{\pi^3}{15^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{15^5 \cdot 5!} + \ldots + \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{15^{2n+1} \cdot (2n+1)!} + \ldots.$$

Для заданої точності $\varepsilon = 0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon / 2 = 0{,}0001/2 = 0{,}00005.$$

Знайдемо спочатку, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми $f(x_0)$ ряду частковою сумою $S_n(x_0)$ отримати граничну абсолютну похибку $\varepsilon_1 = 0{,}00005$ залишку.

За наслідком з ознаки Лейбниця $|R_n| \le |u_{n+1}|$. Тоді

$$|R_n| \le |u_{n+1}| = \frac{(\pi/15)^{2n+3}}{(2n+3)!} \le \varepsilon_1 = 0{,}00005;\ \frac{(\pi/15)^{2n+3}}{(2n+3)!} \le 0{,}00005.$$

Розв’яжемо цю нерівність методом підбору:

$$n=0:\ \ |u_1| = (\pi/15)^3/3! = 0{,}0015312 > \varepsilon_1 = 0{,}00005;$$

$$n=1:\ \ |u_2| = (\pi/15)^5/5! = 0{,}000003 \le \varepsilon_1 = 0{,}00005.$$

Отже, досить взяти два перших члени ряду u_0 і u_1.

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5\cdot 10^{-k}\cdot 2 \le \varepsilon_2 = 0{,}00005;\ 10^{-k} \le 0{,}00005;\ k \ge \lg 20000;\ k=5.$$

Таким чином

$$\sin 12^\circ \approx S_1 = \pi/15 - (\pi/15)^3/3! = 0{,}20944 - 0{,}00153 = 0{,}20791.$$

Остаточно $\sin 12^\circ \approx 0{,}2079$. ■

Наближене обчислення визначених інтегралів. Нехай потрібно знайти інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, який не береться в елементарних функціях або складний і незручний для безпосередніх обчислень. Розглянемо випадок, коли підінтегральну функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, інтервал збіжності якого охоплює відрізок інтегрування $[a;b]$. Тоді на цьому відрізку ряд можна почленно проінтегрувати, використавши відповідну властивість степеневих рядів. Одержаний ряд дає точне значення інтеграла. Наближене значення дорівнює частковій сумі. Похибка обчислень визначається так само, як і при знаходженні значень функцій.

Приклад 2. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^{1/2} x^4(e^{x^2} - 1)\,dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$.

□ Формула Ньютона – Лейбниця тут не застосовна, тому що первісна від $f(x) = x^4(e^{x^2} - 1)$ не виражається в елементарних функціях. Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи стандартний розклад для експоненти e^x, де замість

x підставимо x^2, потім віднімемо 1 і почленно помножимо на x^4:

$$x^4(e^{x^2}-1)=x^4\left((1+x^2/1!+x^4/2!+\ldots+x^{2n}/n!+\ldots)-1\right)=$$

$$=x^6/1!+x^8/2!+\ldots+x^{2n+4}/n!+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Оскільки $[0;1/2]\subseteq(-\infty;+\infty)$, то цей степеневий ряд можна проінтегрувати почленно на $[0;1/2]$. Дістанемо:

$$I=\int_0^{1/2}\left(x^6/1!+x^8/2!+x^{10}/3!+\ldots+x^{2n+4}/n!+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^7}{1!\cdot 7}+\frac{x^9}{2!\cdot 9}+\frac{x^{11}}{3!\cdot 11}+\ldots+\frac{x^{2n+5}}{n!\cdot(2n+5)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{1!\cdot 7\cdot 2^7}+$$

$$+1\big/(2!\cdot 9\cdot 2^9)+1\big/(3!\cdot 11\cdot 2^{11})+\ldots+1\big/\left(n!\cdot(2n+5)\cdot 2^{2n+5}\right)+\ldots.$$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакододатного ряду. З'ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon=0{,}0001$.

Для заданої точності $\varepsilon=0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2=0{,}0001/2=0{,}00005.$$

Спочатку оцінимо n-й залишок:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!\cdot(2n+7)\cdot 2^{2n+7}}+\frac{1}{(n+2)!\cdot(2n+9)\cdot 2^{2n+9}}+$$

$$+\frac{1}{(n+3)!\cdot(2n+11)\cdot 2^{2n+11}}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!\cdot 2^{2n+7}}\left(\frac{1}{2n+7}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(n+2)(2n+9)}+\frac{1}{2^2(n+2)(n+3)(2n+11)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{2^{2n+7}(n+1)!\cdot(2n+7)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)$$

Тут добутки $(n+2)(2n+9)$, $(n+2)(n+3)(2n+11)$, …, що стоять у знаменниках другого, третього, … дробів, замінено на менший вираз $2n+7)$, від чого кожний дріб збільшився. У дужках записана нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q=1/2$. Її сума $S=1/(1-1/2)=2$. Тоді

$$R_n<1\Big/\left(2^{2n+7}(n+1)!\cdot(2n+7)\right)\cdot 2<1\Big/\left(2^{2n+6}(n+1)!\cdot(2n+7)\right).$$

Підберемо n так, щоб виконувалася умова

$$R_n<1\Big/\left(2^{2n+6}(n+1)!\cdot(2n+7)\right)\le\varepsilon_1=0{,}00005:$$

$$n=1:\quad R_1<1\Big/\left(2^8\,2!\cdot 9\right)=0{,}000217>\varepsilon_1=0{,}00005;$$

$$n=2:\quad R_2<1\Big/\left(2^{10}\,3!\cdot 11\right)=0{,}000015<\varepsilon_1=0{,}00005.$$

Отже, досить взяти два перших члени ряду.

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5\cdot 10^{-k}\cdot 2\le\varepsilon_2=0{,}00005;\ 10^{-k}\le 0{,}00005;\ k\ge\lg 20000;\ k=5.$$

Таким чином

$$I\approx S_2=\frac{1}{1!\cdot 7\cdot 2^7}+\frac{1}{2!\cdot 9\cdot 2^9}=0{,}00112+0{,}00011=0{,}00123.$$

Остаточно $I\approx 0{,}0012$. ■

Наближене розв’язування диференціальних рівнянь. Коли точно проінтегрувати диференціальне рівняння за допомогою елементарних функцій не вдається або досить складно, його розв’язок $y=y(x)$ можна шукати у вигляді ряду Тейлора або Маклорена.

Зокрема, при розв’язуванні задачі Коші:

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

використовується ряд Тейлора з центром розвинення у початковій точці x_0:

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

де $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$, а решта похідних $y^{(n)}(x_0)$, $n=2,3,\ldots$ знаходиться ***методом послідовного диференціювання*** чи ***методом невизначених коефіцієнтів***. Суть цих методів розглянемо на прикладах.

<u>Зауваження 1</u>. Питання про те, за яких умов розв'язок диференціального рівняння можна шукати у вигляді степеневого ряду, а також яка похибка цього розв'язку, тут не розглядаються.

<u>Приклад 3</u>. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших чотирьох членів включно частинний розв’язок диференціального рівняння $y' = y^2 - x^3$, що задовольняє початковій умові $y(1) = 2$.

□ Застосовуємо <u>метод послідовного диференціювання</u>.

Шукаємо розв’язок $y = y(x)$ у вигляді ряду Тейлора з центром розвинення $x = 1$:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots,$$

де згідно умови задачі явно виписані перші чотири члени.

За умовою $y(1) = 2$. Підставляючи $x = 1$ і $y = y(1) = 2$ у диференціальне рівняння $y' = y^2 - x^3$, знаходимо $y'(1) = 2^2 - 1^3 = 3$.

Далі диференціюємо послідовно диференціальне рівняння по x і в отримані вирази підставляємо відомі на даному кроці величини. Одержуємо похідні $y''(1)$ і $y'''(1)$:

$$y'' = 2yy' - 3x^2; \quad y''(1) = 2\cdot y(1)\cdot y'(1) - 3\cdot 1^2 = 2\cdot 2\cdot 3 - 3 = 9;$$

$$y''' = 2(y'y' + yy'') - 6x = 2(y')^2 + 2yy'' - 6x;$$

$$y'''(1) = 2(y'(1))^2 + 2y(1)\cdot y''(1) - 6\cdot 1 = 2\cdot 3^2 + 2\cdot 2\cdot 9 - 6 = 42.$$

Отже, $y(x) = 2 + (3/1!)(x-1) + (9/2!)(x-1)^2 + (42/3!)\times$

$$\times(x-1)^3 + \ldots = 2 + 3(x-1) + (9/2)(x-1)^2 + 7(x-1)^3 + \ldots. \quad ■$$

<u>Приклад 4</u>. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших трьох членів включно частинний розв’язок диференціального рівняння $y' = y^2 - 64\ln(1 + x/2)$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 4$.

□ Застосовуємо <u>метод невизначених коефіцієнтів</u>.

Шукаємо розв’язок $y = y(x)$ у вигляді степеневого ряду $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ з центром розвинення у початковій точці $x = 0$. Тут згідно умови задачі явно виписані перші три члени з невідомими коефіцієнтами a_n, $n = 0,1,2$.

З початкової умови $y(0) = 4$ дістаємо $a_0 = y(0) = 4$. Тоді розв'язок $y = y(x)$ набуває вигляду: $y(x) = 4 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$.

Далі диференціюємо цей розв'язок: $y'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots$.

