Теорема (***Зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом***). *Похідна* $\partial u/\partial l$ *за напрямом вектора* $\vec{l}$ *дорівнює проекції градієнта* $grad\, u$ *на цей вектор* (рис. 59):

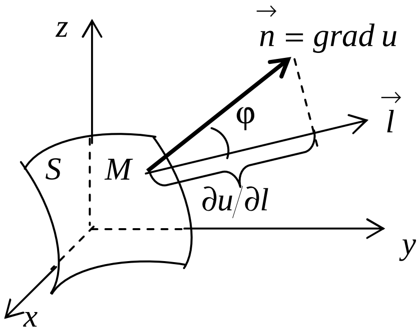


Рис. 59

$$\boxed{\partial u/\partial l = np_{\vec{l}}\, grad\, u}\ .$$

□ Розглянемо одиничний вектор $\vec{l_0} = \vec{l}\big/|\vec{l}\,|$, $|\vec{l_0}|=1$, що відповідний вектору $\vec{l}$ :

$$\vec{l_0} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}\ .$$

Знайдемо у координатній формі скалярний добуток градієнта $grad\, u$ на одиничний вектор $\vec{l_0}$ :

$$grad u \cdot \vec{l_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma .$$

Вираз у правій частині отриманої рівності є похідною за напрямом $\partial u/\partial l$. Отже, $grad\, u \cdot \vec{l_0} = \partial u/\partial l$ .

Нехай $\varphi$ – кут між векторами $grad\, u$ і $\vec{l}$ . Тоді за означенням скалярного добутку, враховуючи, що $|\vec{l_0}|=1$, маємо

$$\partial u/\partial l = grad\, u \cdot \vec{l_0} = |grad\, u| \cdot |\vec{l_0}| \cdot \cos\varphi = |grad\, u| \cdot \cos\varphi\ .$$

Вираз у правій частині цієї рівності є проекцією градієнта на вектор $\vec{l}$ . Отже, $\partial u/\partial l = np_{\vec{l}}\, grad\, u$ . ■

Основні властивості градієнта:

1) *Похідна* $\partial u/\partial l$ *функції* $u = u(x, y, z)$ *у даній точці*

$M(x,y,z)$ *за напрямом вектора* $\vec{l}$ *має найбільше значення, коли напрям цього вектора співпадає з напрямом градієнта* $grad\, u$. *Це найбільше значення похідної* $\partial u/\partial l$ *дорівнює модулю градієнта*:

$$\boxed{(\partial u/\partial l)_{max} = |\, grad\, u\,|} \quad \text{при} \quad \boxed{\vec{l}_{\max} = grad\, u}.$$

(<u>Фізичний зміст</u> градієнта).

Іншими словами, *градієнт указує напрям найшвидшого зростання функції в даній точці, а його модуль дорівнює цій найбільшій швидкості*:

$$\boxed{\vec{l}_{\max} = grad\, u}; \quad \boxed{|\, grad\, u\,| = (\partial u/\partial l)_{max}}.$$

□ $\partial u/\partial l = |grad\, u| \cdot \cos\varphi$; $(\partial u/\partial l)_{max} = |\, grad\, u\,|$ при $\cos\varphi_{\max} = 1$.

Тоді $\varphi_{\max} = 0 \Rightarrow \vec{l}_{\max} \uparrow\uparrow grad u$. ■

2) *Похідна* $\partial u/\partial l$ *функції* $u = u(x,y,z)$ *у довільній точці* $M(x,y,z)$ *за напрямом вектора, який перпендикулярний до градієнта* $grad\, u$, *дорівнює нулю*: $\boxed{\vec{l} \perp grad u \;\Rightarrow\; \partial u/\partial l = 0}$.

□ $\partial u/\partial l = |grad\, u| \cdot \cos\varphi$; $\vec{l} \perp grad u$; $\varphi = \pi/2$; $\cos\varphi = 0$;

$$\partial u/\partial l = 0. \quad ■$$

3) *градієнт* $grad\, u$ *функції* $u = u(x,y,z)$ *у кожній точці* $M(x,y,z)$ *перпендикулярний до поверхні рівня* $S:\ u(x,y,z) = C$, *яка проходить через цю точку* (рис. 59). (<u>Геометричний зміст</u> градієнта). Іншими словами, *градієнт* $grad\, u$ *можна прийняти за вектор нормалі* $\vec{n}$ *до поверхні рівня* $S:\ u(x,y,z) = C$ *у відповідній точці* $M(x,y,z)$

$$\boxed{S:\ u(x,y,z) = C}; \quad grad\, u \perp S \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{n} = grad\, u}.$$

□ Оскільки поверхня рівня $S$ задається неявно рівнянням $F(x,y,z) = u(x,y,z) - C = 0$, то її вектор нормалі

$$\vec{n} = \left(\partial F/\partial x\big|_M,\ \partial F/\partial y\big|_M,\ \partial F/\partial z\big|_M\right).$$ Але $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(u - C) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$;

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(u - C) = \frac{\partial u}{\partial y};\quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(u - C) = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Тоді $\vec{n} = \left(\partial u/\partial x\big|_M,\ \partial u/\partial y\big|_M,\ \partial u/\partial z\big|_M\right) = grad\, u\big|_M$. ■

<u>Приклад 2</u>. Для заданої функції знайти градієнт і модуль градієнта в указаній точці:

а) $z = x^2 y - 5\sin(3x - 2y)$; $M_0(2, 3)$;

б) $u = 3xyz - 2x^3 y + y^2/z$; $M_0(-1, 2, 1)$.

□ а) $grad\, z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 15\cos(3x - 2y)$;

$$\partial z/\partial y = x^2 + 10\cos(3x - 2y);\quad \partial z/\partial x\big|_{M_0} = 2\cdot 2\cdot 3 -$$

$$-15\cos(3\cdot 2 - 2\cdot 3) = -3;\ \partial z/\partial y\big|_{M_0} = 2^2 + 10\cos(3\cdot 2 - 2\cdot 3) = 14;$$

$$grad\, z\big|_{M_0} = -3\vec{i} + 14\vec{j};\ \left|grad\, z\right| = \sqrt{(\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2};$$

$$\left|grad\, z\right|_{M_0} = \sqrt{(-3)^2 + 14^2} = \sqrt{205};$$

б) $grad\, u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$; $\partial u/\partial x = 3yz - 6x^2 y$;

$$\partial u/\partial y = 3xz - 2x^3 + 2y/z;\ \partial u/\partial z = 3xy - y^2/z^2;\ \partial u/\partial x\big|_{M_0} =$$

$$= 3\cdot 2\cdot 1 - 6\cdot(-1)^2\cdot 2 = -6;\ \partial u/\partial y\big|_{M_0} = 3\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot(-1)^3 +$$

$$+ 2\cdot 2/1 = 3;\quad \partial u/\partial z\big|_{M_0} = 3\cdot(-1)\cdot 2 - 2^2/1^2 = -8;\ grad\, u\big|_{M_0} =$$

$$= -6\vec{i} + 3\vec{j} - 8\vec{k};\ \left|grad\, u\right| = \sqrt{(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial z)^2};$$

$$\left|grad\, u\right|_{M_0} = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-8)^2} = \sqrt{109}.\quad ■$$

Приклад 3. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u = \ln(2x^4 + y^2 - 2z^4)$ у точці $M_0(1, -2, -1)$.

□ Напрям найбільшої швидкості зростання функції співпадає з напрямом градієнта, а її величина дорівнює модулю градієнта:

$$\left(\partial u/\partial l\right)_{max}\Big|_{M_0} = |\, grad\, u\, |_{M_0} \quad \text{при} \quad \vec{l}_{\max} = grad\, u\big|_{M_0}.$$

Знайдемо градієнт і його модуль у заданій точці $M_0$:

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 8x^3\big/(2x^4 + y^2 - 2z^4);$$

$$\partial u/\partial y = 2y\big/(2x^4 + y^2 - 2z^4); \;\; \partial u/\partial z = -8z^3\big/(2x^4 + y^2 - 2z^4);$$

$$\partial u/\partial x\big|_{M_0} = (8\cdot 1^3)\big/\left(2\cdot 1^4 + (-2)^2 - 2\cdot(-1)^4\right) = 2; \;\; \partial u/\partial y\big|_{M_0} =$$

$$= 2\cdot(-2)\big/\left(2\cdot 1^4 + (-2)^2 - 2\cdot(-1)^4\right) = -1; \;\; \partial u/\partial z\big|_{M_0} = -8\cdot(-1)^3 :$$

$$:\left(2\cdot 1^4 + (-2)^2 - 2\cdot(-1)^4\right) = 2; \;\; grad\, u\big|_{M_0} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k};$$

$$|\, grad\, u\, | = \sqrt{\left(\partial u/\partial x\right)^2 + \left(\partial u/\partial y\right)^2 + \left(\partial u/\partial x\right)^2};$$

$$\left|grad\, u\right|_{M_0} = \; = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.$$

Тоді $\left(\partial u/\partial l\right)_{max}\Big|_{M_0} = 3$ при $\vec{l}_{\max} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. ■

## 2.3.10. Частинні похідні вищих порядків. Диференціали вищих порядків. Формула Тейлора

Частинні похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$ функції двох змінних $z = f(x, y)$ також є функціями двох змінних $x$ і $y$, а тому самі можуть мати частинні похідні.

Частинна похідна по $x$ від частинної похідної по $x$ називається ***другою чистою частинною похідною по*** $x$ і позначається

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \text{ або } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \text{ або } z''_{xx}. \text{ Таким чином, } \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}.$$

Аналогічно частинна похідна по $y$ від частинної похідної по $y$ називається ***другою чистою частинною похідною по*** $y$ та позначається $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, або $z''_{yy}$. Отже, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}$.

Якщо від частинної похідної по $x$ взяти частинну похідну по $y$, то отримаємо ***другу мішану частинну похідну по*** $x$ ***і*** $y$, яка

Позначається $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, або $z''_{xy}$. Отже, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}$.

Якщо від частинної похідної по $y$ взяти частинну похідну по $x$, то одержимо ***другу мішану частинну похідну по*** $y$ ***і*** $x$ (з іншим порядком диференціювання), яка позначається

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, або $z''_{yx}$. Отже, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}$.

У загальному випадку $\partial^2 z/\partial y\partial x \neq \partial^2 z/\partial x \partial y$.

<u>Зауваження 1</u>. Аналогічно частинним похідним другого порядку вводяться частинні похідні третього, четвертого і т.д., порядку. Наприклад,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right); \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right).$$

<u>Теорема</u>. *Для неперервних мішаних частинних похідних порядок диференціювання значення не має, зокрема* $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}$.

(Без доведення).

<u>Приклад 1</u>. Для заданої функції $z=f(x,y)$ перевірити рівність указаних мішаних частинних похідних:

а) $z=\sin(xy)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; б) $z=y\ln x$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(\sin(xy))'_x = y\cos(xy)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(y\cos(xy))'_y =$

$=\cos(xy)-xy\sin(xy)$; $\partial z/\partial y=(\sin(xy))'_y = x\cos(xy)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=(x\cos(xy))'_x=\cos(xy)-xy\sin(xy);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};$$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x^2};\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2};$$

$$\partial^3 z/\partial x\partial y\partial x=\partial^3 z/\partial x^2\partial y\,. \quad ■$$

<u>Приклад 2</u>. Перевірити, що задана функція $z=f(x,y)$ задовольняє вказаній умові:

$$\text{а) } z=arctg\,\frac{x}{y};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-4\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0;$$

$$\text{б) } z=x\sin(x-y);\quad x\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2z=0\,.$$

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\quad -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}-4\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\times$$

$$\times\left(-x/(x^2+y^2)\right)=0;\quad (-2xy-2xy+4xy)/(x^2+y^2)^2=0;\quad 0=0\,.$$

Таким чином, задана функція задовольняє вказаній умові.

б) $\partial z/\partial x=\sin(x-y)+x\cos(x-y)$; $\partial z/\partial y=-x\cos(x-y)$;

$$\partial^2 z/\partial y^2=-x\sin(x-y);\quad x\big(\sin(x-y)+x\cos(x-y)-$$

$$-x\cos(x-y)\big)-\big(-x\sin(x-y)\big)-2x\sin(x-y)=0;\quad 0=0\,.$$

Отже, задана функція задовольняє вказаній умові. ■

<u>Приклад 3</u>. Для заданої функції $u = f(x,y,z)$ знайти значення вказаної частинної похідної в заданій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$u = x^2yz^4 + x^3y^2z + yz^2\,; \quad M_0(-1;2;1)\,; \quad \partial^4 u \big/ \partial x^2 \partial y \partial z\,.$$

□ $$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyz^4 + 3x^2y^2z\,; \;\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2yz^4 + 6xy^2z\,; \;\; \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} =$$

$$= 2z^4 + 12xyz\,; \;\; \partial^4 u \big/ \partial x^2 \partial y \partial z = 8z^3 + 12xy\,; \;\; \partial^4 u \big/ \partial x^2 \partial y \partial z \Big|_{M_0} =$$

$$= 8 \cdot 1^3 + 12 \cdot (-1) \cdot 2 = 8 - 24 = -16\,. \quad ■$$

***Диференціалом другого порядку*** (***другим диференціалом***) функції двох змінних $z = f(x,y)$ називається диференціал від її повного диференціалу, тобто - $\boxed{d^2z = d(dz)}$.

<u>Зауваження 2</u>. Аналогічно визначаються диференціали більш високого порядку: $d^3z = d(d^2z)$; $\boxed{d^nz = d(d^{n-1}z)}$ .

<u>Зауваження 3</u>. Якщо функція $z = f(x,y)$ має відповідні неперервні частинні похідні, то

$$\boxed{d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2}.$$

<u>Зауваження 4</u>. Нехай функція $n$ змінних $u = f(x_1 x_2, \ldots, x_n)$ $(m+1)$ раз диференційована в деякому околі $U(M_0, \varepsilon)$ точки $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$. Тоді для довільної точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ з цього околу справджується ***формула Тейлора***, яку компактно можна подати в диференціальній формі:

$$\boxed{u(M) = u\big|_{M_0} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k u\big|_{M_0} + o(\rho^m)},$$

де $\boxed{\rho = M_0 M = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + \ldots + (x_n - x_{n0})^2} < \varepsilon}$.

Цю формулу до членів другого порядку включно для функції двох змінних $z = f(x, y)$ можна записати в розгорнутому вигляді:

$$\boxed{f(x,y) = f(x_0, y_0) + \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \right) +}$$

$$\boxed{+ \frac{1}{2}\left( \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \right.}$$

$$\boxed{\left. + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 \right) + o(\rho^2)}.$$

Зауваження 6. Диференціали вищих порядків властивості інваріантності форми не мають.

Приклад 4. Розкласти функцію $z = x\ln(x + 2y)$ за формулою Тейлора до членів другого порядку включно в околі точки $M_0(1,0)$

□ Обчислимо значення заданої функції, її перших та других частинних похідних у вказаній точці $M_0(1,0)$:

$z = x\ln(x + 2y)$; $\quad z(M_0) = 0$;

$\partial z/\partial x = \ln(x + 2y) + x/(x + 2y)$; $\quad \partial z(M_0)/\partial x = 1$;

$\partial z/\partial y = 2x/(x + 2y)$; $\quad \partial z(M_0)/\partial y = 2$;

$\partial^2 z/\partial x^2 = (x + 4y)/(x + 2y)^2$; $\quad \partial^2 z(M_0)/\partial x^2 = 1$;

$\partial^2 z/\partial x\partial y = 4y/(x + 2y)^2$; $\quad \partial^2 z(M_0)/\partial x\partial y = 0$;

$\partial^2 z/\partial y^2 = -4x/(x + 2y)^2$; $\quad \partial^2 z(M_0)/\partial y^2 = -4$.

Запишемо розвинення заданої функції за формулою Тейлора:

$$x\ln(x + 2y) = 0 + \big(1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 0)\big) + (1/2)\big(1 \cdot (x - 1)^2 +$$

$$+ 2 \cdot 0 \cdot (x - 1)(y - 0) + (-4) \cdot (y - 0)^2\big) + o(\rho^2);$$

$$x\ln(x+2y)=(x-1)+2y+(1/2)(x-1)^2-4y^2+o(\rho^2),$$

де $\rho=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$. ■

Приклад 5. Розкласти функцію $z=xe^{y/x}$ за формулою Тейлора до членів другого порядку включно в околі точки $M_0(1,0)$

(Розв'язати самостійно).

### 2.3.11. Економічний зміст частинних похідних

Нехай задана виробнича функція $z=f(x,y)$, що описує, наприклад, обсяг виробленої продукції $z$ в залежності від об'єму витрачених двох видів ресурсів $x$ і $y$. Припустимо, що фактор $x$ змінився на $\Delta x$, а кількість фактора $y$ залишилася незмінною.

При цьому виробнича функція одержала частинний приріст $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$. Тоді $\Delta_x z/\Delta x$ – середній приріст виробничої функції на одиницю приросту фактора $x$, зокрема, середній об'єм виробленої продукції $z$, що припадає на одиницю ресурсу $x$. Переходячи до границі при $\Delta x\to 0$, отримаємо $\frac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ – ***гранична*** (***маргінальна***) ***продуктивність фактора*** $x$ (граничний об'єм виробленої продукції $z$, що припадає на одиницю ресурсу $x$). Аналогічно, ***гранична*** (***маргінальна***) ***продуктивність фактора*** $y$: $\frac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

***Частинна еластичність виробничої функції*** $z=f(x,y)$ ***відносно фактора*** $x$ визначається таким чином:

$$\boxed{E_x(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z/z}{\Delta x/x}=\frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}}.$$

Вона задає приблизно коефіцієнт пропорційності між відсотковим відношенням $\Delta z/z$ функції $z$ і відсотковим відношенням $\Delta x/x$ аргументу $x$, коли $y$ – величина стала: $E_x(z)\approx\frac{\Delta z/z}{\Delta x/x}$. Тобто, відсотковий приріст виробничої функції $z = f(x, y)$ відповідно до відсоткового приросту фактора $x$ за умови, що фактор $y$ залишається незмінним, визначається наближеною рівністю $\Delta z/z \approx E_x(z) \cdot (\Delta x/x)$.

Аналогічно визначається ***частинна еластичність виробничої функції*** $z = f(x, y)$ ***відносно фактора*** $y$:

$$\boxed{E_y(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z/z}{\Delta y/y} = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

<u>Приклад 1</u>. Випуск деякого товару характеризується виробничою функцією $z = z(x, y) = 20x - x^2 - 2y^2 + 3xy$, де $x$ і $y$ – чинники виробництва. Знайти: а) граничні продуктивності $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$ факторів $x$ і $y$ у точці $M_0(4, 2)$; б) частинні еластичності $E_x(z)$ і $E_y(z)$ функції за кожним чинником у точці $M_0(4, 2)$.

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 20 - 2x + 3y$; $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 20 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 18$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4y + 3x; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 4;$$

б) $E_x(z) = \dfrac{x}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{z}(20 - 2x + 3y)$; $z\big|_{M_0} = 20 \cdot 4 - 4^2 - 2 \cdot 2^2 +$

$$+ 3 \cdot 4 \cdot 2 = 80; \quad E_x(z)\big|_{M_0} = \frac{4}{80} \cdot 18 = 0{,}9;$$

$$E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}(-4y + 3x); \quad E_y(z)\big|_{M_0} = \frac{2}{80} \cdot 4 = 0{,}1. \quad \blacksquare$$

Конкретизуємо економічний зміст частинних похідних на прикладі ***виробничої функції Кобба – Дугласа***

$$\boxed{Q = Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}},$$

що є функцією двох змінних $K$ і $L$. Тут $Q$ – об’єм виробленої продукції; $K$ – об’єм фондів (капіталу); $L$ – об’єм трудових ресурсів; $A$ – сталий параметр, що характеризує продуктивність прийнятої технології виробництва, $A > 0$; $\alpha, \beta$ – сталі коефіцієнти, $\alpha, \beta \geq 0$ і $\alpha + \beta \leq 1$. (Величини $Q$, $K$ і $L$ можуть задаватися у вартісному чи натуральному вираженні).

Величини $l = Q / L$, $k = Q / K$ і $f = K / L$ називають відповідно ***середньою продуктивністю праці*** (кількість продукції, виробленої одним робітником), ***середньою фондовіддачею*** (кількість продукції, що вироблена одним верстатом) і ***середньою фондоозброєністю*** **(**вартість фондів, що припадають на одиницю трудових ресурсів).

Зафіксуємо поточний стан підприємства, тобто об’єм фондів $K$ і число працівників $L$. Їм відповідає певний випуск продукції $Q = Q(K, L)$. Якщо, не змінюючи $K$, найняти ще одного працівника, то одержимо приріст випуску продукції $\Delta Q = Q(K, L+1) - Q(K, L)$, що є частинним приростом функції $Q = Q(K, L)$ за змінною $L$, і тому $\Delta Q \approx d_L Q = Q_L^{/}(K, L) \cdot \Delta L$. Оскільки $\Delta L = 1$, то $\Delta Q \approx Q_L^{/}(K, L)$.

Отже, частинна похідна від виробничої функції за об’ємом трудових ресурсів приблизно дорівнює додатковій вартості продукції, що виготовлена ще одним робітником. Тому частинна похідна $Q_L^{/} = \beta A K^{\alpha} L^{\beta - 1}$ називається ***граничною продуктивністю праці***.

Якщо ж, не змінюючи $L$, збільшити фонди ще на одиницю – купити ще один верстат $\Delta K = 1$, то додаткова вартість продукції, що виготовлена на ньому, приблизно дорівнює частинній похідній виробничої функції за об’ємом фондів. Тому частинна похідна $Q_K^{/} = \alpha A K^{\alpha - 1} L^{\beta}$ називається ***граничною фондовіддачею***.

Як гранична продуктивність праці, так і гранична фондовіддача – це абсолютні величини. Але в економіці надзвичайно цікаво знати на скільки відсотків зміниться випуск продукції, якщо число робітників збільшиться на 1%, або якщо фонди зростуть на 1%. Тому розглядаються поняття:

***еластичність випуску продукції за об’ємом трудових ресурсів***

$$\boxed{E_L(Q)=\frac{L}{Q}\cdot Q_L^{/}=\frac{L}{Q}\cdot\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}=\beta}$$

та ***еластичність випуску продукції за об'ємом фондів***

$$\boxed{E_K(Q)=\frac{K}{Q}\cdot Q_K^{/}=\frac{K}{Q}\cdot\alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}=\alpha}.$$

Звідси маємо <u>економічний зміст параметрів функції Кобба – Дугласа</u>: $\alpha$ *– еластичність випуску за фондами;* $\beta$ *– еластичність випуску за працею*.

<u>Приклад 2</u>. Нехай виробнича функція деякої фірми є функцією Кобба – Дугласа $Q=AK^{\alpha}L^{\beta}$. Відомо, для зростання випуску продукції $Q$ на 5% треба збільшити фонди $K$ на 10% або чисельність працівників $L$ на 15%. За рік один працівник виготовляє продукції на 48 000 грн., всього на фірмі 1000 працівників, а фонди оцінюються в 64 млн. грн. Записати виробничу функцію. Знайти середню фондовіддачу $k=Q/K$ і середню фондоозброєність $f=K/L$.

□ Зрозуміло, що еластичність випуску продукції за фондами $\alpha=5\%/10\%=1/2$, а за працею $\beta=5\%/15\%=1/3$, при цьому $\alpha+\beta=1/2+1/3=5/6\leq 1$. Отже, функція Кобба – Дугласа має вигляд $Q=A\cdot K^{1/2}\cdot L^{1/3}$. Тоді, враховуючи, що $Q=l\cdot L$, і підставляючи відомі значення $l=48000$, $L=1000$, $K=64\cdot 10^6$, отримаємо:

$$Q=48000\cdot 1000=48\cdot 10^6;\;\; 48\cdot 10^6=A\cdot(64\cdot 10^6)^{1/2}\cdot(1000)^{1/3};$$

$$48\cdot 10^6=A\cdot 8\cdot 10^4;\;\; A=600;\;\; Q=600K^{1/2}L^{1/3}$$

– виробнича функція.

Середня фондовіддача $k=\dfrac{Q}{K}=\dfrac{48\cdot 10^6}{64\cdot 10^6}=\dfrac{3}{4}$, а середня фондоозброєність $f=\dfrac{K}{L}=\dfrac{64\cdot 10^6}{1000}=64000$. ■

## 2.4. Екстремум та умовний екстремум функції багатьох змінних

### 2.4.1. Екстремум функції двох змінних. Необхідні умови екстремуму. Стаціонарні точки

Нехай функція двох змінних $z = f(M) = f(x, y)$ визначена в деякій області $D$ і $M_0(x_0, y_0)$ – внутрішня точка цієї області. Точка $M_0$ називається ***точкою максимуму*** функції $z = f(M)$, якщо значення функції в цій точці $M_0$ більше, ніж значення функції у всіх близьких сусідніх точках:

$$\forall M \in U(M_0, \varepsilon),\ M \neq M_0,\ f(M_0) > f(M) \iff M_0 - \max,$$

де $U(M_0, \varepsilon)$ – деякий $\varepsilon$-окіл точки $M_0$, $\varepsilon > 0$.

Аналогічно вводиться поняття ***точки мінімуму***:

$$\forall M \in U(M_0, \varepsilon),\ M \neq M_0,\ f(M_0) < f(M) \iff M_0 - \min .$$

Точки максимуму та мінімуму називаються ***точками екстремуму***. Значення функції $z = f(M_0) = f(x_0, y_0)$ у точці екстремуму $M_0$ називається її ***екстремальним значенням*** (***екстремумом***).

Зауваження 1. Розглянутий екстремум є ***строгим внутрішнім локальним екстремумом***. Його не треба плутати з ***глобальним екстремумом*** у деякій заданій області $D$ (найбільше $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$ та найменше $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$ значення функції в області $D$).

Зауваження 2. Розрізняють ***гладкий екстремум*** (рис. 60), в якому функція диференційовна, і ***гострий екстремум*** (рис. 61).

Теорема (***необхідні умови гладкого екстремуму***). *Якщо диференційовна функція* $z = f(x, y)$ *має екстремум у точці* $M_0(x_0, y_0)$, *то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю*:

$$\boxed{\begin{cases} \partial z/\partial x\big|_{M_0} = 0; \\ \partial u/\partial y\big|_{M_0} = 0. \end{cases}}$$

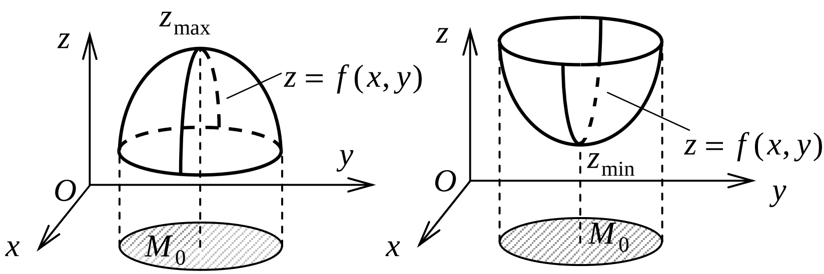


Рис. 60

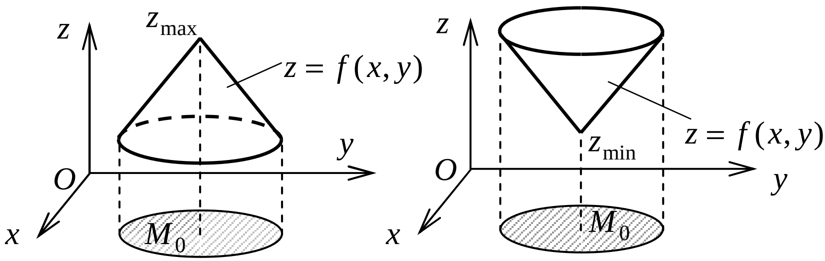


Рис. 61

□ Зафіксуємо змінну $y$, поклавши $y = y_0 = const$. Тоді точка $x_0$ є точкою екстремуму диференційованої функції однієї змінної $z = \varphi(x) = f(x, y_0)$. Згідно з необхідною умовою екстремуму функції однієї змінної $d\varphi/dx\big|_{x=x_0} = 0$. Але вказана похідна є частинною похідною по $x$ функції $z = f(x, y)$: $d\varphi/dx\big|_{x=x_0} = \partial f/\partial x\big|_{M_0}$. Отже, $\partial f/\partial x\big|_{M_0} = 0$.