Використовуючи стандартне розвинення для $\ln(1+x)$, в якому замінюємо x на $x/2$, дістаємо степеневий ряд з центром в тій же початковій точці $x = 0$ для функції $\ln(1+x/2)$ в правій частині:

$$\ln(1+x/2) = x/2 - x^2/(2^2 \cdot 2) + \dots = x/2 - x^2/8 + \dots,$$

де відповідно до умови задачі явно виписані тільки перші члени до степеня x^2 включно.

Отримані вирази підставляємо в диференціальне рівняння:

$$a_1 + 2a_2 x + \dots = \left(4 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\right)^2 - 64 \cdot \left((1/2)x - (1/8)x^2 + \dots\right);$$

$$a_1 + 2a_2 x + \dots = 16 + a_1^2 x^2 + a_2^2 x^4 + 8a_1 x + 8a_2 x^2 +$$

$$+ 2a_1 a_2 x^3 + \dots - 32x + 8x^2 - \dots.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва та справа у цій тотожності:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & a_1 = 16; \\ x & 2a_2 = 8a_1 - 32; \\ \dots & \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \end{array}$$

Звідси знаходимо: $a_1 = 16$; $a_2 = 4a_1 - 16 = 4 \cdot 16 - 16 = 48$.

Підставляємо отримані значення коефіцієнтів у степеневий ряд і дістаємо: $y(x) = 4 + 16x + 48x^2 + \dots$. ■

Зауваження 2. Цими ж методами можна наближено розв'язувати диференціальні рівняння вищих порядків.

Приклад 5. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд в околі початкової точки частинного розв'язку диференціального рівняння $y'' = xy' - 3e^y$, що задовольняє початковим умовам $y(3)=0$, $y'(3)=1$.

□ Скористаємося методом послідовного диференціювання. Шукаємо розв’язок $y(x)$ у вигляді ряду:

$$y(x)=y(3)+\frac{y'(3)}{1!}(x-3)+...+\frac{y^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n+....$$

Тут

$$y(3)=0;\ y'(3)=1\neq 0;\ y''(3)=3y'(3)-3e^{y(3)}=3\cdot 1-3e^0=0.$$

Послідовно диференціюючи дане рівняння, отримаємо:

$$y'''=y'+x\,y''-3e^y y';\quad y'''(3)=y'(3)+3\,y''(3)-3e^{y(3)}y'(3)=$$

$$=1+3\cdot 0-3e^0\cdot 1=-2\neq 0;\quad y^{(4)}=y''+y''+xy'''-$$

$$-3(e^y y'y'+e^y y'')=2y''+xy'''-3e^y(y')^2-3e^y y'';$$

$$y^{(4)}(3)=2y''(3)+3y'''(3)-3e^{y(3)}(y'(3))^2-3e^{y(3)}y''(3)=$$

$$=2\cdot 0+3\cdot(-2)-3e^0\cdot 1^2-3e^0\cdot 0=-9\neq 0.$$

Підставляючи знайдені похідні в шуканий ряд, дістанемо:

$$y(x)=0+(1/1!)(x-3)+(0/2!)(x-3)^2+(-2/3!)(x-3)^3+$$

$$+(-9/4!)(x-3)^4+...=(x-3)-(1/3)(x-3)^3-(3/8)(x-3)^4+....\ ■$$

1.5.6. Степеневі ряди на комплексній площині

Комплексним числовим рядом називається ряд

$$\boxed{\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} c_n=c_1+c_2+...+c_n+...},$$

члени якого є комплексними числами: $\boxed{c_n=a_n+ib_n}$, $n=1,2,...$.

Відокремлюючи дійсну й уявну частини ряду, отримуємо два дійсних ряди: $\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} b_n$. Якщо одночасно збіжні обидва цих ряди, тобто $\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n=A$ і $\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} b_n=B$, то комплексний ряд $\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} c_n$ теж ***збіжний***, причому $\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} c_n=A+iB$. Якщо хоч один з рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбіжний, то комплексний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ теж ***розбіжний***.

Таким чином, дослідження комплексного ряду на збіжність зводиться до дослідження двох дійсних рядів за допомогою розглянутих вище ознак збіжності.

Якщо збігається ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} | c_n | = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, то комплексний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ називається ***абсолютно збіжним***.

Комплексним степеневим рядом називається ряд

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + \ldots + c_n (z - z_0)^n + \ldots},$$

де аргумент z, центр розвинення z_0 і сталі коефіцієнти c_n, $n = 0,1,2,\ldots$ є комплексними числами: $\boxed{z = x + i\,y}$, $\boxed{z_0 = x_0 + i\,y_0}$, $\boxed{c_n = a_n + ib_n}$.

Не зменшуючи загальності, можна розглядати ряд $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n}$ з центром розвинення $\boxed{z_0 = 0}$.

<u>Зауваження</u>. Комплексний степеневий ряд є узагальненням дійсного степеневого ряду. Зокрема, у ряді $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ з комплексним аргументом z центр розвинення z_0 і сталі коефіцієнти c_n, $n = 0,1,2,\ldots$ можуть бути дійсними числами.

Комплексний степеневий ряд має властивості, аналогічні відповідним властивостям дійсного степеневого ряду. Зокрема, залишається справедливою теорема Абеля.

Круг радіуса R з центром у початку координат $z = 0$, усередині якого степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ абсолютно збігається, а ззовні розбігається, називається ***кругом збіжності*** цього ряду. Число R називається ***радіусом збіжності***.

Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ збіжний в усій комплексній площині, то $R = +\infty$. Якщо цей ряд збіжний лише в одній точці $z = 0$, то

$R = 0$.

Питання про збіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ в точках межі круга збіжності, тобто на колі $|z| = R$, розв'язується окремо для кожного конкретного ряду.

Усередині круга збіжності комплексний степеневий ряд можна почленно диференціювати й інтегрувати.

Приклад. Знайти область збіжності даного комплексного степеневого ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+2)^{3n+1}}{(2n+1)^{1/5}\, 27^n}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(8n+3)^n}{n^n 2^{3n}} (z-i)^n .$$

□ а) Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (z+2)^{3n+4}}{(2n+3)^{1/5}\, 27^{n+1}} : \frac{(-1)^n (z+2)^{3n+1}}{(2n+1)^{1/5}\, 27^n} \right| = \frac{|z+2|^3}{27} \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+3} \right)^{1/5} = \frac{|z+2|^3}{27} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+1/n}{2+3/n} \right)^{1/5} = \frac{|z+2|^3}{27} < 1;$$

$$|z+2|^3 < 27; \ |z+2| < 3.$$

Таким чином, ряд абсолютно збіжний всередині круга $|z+2| < 3$, а $R = 3$ – його радіус збіжності.

На колі $|z+2| = 3$ маємо дійсний знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |z+2|^{3n+1}}{(2n+1)^{1/5}\, 27^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{3n+1}}{(2n+1)^{1/5}\, 27^n} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{1/5}} .$$

Ряд з його модулів $3\sum_{n=0}^{\infty} 1/(2n+1)^{1/5}$ розбігається за граничною ознакою порівняння з розбіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/5}$ ($p = 1/5 \le 1$).

Оскільки виконуються умови ознаки Лейбниця

$$|u_n| = 3/(2n+1)^{1/5} > 3/(2n+3)^{1/5} = |u_{n+1}| ;$$

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \left(1/(2n+1)^{1/5} \right) = 0,$$

то знакопочерговий ряд $3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(2n+1)^{1/5}$ збігається умовно.

Отже, областю збіжності є замкнений круг $|z+2|\le 3$.

б) До даного ряду застосуємо радикальну ознаку:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(8n+3)^n(z-i)^n\big/(n^n 2^{3n})\right|}=\frac{|z-i|}{8}\times$$
$$\times\lim_{n\to\infty}((8n+3)/n)=\left(|z-i|/8\right)\lim_{n\to\infty}(8+3/n)=|z-i|<1.$$

Таким чином, ряд абсолютно збіжний всередині круга $|z-i|<1$, а $R=1$ – його радіус збіжності.

На колі $|z-i|=1$ маємо дійсний знакододатний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(8n+3)^n|z-i|^n\big/(n^n 2^{3n})=\sum_{n=0}^{\infty}(8n+3)^n\big/(n^n 2^{3n}),$$

який розбігається, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(8n+3)^n}{n^n 2^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n+3}{8n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{8n}\right)^{\frac{8n}{3}\cdot\frac{3}{8n}\cdot n}=$$
$$=e^{3/8}\neq 0.$$

Отже, областю збіжності є відкритий круг $|z-i|<1$. ■

Сума $S(z)$ комплексного степеневого ряду всередині круга збіжності є деякою функцією комплексної змінної. Користуючись стандартними розвиненнями функцій дійсної змінної в степеневі ряди (ряди Маклорена) і поширюючи їх на комплексну площину, можна узагальнити поняття цих функцій, розглядаючи їх як суми відповідних комплексних степеневих рядів. Наприклад:

1) ***показникова*** (***експоненціальна***) ***функція*** комплексної змінної

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ |z|<+\infty;$$

2) ***косинус*** комплексної змінної

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\ |z|<+\infty;$$

3) ***синус*** комплексної змінної

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; |z| < +\infty .$$

Теорема. *Для довільного комплексного числа* z *справджується рівність*: $\boxed{e^{iz} = \cos z + i\sin z}$ – ***основна формула Ейлера***.