Аналогічно, якщо зафіксувати аргумент $x$, поклавши $x = x_0 = const$, то отримаємо диференційовану функцію однієї змінної $z = \psi(y) = f(x_0, y)$. Ця функція має екстремум при $y = y_0$. У точці екстремуму $y_0$ похідна одержаної функції теж дорівнює нулю: $d\psi/dy\big|_{y=y_0}=0$. Але вказана похідна є частинною похідною по $y$ функції $z=f(x,y)$: $d\psi/dy\big|_{y=y_0}==\partial f/\partial y\big|_{M_0}$.

Отже, $\partial f/\partial y\big|_{M_0}=0$. У точці екстремуму $M_0(x_0,y_0)$ обидві знайдені умови повинні виконуватись одночасно. ■

Зауваження 3. У точці гострого екстремуму хоча б одна з частинних похідних першого порядку не існує, а всі інші дорівнюють нулю (***необхідні умови гострого екстремуму***).

Точки, в яких виконуються необхідні умови екстремуму, тобто всі частинні похідні або дорівнюють нулю або не існують, називаються ***критичними точками*** функції $z=z(M)$.

Критичні точки, в яких всі перші частинні похідні дорівнюють нулю, називаються ***стаціонарними точками*** функції $z=z(M)$.

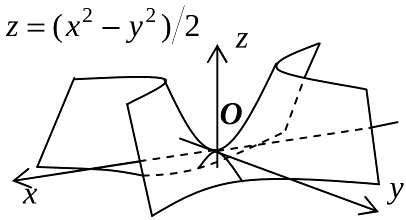

Рис. 62

Зауваження 4. Стаціонарна точка – це точка, що «підозріла» на гладкий екстремум. Тобто в цій точці екстремум може бути, а може і не бути. Наприклад, для функції $z=(x^2-y^2)/2$ (гіперболічний параболоїд на рис. 62) початок координат $O(0,0)$ є стаціонарною точкою, оскільки $\partial z/\partial x\big|_O=x\big|_O=0$; $\partial z/\partial y\big|_O=-y\big|_O=0$, але екстремум у ній відсутній ($O(0,0)$ – ***сідлова точка*** (***точка перевалу***) функції).

Зауваження 5. Надалі обмежимося розглядом тільки гладкого екстремуму.

Приклад. Знайти стаціонарні точки функції:

а) $u=x^3+xy+2yz-x+5y+4z-3$; б) $z=(x-y-2)e^{x^2+y^2}$.

□ а) Для знаходження стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial u/\partial x = 0 \\ \partial u/\partial y = 0 \\ \partial u/\partial z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial u/\partial x = 3x^2 + y - 1 \\ \partial u/\partial y = x + 2z + 5 \\ \partial u/\partial z = 2y + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 + y - 1 = 0 \\ x + 2z + 5 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ 3x^2 - 2 - 1 = 0 \\ x + 2z + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \qquad z = -(5+x)/2; \\ z_1 = -(5+1)/2 = -3; \;\; z_2 = -(5-1)/2 = -2; \\ M_1(1,-2,-3), \;\; M_2(-1,-2,-2) \end{array}$$

– стаціонарні точки.

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь: $M_0(1/2,-1/2)$ ■

### 2.4.2. Достатні умови екстремуму

Аналогічно функції однієї змінної, наявність і характер екстремуму функції двох змінних у стаціонарній точці визначається знаком другого диференціала

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 .$$

Нехай у деякому околі стаціонарної точки $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Знайдемо значення других частинних похідних у цій точці:

$$\boxed{A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}; \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}; \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}}$$

і обчислимо визначник $\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2}$.

<u>Теорема</u> (***достатні умови гладкого екстремуму***). 1) *Якщо визначник* $\Delta$ *додатний, то* $M_0$ *– точка екстремуму, причому* а) $M_0$ *– точка мінімуму, якщо* $A > 0$; б) $M_0$ *– точка максимуму, якщо* $A < 0$. 2) *Якщо визначник* $\Delta$ *від'ємний, то у точці* $M_0$ *екс-*

*тремум відсутній* ($M_0$ – сідлова точка функції $z = f(x, y)$).
3) *Якщо визначник* $\Delta$ *дорівнює нулю, то у точці* $M_0$ *екстремум може бути, а може і не бути.* (Сумнівний випадок. Потрібні додаткові дослідження.) (Без доведення).

Приклад 1. Дослідити функції на екстремум:

а) $z = x^3 + y^3 - 6xy - 2$; б) $z = x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 28y + 1$;

в) $z = (x + 2y)^3/3 - x^2/2 - 3y^2 - 2xy - 2y + 2$; г) $z = xe^{-x-y^2}$.

□ а) Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\partial z/\partial x = 3x^2 - 6y; \quad \partial z/\partial y = 3y^2 - 6x.$$

Використовуючи необхідні умови екстремуму, знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases} \partial z/\partial x = 0 \\ \partial z/\partial y = 0 \end{cases} \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ y^2 - 2x = 0 \end{cases} \begin{matrix} y = x^2/2; \\ \left(x^2/2\right)^2 - 2x = 0; \end{matrix}$$

$$\frac{x^4}{4} - 2x = 0; \quad x^4 - 8x = 0; \quad \left[\begin{matrix} x = 0 \\ x^3 - 8 = 0 \end{matrix}\right. \quad \left[\begin{matrix} x_1 = 0 & y_1 = 0; \\ x_2 = 2 & y_2 = 2^2/2 = 2. \end{matrix}\right.$$

Отже, стаціонарні точки $M_1(0,0)$; $M_2(2,2)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\partial^2 z/\partial x^2 = 6x; \quad \partial^2 z/\partial y^2 = 6y; \quad \partial^2 z/\partial x\partial y = -6.$$

Дослідимо на екстремум точку $M_1(0,0)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_1(0,0)$ і значення визначника $\Delta$:

$$A = \partial^2 z/\partial x^2\Big|_{M_1} = 6 \cdot 0 = 0; \quad C = \partial^2 z/\partial y^2\Big|_{M_1} = 6 \cdot 0 = 0;$$

$$B = \partial^2 z/\partial x\partial y\Big|_{M_1} = -6; \quad \Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то у точці $M_1$ екстремуму немає.

Дослідимо на екстремум точку $M_2(2,2)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_2(2,2)$ і значення визначника $\Delta$:

$$A = \partial^2 z / \partial x^2 \Big|_{M_2} = 6 \cdot 2 = 12; \quad C = \partial^2 z / \partial y^2 \Big|_{M_2} = 6 \cdot 2 = 12;$$

$$B = \partial^2 z / \partial x \partial y \Big|_{M_2} = -6; \quad \Delta = AC - B^2 = 12 \cdot 12 - (-6)^2 = 108 > 0.$$

З нерівності $\Delta > 0$ випливає, що $M_2$ – точка екстремуму.

Оскільки $A = 12 > 0$, то $M_2$ – точка мінімуму. Знайдемо мінімальне значення функції у цій точці:

$$z_{\min} = z(M_2) = 2^3 + 2^3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = -10.$$

Пункти б), в) і г) розв'язати самостійно. ■

<u>Приклад 2</u>. Підприємство виробляє товари двох видів $A$ і $B$. Загальні щоденні витрати $V$ на виробництво $x$ одиниць товару $A$ та $y$ одиниць товару $B$ у грошовому еквіваленті задаються функцією $V = 620 - 14x - 10y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2$ грош. од. Визначити кількості одиниць товарів $A$ і $B$, при яких загальні витрати підприємства будуть мінімальними , і обчислити ці мінімальні витрати.

□ Щоб знайти оптимальну кількість одиниць $x$ та $y$ товарів $A$ і $B$, необхідно дослідити на екстремум функцію

$$V = 620 - 14x - 10y + 0{,}2x^2 + 0{,}1y^2.$$

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$V'_x = -14 + 0{,}4x; \quad V'_y = -10 + 0{,}2y$$

Прирівнюючи їх до нуля, отримаємо та розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -14 + 0{,}4x = 0 \\ -10 + 0{,}2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}4x = 14 \\ 0{,}2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 50 \end{cases}.$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку $V''_{xx} = 0{,}4$; $V''_{yy} = 0{,}2$; $V''_{xy} = 0$. Маємо $A = 0{,}4$; $C = 0{,}2$; $B = 0$.

Знаходимо $\Delta = AC - B^2 = 0{,}4 \cdot 0{,}2 - 0^2 = 0{,}08$. Оскільки

$\Delta > 0$ і $A > 0$, то маємо мінімум. Обчислимо значення функції $V(x,y)$ у точці мінімуму $(35;50)$:

$$V(35;50) = 620 - 14 \cdot 35 - 10 \cdot 50 + 0{,}2 \cdot 35^2 +$$

$$+ 0{,}1 \cdot 50^2 = 125 \text{ (грош. од.).} \qquad \blacksquare$$

### 2.4.3. Знаходження найменшого та найбільшого значень функції в замкненій області

Нехай функція $z = f(x,y)$ неперервна і диференційована в замкненій області $D$. Тоді вона досягає найменшого (найбільшого) значення на множині $D$ або в одній із стаціонарних точок, що належать цій області $D$, або в одній із точок межі області $D$.

Правило знаходження найменшого та найбільшого значень функції $z = f(x,y)$ у замкненій області $D$:

1) *Побудувати область* $D$ *в прямокутній системі координат* $Oxy$. *Знайти всі кутові точки – точки, що сполучають сусідні ділянки межі області* $D$*;*

2) *Знайти стаціонарні точки функції* $z = f(x,y)$. *Виділити з них ті, що лежать в області* $D$. *Обчислити значення функції у виділених точках;*

3) *Знайти значення функції в усіх кутових точках межі області* $D$*;*

4) *На кожній ділянці межі області* $D$ *перейти до функції однієї змінної, що одержується з початкової функції* $z = f(x,y)$ *врахуванням рівняння цієї ділянки. Знайти стаціонарні точки одержаної функції однієї змінної. Виділити з них ті, що лежать на даній ділянці. Обчислити значення функції у виділених точках і на кінцях відрізка зміни аргументу;*

5) *Порівняти всі одержані значення функції між собою і вибрати серед них найменше – глобальний мінімум* $\min\limits_{(x,y)\in D} z$ *– і найбільше – глобальний максимум* $\max\limits_{(x,y)\in D} z$.

Приклад 1. Знайти найменше та найбільше значення заданої функції в замкненій області $D$, що обмежена вказаними лініями:

а) $z = 3x^2 + y^2 - 4xy - x$; $\quad D$: $x = 2$; $y = 1$; $x + y + 1 = 0$;

б) $z = x^2 + 4y^2 - 2xy - 4x + 10y$; $D$: $x = 0$; $y = -2$; $y = -x$.

□ а) У декартовій системі координат $Oxy$ побудуємо вказані лінії межі області $D$: $x = 2$; $y = 1$; $x + y + 1 = 0$ і позначимо штриховкою саму область $D$ (рис. 63). Кутові точки визначаються як точки попарного перетину цих ліній:

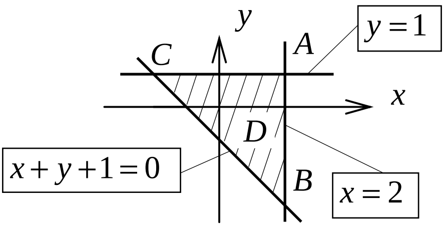


Рис. 63

$$\begin{cases} x = 2; \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2; \\ x + y + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1; \\ x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, дістаємо $A(2;1)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

Для визначення стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial z/\partial x = 6x - 4y - 1 = 0 \\ \partial z/\partial y = 2y - 4x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 2x \\ 6x - 4\cdot 2x - 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} x = -1/2; \\ y = -1. \end{matrix}$$

Оскільки стаціонарна точка $M(-1/2;\,-1) \in D$, то обчислимо відповідне значення функції:

$$z\big|_M = 3(-1/2)^2 + (-1)^2 - 4(-1/2)(-1) - (-1/2) = 1/4.$$

Досліджуємо функцію на межі області $D$, яка складається з ділянок $AB$, $BC$, $AC$, що сполучаються в кутових точках $A(2;1)$, $B(2;\,-3)$, $C(-2;\,1)$.

Обчислюємо значення функції в кутових точках:

$$z\big|_A = 3\cdot 2^2 + 1^2 - 4\cdot 2\cdot 1 - 2 = 3; \quad z\big|_B = 3\cdot 2^2 + (-3)^2 -$$

$$-4\cdot 2\cdot(-3) - 2 = 43; \quad z\big|_C = 3\cdot(-2)^2 + 1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1 - (-2) = 23.$$

На кожній ділянці межі, використовуючи її рівняння, перейдемо до функції однієї змінної і знайдемо значення одержаної функції в її стаціонарних точках, що належать відповідній ділянці.

(Кінці відрізків зміни аргументу співпадають з кутовими точками, де значення функції вже обчислені).

На відрізку $AB$: $x=2,\ y\in[-3,1]$ маємо:

$$z_1 = f_1(y) = 3\cdot 2^2 + y^2 - 4\cdot 2\cdot y - 2 = y^2 - 8y + 10\,;$$

$$z_1' = 2y - 8\,;\quad z_1' = 0\,;\quad 2y - 8 = 0\,;\quad y = 4 \notin [-3,1]\,.$$

На відрізку $BC$: $y=-x-1,\ x\in[-2,2]$ маємо:

$$z_2 = f_2(x) = 3x^2 + (-x-1)^2 - 4x(-x-1) - x = 8x^2 + 5x + 1\,;$$

$$z_2' = 16x + 5\,;\quad z_2' = 0\,;\quad 16x + 5 = 0\,;\quad x = -5/16 \in [-2,\,2]\,;$$

$$y = -(-5/16) - 1 = -11/16\,;\quad N(-5/16, -11/16)\,;$$

$$z\big|_N = f_2(-5/16) = 8\cdot(-5/16)^2 + 5\cdot(-5/16) + 1 = -7/32\,.$$

На відрізку $AC$: $y=1,\ x\in[-2,2]$ маємо:

$$z_3 = f_3(x) = 3x^2 + 1^2 - 4x\cdot 1 - x = 3x^2 - 5x + 1\,;$$

$$z_3' = 6x - 5\,;\quad z_3' = 0\,;\quad 6x - 5 = 0\,;\quad x = 5/6 \in [-2,2]\,;\quad y = 1\,;$$

$$P(5/6,1)\,;\quad z\big|_P = f_3(5/6) = 3\cdot(5/6)^2 - 5\cdot(5/6) + 1 = -13/12\,.$$

Порівняємо між собою всі знайдені значення функції:

$$z\big|_M = \frac{1}{4}\,;\ z\big|_A = 3\,;\ z\big|_B = 43\,;\ z\big|_C = 23\,;\ z\big|_N = -7/32\,;\ z\big|_P = -1\frac{1}{12}\,.$$

Отже, найменше та найбільше значення функції відповідно

$$\min_{(x,y)\in D} z = z\big|_{P(5/6,\,1)} = -1\frac{1}{12}\,;\quad \max_{(x,y)\in D} z = z\big|_{B(2,-3)} = 43\,.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

Приклад 2. (Задача дослідження попиту: оптимізація функції корисності при обмеженнях на бюджет покупця). Знайти об'єми попиту (у кількісному вимірі) $x$ і $y$ на дві різновидності $X$ і $Y$ деякого товару при цінах на них, відповідно, $p_x = 6$ грош. од. і $p_y = 4$ грош. од., якщо покупець намагається при своєму бюджеті $K = 168$ грош. од. максимізувати функцію корисності вигляду $z = f(x,y) = 30x + 20y - 30x^{2/3}y^{1/2}$.

□ З економічного змісту задачі очевидно, що $x \geq 0$ і $y \geq 0$. На покупку загальною вартістю $p_x x + p_y y = 6x + 4y$ покупець може витратити суму, що не перевищує $K = 168$:

$$6x + 4y \leq 168$$

або $3x + 2y \leq 84$.

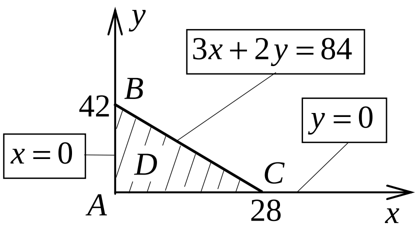

Рис. 64

Указані обмеження задають на координатній площині $Oxy$ замкнену область $D$ у вигляді заштрихованого трикутника $ABC$ (рис. 64), вершини якого визначаються як розв'язки систем:

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0; \\ 3x + 2y = 84; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0; \\ 3x + 2y = 84. \end{cases}$$

Звідси дістаємо $A(0;0)$, $B(0;42)$, $C(28;0)$.

Обчислюємо значення функції в кутових точках області $D$:

$$z\big|_A = 0; \quad z\big|_B = 30 \cdot 0 + 20 \cdot 42 - 30 \cdot 0^{2/3} \cdot 42^{1/2} = 840;$$

$$z\big|_C = 30 \cdot 28 + 20 \cdot 0 - 30 \cdot 24^{2/3} \cdot 0^{1/2} = 840.$$

Для визначення стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial z / \partial x = 30 - 20x^{-1/3} y^{1/2} = 0; \\ \partial z / \partial y = 20 - 15x^{2/3} y^{-1/2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^{1/3} - 2y^{1/2} = 0; \\ 4y^{1/2} - 3x^{2/3} = 0; \end{cases}$$

$$y^{1/2} = (3/2)x^{1/3}; \quad 4 \cdot (3/2)x^{1/3} - 3x^{2/3} = 0; \quad x^{1/3}(2 - x^{1/3}) = 0;$$

$$x^{1/3} = 0 \ \text{або} \ 2 - x^{1/3} = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2^3 = 8; \quad y = (3/2)^2 x^{2/3};$$

$$y_1 = 0; \quad y_2 = (9/4) \cdot 8^{2/3} = 9.$$

Одна стаціонарна точка $(0;0)$ співпала з кутовою $A$ і вже врахована. Друга стаціонарна точка $M(8;9)$ також належить області $D$, тому обчислимо відповідне значення функції корисності:

$$z\big|_M = 30\cdot 8 + 20\cdot 9 - 30\cdot 8^{2/3}\cdot 9^{1/2} = 60.$$

Досліджуємо функцію на межі області $D$, яка складається з ділянок $AB,\ BC,\ AC$, що сполучаються в кутових точках $A(0;0)$, $B(0;42)$, $C(28;0)$.

На кожній ділянці межі, використовуючи її рівняння, перейдемо до функції однієї змінної і знайдемо значення одержаної функції в її стаціонарних точках, що належать відповідній ділянці. (Кінці відрізків зміни аргументу співпадають з кутовими точками, де значення функції корисності вже обчислені).

На відрізку $AB$: $x = 0,\ y \in [0,\ 42]$ маємо:

$$z_1 = f_1(y) = 30\cdot 0 + 20y - 30\cdot 0^{2/3} y^{1/2} = 20y;$$

$$z_1' = 20 \neq 0 \text{ – стаціонарних точок немає.}$$

На відрізку $BC$: $y = 42 - (3/2)x,\quad x \in [0,\ 28]$ маємо:

$$z_2 = f_2(x) = 30x + 20\big(42 - (3/2)x\big) - 30x^{2/3}\big(42 - (3/2)x\big)^{1/2} =$$

$$= 840 - 30x^{2/3}\big(42 - (3/2)x\big)^{1/2};$$

$$z_2' = -20x^{-1/3}\big(42 - (3/2)x\big)^{1/2} - 15x^{2/3}\big(42 - (3/2)x\big)^{-1/2}(-3/2) =$$

$$= -20x^{-1/3}\big(42 - (3/2)x\big)^{1/2} + (45/2)x^{2/3}\big(42 - (3/2)x\big)^{-1/2} = 0;$$

$$-20\big(42 - (3/2)x\big) + (45/2)x = 0; \quad -336 + 12x + 9x = 0;$$

$$x = 16 \in [0, 28]; \quad y = 42 - (3/2)\cdot 16 = 18; \quad N(16,\ 18);$$

$$z\big|_N = 30\cdot 16 + 20\cdot 18 - 30\cdot 16^{2/3}\cdot 18^{1/2} = 840 - 720\cdot 2^{1/6} \approx 31{,}8.$$

На відрізку $AC$: $y = 0,\ x \in [0,\ 28]$ маємо:

$$z_3 = f_3(x) = 30x + 20\cdot 0 - 30x^{2/3}\cdot 0^{1/2} = 30x;$$

$$z_3' = 30 \neq 0 \text{ – стаціонарних точок немає.}$$

Порівняємо між собою всі знайдені значення функції корисності. Одержимо $\max\limits_{(x,y)\in D} z = z\big|_B = z\big|_C = 840$. Таким чином, оптимальний попит на обидві різновидності товару досягається в кутових точках області обмежень, при цьому покупець повинен витратити весь бюджет на купівлю будь-якої однієї різновидності. ■

### 2.4.4. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа

Обмежимося розглядом випадку функції двох змінних.

Розглянутий раніше локальний екстремум є ***безумовним***, тобто не передбачає виконання ніяких додаткових умов чи обмежень.

***Умовним екстремумом*** функції $z = f(x, y)$ двох змінних називається екстремум цієї функції, який досягається за додаткової умови, що змінні $x, y$ зв'язані ***рівнянням зв'язку*** $\boxed{\varphi(x, y) = 0}$.

Зауваження 1. З геометричної точки зору у випадку безумовного екстремуму пошук екстремуму поверхні $z = f(x, y)$ здійснюють у деякій області $D$, а у випадку умовного екстремуму його відшукують на заданій лінії $\varphi(x, y) = 0$ (рис. 65). Умовний екстремум, якщо він існує, досягається на лінії перетину $L$ заданої поверхні $z = f(x, y)$ з вертикальним циліндром $\varphi(x, y) = 0$, твірні якого паралельні осі $Oz$.

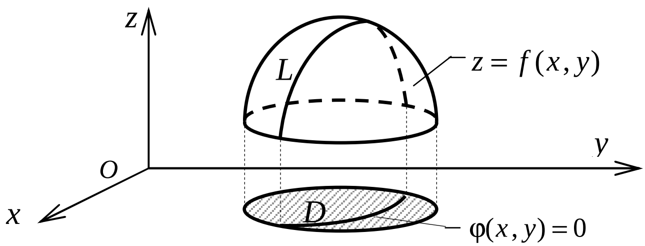


Рис. 65

Зауваження 2. Якщо рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ можна розв'язати відносно однієї зі змінних, тобто подати, наприклад, у вигляді $y = \psi(x)$, тоді цю умову можна врахувати, безпосередньо зводячи функцію $z = f(x, y)$ двох змінних підстановкою $y = \psi(x)$ до функції однієї змінної $z = f(x, \psi(x))$, яка далі досліджується на безумовний екстремум. Проте, у загальному випадку, такий метод малоефективний. Тому виникає потреба впровадження нового підходу.

Згідно з ***методом множників Лагранжа*** задача знаходження умовного екстремуму зводиться до дослідження на звичайний безумовний екстремум ***функції Лагранжа***

$$\boxed{L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)},$$

де допоміжна змінна (параметр) $\lambda$ називається ***множником Лагранжа***.

***Необхідні умови*** такого екстремуму задаються системою рівнянь

$$\boxed{\begin{cases}\partial L/\partial x=\partial f/\partial x+\lambda\,\partial\varphi/\partial x=0;\\ \partial L/\partial y=\partial f/\partial y+\lambda\,\partial\varphi/\partial y=0;\\ \partial L/\partial\lambda=\varphi(x,y)=0.\end{cases}}$$

Розв'язки цієї системи визначають ***стаціонарні точки функції Лагранжа***. Якщо $P_0(x_0,y_0,\lambda_0)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа $L(x,y,\lambda)$, то $M_0(x_0,y_0)$ – точка, що «підозріла» на умовний екстремум функції $z=f(x,y)$.

***Достатні умови*** умовного екстремуму можна встановити за знаком диференціала другого порядку $d^2L$ функції Лагранжа з урахуванням рівняння зв'язку. При визначенні знака $d^2L$ диференціал допоміжної змінної $d\lambda$ не враховується, тобто вважається

$$\boxed{d^2L(x,y,\lambda)=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2},$$

де диференціали $dx$ і $dy$ зв'язані залежністю $\boxed{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0}$,

яка виражає рівність нулю повної похідної за $x$ складеної функції $\varphi(x,y(x))$, що випливає з рівняння зв'язку $\varphi(x,y)=0$.

*Нехай* $P_0(x_0,y_0,\lambda_0)$ *– стаціонарна точка функції Лагранжа* $L(x,y,\lambda)$. *Тоді:* 1) *якщо* $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)>0$, *то* $M_0(x_0,y_0)$ *– точка умовного мінімуму;* 2) *якщо* $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)<0$, *то* $M_0(x_0,y_0)$ *– точка умовного максимуму.*

Зауваження 3. Дифереціюючи рівняння зв'язку за змінною $x$, отримаємо співвідношення $\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$, з якого можна виразити диференціал $dy$ через $dx$: $dy=-\frac{\partial\varphi/\partial x}{\partial\varphi/\partial y}dx$. Тому в будь-якій стаціонарній точці маємо:

$$d^2L(x,y,\lambda)=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2+$$

$$+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}dx\cdot\left(-\frac{\partial\varphi/\partial x}{\partial\varphi/\partial y}dx\right)+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\left(-\frac{\partial\varphi/\partial x}{\partial\varphi/\partial y}dx\right)^2=$$

$$=-\frac{dx^2}{\left(\partial\varphi/\partial y\right)^2}\cdot\left[-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\right].$$

Другий співмножник (розташований у квадратних дужках) можна подати у вигляді визначника третього порядку

$$\boxed{H=\begin{vmatrix}0 & \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y\\ \partial\varphi/\partial x & \partial^2L/\partial x^2 & \partial^2L/\partial x\partial y\\ \partial\varphi/\partial y & \partial^2L/\partial x\partial y & \partial^2L/\partial y^2\end{vmatrix}}.$$

*Якщо* $H>0$, *то* $d^2L<0$, *що вказує на умовний максимум. Аналогічно, якщо* $H<0$, *то* $d^2L>0$, *тобто маємо умовний мінімум функції.*

Правило дослідження функції двох змінних $z=f(x,y)$ на умовний екстремум:

1) *Скласти функцію Лагранжа* $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$.

2) *Розв'язати систему* $\begin{cases}\partial L/\partial x=\partial f/\partial x+\lambda\,\partial\varphi/\partial x=0;\\ \partial L/\partial y=\partial f/\partial y+\lambda\,\partial\varphi/\partial y=0;\\ \partial L/\partial\lambda=\varphi(x,y)=0.\end{cases}$

3) *Визначити наявність і характер екстремуму в кожній зі знайдених у попередньому пункті стаціонарних точок за знаком визначника*

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial x & \partial^2 L/\partial x^2 & \partial^2 L/\partial x\partial y \\ \partial\varphi/\partial y & \partial^2 L/\partial x\partial y & \partial^2 L/\partial y^2 \end{vmatrix}.$$

*Якщо* $H > 0$, *то маємо умовний максимум. Якщо* $H < 0$, *то – умовний мінімум.*

<u>Приклад 1</u>. Знайти екстремум функції

$$z = z(x, y) = x + 3y + 1 \quad \text{за умови} \quad x^2 + y^2 = 10.$$

□ Геометрична інтерпретація даної задачі така: потрібно знайти найбільше і найменше значення аплікати площини $z = x + 3y + 1$ для точок її перетину з циліндром $x^2 + y^2 = 10$. Виразити одну змінну через іншу з рівняння зв'язку і підставити її в функцію $z(x, y) = x + 3y$ дещо складно, тому будемо використовувати метод множників Лагранжа.

Позначимо $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 10$, складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x + 3y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 10).$$

Продиференціюємо: $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2x\lambda$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 3 + 2y\lambda$.