□ Підставляючи в наведений вище ряд для комплексної експоненти e^z замість z величину iz, дістанемо:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \ldots =$$

$$= 1 + i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots,$$

де скористалися співвідношеннями

$$i^{4n+1} = i\,; \;\; i^{4n+2} = -1\,; \;\; i^{4n+3} = -i\,; \;\; i^{4n+4} = 1, \;\; n = 0,1,2,\ldots .$$

Оскільки отриманий ряд абсолютно збіжний, то його члени можна довільним способом групувати і переставляти. Зберемо окремо члени з множником i (уявна одиниця) та без нього і цей множник винесемо за дужки. Одержимо:

$$e^{iz} = \left(1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \ldots\right) + i\left(z/1! - z^3/3! + z^5/5! - \ldots\right).$$

У дужках маємо розвинення в степеневі ряди відповідно функцій $\cos z$ і $\sin z$. Отже, $e^{iz} = \cos z + i\sin z$. ■

1.6. Ряди Фур'є

Функціональні ряди використовуються для подання довільної функції $f(x)$ у вигляді:

$$f(x) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

де $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, … – система відомих (***базисних***) функцій; a_n $(n = 0,1,\ldots)$ – сталі коефіцієнти.

Розглянуті вище степеневі ряди (ряди Тейлора чи Маклорена) дозволяють подавати функції, що безліч разів диференційовні, тобто дуже гладкі. Крім того, у загальному випадку а) швидкість збіжності (кількість членів, які треба залишити для досягнення заданої точності наближення) значно зростає при віддалені від центру розвинення; б) n-а часткова сума S_n ряду Тейлора чи Маклорена не є найкращим середньо квадратичним наближенням функції $f(x)$ серед поліномів n-го степеня.

Для розвинення розривних функцій чи функцій з розривами похідних потрібні інші функціональні ряди. Необхідність усунення зазначених та інших недоліків обумовлює переважне використання рядів з ортогональними базисними функціями.

Як і при розгляді степеневих рядів, виникають питання: а) за яких умов на задану функцію $f(x)$ можливе відповідне розвинення? б) як обчислити його коефіцієнти? в) який характер збіжності?

Далі дано відповіді для найбільш поширеної тригонометричної системи ортогональних базисних функцій.

1.6.1. Ортогональність функцій

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та неперервні на деякому відрізку $[a;b]$. Їх можна розглядати як нескінченновимірні вектори і ввести відповідні означення.

Скалярним добутком функцій $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $\boxed{(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx}$.

Евклідовою нормою функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається квадратний корінь зі скалярного квадрату (f,f), тобто

$$\boxed{\| f \|_2=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}}.$$

Функція $f(x)$ ***нормована*** на $[a;b]$, якщо $\| f \|_2=1$.

Середньо квадратичною відстанню між функціями $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається евклідова норма їх різниці:

$$\boxed{\rho_2(f,g)=\| f-g \|_2=\sqrt{\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx}}\ .$$

Функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються ***ортогональними*** на відрізку $[a;b]$, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0\,.$$

Скінченна або нескінченна система функцій $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, …, які неперервні на відрізку $[a;b]$ і не дорівнюють тотожно нулю, називається ***ортогональною*** на цьому відрізку, якщо всі ці функції попарно ортогональні, тобто

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ A_n\neq 0, & m=n\end{cases}\qquad (m=0,1,\ldots;\ n=0,1,\ldots)\,.$$

Якщо при цьому $A_n=1$ $(n=0,1,\ldots)$, то система називається ***ортонормованою***. (Кожна функція є нормованою: $\|\varphi_n(x)\|_2=\sqrt{A_n}=1$).

<u>Теорема</u>. Система тригонометричних функцій

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ldots$$

ортогональна на відрізку $[-\pi;\pi]$, довжина якого дорівнює їх спільному періоду $T=2\pi$.

□ Враховуючи співвідношення $\sin nx=0$ і $\cos nx=(-1)^n$ ($n\in Z$), безпосереднім обчисленням можна показати (зробіть це самостійно), що

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx=2\pi\,;\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\pi\,;\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\pi\,;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx=0\,;\ \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx=0\,;\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0\,;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0\ (m\neq n);\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0\ (m\neq n).\ \blacksquare$$

<u>Зауваження 1</u>. Розглянута тригонометрична система ортогональна, але не нормована. Діленням кожної функції на відповідну норму її можна звести до ортонормованого вигляду.

<u>Зауваження 2</u>. Тригонометрична система має значне практичне застосування, оскільки описує поширені у різних сферах коливальні процеси. Однак існує багато інших ортогональних систем функцій. Зокрема, часто використовуються системи ортогональних многочленів Лежандра, Чебишова, Ерміта, Лагерра.

1.6.2. Розкладання періодичних функцій у ряди Фур'є. Достатні умови збіжності ряду Фур'є

За наведеною вище ортогональною тригонометричною системою складемо відповідний ***тригонометричний ряд***:

$$a_0/2 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + ... +$$

$$+ a_n\cos nx + b_n\sin nx + ... = a_0/2 + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

де a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, ...)$ – сталі коефіцієнти.

Примітка. Для скорочення запису, за знаком підсумовування $\sum$ зовнішні дужки часто опускають.

Оскільки базисні тригонометричні функції мають спільний період $T = 2\pi$, то сума ряду теж періодична з періодом $T = 2\pi$.

Нехай $f(x)$ – задана 2π-періодична функція. Знайдемо такі конкретні значення коефіцієнтів a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, ...)$, щоб справджувалося розвинення:

$$\boxed{f(x) = a_0/2 + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)}\,. \quad (1)$$

Будемо припускати, що цей розклад і одержані з нього далі ряди можна почленно інтегрувати на відрізку $[-\pi;\pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. При обчисленнях використаємо значення інтегралів, записаних при доведенні теореми з попереднього пункту 1.6.1.

Інтегруючи ряд для $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = (a_0/2)\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\,.$$

Звідси

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = (a_0/2)\int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi; \quad \boxed{a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}\,. \quad (2)$$

Помноживши обидві частини (1) на $\cos mx$ і проінтегрувавши почленно на відрізку $[-\pi;\pi]$, отримаємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = (a_0/2)\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx +$$

$$+ \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx\,.$$

Звідси при $m = n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = a_n\pi;$$

$$\boxed{a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,,\ \ n = 1,2,...}\,. \tag{3}$$

Аналогічно, помноживши ряд (1) на $\sin mx$ і проінтегрувавши в межах від $-\pi$ до π, знайдемо

$$\boxed{b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ \ n = 1,2,...}\,. \tag{4}$$

Числа a_0, a_n, b_n ($n = 1,2,...$), які обчислюються за формулами (2) – (4), називаються ***коефіцієнтами Фур'є*** функції $f(x)$.

Тригонометричний ряд (1), коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають ***рядом Фур'є*** цієї функції.

Зауваження 1. Інтеграли у формулах для коефіцієнтів Фур'є можна обчислювати на довільному проміжку $[a; a+2\pi]$, довжина якого дорівнює періоду $T = 2\pi$ функції $f(x)$.

Знайдено декілька достатніх ознак збіжності ряду Фур'є до функції $f(x)$. Зазначимо без доведення одну з них.

Теорема Діріхле (***достатня ознака розвинення функції в ряд Фур'є***). *Якщо функція* $f(x)$ *має період* $T = 2\pi$ *і на відрізку* $[-\pi;\pi]$ *неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду і відрізок* $[-\pi;\pi]$ *можна розбити на скінченне число частин так, що всередині кожної з них функція монотонна, то її ряд Фур'є збігається на всій числовій осі, причому сума ряду* $S(x)$ *в точках неперервності функції* $f(x)$ *дорівнює їй самій* $S(x) = f(x)$, *а у кожній точці розриву* x_0 *функції* $f(x)$ *– середньому арифметичному односторонніх границь при* $x \to x_0$ *зліва та справа*

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x) + \lim_{x\to x_0+0} f(x)\right).$$

При цьому збіжність ряду Фур'є рівномірна на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

Функція $f(x)$, що задовольняє умови теореми Діріхле, називається ***кусково-монотонною*** на відрізку $[-\pi;\pi]$.

Отже, у ряд Фур'є можна розвивати функції достатньо загального вигляду. Графік суми ряду $S(x)$ є сукупністю дуг кривих та ізольованих точок. Він майже всюди співпадає з графіком самої функції $f(x)$, за винятком її точок розриву першого роду, де сума ряду приймає згладжене значення, що дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь. Як приклад, на рис. 4 зображено графік деякої кусково-монотонної 2π-періодичної функції $f(x)$, а на рис. 5 – графік суми $S(x)$ її ряду Фур'є.

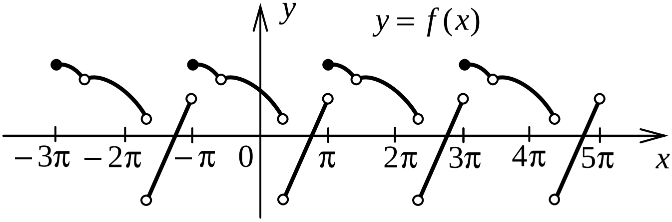

Рис. 4

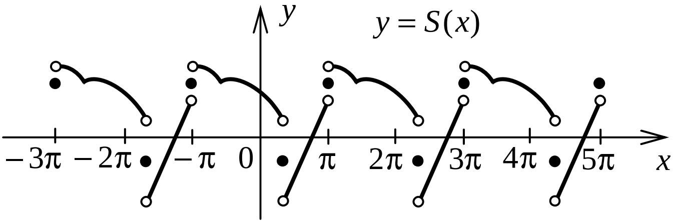

Рис. 5

Зауваження 2. Швидкість збіжності ряду Фур'є тим більша, чим гладкіша функція $f(x)$.