Запишемо систему рівнянь для визначення стаціонарних точок функції Лагранжа:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0; \\ 3 + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 - 10 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1/2\lambda; \\ y = -3/2\lambda; \\ (-1/2\lambda)^2 + (-3/2\lambda)^2 - 10 = 0; \end{cases} \qquad \lambda \neq 0.$$

Розв’язавши третє рівняння, одержимо

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} - 10 = 0, \ \frac{10}{4\lambda^2} = 10, \ \lambda^2 = \frac{1}{4}, \ \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}.$$

Якщо $\lambda_1 = -1/2$, то $x_1 = 1$, $y_1 = 3$. Якщо $\lambda_2 = 1/2$, $x_2 = -1$, $y_2 = -3$. Отже, $P_1(1;3;-1/2)$ і $P_2(-1;-3;1/2)$ – стаціонарні точки функції Лагранжа. Відповідно $M_1(1;3)$ і $M_2(-1;-3)$ – точки можливого умовного екстремуму. З'ясуємо наявність і характер екстремуму в кожній точці $M_1(1;3)$ і $M_2(-1;-3)$. Для цього обчислимо визначник $H$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x; \ \ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y; \ \ \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda; \ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda; \ \ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & \lambda & 0 \\ y & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$$

У точці $M_1(1;3)$:

$$H = 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 3 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = 8 \cdot \left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\right) = 40 > 0.$$

Отже, у цій точці функція має умовний максимум:

$$z_{\max} = z(1;3) = 11.$$

Аналогічно, у точці $M_2(-1,-3)$ знайдемо: $H = -40 < 0$. Отже, у цій точці функція має умовний мінімум:

$$z_{\min} = z(-1;-3) = -9.$$

Зазначимо, що питання про характер екстремуму в точках $M_1(1;3)$ і $M_2(-1;-3)$ можна з'ясувати і без обчислення визначника $H$. Знайдемо знак диференціала другого порядку $d^2L$ у кожній стаціонарній точці:

$$d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

При $\lambda_1 = -1/2$ одержимо $d^2F < 0$, а тому функція має в точці $M_1(1;3)$ умовний максимум. Аналогічно, в точці $M_2(-1;-3)$

отримаємо умовний мінімум. Таким чином, для визначення знака $d^2L$ не довелося враховувати зв'язок між $dx$ і $dy$, бо знак є очевидним без додаткових перетворень. ■

Приклад 2. Знайти умовний екстремум функції

$$z = z(x, y) = 4x^2 + 3y^3 - xy - 1 \text{ за умови } x + y = 0.$$

□ Позначимо $\varphi(x, y) = x + y$, складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = 4x^2 + 3y^3 - xy - 1 + \lambda(x + y).$$

Продиференціюємо: $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 8x - y + x\lambda$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 9y^2 - x + y\lambda$.

Прирівнявши знайдені частинні похідні до нуля і приєднавши рівняння зв’язку, одержимо систему необхідних умов екстремуму. Розв’язавши її, отримаємо:

$$\lambda_1 = 0,\ x_1 = 0,\ y_1 = 0 \text{ та } \lambda_2 = -1,\ x_2 = 10/9,\ y_2 = -10/9.$$

Отже, маємо дві стаціонарні точки функції Лагранжа $P_1(0;0;0)$ і $P_2(10/9;-10/9;-1)$. Відповідно $M_1(0;0)$ і $M_2(10/9;-10/9)$ – точки можливого умовного екстремуму. З’ясуємо наявність і характер екстремуму в кожній точці $M_1(0;0)$ і $M_2(10/9;-10/9)$ за допомогою визначника $H$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1;\ \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 8 + \lambda;\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 18y + \lambda;\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -1;$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 8+\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 18y+\lambda \end{vmatrix} = -18y - 2\lambda - 10.$$

У точці $M_1(0;0)$ маємо $H = -10 < 0$, тому вона є точкою умовного мінімуму заданої функції, значення якого

$$z_{\min} = z(0;0) = -1.$$

У точці $M_2(10/9;-10/9)$ маємо

$$H = -18 \cdot (-10/9) - 2 \cdot (-1) - 10 = 32 > 0,$$

тому вона є точкою умовного максимуму заданої функції, значення якого

$$z_{\max} = z(10/9;-10/9) = 4\cdot(10/9)^2 + 3\cdot(-10/9)^3 - (-10/9)\times$$
$$\times(-10/9) - 1 = 500/81 - 3000/729 - 1 = 257/243.$$

Дослідимо характер екстремуму в кожній з точок іншим методом, спираючись на знак $d^2L = 8dx^2 - 2dxdy + 18dy^2$. З рівняння зв'язку $x + y = 0$ маємо $dy = -dx$, тоді

$$d^2L = 8dx^2 - 2dx(-dx) + 18(-dx)^2 = (10 + 18y)\,dx^2.$$

Оскільки $d^2L\Big|_{M_1} = 10\,dx^2 > 0$, то $M_1(0;0)$ є точкою умовного мінімуму функції.

Оскільки $d^2L\Big|_{M_2} = -10\,dx^2 < 0$, то $M_2(10/9;-10/9)$ є точкою умовного максимуму функції. ■

<u>Приклад 3</u>. Знайти умовний екстремум функції $z = 5xy - 7$, якщо змінні $x$ і $y$ є додатними і задовольняють рівняння зв'язку $x^2/8 + y^2/2 - 1 = 0$.

□ Запишемо функцію Лагранжа, продиференцюємо її та складемо систему необхідних умов екстремуму:

$$L(x,y) = z(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = 5xy - 7 + \lambda\left(x^2/8 + y^2/2 - 1\right);$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 5y + \lambda x/4; \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 5x + \lambda y; \qquad \begin{cases} 5y + \lambda x/4 = 0; \\ 5x + \lambda y = 0; \\ x^2/8 + y^2/2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом вилучення, здійснюючи всі перетворення за умови, що $x > 0$ і $y > 0$:

$$\lambda = -20y/x;\ 5x - 20y^2/x = 0;\ x^2 - 4y^2 = 0;\ x^2 = 4y^2;\ x = 2y;$$
$$(2y)^2/8 + y^2/2 - 1 = 0;\ y^2 - 1 = 0;\ y^2 = 1;\ y = 1;\ x = 2;\ \lambda = -10.$$

Отже, в області, де $x > 0$ і $y > 0$, маємо стаціонарну точку функції Лагранжа $P_0(2;1;-10)$. Відповідно $M_0(2;1)$ – точка можливого умовного екстремуму. З'ясуємо наявність і характер екстремуму за допомогою визначника $H$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=x/4;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=y;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\lambda/4;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=\lambda;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=5;$$

$$H=\begin{vmatrix} 0 & x/4 & y \\ x/4 & \lambda/4 & 5 \\ y & 5 & \lambda \end{vmatrix}=\frac{5xy}{2}-\frac{\lambda y^2}{4}-\frac{\lambda x^2}{16};$$

$$H\Big|_{P_0}=\frac{5\cdot 2\cdot 1}{2}-\frac{-10\cdot 1^2}{4}-\frac{-10\cdot 2^2}{16}=10>0.$$

Отже, $M_0(2;1)$ – точка умовного максимуму функції:

$$z_{\max}=z(2;1)=5\cdot 2\cdot 1-7=3. \quad ■$$

Приклад 4. Знайти екстремум функції $z=xy^2-2$ за умови $x+2y-1=0$.

(Розв'язати самостійно. Відповідь: $M_1(1/3,\,1/3)$ – точка умовного максимуму, $z_{\max}=z\big|_{M_1}=-53/27$; $M_2(1,\,0)$ – точка умовного мінімуму, $z_{\min}=z\big|_{M_2}=-2$).

Приклад 5. Підприємство виробляє два види товарів $X$ і $Y$ в об'ємах $x$ і $y$ відповідно. Функція витрат $V$ має вигляд $V=20x+xy+10y$. Криві попиту на зазначені товари задаються співвідношеннями: $p_x=100-2x+3y$; $p_y=50+2x-2y$, де $p_x$ і $p_y$ – ціни одиниці товарів $X$ і $Y$ відповідно. Діяльність підприємства обмежена наявністю квоти на загальний обсяг виробництва товарів $X$ і $Y$: $x+y=75$. Знайти максимальний прибуток підприємства при вказаних умовах.

□ Нехай $R$ – сумарний дохід підприємства від реалізації товарів $X$ і $Y$: $R = R_x + R_y$, де $R_x$ і $R_y$ – доходи від продажу товарів $X$ і $Y$ відповідно. Тоді

$$R_x = p_x x = 100x - 2x^2 + 3xy\,; \quad R_y = p_y y = 50y + 2xy - 2y^2\,;$$

$$R = R_x + R_y = -2x^2 + 5xy - 2y^2 + 100x + 50y\,.$$

Прибуток підприємства $\Pi$ визначається рівністю $\Pi = R - V$. Тоді

$$\Pi = R - V = -2x^2 + 5xy - 2y^2 + 100x + 50y - (20x + xy + 10y) =$$

$$= -2x^2 + 4xy - 2y^2 + 80x + 40y\,.$$

Маємо задачу на умовний екстремум функції двох змінних $\Pi = \Pi(x,y) = -2x^2 + 4xy - 2y^2 + 80x + 40y$ при наявності рівняння зв'язку $\varphi(x,y) = x + y - 75 = 0$. Для її розв'язування скористаємося методом множників Лагранжа.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x,y) = \Pi(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = -2x^2 + 4xy - 2y^2 +$$

$$+ 80x + 40y + \lambda(x + y - 75)\,.$$

Продиференціюємо:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4x + 4y + 80 + \lambda\,,\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4x - 4y + 40 + \lambda\,.$$

Запишемо систему рівнянь для визначення стаціонарних точок функції Лагранжа і розв'яжемо її методом вилучення:

$$\begin{cases} -4x + 4y + 80 + \lambda = 0; \\ 4x - 4y + 40 + \lambda = 0; \\ x + y - 75 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} 80 + \lambda + 40 + \lambda = 0;\ \lambda = 60; \\ y = 75 - x; \\ -4x + 4(75 - x) + 80 + 60 = 0; \end{aligned}$$

$$-x + 75 - x + 20 + 15 = 0\,; \quad 2x = 110\,; \quad x = 55\,; \quad y = 75 - 55 = 20\,.$$

Отже, $P_0(55;20;60)$ – стаціонарна точка функції Лагранжа. Відповідно $M_0(55;20)$ – точка можливого умовного екстремуму. З'ясуємо наявність і характер екстремуму в цій точці за допомогою визначника $H$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=1;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=1;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=-4;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-4;\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=4;$$

$$H=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 4\\ 1 & 4 & -4\end{vmatrix}=4+4+4+4=16.$$

Оскільки $H\big|_{P_0}=16>0$, то $M_0(55;20)$ є точкою умовного максимуму функції:

$$\Pi_{\max}=\Pi(55,20)=-2\cdot 55^2+4\cdot 55\cdot 20-$$
$$-2\cdot 20^2+80\cdot 55+40\cdot 20=2750. \quad ■$$

### 2.4.5. Метод найменших квадратів

Нехай за результатами експериментальних досліджень треба визначити ***модель*** $y=F(x)$ залежності $y=f(x)$ змінної величини $y$ (залежна змінна) від змінної величини $x$ (незалежна змінна). Проведено $n$ випробувань та одержано $n$ пар відповідних значень (з деякими похибками) цих змінних $x$ і $y$:

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_n$ |

З теоретичних міркувань чи за характером розташування на координатній площині $Oxy$ експериментальних точок $(x_i, y_i)$, $i=\overline{1,n}$ встановлюють вигляд функції $y=F(x)$ (вибір ***структури*** моделі – ***структурна ідентифікація***). Нехай розміщення експериментальних точок нагадує пряму (рис. 66). Тоді природно шукану залежність вважати лінійною функцією $y=F(x)=kx+b$.

При вибраному вигляді шуканої функції залишається знайти всі невідомі коефіцієнти (параметри) $k$, $b$ так, щоб ця модель у деякому розумінні найкраще описувала розглядуваний процес (вибір значень ***параметрів*** моделі – ***параметрична ідентифікація***).

Найпоширенішим способом оцінювання параметрів є ***метод***

***найменших квадратів*** (***МНК***).

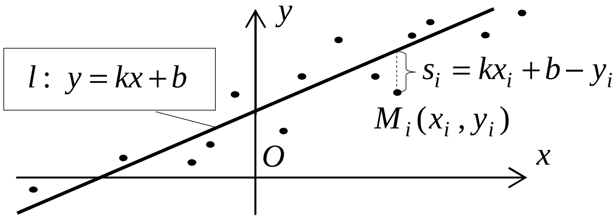


Рис. 66

***Відхиленням*** (***нев'язкою***) $s_i$ залежної змінної $y$, в точці $x_i$ називають різницю $s_i = y_i - (kx_i + b)$ між експериментальним значенням $y_i$ залежної змінної та її значенням $y_{mi} = kx_i + b$, обчисленим за вибраною моделлю. Сума квадратів усіх відхилень

$$\boxed{s = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - kx_i - b)^2}$$

є функцією параметрів моделі $s = s(k, b)$, оскільки $x_i, y_i$ ($i = \overline{1, n}$) – відомі числа.

*Згідно з МНК значення параметрів моделі знаходяться з умови мінімуму суми квадратів нев'язок.*

Можна показати, що квадратична функція $s = s(k, b)$ має єдиний мінімум $(k_0, b_0)$. Тому для його знаходження досить скористатися тільки необхідними умовами екстремуму:

$$\begin{cases} \partial s/\partial k = 0; \\ \partial s/\partial b = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} x_i(kx_i + b - y_i) = 0; \\ 2\sum_{i=1}^{n} (kx_i + b - y_i) = 0; \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)k + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)k + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}}$$

Остання система називається ***нормальною системою*** методу найменших квадратів. Розв'язуючи цю систему, знаходимо шукані

***оптимальні значення*** $(k_0, b_0)$ параметрів моделі.

Формула $y = k_0 x + b_0$ зі знайденими оптимальними значеннями параметрів є ***рівнянням регресії***. Лінію, що визначається цим рівнянням, називають ***лінією регресії***.

Зауваження. При формуванні критерію $s = s(k, b)$ якості моделі за методом найменших квадратів припускається, що похибками значень незалежної змінної можна знехтувати.

Приклад. Користуючись методом найменших квадратів, знайти оптимальні значення параметрів $k_0$ і $b_0$ лінійної регресії $y = k_0 x + b_0$ за даними результатами $n$ вимірювань

$n = 8$.

| $x$ | -7 | -5 | -4 | -1 | 1 | 3 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -2,4 | -1,3 | -1,2 | 0,7 | 1,4 | 2,8 | 3,8 | 5,9 |

Побудувати в одній системі координат $Oxy$ експериментальні точки $(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$ і лінію регресії $y = k_0 x + b_0$.

Вказівка. Обчислення проводити з точністю до двох десяткових знаків після коми.

□ Для складання нормальної системи методу МНК попередньо обчислимо її коефіцієнти та праві частини:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 218; \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 113{,}1; \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 9{,}7.$$

Нормальна система має вигляд: $\begin{cases} 218k + 2b = 113{,}1; \\ 2k + 8b = 9{,}7. \end{cases}$

Розв'яжемо цю систему за методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 218 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1740; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 113{,}1 & 2 \\ 9{,}7 & 8 \end{vmatrix} = 885{,}4; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 218 & 113{,}1 \\ 2 & 9{,}7 \end{vmatrix} =$$

$$= 1888{,}4; \quad k_0 = \Delta_1 / \Delta = 0{,}51; \quad b_0 = \Delta_2 / \Delta = 1{,}09.$$

Отже, шукане рівняння регресії $y = 0{,}51x + 1{,}09$. (Рисунок до задачі зробіть самостійно). ■

## 2.5. Числові ряди

Ряди є основним обчислювальним засобом. Зокрема, у калькуляторах при обчисленні значень функцій використовуються ряди.

В економічних дослідженнях для опису динаміки процесів широко використовують числові послідовності і відповідні числові ряди, що відповідають бігу часу – часові послідовності та ряди (ряди динаміки). Моделі, в яких застосовуються ряди динаміки, можуть будуватися як на основі окремого ізольованого динамічного ряду (наприклад, за даними про чисельність зайнятих на виробництві синтезується модель динаміки чисельності зайнятих), так і на базі системи взаємозв'язаних часових рядів (один з рядів відповідає залежній величині, а інші – окремим факторам, що на нього впливають: наприклад, , складається модель прибутку як функція обсягів реалізації товару, чисельності працівників, фондоозброєності і т.п.)

### 2.5.1. Числові ряди. Основні поняття. Необхідна ознака збіжності

Нехай $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – нескінченна числова послідовність.

Нескінченна сума $\boxed{u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n}$ називається ***числовим рядом***, а її доданки $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – відповідними (за номером) ***членами ряду***, причому $n$-й член $u_n$ також має назву ***загального члена***.

Скінченна сума $\boxed{S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k}$ всіх перших членів ряду до $u_n$ включно називається $n$***-ю частковою сумою ряду*** ($n = 1, 2, ...$).

Ряд називається ***збіжним***, якщо існує скінченна границя при $n \to \infty$ послідовності $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ його часткових сум: $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S}$. При цьому число $S$ називають ***сумою ряду*** і пишуть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Якщо вказана границя нескінченна чи взагалі не існує, то ряд називається ***розбіжним***.

Ряд $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k}+\ldots$, який утворюється з початкового ряду $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ відкиданням перших $n$ членів називається $n$***-м залишком ряду*** ($n=1,2,\ldots$).

Розглянемо ***геометричний ряд*** (***ряд геометричної прогресії***)

$$\boxed{a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}}$$

з ***першим членом*** $a\neq 0$ і ***знаменником*** $q$.

*Ряд геометричної прогресії збігається при* $|q|<1$ *і розбігається при* $|q|\geq 1$.

Під час розгляду числових рядів розв'язують дві основні задачі: 1) дослідити ряд на збіжність; 2) знайти суму збіжного ряду.

Приклад 1. Користуючись означенням, дослідити ряд на збіжність. Для збіжного ряду вказати його суму:

**а)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1-1/n)$ **;** **б)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-1)(5n+4)}$ **.**

□ а) Перетворимо загальний член ряду

$$u_n=\ln(1-1/n)=\ln\big((n-1)/n\big)=\ln(n-1)-\ln n.$$

Тоді часткову суму $S_n$ можна подати у замкненій формі

$$S_n=\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3+\ldots+\ln(n-1)-\ln n=\ln 1-\ln n=\ln n,$$

вигляд якої не залежить від числа $n$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty.$$

Отже, ряд розбігається.

б) Розкладемо загальний член ряду на найпростіші дроби:

$$u_n=\frac{1}{(5n-1)(5n+4)}=\frac{A}{5n-1}+\frac{B}{5n+4}=$$

$$=\left|A(5n+4)+B(5n-1)=1;\quad \begin{matrix} n=1/5: \\ n=-4/5: \end{matrix}\begin{cases}5A=1; & A=1/5;\\ -5B=1; & B=-1/5\end{cases}\right|=$$

$$=\frac{1/5}{5n-1}+\frac{-1/5}{5n+4}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-1}-\frac{1}{5n+4}\right).$$

Тоді часткову суму $S_n$ можна подати у замкненій формі, де кількість доданків не залежить від числа $n$:

$$S_n=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{5n-6}-\frac{1}{5n-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5n-1}-\frac{1}{5n+4}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5n+4}\right).$$

Знайдемо границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5n+4}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$.

Отже, ряд збігається і його сума $S=1/20$. ■

<u>Властивості</u> числових рядів:

1) *Збіжність або розбіжність ряду не порушиться, якщо змінити, відкинути чи добавити скінченне число членів*. (Для збіжного ряду значення суми при цьому, в загальному випадку, змінюється).

Зокрема, *ряд і будь-який його залишок збігаються чи розбігаються одночасно*.

2) *Для збіжного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n=S$ *його* $n$*-й залишок* $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}=R_n$ *служить похибкою наближення* $\boxed{S\approx S_n}$ *суми ряду* $S$ *його* $n$*-ю частковою сумою* $S_n$. *При цьому* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0}$.

3) *Якщо члени ряду помножити на один і той самий відмінний від нуля сталий множник* $C=\mathrm{const}\neq 0$, *то його збіжність не порушиться. У випадку збіжного ряду його сума буде помножена на* $C$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n=C\sum_{n=1}^{\infty} u_n};$$

4) *Два збіжні ряди* $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і

$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *можна почленно додавати і віднімати. Одержані ряди також збігаються і при цьому*:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=(u_1+v_1)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}v_n};$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)=(u_1-v_1)+\ldots+(u_n-v_n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n-\sum_{n=1}^{\infty}v_n}.$$

5) *Сума (різниця) збіжного і розбіжного рядів є розбіжним рядом*.

6) *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *збігається, то довільний ряд, отриманий з даного групуванням його членів, що не змінює порядку їх розташування, також збігається і має ту саму суму*.

Зауваження 1. Про суму (різницю) розбіжних рядів нічого певного стверджувати не можна: результуючий ряд може як збігатися, так і розбігатися.

На практиці часто досить знати лише відповідь на принципове питання про збіжність ряду. Для цього використовуються ***ознаки збіжності***, що ґрунтуються на властивостях загального члена ряду.

Теорема (***необхідна ознака збіжності***). *Якщо ряд збігається, то його загальний член* $u_n$ *прямує до нуля при* $n\to\infty$: $\boxed{\lim_{n\to\infty}u_n=0}$.

□ Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, тобто $\lim_{n\to\infty}S_n=S$, де $S$ – сума ряду (стала величина). Тоді $\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S$, бо при $n\to\infty$ і $n-1\to\infty$. Віднімаючи з першої рівності другу, дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0 \quad \text{або} \quad \lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0.$$

Але $S_n-S_{n-1}=u_n$. Отже, $\lim_{n\to\infty}u_n=0$. ■

Зауваження 2. Розглянута ознака є тільки необхідною, але не є достатньою. Тобто, з того що загальний член $u_n$ при $n\to\infty$ прямує до нуля, ще не випливає, що ряд збігається.

Наслідок (***достатня ознака розбіжності***). *Якщо границя* *загального члена* $u_n$ *при* $n \to \infty$ *відмінна від нуля, тобто* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0}$, *то ряд розбігається*.

Приклад 2. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+8}$ на збіжність.

□ Знайдемо границю $n$-го члена $u_n$ при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+8} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+8/n} = \frac{1}{3} \neq 0 .$$

За достатньою ознакою розбіжності ряд розбігається. ■

Приклад 3. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$ на збіжність.

(Розв'язати самостійно. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^{-1} \neq 0$ – ряд розбігається.)

### 2.5.2. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Числовий ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***знакододатним***, якщо всі його члени – невід'ємні числа:

$$u_n \geq 0 , \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Послідовність часткових сум знакододатного ряду є зростаючою. Згадуючи, що обмежена монотонна змінна має границю, дістаємо ***необхідну і достатню умову збіжності знакододатного ряду***:

*знакододатний ряд збігається, якщо послідовність його часткових сум обмежена зверху, і розбігається в противному разі*.

Зауваження. При вивченні знакосталих рядів можна обмежитися розглядом тільки знакододатних, оскільки з них множенням на –1 одержуються ряди з недодатними членами.

Далі розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності таких рядів.

Інтегральна ознака Коші. Ця ознака ґрунтується на порівнянні числового ряду з невласним інтегралом.

Теорема 1 (***інтегральна ознака Коші***). *Якщо члени знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , $u_n \ge 0$ , $n = 1, 2, \ldots$ *утворюють спадну послідовність (*$u_{n+1} \le u_n$ , $n = 1, 2, \ldots$*) і на проміжку* $[1; +\infty]$ *існує спадна неперервна невід'ємна функція* $f(x)$ *така, що при натуральних значеннях аргументу співпадає з членами ряду (*$f(n) = u_n$ , $n = 1, 2, \ldots$*), тоді вказаний ряд і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *ведуть себе однаково: збігаються чи розбігаються одночасно*.

□ Зобразимо даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ геометрично точками на координатній площині $Oxy$, відкладаючи на осі $Ox$ номери $1$, $2$, ..., $n$, ..., а на осі $Oy$ – відповідні значення його членів $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$, …, $u_n = f(n)$, … (рис. 67).

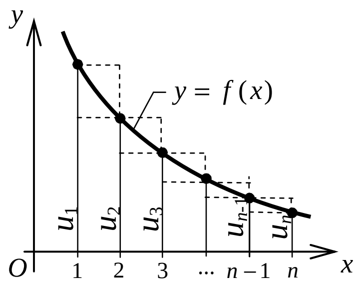

Рис. 67

Побудуємо на цьому рисунку також графік указаної функції $f(x)$. Площа відповідної криволінійної трапеції, що спирається на відрізок $[1; n]$, дорівнює визначеному інтегралу

$$I_n = \int_1^n f(x)dx .$$

Впишемо в цю трапецію і опишемо навколо неї ступінчасті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є проміжки $[1; 2]$, $[2; 3]$, а висоти дорівнюють $u_1$, $u_2$, …, $u_n$.

Порівнюючи площі цих об'єктів, дістанемо:

$$u_2 + u_3 + \ldots + u_n < I_n < u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

або $S_n - u_1 < I_n < S_n - u_n$, де $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ – часткова сума ряду. Звідси $S_n < u_1 + I_n$ і $S_n > u_n + I_n$. Нехай інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним. Його значення $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$. Тоді $S_n < u_1 + I$

Отже, зростаюча послідовність часткових сум $S_n$ обмежена зверху і тому має границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається.

Нехай тепер інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним. У даному випадку це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = +\infty$. Тоді, переходячи до нерівності $S_n > u_n + I_n$ до границі при $n \to \infty$, отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Отже, послідовність часткових сум $S_n$ необмежена і має нескінченну границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається. ■

Зауваження 1. Інтегральна ознака справедлива, коли послідовність членів ряду задовольняє відповідним умовам, починаючи хоча б з деякого номеру.

Зауваження 2. На практиці функцію $f(x)$ отримують за допомогою заміни у виразі загального члена $u_n$ ряду дискретної змінної $n$ на неперервну $x$.

З наведеного доведення випливає

наслідок. *Для суми* $S$ *і* $n$*-го залишку* $R_n$ *збіжного знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *справедливі оцінки*:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx < S < u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx; \quad R_n < \int_n^{+\infty} f(x)dx,$$

остання з яких дозволяє визначити, скільки потрібно взяти перших $n$ членів, щоб при заміні суми $S$ ряду частковою сумою $S_n$ отримати задану похибку.

Приклад 1. За допомогою інтегральної ознаки дослідити на збіжність ***узагальнений гармонічний ряд*** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p}$.

□ Вважатимемо $f(x) = 1/x^p$. Ця функція задовольняє умовам інтегральної ознаки. Розглянемо невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} (1/x^p)\, dx$.

При $p=1$ маємо ***гармонічний ряд*** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 1/n}$. Для нього $\int_1^{+\infty}(1/x)\,dx=\lim\limits_{N\to\infty}\ln|x|\Big|_1^N=+\infty$. Інтеграл і ряд розбіжні. Нехай $p\neq 1$. Тоді

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{N\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^N=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right).$$

Коли $p>1$, то $\int_1^{+\infty}(1/x^p)\,dx=1/(p-1)$. Інтеграл і ряд збіжні. Коли $p<1$, то $\int_1^{+\infty}(1/x^p)\,dx=+\infty$. Інтеграл і ряд розбіжні.

Остаточно маємо:

*узагальнений гармонічний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p$ *збігається при* $p>1$ *і розбігається при* $p\leq 1$. ■

<u>Приклад 2</u>. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n};\quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-2)\sqrt[3]{\ln(5n-2)}};\quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n}.$$

□ а) Розглянемо функцію $f(x)=1\big/(x\ln^3 x)$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[4;+\infty)$, причому $f(n)=u_n$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int\limits_2^{+\infty}f(x)dx=\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{N\to+\infty}\int\limits_2^{N}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{N\to+\infty}\int\limits_2^{N}\frac{d\ln x}{\ln^3 x}=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\int\limits_2^{N}\ln^{-3}x\,d(\ln x)=\lim_{N\to+\infty}\frac{\ln^{-2}x}{-2}\Bigg|_x^N=-\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\ln^2 x}\Bigg|_2^N=$$

$$=-(1/2)\lim_{N\to+\infty}\left(1\big/\ln^2 N-1\big/\ln^2 2\right)=1\big/(2\ln^2 2)\neq\infty.$$

Отже, цей невласний інтеграл збігається, а тому заданий ряд теж збігається.