Зауваження 3. Часткова сума S_n ряду Фур'є є найкращим середньо квадратичним наближенням функції $f(x)$ серед тригонометричних многочленів відповідного вигляду.

Зауваження 4. Ряди Фур’є можна використовувати для знаходження сум числових рядів. Якщо x_0 – точка неперервності функції $f(x)$, то за теоремою Діріхле

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) = f(x_0) - a_0/2 .$$

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичні функції:

$$\text{а)}\ f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ x^2/\pi, & 0 \le x \le \pi; \end{cases} \quad \text{б)}\ f(x) = \begin{cases} x+\pi, & -\pi < x < 0; \\ -\pi, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

У випадку а), користуючись одержаним розвиненням, обчислити суму числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^2$.

□ а) Задана функція кусково-монотонна на проміжку $[-\pi;\pi]$ (рис. 6), тому її можна розкласти в ряд Фур'є. Отже, задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є:

$$a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = (1/\pi)\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(x^2/\pi)\,dx\right) =$$

$$= (1/\pi^2)(x^3/3)\Big|_0^{\pi} = \pi/3;\ \ a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= (1/\pi)\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(x^2/\pi)\cos nx\,dx\right) = (1/\pi^2)\times$$

$$\times\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = \begin{vmatrix} u = x^2; \quad du = 2xdx; \\ dv = \cos nx\,dx;\ v = (1/n)\sin nx \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi^2}\times$$

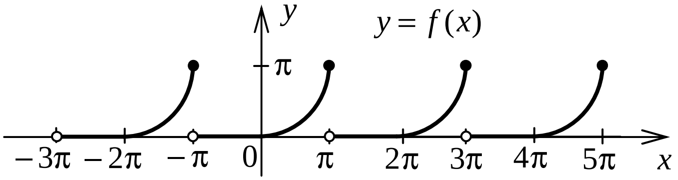

Рис. 6

$$\times\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\right)=-\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=$$

$$=\left|u=x;\quad du=dx;\ dv=\sin nx\,dx;\ v=-(1/n)\cos nx\right|=$$

$$=-\frac{2}{\pi^2 n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=-\frac{2}{\pi^2 n}\Big(-\pi(-1)^n/n+$$

$$+(1/n^2)\sin nx\Big|_0^{\pi}\Big)=2(-1)^n/(\pi n^2);\ \ b_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=$$

$$=(1/\pi)\Big(\int_{-\pi}^{0}0\cdot\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}(x^2/\pi)\sin nx\,dx\Big)=(1/\pi^2)\times$$

$$\times\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=\left|\begin{array}{l}u=x^2;\quad du=2xdx;\\ dv=\sin nx\,dx;\ v=-(1/n)\cos nx\end{array}\right|=\frac{1}{\pi^2}\times$$

$$\times\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\right)=-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=$$

$$=\left|u=x;\ du=dx;\ dv=\cos nx\,dx;\ v=(1/n)\sin nx\right|=(-1)^{n+1}/n+$$

$$+\frac{2}{\pi^2 n}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi^2 n^2}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi^2 n^3}((-1)^n-1)=\frac{(-1)^{n+1}\pi^2 n^2+2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^3}.$$

Розвинення заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}\pi^2 n^2+2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^3}\sin nx\right).$$

Знайдений ряд збіжний до функції $f(x)$ при всіх $x\neq(2n+1)\pi$, $n\in Z$. У точках $x=(2n+1)\pi$, $n\in Z$ функція $f(x)$ терпить розриви першого роду (скінченні стрибки висотою π). У цих точках сума ряду

$$S((2n+1)\pi)=\frac{1}{2}\big(\ f((2n+1)\pi-0)+\ f((2n+1)\pi+0)\big)=\frac{\pi}{2}.$$

Зазначимо, що сума $S(x)$ є розривною функцією, хоча всі члени ряду неперервні (у точках розриву $x=(2n+1)\pi$, $n\in Z$ порушена рівномірна збіжність ряду).

При $x=0$ функція $f(x)$ неперервна. У цій точці одержимо:

$$f(0)=\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{\pi n^2}\cos 0+\frac{(-1)^{n+1}\pi^2 n^2+2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^3}\sin 0\right);$$

$$0=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}. \qquad \text{Звідси} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n-\pi-1}{\pi n}\sin nx\right). \ \blacksquare$$

1.6.3. Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій

Для парних і непарних функцій справедливі наступні твердження (доведіть їх самостійно):

1) *Добуток двох парних чи двох непарних функцій є парною функцією.*

2) *Добуток парної функції на непарну є непарною функцією.*

3) *Інтеграл по симетричному відрізку* $[-a;a]$, $a>0$ *від парної функції* $f(x)$ *дорівнює подвоєному інтегралу по правій половині цього проміжку* $[0;a]$: $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

4) *Інтеграл по симетричному відрізку* $[-a;a]$, $a>0$ *від непарної функції* $f(x)$ *дорівнює нулю*: $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$.

Нехай треба розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну парну функцію $f(x)$. Оскільки $\cos nx$ і $\sin nx$ – відповідно парна ч непарна функції, то добутки $f(x)\cos nx$ і $f(x)\sin nx$ також відповідно є парною і непарною функціями. Інтегруючи їх на симетричному проміжку $[-\pi;\pi]$, дістанемо:

$$\boxed{a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = (2/\pi)\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx}\,; \qquad (1)$$

$$\boxed{a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = (2/\pi)\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}\,; \qquad (2)$$

$$\boxed{b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0}\,.$$

Тоді ряд Фур'є для парної функції набуває вигляду

$$\boxed{f(x) = a_0/2 + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx}\,. \qquad (3)$$

Нехай треба розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну непарну функцію $f(x)$. Тоді добутки $f(x)\cos nx$ і $f(x)\sin nx$ відповідно є непарною і парною функціями. Інтегруючи їх на симетричному проміжку $[-\pi;\pi]$, дістанемо:

$$\boxed{a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0}\,; \quad \boxed{a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0}\,;$$

$$\boxed{b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = (2/\pi)\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}\,. \qquad (4)$$

Ряд Фур'є для непарної функції набуває вигляду

$$\boxed{f(x) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx}\,. \qquad (5)$$

Зазначимо, що ряди (1) – (3) і (4), (5) відображають характер функції $f(x)$. *Ряд Фур'є для парної функції містить лише косинуси* (парні функції), а *ряд Фур'є для непарної функції містить лише синуси* (непарні функції).

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичні функції:

$$\text{а) } f(x) = |x|, -\pi \le x \le \pi; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < 0; \\ -1, & 0 \le x < \pi; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = x^3, -\pi < x < \pi.$$

Користуючись одержаними розвиненнями, обчислити суми числових рядів відповідно а) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)^2$ і б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/(2n-1)$.

□ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Оскільки функція $f(x)$ парна (рис. 7), то, користуючись формулами (1) – (3), дістанемо:

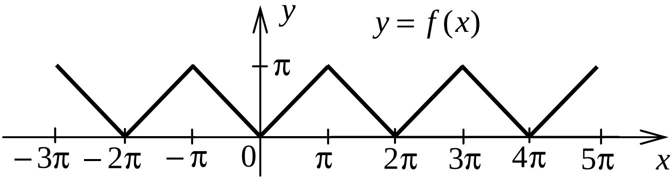

Рис. 7

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx=\pi; \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin x}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases} 0, & n=2m,\ m=1,2,...; \\ -\dfrac{4}{\pi(2m-1)^2}, & n=2m-1,\ m=1,2,...; \end{cases};$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

Ця рівність виконується на всій числовій осі, тому що задана функція неперервна для всіх дійсних значень x.

У точці неперервності $x=0$ отримаємо:

$$f(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 0}{(2m-1)^2}; \quad 0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}.$$

Звідси $\sum_{m=1}^{\infty} 1/(2m-1)^2=\pi^2/8$.

б) Функція $f(x)$ непарна (рис. 8). Згідно з формулами (4) і (5) маємо:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)\cdot\sin nxdx = \frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2m,\ m = 1, 2, ...; \\ -\dfrac{4}{\pi(2m-1)}, & n = 2m-1,\ m = 1, 2, ...; \end{cases};$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n}\sin nx = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}.$$

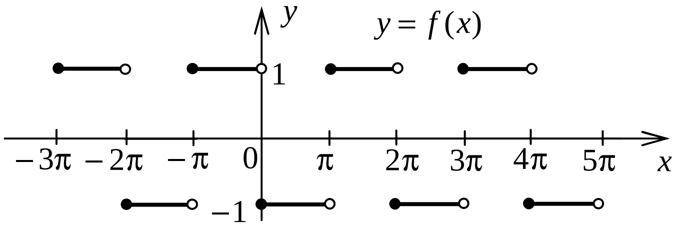

Рис. 8

Ця рівність справедлива на всій числовій осі $x \in (-\infty; +\infty)$, крім точок розриву $x = \pi n$, $n \in Z$. У точках розриву $x = \pi n$, $n \in Z$ сума знайденого ряду синусів, очевидно, дорівнює нулю.

У точці неперервності $x = \pi/2$ дістанемо:

$$f(\pi/2) = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)(\pi/2)}{2m-1};\quad -1 = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}.$$

Звідси $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}/(2m-1) = \pi/4$.

в) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6-\pi^2 n^2)}{n^3}\sin nx. \quad ■$$

1.6.4. Ряди Фур'є для періодичних функцій З довільним періодом. Гармонічний аналіз

Нехай $2l$-періодична функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l;l]$ довжиною в період $T=2l$, $l>0$ і на цьому відрізку є кусково-монотонною.