б) Введемо функцію $f(x)=\dfrac{1}{(5x-2)x\sqrt[3]{\ln(5x-2)}}$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[1;+\infty)$, причому $f(n)=u_n$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(5x-2)\sqrt[3]{\ln(5x-2)}}=\lim_{N\to+\infty}\int_1^N\frac{dx}{(5x-2)\sqrt[3]{\ln(5x-2)}}=$$

$$\left|\begin{array}{ll} u=\ln(5x-2);\ du=5dx/(5x-2) \\ u_1=\ln 3; \qquad u_2=\ln(5N-2)\end{array}\right|=\frac{1}{5}\lim_{N\to+\infty}\int_{\ln 3}^{\ln(5N-2)}u^{-1/3}du=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{N\to+\infty}\left.\frac{u^{2/3}}{2/3}\right|_{\ln 3}^{\ln(5N-2)}=\frac{3}{10}\lim_{N\to+\infty}(\ln^{2/3}(5N-2)-\ln^{2/3}3)=+\infty.$$

Оскільки цей невласний інтеграл розбігається, то даний ряд теж розбігається.

в) (Розв'язати самостійно). ■

<u>Ознаки порівняння</u>.

Під час застосування ознак порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, що досліджується на збіжність, порівнюється з ***еталонним рядом*** $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, про який відомо збігається він чи розбігається.

За еталонні ряди часто приймають нижче наведені узагальнений гармонічний або геометричний ряди:

а) ***узагальнений гармонічний ряд*** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p}$, що збігається, коли $p>1$, і розбігається при $p\le 1$;

б) ***геометричний ряд*** (ряд геометричної прогресії) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}aq^n}$, що збігається при $q<1$ і розбігається при $q\ge 1$.

<u>Теорема 2</u> (***перша*** (***основна***) ***ознака порівняння***).

а) *Нехай маємо збіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, *при цьому* $u_n\le v_n$, $n=1,2,\ldots$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *теж збігається.*

(Якщо $u_n > v_n$, то жодних висновків робити не можна).

б) *Нехай маємо розбіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *, при цьому* $u_n \ge v_n$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *теж розбігається.*

(Якщо $u_n < v_n$, то ніяких висновків робити не можна).

Таким чином, з розбіжним рядом порівнюємо «у бік більше»; а зі збіжним рядом – «у бік менше».

□ Нехай $S_n$ і $\sigma_n$ відповідні $n$-і часткові суми рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

а) З нерівності $u_n \le v_n$ випливає, що $S_n \le \sigma_n$. Оскільки «більший» знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то існує границя його часткових сум $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, при цьому $\sigma_n \le \sigma$. Тоді $S_n \le \sigma$. Тобто, часткові суми $S_n$ обмежені.

З того, що послідовність $S_n$ зростаюча і обмежена, випливає існування скінченної границі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, при цьому $S \le \sigma$. Отже, «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збіжний.

б) З нерівності $u_n \ge v_n$ випливає, що $S_n \ge \sigma_n$. Оскільки «менший» знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Отже, «більший» ряд теж розбіжний. ■

<u>Зауваження 3</u>. Основна ознака порівняння виконується, коли члени рядів задовольняють відповідні нерівності, починаючи хоча б з деякого номера.

<u>Наслідок</u>. *Якщо всі члени збіжного знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *не перевищують відповідних членів іншого знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *тобто* $u_n \le v_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *тоді* $n$*-й залишок*

*першого ряду* $R_n^{(u)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ *не перевищує* $n$*-го залишку* $R_n^{(v)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ *другого*: $R_n^{(u)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \le \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = R_n^{(v)}$.

Приклад 3. За допомогою основної ознаки порівняння дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n \ln(3n)}; \quad \text{б)}\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 - 2n - 1}; \quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

□ а) Застосуємо основну ознаку порівняння з "більшим" збіжним рядом геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (1/5)^n$ зі знаменником $q = 1/5 < 1$:

$$u_n = 1/(5^n \ln(3n)) < 1/5^n = (1/5)^n = v_n, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Оскільки $u_n \le v_n$, то «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n \ln(3n)}$ також збігається.

б) Оскільки $u_n = \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 - 2n - 1} \ge \frac{\sqrt{n^3}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} = v_n$ при всіх $n \ge 3$ і «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом з $p = 1/2 \le 1$, то за основною ознакою порівняння «більший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 - 2n - 1}$ також розбігається.

в) Оскільки при $n \ge 2$ справджується нерівність $u_n = 1/n^n \le$ $\le 1/2^n = v_n$ і «більший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ є збіжним геометричним рядом з $q = 1/2 < 1$, то за основною ознакою порівняння «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^n$ теж збігається. ■

<u>Теорема 3</u> (***друга*** (***гранична***) ***ознака порівняння***). *Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c\,,\ (0<c<+\infty)}$ *відношення загальних членів двох знакододатних рядів* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *, то обидва ряди поводять себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються чи розбігаються.*

□ Оскільки існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c$, то для довільного $\varepsilon>0$ можна знайти такий номер $N$, що для всіх $n\geq N$ буде виконуватися нерівність $|u_n/v_n-c|<\varepsilon$. Звідки $c-\varepsilon<u_n/v_n<c+\varepsilon$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ збігається. З нерівності $u_n/v_n<c+\varepsilon$ маємо $u_n<(c+\varepsilon)v_n$, $n\geq N$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(c+\varepsilon)v_n$ також збігається. Звідси за основною ознакою порівняння випливає збіжність «меншого» ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ .

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ розбігається. З нерівності $u_n/v_n>c-\varepsilon$ маємо $u_n>(c-\varepsilon)v_n$, $n\geq N$. З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(c-\varepsilon)v_n$. Тоді згідно з основною ознакою порівняння «більший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ також розбігається. ■

<u>Зауваження 4</u>. Існування вказаної границі говорить про те, що загальні члени $u_n$ і $v_n$ цих рядів при $n\to\infty$ є нескінченно малими одного порядку $u_n=O^*(v_n)$ (зокрема, можуть бути еквівалентними $u_n\sim v_n$). Таким чином, *для порівняння треба підбирати еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *, загальний член якого* $v_n$ *є нескінченно малою того ж порядку, що і загальний член* $u_n$ *ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *, який до-*

*сліджується*.

<u>Приклад 4</u>. За допомогою граничної ознаки порівняння дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+4/n);\quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^5}+4}{6n^4-n^2+3};\quad \text{в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}arctg\,\frac{5n}{n^3+8}.$$

□ а) Відомо, що $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$ при $\alpha\to 0$. Звідси при $n\to\infty$ маємо: $4/n\to 0$; $\ln(1+4/n)\sim 4/n=O^*(1/n)$. Тому для даного ряду застосуємо граничну ознаку порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$, що розбігається:

$$u_n=\ln(1+4/n),\ v_n=1/n;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+4/n)}{1/n}=$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+4/n)}{1/n}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\alpha=4/n\to 0\ \ \textit{при}\ \ n\to\infty\right|=$$

$$=4\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=4\ \ (\neq 0,\neq\infty).$$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+4/n)$ розбігається.

б) Оскільки $u_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^5}+4}{6n^4-n^2+3}\sim\dfrac{\sqrt[3]{n^5}}{6n^4}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{n^{7/3}}=O^*(1/n^{7/3})$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{7/3}$, $p=7/3>1$, що збігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{7/3}(n^{5/3}+4)}{6n^4-n^2+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4/n^{5/3}}{6-1/n^2+3/n^4}=$$

$$=1/6\quad(\neq 0,\neq\infty).$$ Даний ряд теж збігається.

в) (Розв’язати самостійно). ■

<u>Зауваження 5</u>. Застосування ознак порівняння часто викликає труднощі, пов’язані з необхідністю підбирати еталонний ряд. Тож, нижче наведені більш зручні для користування ознаки, де фігурує тільки ряд, що досліджується.

Ознака Даламбера.

Теорема 4 (***ознака Даламбера***). *Якщо для знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує границя* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l}$ *відношення наступного члена до попереднього, то*

а) *при* $l<1$ *ряд збігається*; б) *при* $l>1$ *ряд розбігається*;

в) *при* $l=1$ *не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.*

□ а) Нехай $l<1$. Візьмемо число $q$, що задовольняє нерівності $l<q<1$. Для відношення $u_{n+1}/u_n$ з означення границі випливає, що існує такий номер $N$, що для всіх $n\ge N$ буде виконуватися умова $u_{n+1}/u_n<q$. Таким чином, для $n\ge N$ маємо:

$$u_{N+1}<qu_N\,,\qquad u_{N+2}<qu_{N+1}<q^2u_N\,,$$
$$u_{N+3}<qu_{N+2}<q^2u_{N+1}<q^3u_N\,,\ \ldots\,.$$

Розглянемо два ряди $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots$ і $u_N+qu_N+q^2u_N+q^3u_N+\ldots$, де другий збігається як геометричний ряд зі знаменником $q<1$.

Члени першого ряду не перевищують відповідних членів другого ряду. Тому за основною ознакою порівняння перший ряд теж збігається.

б) Нехай $l>1$. Тоді для відношення $u_{n+1}/u_n$ з означення границі випливає, що існує такий номер $N$, що для всіх $n\ge N$ буде виконуватися нерівність $u_{n+1}/u_n>1$. Звідси $u_{n+1}>u_n$ для всіх $n\ge N$. Це означає, що члени ряду зростають, починаючи з номера $N+1$. Тому загальний член ряду не прямує до нуля $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$. За достатньою ознакою розбіжності даний ряд розбігається. ■

Якщо $l=+\infty$, то ряд також розбігається, оскільки існує такий номер $N$, що для всіх $n\ge N$ буде виконуватися нерівність $u_{n+1}/u_n>1$. Звідки $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$. ■

Зауваження 6. На практиці при дослідженні на збіжність найчастіше використовується саме ознака Даламбера. *Щоб не натрапити на випадок невизначеності* $l=1$, *її застосовують до таких рядів, загальний член яких містить у своєму складі факторіал і/або показникову функцію від* $n$.

Приклад 5. За допомогою ознаки Даламбера дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-4}{\sqrt[3]{n^2 \cdot 10^{2n}}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^2+2n}.$$

□ а) До складу загального члена входить показникова функція $10^{(2/3)n}$. Тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{7(n+1)-4}{10^{(2/3)(n+1)}\sqrt[3]{(n+1)^2}} = \frac{7n+3}{10^{(2/3)n+2/3}\sqrt[3]{(n+1)^2}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(7n+3)10^{(2/3)n}\sqrt[3]{n^2}}{10^{(2/3)n+2/3}\sqrt[3]{(n+1)^2}\,(7n-4)} = \frac{1}{10^{2/3}}\lim_{n\to\infty}\frac{7n+3}{7n-4}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2}{(n+1)^2}} = 10^{-2/3}\lim_{n\to\infty}\frac{7+3/n}{7-4/n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{(1+1/n)^2}} =$$

$$= 10^{-2/3}\cdot 1\cdot\sqrt[3]{1} = 10^{-2/3} < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

б) Загальний член цього ряду $u_n = (n-1)!\big/(n^2+2n)$ містить факторіал $(n+3)!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1-1)!}{(n+1)^2+2(n+1)} = \frac{n!}{n^2+4n+3} = \frac{(n-1)!n}{n^2+4n+3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n(n^2+2n)}{(n^2+4n+3)(n-1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2}{n^2+4n+3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1/n+4/n^2+3/n^3} = \left|\frac{1}{0}\right| = +\infty > 1. \text{ Ряд розбігається. } \blacksquare$$

Радикальна ознака Коші.

Теорема 5 (***радикальна ознака Коші***). *Якщо для знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує границя* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l}$, *то*

а) *при* $l<1$ *ряд збігається*; б) *при* $l>1$ *ряд розбігається*;

в) *при* $l=1$ *не можна зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду*.

Ця ознака базується, як і ознака Даламбера, на порівнянні даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом. Доведення аналогічне.

Зауваження 7. *Радикальну ознаку зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від* $n$, *з яких досить просто добувається корінь* $n$*-го степеня*.

Приклад 6. За допомогою радикальної ознаки Коші дослідити на збіжність задані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\left(n^2/(n^3+1)\right); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\ln^{2n}\left(n^4/(n+1)\right).$$

□ а) Загальний член ряду є степенем з показником $n$ виразу $\sin\left(n^2/(n^3+1)\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n\left(n^2/(n^3+1)\right)}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(n^2/(n^3+1)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin\left((1/n)/(1+1/n^3)\right)=\sin 0=0<1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

б) Загальний член ряду є степенем з показником $2n$ виразу $\ln\left(n^4/(n+1)\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln^{2n}\frac{n^4}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\ln^2\frac{n^4}{n+1}=\ln^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/n^3+1/n^4}=$$

$$=\left|\ln(1/+0)=\ln(+\infty)=+\infty\right|=+\infty>1. \quad \text{Ряд розбігається. } \blacksquare$$

Зауваження 8. У випадку невизначеності $l=1$, радикальна ознака, як і «рівносильна» їй ознака Даламбера, відповіді не дає. Потрібні додаткові дослідження на основі інших більш «сильних» ознак, до яких відносяться всі наведені вище.

## 2.5.3. Знакозмінні ряди. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбниця. Абсолютна й умовна збіжність

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну кількість членів обох знаків + і -, називається ***знакозмінним***.

Знакозмінний ряд, два довільні сусідні члени якого мають різні знаки, називається ***знакопочерговим*** або ***рядом Лейбниця***. Його вигляд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots, \text{ де } a_n = |u_n| \geq 0}.$$

<u>Теорема 1</u> (***достатня ознака Лейбниця***). *Якщо для знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n \geq 0$ *виконуються дві умови*:

1) $\boxed{a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots}$; 2) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0}$, *тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним, при цьому його сума* $S$ *додатна і не перевищує модуля першого члена*: $0 < S \leq a_1$.

□ Розглянемо часткову суму з парним числом членів:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Кожна різниця в дужках додатна, оскільки $a_n > a_{n+1}$. Тому $S_{2n} > 0$ і послідовність $\{S_{2n}\}$ – зростаюча.