Розкладемо її в ряд Фур’є. Виконаємо заміну змінної за формулою $x=lt/\pi$ і розглянемо функцію $\varphi(t)=f(lt/\pi)$.

Ця 2π-періодична функція $\varphi(t)$ визначена на відрізку $[-\pi;\pi]$ і кусково-монотонна на ньому. Розвинемо її в ряд Фур’є:

$$\varphi(t)=a_0/2+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt);\ \ a_0=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt;$$

$$a_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt;\quad b_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt.$$

Повернемося до змінної x і дістанемо шукане розвинення:

$$t=\frac{\pi x}{l};\ \ dt=\frac{\pi}{l}dx;\ \boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)};$$

$$\boxed{a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx}.$$

<u>Зауваження 1</u>. Розвинення парних та непарних періодичних функцій з періодом $T=2l$, $l>0$ відповідно у ряди косинусів і синусів набувають наступного вигляду.

а) Для парної $2l$-періодичної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}};$$

$$\boxed{a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n=1,2,...}.$$

б) Для непарної $2l$-періодичної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l};\ \ b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n=1,2,...}.$$

<u>Приклад 1</u>. Розвинути в ряд Фур'є періодичні функції, що задані на відповідному відрізку $[-l;l]$ довжиною в період $T=2l$, $l>0$. Знайти значення суми ряду $S(0)$ і $S(l/2)$:

а) $f(x)=|\sin x|,\ -\pi/2<x<\pi/2$; б) $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x<0;\\ x-1, & 0<x<1;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi/2<x\le 0;\\ \cos x, & 0<x<\pi/2.\end{cases}$

□ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розвинені в ряди Фур’є.

а) Функція $f(x)$ парна і має півперіод $l=\pi/2$ (рис. 9). Її можна подати у вигляді ряду косинусів. Дістанемо:

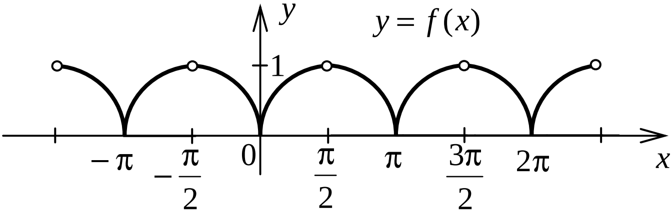

Рис. 9

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=\frac{4}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{4}{\pi};$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin x\cos\frac{n\pi x}{\pi/2}dx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\big(\sin(1+2n)x+\sin(1-2n)x\big)dx=-\frac{2}{\pi(1+2n)}\times$$

$$\times\cos(1+2n)x\Big|_0^{\pi/2}-\frac{2}{\pi(1-2n)}\times\cos(1-2n)x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{2}{\pi(1+2n)}+$$

$$+\frac{2}{\pi(1-2n)}=\frac{2(1-2n+1+2n)}{\pi(1+2n)(1-2n)}=-\frac{4}{\pi(4n^2-1)};$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\right)\cos\frac{n\pi x}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

У точках $x=0$ і $x=l/2=\pi/4$ дана функція $f(x)$ неперервна, тому

$$S(0)=f(0)=0;\quad S(\pi/4)=f(\pi/4)=|\sin(\pi/4)|=\sqrt{2}/2.$$

б) Функція $f(x)$ непарна і має півперіод $l=1$ (рис. 10). Її можна розкласти в ряд синусів. Одержимо:

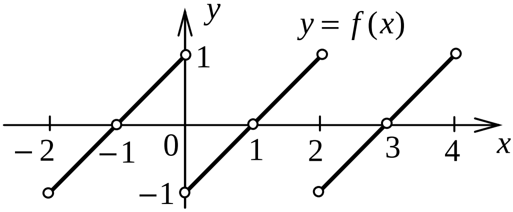

Рис. 10

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{1}\int_0^1(x-1)\sin\frac{n\pi x}{1}dx=$$

$$=\left|u=x-1;\ du=dx;\ dv=\sin n\pi x\,dx;\ v=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right|=$$

$$=2\left(-\frac{x-1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cos n\pi x dx\right)=-\frac{2}{n\pi}+\frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{2}{n\pi};\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n\pi}\right)\sin\frac{n\pi x}{1}=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}.$$

При $x=0$ дана функція $f(x)$ має скінченний стрибок, тому

$$S(0)=(1/2)\left(\lim_{x\to-0}(x+1)+\lim_{x\to+0}(x-1)\right)=(1/2)(1-1)=0.$$

У точці $x = l/2 = 1/2$ дана функція $f(x)$ неперервна, тому

$$S(1/2) = f(1/2) = 1/2 - 1 = -1/2.$$

в) (Розв'язати самостійно). Відповідь: $f(x) = (\pi + 2)/(2\pi) +$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx + \frac{(4n^2-1)(-1)^n+1}{n(4n^2-1)}\sin 2nx\right);$$

$$S(0) = f(0) = 1; \quad S(\pi/4) = f(\pi/4) = \sqrt{2}/2. \ ■$$

Широке практичне застосування розвинення в ряд Фур'є за тригонометричними функціями зумовлене перш за все тим, що воно відображає структуру фізичних процесів як суперпозиції коливань.

Користуючись відомим з тригонометрії методом введення допоміжного аргументу, ***ряд Фур'є*** можна подати ***в амплітудно-фазовій формі***

$$\boxed{f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n x + \varphi_n)},$$

де $\boxed{A_0 = a_0/2}$ – ***середнє значення функції*** $f(x)$ ***за період***; $\cos(\omega_n x + \varphi_n)$ – n***-а гармоніка*** ($n = 1, 2, \ldots$), що має ***кругову частоту*** (***хвильове число***) $\boxed{\omega_n = n\pi/l}$, ***амплітуду*** A_n і ***початкову фазу*** φ_n, які визначаються зі співвідношень:

$$\boxed{A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad a_n = A_n\cos\varphi_n; \ b_n = -A_n\sin\varphi_n \quad (n = 1, 2, \ldots)}.$$

Хвильові числа утворюють послідовність $\{\omega_n\} = \{n\pi/l\}$ – ***спектр***. Спектр має дискретний характер зі сталим кроком $\Delta\omega = \pi/l$ між сусідніми числами. Відповідна послідовність амплітуд $\{A_n\}$ називається ***амплітудним спектром***.

Процес і результат розвинення функції $f(x)$ в ряд Фур'є називається ***гармонічним аналізом***.

На ньому, зокрема, ґрунтується більшість видів неруйнівного контролю технічних систем.

В електротехніці при дослідженні лінійних ланцюгів частотним методом спочатку вхідний сигнал розкладається на елементарні гармонічні складові (аналіз), які потім перетворюються у відповідні гармонічні складові на виході ланцюга. Одержані гармоніки підсумовуються, що визначає вихідний сигнал (синтез).

Зауваження 2. При практичній реалізації гармонічного аналізу звичайно оперують з емпіричними функціями, що задаються графічно, таблично чи алгоритмічно. Тому для обчислення інтегралів у формулах для коефіцієнтів Фур'є, як правило, використовують числові методи.

Приклад 2. Розвинути в ряд Фур'є періодичні функції, що задані на відповідному відрізку $[-l;l]$ довжиною в період $T=2l$. Зобразити діаграму амплітудного спектра $A_n = A_n(\omega_n)$, $n=\overline{1,4}$:

$$\text{а)}\quad f(x)=|x|+x,\ -3<x\le 3;\ \text{б)}\ f(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0;\\ 3, & 0<x<1.\end{cases}$$

□ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Дана функція має півперіод $l=3$. Її можна задати співвідношенням

$$f(x)=|x|+x=\begin{cases}-x+x=0, & -3<x<0;\\ x+x=2x, & 0<x\le 3.\end{cases}$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=(1/l)\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=(2/3)\int_0^3 x\,dx=(1/3)\,x^2\Big|_0^3=3;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{3}\int_0^3 x\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\Big|u=x;\ du=dx;$$

$$dv=\cos\frac{n\pi x}{3}dx;\ v=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|=\frac{2}{3}\left(x\cdot\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{n\pi}\int_0^3\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right)=\frac{6}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3=\frac{6((-1)^n-1)}{n^2\pi^2};$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{3}\int_0^3 x\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\Big|u=x;\ du=dx;$$

$$dv=\sin\frac{n\pi x}{3}dx;\ v=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\left|=\frac{2}{3}\left(-x\cdot\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right|_0^3+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{n\pi}\int_0^3\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right)=-\frac{6(-1)^n}{n\pi}+\frac{6}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3=\frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Дістанемо ряд Фур’є

$$f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right).$$

Знайдемо амплітуди гармонік і відповідні хвильові числа:

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\sqrt{\left(\frac{6((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\right)^2+\left(\frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}\right)^2}=$$

$$=6\sqrt{2+(-1)^{n+1}+n^2\pi^2}\Big/\left(n^2\pi^2\right);$$

$$A_1\approx 2{,}18;\ \ A_2\approx 0{,}97;\ \ A_3\approx 0{,}65;\ \ A_4\approx 0{,}46;$$

$$\omega_n=n\pi/l=n\pi/3;\ \omega_1=\pi/3;\ \omega_2=2\pi/3;\ \omega_3=\pi;\ \omega_4=4\pi/3.$$

Діаграма амплітудного спектра зображена на рис. 11.

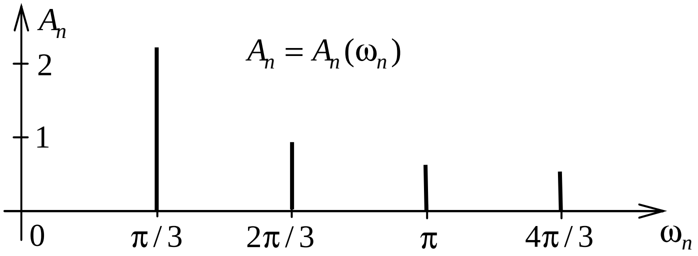

Рис. 11

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь:

$$f(x)=1+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\pi x;\ \ A_n=\frac{8}{\pi(2n-1)}.\ \ ■$$

1.6.5. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій

На практиці часто виникає необхідність розвинути в ряд Фур'є неперіодичну функцію $f(x)$, задану на скінченному проміжку $[a;b]$. Нехай ця функція кусково-монотонна на відрізку $[a;b]$.

Побудуємо довільним способом періодичну кусково-монотонну функцію $f_*(x)$ з періодом $T \geq b-a$, що збігається з $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Наприклад, введемо допоміжну функцію

$$f_*(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), \ -l \leq x < a; \\ f(x), \ a \leq x \leq b; \\ \varphi_2(x), \ b < x \leq l, \end{cases}$$

де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – довільні кусково-монотонні функції (поза відрізком $[a;b]$ поводження функції $f_*(x)$ не має значення), та продовжимо її періодичним способом з періодом $T=2l \geq b-a$ на всю числову вісь. (Геометрично для цього потрібно виконати перенесення графіка функції $f_*(x)$ паралельно осі Ox праворуч і ліворуч на відстані $T, 2T, ..., nT, ...$).

Отриману $2l$ -періодичну функцію можна подати рядом Фур'є. На відрізку $[a;b]$ його сума співпадає з даною функцією $f(x)$ у всіх її точках неперервності, а в точках розриву всередині проміжку $[a;b]$ і на його кінцях вона дорівнює півсумі односторонніх границь. Тобто можна вважати, що функція $f(x)$ розкладена в ряд Фур'є на відрізку $[a;b]$.

Зауваження. При різному виборі періоду $T=2l \geq b-a$ і різних функціях $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ одержуємо різні розвинення однієї й тієї ж заданої функції $f(x)$, $x \in [a;b]$ в ряд Фур’є. Відкривається можливість вибирати краще за тими чи іншими критеріями розвинення. Наприклад, використовувати розклад, у якому коефіцієнти за модулем спадають швидше або обчислюються простіше.

Розглянемо детальніше поширений випадок, коли неперіодична функція $f(x)$ задана на відрізку $[0;l]$, $l>0$. Випадки довільного проміжку $[a;b]$ зводяться до нього лінійною заміною аргументу

$t = x - a$.

Можна безпосередньо проміжок $[0;l]$ взяти за період $T = l$ і побудувати для $f(x)$ повний ряд Фур'є, проте при цьому доведеться обчислювати всі коефіцієнти a_0, a_n і b_n.

Можна вчинити інакше: вибрати довільну кусково-монотонну функцію $\varphi(x)$ на відрізку $[-l;0]$ і визначити на всьому симетричному проміжку $[-l;l]$ допоміжну функцію

$$f_*(x) = \begin{cases} \varphi(x), & -l < x < 0; \\ f(x), & 0 \le x \le l, \end{cases}$$

а потім поширити її періодичним способом з періодом $T = 2l$ на всю числову вісь. Далі знову для $f(x)$ побудувати ряд Фур'є, але тепер з іншим періодом $T = 2l$.

На практиці найчастіше перевага надається парному чи непарному продовженню функції $f(x)$, $x \in [0;l]$ на проміжок $[-l;0]$, що приводить до неповного ряду Фур'є.

а) Продовжимо функцію $f(x)$, $x \in [0;l]$ парним способом на проміжок $[-l;0]$ (геометрично для цього потрібно симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно осі Oy) (рис. 12), прийнявши

$$f_*(x) = \begin{cases} f(-x), & -l < x < 0; \\ f(x), & 0 \le x \le l, \end{cases}$$

а потім поширимо її періодичним способом з періодом $T = 2l$ на всю числову вісь. Дістанемо розвинення в ряд косинусів:

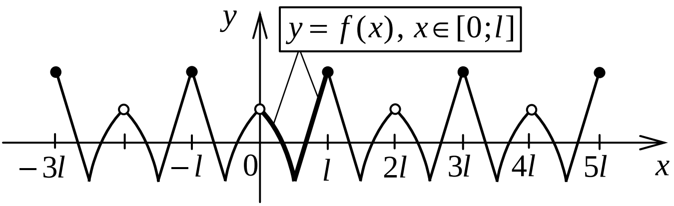

Рис. 12

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\ x\in[0;l];\ a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f_*(x)dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f_*(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,\ 2,\ldots.$$

При $x=0$ і $x=l$ даний ряд збігається відповідно до $f(0+0)$ і $f(l-0)$.

б) Продовжимо функцію $f(x)$, $x\in[0;l]$ непарним способом на відрізок $[-l;0]$ (геометрично для цього потрібно центрально симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно початку координат O) (рис. 13), вважаючи

$$f_*(x)=\begin{cases}-f(-x), & -l<x<0;\\ f(x), & 0\le x\le l,\end{cases}$$

а потім поширимо її періодичним способом з періодом $T=2l$ на всю числову пряму. Одержимо розвинення в ряд синусів:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\ x\in[0;l];$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f_*(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,\ 2,\ldots.$$

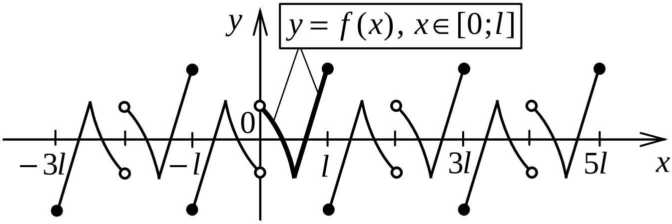

Рис. 13

У точках $x=0$ і $x=l$ сума даного ряду дорівнює 0.

Приклад. Кожну з даних функцій, визначених на відповідному відрізку $[0;l]$, розвинути в ряд косинусів і ряд синусів:

$$\text{а)}\ f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1;\\ 2, & 1\le x\le 2;\end{cases}\qquad \text{б)}\ f(x)=\begin{cases}4-x, & 0<x<2;\\ x, & 2<x<3.\end{cases}$$

□ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розвинені в ряди Фур’є.

а) Маємо $l=2$. При парному продовженні дана функція $f(x)$ розкладається в ряд косинусів:

$$a_0=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx=\frac{2}{2}\left(\int\limits_0^1 2x\,dx+\int\limits_1^2 2\,dx\right)=x^2\Big|_0^1+2x\Big|_1^2=3;$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{2}\left(\int\limits_0^1 2x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int\limits_1^2 2\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=2\cdot x\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1-2\cdot\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^1\sin\frac{n\pi x}{2}dx+2\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{8}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right);$$

$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

При непарному продовженні дана функція $f(x)$ розкладається в ряд синусів:

$$b_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{2}\left(\int\limits_0^1 2x\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int\limits_1^2 2\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=2\cdot x\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1-2\cdot\frac{-2}{n\pi}\int\limits_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}dx+2\cdot\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1-\frac{4}{n\pi}(-1)^n+\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}=$$

$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases} 0, & n=2m,\ m=1,2,...; \\ \dfrac{8(-1)^{m+1}}{\pi^2(2m-1)^2}, & n=2m-1,\ m=1,2,...; \end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}.$$

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь:

$$f(x)=\frac{17}{6}+\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1+(-1)^n-2\cos\frac{2n\pi}{3}\right)\cos\frac{n\pi x}{3};$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(4n\pi-3n\pi(-1)^n-6\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\sin\frac{n\pi x}{3}.\ \blacksquare$$

1.6.6. Комплексна форма ряду Фур'є

Нехай $2l$ -періодична функція $f(x)$ розвинена в ряд Фур'є

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right).$$

З основної формули Ейлера $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ випливає, що

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right);\ \sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)=-\frac{i}{2}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right).$$

Тоді

$$\cos\frac{\pi nx}{l}=\frac{1}{2}\left(e^{i(n\pi/l)x}+e^{-i(n\pi/l)x}\right);\ \sin\frac{\pi nx}{l}=-\frac{i}{2}\left(e^{i(n\pi/l)x}-e^{-i(n\pi/l)x}\right).$$

Підставимо ці вирази в записаний ряд і окремо згрупуємо доданки, що містять $e^{i(n\pi/l)x}$ і $e^{-i(n\pi/l)x}$, дістанемо:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}(e^{i(n\pi/l)x}+e^{-i(n\pi/l)x})-\frac{ib_n}{2}(e^{i(n\pi/l)x}-e^{-i(n\pi/l)x})\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n-ib_n)e^{i(n\pi/l)x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n+ib_n)e^{-i(n\pi/l)x}.$$

Введемо позначення

$$c_0 = a_0 / 2\,;\;\; c_n = (a_n - ib_n)/2\,;\;\; c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$$

і одержимо ***ряд Фур'є в комплексній формі***

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i(n\pi/l)x}},$$

де ***комплексні коефіцієнти Фур'є*** c_n обчислюються за формулою

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i(n\pi/l)x}dx\,,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

(перевірте самостійно окремо для c_0, c_{-n} і c_n, $n = 1, 2, \ldots$).

Зауваження 1. Комплексна форма ряду Фур'є має більш простий вигляд. До того ж у деяких випадках її застосування полегшує обчислення. При необхідності можна від комплексної форми перейти до дійсного вигляду, використовуючи співвідношення

$$\boxed{a_0 = 2c_0\,;\;\; a_n = c_n + c_{-n}\,;\;\; b_n = i(c_n - c_{-n})},$$

що дають дійсні значення, оскільки c_0 – дійсне число (середнє значення функції за період), а коефіцієнти c_{-n} і c_n – комплексно спряжені.

Приклад. Кожну з даних $2l$-періодичних функцій, визначених на відповідному відрізку $[-l; l]$, розвинути в ряд Фур'є в комплексній формі:

$$\text{а)}\;\; f(x) = \begin{cases} e^x, & -\pi \le x < 0; \\ 2e^{-x}, & 0 \le x < \pi; \end{cases} \qquad \text{б)}\;\; f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0; \\ e^x, & 0 < x < 1; \end{cases}$$

$$\text{в)}\;\; f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0; \\ -1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

□ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розвинені в ряди Фур’є.

а) Маємо $l = \pi$. Знаходимо комплексні коефіцієнти Фур'є:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^x \cdot e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} 2e^{-x} \cdot e^{-inx}dx\right) =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{x(1-in)}dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-x(1+in)}dx=\frac{1}{2\pi(1-in)}e^{x(1-in)}\Big|_{-\pi}^{0}+$$

$$+\frac{-1}{\pi(1+in)}e^{-x(1+in)}\Big|_{0}^{\pi}=\frac{1-e^{-\pi(1-in)}}{2\pi(1-in)}-\frac{e^{-\pi(1+in)}-1}{\pi(1+in)}=$$

$$=\frac{(1-e^{-\pi}\cdot e^{in\pi})(1+in)-2(e^{-\pi}\cdot e^{-in\pi}-1)(1-in)}{2\pi(1+in)(1-in)}=\left|\begin{matrix} e^{in\pi}=(-1)^n \\ e^{-in\pi}=(-1)^n \end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{(1-e^{-\pi}(-1)^n)(1+in)-2(e^{-\pi}(-1)^n-1)(1-in)}{2\pi(1+n^2)}=$$

$$=\frac{3(1-e^{-\pi}(-1)^n)}{2\pi(1+n^2)}+i\frac{n(e^{-\pi}(-1)^n-1)}{2\pi(1+n^2)}.$$

Дістанемо комплексну форму ряду Фур'є

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{3(1-e^{-\pi}(-1)^n)}{1+n^2}+i\frac{n(e^{-\pi}(-1)^n-1)}{1+n^2}\right)e^{inx}.$$

б) і в) Розв’язати самостійно. Відповідь:

б) $$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2e\cos\,(n\pi/2)+en\pi\sin(n\pi/2)-2}{4+n^2\pi^2}+\right.$$

$$\left.+i\frac{en\pi\cos\,(n\pi/2)+2e\sin(n\pi/2)-n\pi}{4+n^2\pi^2}\right)e^{i(n\pi/2)x}.$$

в) $$f(x)=\frac{2i}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(2m-1)x}}{2m-1}.\qquad \blacksquare$$

Зауваження 2. У гармонічному аналізі величина $e^{i(n\pi/l)x}$ називається ***комплексною гармонікою***, якій відповідає ***комплексна амплітуда*** c_n. Амплітуда A_n і початкова фаза φ_n n-ї гармоніки $\cos\left(\omega_n x+\varphi_n\right)$ ($n=1,2,...$) визначаються за формулами:

$$A_n=2\,|\,c_n\,|;\qquad \varphi_n=-\arg c_n\,.$$

1.6.7. Інтеграл Фур'є

Нехай функція $f(x)$, що задана на всій числовій осі, є кусково-монотонною на кожному скінченному інтервалі й абсолютно інтегровною на всій області визначення $(-\infty;+\infty)$, тобто симетричний невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ збігається. На довільному проміжку $[-l;l]$ вона допускає розвинення в ряд Фур'є (в комплексній формі) $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x}$, де $\omega_n = n\pi/l$ – відповідні хвильові числа, що утворюють дискретний спектр з кроком $\Delta\omega=\pi/l$.

Цей ряд можна подати у вигляді

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left((1/(2l))\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\omega_n x}dx\right)e^{i\omega_n x} =$$

$$=(1/(2\pi))\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\omega_n x}dx\right)e^{i\omega_n x}\Delta\omega =$$

$$=(1/(2\pi))\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tilde{S}(\omega_n)\,e^{i\omega_n x}\Delta\omega,\text{ де } \tilde{S}(\omega_n)=\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\omega_n t}dt.$$

Функцію $f(x)$, що задана на всій множині дійсних чисел R, можна розглядати як періодичну з нескінченним періодом $T=2l=+\infty$. При $l\to+\infty$ крок $\Delta\omega$ між сусідніми хвильовими числами прямує до нуля, тобто спектр стає суцільним. Якщо зафіксувати x, то останній запис ряду Фур'є має вигляд інтегральної суми. При $l\to+\infty$ ($\Delta\omega\to 0$) ця сума заміняється інтегралом:

$$\boxed{f(x)=(1/(2\pi))\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{i\omega x}d\omega,\text{ де } S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt}\,.$$

Одержаний інтеграл для функції $f(x)$ називається ***інтегралом Фур'є в комплексній формі***. Він служить розвиненням функції $f(x)$ за неперервним спектром. Функція $S(\omega)$ називається ***спектральною щільністю***. Вона є аналогом коефіцієнта c_n в комплексній формі ряду Фур'є. Проте, якщо c_n характеризує комплексну амплітуду, що відповідає круговій частоті (хвильовому числу) ω_n, то $S(\omega)$ – щільність розподілу комплексних амплітуд залежно від кругової частоти ω. Її модуль $|S(\omega)|$ називають ***амплітудою спектральної щільності*** чи ***амплітудним спектром***.

Зауваження 1. На відміну від класичної інтегральної суми, вираз $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\tilde{S}(\omega_n)\, e^{i\omega_n x}\Delta\omega$ складається з доданків, які залежать від l. Необхідне теоретичне обґрунтування граничного переходу при $l \to +\infty$ виходить за рамки даного посібника.

Зауваження 2. У точках розриву першого роду функції $f(x)$ інтеграл Фур'є (як і сума ряду Фур'є) дорівнює півсумі односторонніх границь зліва та справа.

Зауваження 3. Збіжність невласних інтегралів по симетричному нескінченному проміжку $(-\infty;+\infty)$ розуміється в смислі головного значення.

Інтеграл Фур'є можна подати ***у дійсному вигляді***

$$\boxed{f(x)=\int_0^{+\infty}\big(a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x\big)d\omega},$$

де

$$\boxed{a(\omega)=(1/\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\,;\;\; b(\omega)=(1/\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt}\,.$$

Приклад 1. Знайти спектральну щільність і амплітудний спектр даної функції та зобразити її інтегралом Фур'є в комплексній формі:

$$\text{а) } f(x)=\begin{cases} e^{-\alpha x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0,\end{cases} \quad \text{де } \alpha = const > 0\,;$$

$$\text{б) } f(x)=\begin{cases} h, & |x|\le \tau;\\ 0, & |x|>\tau,\end{cases} \quad \text{де } h,\tau = const > 0\,.$$

□ а) Задана функція є кусково-монотонною. Крім того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\,dx=-(1/\alpha)e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty}=1/\alpha\,.$$

Отже, $f(x)$ допускає подання інтегралом Фур'є.

Знайдемо спектральну щільність:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\,e^{-i\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t}dt=$$

$$=-\frac{1}{\alpha+i\omega}e^{-(\alpha+i\omega)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\alpha+i\omega}=\frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}-i\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Тоді амплітудний спектр:

$$|S(\omega)|=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\right)^2+\left(\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)^2}=1\Big/\sqrt{\alpha^2+\omega^2}.$$

Інтеграл Фур'є в комплексній формі має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2+\omega^2}e^{i\omega x}d\omega.$$

б) Задана функція є кусково-монотонною й абсолютно інтегровною на всій числовій осі $(-\infty;+\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int_{-\tau}^{\tau}h\,dx=2h\tau.$$

Отже, $f(x)$ допускає подання інтегралом Фур'є.

Знайдемо спектральну щільність:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\tau}^{\tau} he^{-i\omega t}dt=-\frac{h}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-\tau}^{\tau}=$$

$$=-\frac{h}{i\omega}(e^{-i\omega\tau}-e^{i\omega\tau})=\frac{2h}{\omega}\cdot\frac{e^{i\omega\tau}-e^{-i\omega\tau}}{2i}=\frac{2h}{\omega}\sin\omega\tau.$$

Оскільки одержано дійсну величину, то амплітудний спектр

$$|S(\omega)|=2h\left|(1/\omega)\sin\omega\tau\right|.$$

Інтеграл Фур'є в комплексній формі має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega\tau}{\omega}\,e^{i\omega x}d\omega.\quad\blacksquare$$

Приклад 2. Зобразити інтегралом Фур'є в дійсній формі дану функцію:

а) $f(x)=\begin{cases}2(1-x), & x\in(0;1);\\ 0, & x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty);\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\le 2;\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

□ а) Задана функція є кусково-монотонною. Крім того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=2\int_0^1(1-x)\,dx=-(1-x)^2\Big|_0^1=1.$$

Отже, $f(x)$ допускає подання інтегралом Фур'є.

Знайдемо коефіцієнти $a(\omega)$ і $b(\omega)$:

$$a(\omega)=(1/\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=(2/\pi)\int_0^1(1-t)\cos\omega t\,dt=$$

$$=\Big|\,u=1-t;\ dv=\cos\omega t\,dt;\quad du=-dt;\ v=(1/\omega)\sin\omega t\,\Big|=(2/\pi)\times$$

$$\times\Big((1-t)\cdot(1/\omega)\sin\omega t\Big|_0^1+(1/\omega)\int_0^1\sin\omega t\,dt\Big)=-\frac{2}{\pi\omega^2}\cos\omega t\Big|_0^1=$$

$$=2(1-\cos\omega)\big/(\pi\omega^2);\qquad b(\omega)=(1/\pi)\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt=$$

$$=(2/\pi)\int_0^1(1-t)\sin\omega t\,dt=\Big|\,u=1-t;\ dv=\sin\omega t\,dt;\ du=-dt;$$

$$v=-(1/\omega)\cos\omega t\,\Big|=\frac{2}{\pi}\Big(-(1-t)\cdot(1/\omega)\cos\omega t\Big|_0^1-\frac{1}{\omega}\int_0^1\cos\omega t\,dt\Big)=$$

$$=-\frac{2}{\pi\omega}-\frac{2}{\pi\omega^2}\sin\omega t\Big|_0^1=-\frac{2}{\pi\omega}-\frac{2\sin\omega}{\pi\omega^2}=-\frac{2(\omega+\sin\omega)}{\pi\omega^2}.$$

Інтеграл Фур'є в дійсній формі має вигляд:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}\cos\omega x-\frac{\omega+\sin\omega}{\omega^2}\sin\omega x\right)d\omega.$$

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\omega-2\omega\cos 2\omega}{\omega^2}\sin\omega x\,d\omega.\ \blacksquare$$

1.7. Контрольні запитання

1. Що називається числовим рядом, частковою сумою, загальним членом, сумою, залишком ряду?
2. У чому полягає необхідна ознака збіжності та відповідна достатня ознака розбіжності ряду?
3. Сформулюйте властивості дій з рядами.
4. Який числовий ряд називається знакододатним?
5. У чому полягає інтегральна ознака Коші? Як оцінюються сума і залишок збіжного знакододатного ряду, спираючись на інтегральну ознаку?
6. При яких умовах збігаються і розбігаються найпоширеніші еталонні ряди – узагальнений гармонічний ряд і ряд геометричної прогресії?
7. Сформулюйте основну ознаку порівняння.
8. У чому полягає гранична ознака порівняння? Як треба підбирати відповідний еталонний ряд?
9. Сформулюйте ознаку Даламбера.
10. Коли краще застосовувати ознаку Даламбера, щоб не натрапити на випадок невизначеності?
11. У чому полягає радикальна ознака Коші?
12. Коли краще застосовувати радикальну ознаку, щоб не натрапити на випадок невизначеності?
13. Який числовий ряд називається знакозмінним?
14. Що таке знакопочерговий ряд (ряд Лейбниця)?
15. У чому полягає ознака Лейбниця збіжності знакопочергового ряду?
16. Як оцінюються сума і залишок збіжного знакопочергового ряду, спираючись на ознаку Лейбниця?
17. Який знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним? Умовно збіжним?
18. Сформулюйте достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.
19. В якому порядку краще досліджувати знакозмінний ряд на абсолютну й умовну збіжність?
20. Що називається функціональним рядом? Що таке його точка збіжності і точка розбіжності? Область збіжності?
21. Який функціональний ряд називається абсолютно збіжним?
22. Що називається рівномірною нормою функції, яка неперервна на відрізку?

23. Що називається рівномірною відстанню між функціями, які неперервні на відрізку?
24. Який функціональний ряд називається рівномірно збіжним?
25. У чому полягає ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду?
26. Сформулюйте властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.
27. Який функціональний ряд називається степеневим?
28. У чому полягає теорема Абеля про збіжність степеневого ряду?
29. Що таке інтервал збіжності степеневого ряду? Чим область збіжності може відрізнятися від інтервалу збіжності?
30. Яким може бути радіус збіжності степеневого ряду?
31. Як досліджується збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності?
32. Сформулюйте властивості степеневих рядів.
33. Який вигляд мають ряди Тейлора і Маклорена?
34. У чому полягає теорема про єдиність розвинення функції в ряд Тейлора?
35. Сформулюйте теореми про умови існування й збіжності ряду Тейлора.
36. Які основні способи побудови розкладу функцій у ряди Тейлора і Маклорена?
37. Наведіть приклади застосування степеневих рядів до наближених обчислень значень функцій, визначених інтегралів і розв’язування диференціальних рівнянь.
38. Що називається комплексним степеневим рядом? Який вигляд має його область збіжності?
39. Як за допомогою рядів задаються експонента, синус і косинус комплексної змінної? Запишіть основну формулу Ейлера, що зв’язує ці функції.
40. Які недоліки розвинення функцій у степеневі ряди?
41. Що називається скалярним добутком функцій, які неперервні на відрізку?
42. Що називається евклідовою нормою функції, що неперервна на відрізку?
43. Що називається середньо квадратичною відстанню між функціями, які неперервні на відрізку?
44. Яка пара функцій називається ортогональною на відрізку?

45. Яка система функцій називається ортогональною на відрізку? Ортонормованою на ньому?
46. Що називається рядом Фур’є за тригонометричною системою функцій?
47. Як обчислюються коефіцієнти Фур’є для 2π-періодичної функції?
48. Сформулюйте теорему Діріхле, що виражає достатню ознаку розвинення функції в ряд Фур’є.
49. Яка функція називається кусково-монотонною на відрізку?
50. Як записується неповний ряд Фур’є для 2π-періодичної парної функції? Для 2π-періодичної непарної функції? За якими формулами обчислюються коефіцієнти Фур’є в цих випадках?
51. Як записується ряд Фур’є для періодичної функції з довільним періодом $T = 2l,\ l > 0$? За якими формулами обчислюються коефіцієнти Фур’є в цьому випадку?
52. Як будується періодичне продовження функції, що задана на скінченному проміжку?
53. Як будується парне (непарне) періодичне продовження функції, що задана на відрізку $[0;l]$? Як записується відповідний ряд косинусів (ряд синусів)? За якими формулами обчислюються коефіцієнти отриманого розвинення?
54. Як записується ряд Фур'є в амплітудно-фазовій формі?
55. Що називається гармонічним аналізом?
56. Що таке гармоніка, хвильове число, амплітуда, початкова фаза? Як ці величини виражаються через коефіцієнти Фур'є?
57. Як записується ряд Фур'є в комплексній формі? За якими формулами обчислюються коефіцієнти цього розвинення?
58. Що таке комплексна амплітуда? Як виражаються амплітуда і початкова фаза гармоніки через комплексну амплітуду?
59. Як записується інтеграл Фур'є в комплексній формі?
60. При яких умовах на функцію, що задана на всій числовій осі, можливе її подання інтегралом Фур'є?
61. Яка функція називається спектральною щільністю? Амплітудним спектром?

1.8. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Дослідити на збіжність знакододатні числові ряди. Для ряду з пункту а) знайти третю часткову суму S_3.

Вказівка. Усі обчислення проводити з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

№ в-та	Ряд а)	Ряд б)	Ряд в)
1	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n-2}}{5^n(n^4+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n^2}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 3n}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n/2}}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(1/n)}{n^3}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{\sqrt{3^n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{5n}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln 6n}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{9^n(n+1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}arctg^{n^3}\frac{2}{n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-1/n}}{n^2}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{\sqrt{2n^2+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^{3n}\frac{1}{2^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\pi n/3)}{n\sqrt{4n+1}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5^n}}{2n^2+1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(1/n)}{n^4+3n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\sqrt{\ln(n+4)}}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\sqrt{n}}{4n^2-1}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{2n}(n+1)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{3^n+4^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{8n^2+4n+1}}{2n^3-n+8}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^4 2n}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n+2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}3^{2n}tg^n\frac{\pi}{4n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln(3n+7)}}{3n+7}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{(2n-1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{n}\right)^{2n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{n}$

11	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{e^n n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{2n^3+2n}}{3n^2-n+6}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{3n}}{(2n-1)^n}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sqrt[3]{3n-1}}{(n-1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{6n^3+n}}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^{4n}\frac{1}{2n}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n}{\sqrt[4]{n^2+4}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}\sin\frac{\pi}{3n}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n-2}}{(2n+1)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(6n-1)}{6n-1}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^6(n+7)}{n+7}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{4n-1}\right)^{n^2}$
16	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{4n-1}}{\sqrt[3]{n^5+4}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^4 7n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+1/n)^{n^3}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}}{3^{2n+5}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt[4]{(6n-5)^5}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}n(e^{1/n}-1)$
18	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n}{\sqrt[5]{2n^2+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(2n+3)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}n^{2n}tg^n\frac{\pi}{3n}$
19	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{5^n+2n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(5n-3)}{5n-3}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5n+3}{3n^2-2}\right)^n$
20	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n/2}}{\sqrt[3]{n^2+4n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}}{(3n-1)^5}$
21	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{n^4\sqrt{3^n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}tg^{2n^3}\frac{\pi}{3^n}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{(n^2+2n)^3}}{(2n-1)^4}$
22	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n-1}}{n!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+6n}}{\sqrt[7]{(5n-3)^{10}}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$
23	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2}{(2n)!}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{2n}\frac{\pi}{n^4}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-2/n}}{n^3}$