Крім того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1,$$

оскільки кожна дужка знову-таки додатна. Тобто послідовність $\{S_{2n}\}$ обмежена зверху.

Отже, послідовність $\{S_{2n}\}$ монотонно зростає і обмежена, тому має границю. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, тоді $0 < S \leq a_1$.

Обчислимо границю сум з непарними номерами:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = S + 0 = S .$$

Таким чином, часткові суми як з парними, так і з непарними номерами мають спільну границю: $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$ .

Звідси випливає, що вся послідовність часткових сум $\{S_n\}$ також має, причому ту ж саму границю: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ , Тобто ряд збігається. При цьому $0 < S \le a_1$ . ■

Наслідок. *Абсолютна похибка* $\Delta_n$ *від заміни суми* $S$ *збіжного знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *будь-якою його частковою сумою* $S_n$ *не перевищує модуля першого з відкинутих членів*. Іншими словами, *модуль залишку* $R_n$ *збіжного знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *не перевищує модуля першого з відкинутих членів*. Тобто $\boxed{\Delta_n = | S - S_n | = | R_n | \le a_{n+1}}$.

Дійсно, даний залишок $R_n = (-1)^{n+2} a_{n+1} + (-1)^{n+3} a_{n+2} + \ldots$ – це також збіжний ряд Лейбниця. Модуль суми цього ряду не перевищує абсолютної величини його першого члена, тобто $| R_n | \le a_{n+1}$.

Цей наслідок широко використовується при наближених обчисленнях.

Зауваження 1. Ознака Лейбниця справедлива, якщо послідовність членів ряду є спадною хоча б з деякого номера $N$ .

Зауваження 2. Друга умова ознаки Лейбниця $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ , як розглянуто раніше, є необхідною для збіжності. Тому спочатку перевіряють саме її.

Приклад 1. За допомогою ознаки Лейбниця дослідити на збіжність дані знакопочергові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^3 - 1}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n}{n^2} .$$

□ а) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{4n^3-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n^2}{4-1/n^3}=0$;

1) $|u_n|=\dfrac{n}{4n^3-1}>\dfrac{n+1}{4(n+1)^3-1}=|u_{n+1}|,\quad n=1,2,...$ (доведіть самостійно, безпосередньо переконавшись, що $|u_n|-|u_{n+1}|>0$).

Отже, умови виконуються. Даний ряд збігається.

б) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Двічі скористаємося правилом Лопіталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{(5^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\ln 5}{2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\frac{\ln 5}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(5^x)'}{x'}=\frac{\ln 5}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\ln 5}{1}=+\infty.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=+\infty\neq 0$. Оскільки друга умова ознаки Лейбниця не виконується, то даний ряд розбігається. ■

Теорема 2 (***достатня ознака збіжності знакозмінного ряду***). *Якщо для знакозмінного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *збігається ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, *складений з модулів його членів, то даний ряд також збігається.*

□ Нехай $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$ і $S_n^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}|u_k|$ – часткові суми відповідно даного ряду і ряду з абсолютних величин його членів.

Позначимо через $S_n^{(+)}$ і $S_n^{(-)}$ суми модулів відповідно всіх невід'ємних і всіх від'ємних членів серед перших $n$ членів даного ряду. Тоді $S_n=S_n^{(+)}-S_n^{(-)}$ і $S_n^{(m)}=S_n^{(+)}+S_n^{(-)}$.

За умовою ряд з модулів збігається, тобто існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(m)}=S^{(m)},\ S^{(m)}>0$.

$S_n^{(+)}$ і $S_n^{(-)}$ – додатні зростаючі величини, що менші $S^{(m)}$. Отже, вони мають границі: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(+)} = S^{(+)}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(-)} = S^{(-)}$. Тоді існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^{(+)} - S_n^{(-)}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(+)} - \lim_{n\to\infty} S_n^{(-)} = S^{(+)} - S^{(-)}.$$

Таким чином, даний знакозмінний ряд збігається. ■

Зауваження 3. Наведена ознака є лише достатньою, але не необхідною: існують збіжні знакозмінні ряди, яким відповідають розбіжні ряди, утворені з модулів їх членів. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ збіжний за ознакою Лейбниця, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ з модулів його членів, розбіжний як гармонічний ряд.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів його членів, збігається, та ***умовно збіжним***, коли сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ з модулів його членів розбігається.

З попередньої ознаки випливає, що *довільний абсолютно збіжний ряд є збіжним*.

Зауваження 4. Дослідження знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на збіжність доцільно розпочинати з виявлення абсолютної збіжності як більш «сильної», застосовуючи відомі ознаки збіжності знакододатних рядів до ряду з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Якщо ряд з модулів збігається, то сам знакозмінний ряд абсолютно збіжний і дослідження завершене. Якщо ж ряд з модулів розбігається, то інколи можна відразу зробити висновок про розбіжність і самого знакозмінного ряду (наприклад, при невиконанні необхідної ознаки збіжності). Але частіше далі треба провести більш «тонке» дослідження безпосередньо самого знакозмінного ряду на умовну збіжність.

Приклад 2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність дані знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^4}$;  б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$;  в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+1/n)^{3n^2}$ .

□ а) До ряду з модулів членів даного ряду застосуємо основну ознаку порівняння:

$$|u_n| = \left|\frac{\sin n}{n^4}\right| = \frac{|\sin n|}{n^4} \le \frac{1}{n^4} = v_n .$$

Оскільки більший ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$ є збіжним узагальненим гармонічним рядом з $p = 4 > 1$, то менший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ теж збіжний. Отже, даний ряд абсолютно збіжний.

б) Ряд з модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом з $p = 1/2 \le 1$.

Сам даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n^{1/2}$ є знакопочерговим. Він задовольняє обидві умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0;\quad |u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = |u_{n+1}|,\ n = 1, 2, \ldots$$

і тому є збіжним. Отже, даний ряд умовно збіжний.

в) Модуль загального члена даного ряду $|u_n| = (1+1/n)^{3n^2}$ є степенем з показником $3n^2$ виразу $(1+1/n)$, тому до ряду з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+1/n)^{3n^2}} = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{3n} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n\right)^3 = e^3 > 1.$$ Ряд з модулів розбігається.

З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ за радикальною ознакою випливає $\lim_{n\to\infty}|u_n| \ne 0$. Звідси $\lim_{n\to\infty} u_n \ne 0$.

Таким чином, для даного ряду не виконується необхідна ознака збіжності, тому він розбігається. ■

## 2.6. Диференціальні рівняння в економічних задачах

Розглянемо деякі найпростіші застосування диференціальних рівнянь в економічній динаміці. Тут незалежною змінною вважається час $t$, що розглядається як неперервна величина.

Неокласична модель зростання.

Нехай національний дохід $R$ описується виробничою функцією $R = R(K, L)$, де $K$ – обсяг капіталовкладень, $L$ – обсяг витрат трудових ресурсів. При цьому всі величини змінюються з часом. Продуктивність праці $l$ є функцією від величини фондоозброєності $f = K / L$: $l = l(f)$. Оскільки $l = R / L$, то маємо $l(f) = R(K, L)/L$.

Здійснимо моделювання динаміки фондоозброєності $f = f(t)$ при наступних припущеннях. 1) природний приріст трудових ресурсів $L$ з часом змінюється за законом $dL/dt = \alpha L$, де $\alpha$ – сталий коефіцієнт темпу приросту; 2) інвестиції $I = c\,R(K, L)$, де $c$ – стала норма інвестиції, витрачаються на збільшення виробничих фондів і на амортизацію за законом $I = dK/dt + \beta K$, де $\beta$ – стала норма амортизації.

Зі співвідношень $I = c\,R(K, L)$ і $I = dK/dt + \beta K$ маємо

$$dK/dt = cR(K, L) - \beta K.$$

Прологарифмуємо рівність $f = K / L$ та отримаємо

$$\ln f = \ln K - \ln L.$$

Диференціюючи це співвідношення за часом $t$, дістанемо

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dt} = \frac{1}{K}\frac{dK}{dt} - \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}.$$

Підставивши в цю рівність вирази для похідних $dL/dt$ і $dK/dt$, отримаємо

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dt}=\frac{1}{K}\left(cR(K,L)-\beta K\right)-\frac{1}{L}\alpha L .$$

Перемноживши обидві частини одержаного співвідношення на $f$ з врахуванням, що $f = K/L$ і $R(K,L)/L = l(f)$, дістанемо ***неокласичну модель зростання***:

$$\boxed{df/dt = cl(f)-(\alpha+\beta)f}$$

– диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, що описує динаміку фондоозброєності.

Воно є нелінійним і ***автономним*** (час $t$ не входить явно в рівняння). Особливе значення має його ***рівноважний*** (***стаціонарний***) частинний ***розв'язок*** $f_{st} = const$, що відповідає стану рівноваги $df/dt = 0$. Він знаходиться як корінь алгебраїчного рівняння

$$cl(f_{st})-(\alpha+\beta)f_{st} = 0$$

Приклад 1. Для виробничої функції $R = A\sqrt{KL}$, де $A$ – сталий параметр, що характеризує продуктивність прийнятої технології виробництва, скласти диференціальне рівняння неокласичної моделі зростання. Знайти його загальний розв'язок $f$ і ненульовий стаціонарний розв'язок $f_{st}$.

□ За формулою $l(f) = R(K,L)/L$ дістанемо

$$l(f) = A\sqrt{K/L} = \sqrt{f} .$$

Тоді шукане диференціальне рівняння має вигляд:

$$df/dt = cA\sqrt{f} - (\alpha+\beta)f .$$

Стаціонарний розв'язок одержимо, розв'язуючи відповідне алгебраїчне рівняння:

$$cA\sqrt{f}-(\alpha+\beta)f = 0; \quad f_{st1} = 0; \quad f_{st2} = c^2A^2/(\alpha+\beta)^2 .$$

Таким чином, ненульовий стаціонарний розв'язок має вигляд

$$f_{st} = c^2A^2/(\alpha+\beta)^2 .$$

Загальний розв'язок $f$ знаходимо, застосовуючи метод відокремлювання змінних:

$$\frac{df}{\sqrt{f}\left(cA-(\alpha+\beta)\sqrt{f}\right)}=dt\,; \quad \int\frac{df}{\sqrt{f}\left(cA-(\alpha+\beta)\sqrt{f}\right)}=\int dt\,;$$

$$f=\left[cA/(\alpha+\beta)+C\exp\left(-(\alpha+\beta)/(2)t\right)\right]^2, \quad C=\text{const}\,.$$

Звернемо увагу, що при $t\to\infty$ маємо

$$f=\left[\frac{cA}{\alpha+\beta}+C\exp\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}t\right)\right]^2\to$$

$$\to c^2A^2\big/(\alpha+\beta)^2=f_{st}\,.$$

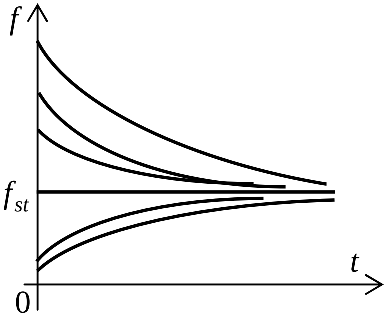


Рис. 68

Отже, при сталих параметрах $A,\ c,\ \alpha,\ \beta$ функція фондоозброєності $f=f(t)$ стійко прямує до ненульового стаціонарного значення $f_{st}$ незалежно від початкових умов ( $f=f_{st}$ є ***точкою стійкої рівноваги***) (рис. 68).

Модель природнього зростання випуску.

Знайти закон зростання випуску дефіцитної продукції в умовах ненасиченості ринку.

Нехай деякий товар продається за ціною $p$ і на момент часу $t$ об’єм його реалізації становить $Q=Q(t)$, що дозволило отримати дохід $R=pQ(t)$. Припустимо, що деяка частина прибутку витрачається на інвестиції $I=I(t)$ у виробництво цього товару: $I(t)=c\,pQ(t)$, де $c$ – стала норма інвестиції, $0<c<1$.

Виходячи з припущення, що ринок не насичується, можна зробити висновок, що в результаті розширення виробництва буде отримано приріст доходу, частина якого піде на розширення випуску товару. Це призведе до зростання швидкості випуску (***акселерація***), що пропорційна збільшенню інвестицій: $dQ/dt=mI$, де $m$ – стала норма акселерації.

Підставивши в останню рівність вираз для інвестицій, дістанемо ***модель природного зростання випуску***:

$$\boxed{dQ/dt = aQ\,, \quad a = mcp = const},$$

що є диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними. Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$Q = C\,e^{at}\,, \quad C = \text{const}\,.$$

<u>Зауваження 1</u>. Одержане диференціальне рівняння також описує процес розмноження бактерій в необмеженому середовищі, зростання цін в умовах постійної інфляції, процес радіоактивного розпаду та ін.

<u>Модель зростання випуску в умовах конкуренції</u>.

На практиці припущення ненасиченості ринку і відсутності конкуренції може бути прийняте лише для досить вузького часового проміжку. У загальному випадку крива попиту $p = p(Q)$, що описує залежність ціни товару $p$ від об'єму його реалізації $Q$, є деякою спадною функцією. Тобто зі збільшенням обсягу продукції на ринку ціна спадає: $dp/dQ < 0$. Тому ***модель зростання випуску в умовах конкуренції*** має вигляд:

$$\boxed{dQ/dt = \gamma\, p(Q) Q\,, \quad \gamma = mc = const}.$$

Оскільки всі множники у правій частині цього рівняння додатні, то $dQ/dt > 0$ тобто функція $Q = Q(t)$ – зростаюча. Характер зростання функції визначається її другою похідною:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \gamma\left(\frac{dQ}{dt}\,p + Q\frac{dp}{dQ}\frac{dQ}{dt}\right) = \gamma\frac{dQ}{dt}\left(p + Q\frac{dp}{dQ}\right).$$

Якщо ввести еластичність попиту $E(p) = \dfrac{p}{Q}\dfrac{dQ}{dp}$, то вираз для другої похідної можна подати у вигляді:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \gamma p\frac{dQ}{dt}\left(1 + \frac{Q}{p}\frac{dp}{dQ}\right) = \gamma p\frac{dQ}{dt}\left(1 - \frac{1}{|E(p)|}\right),$$

де враховано, що $E(p) < 0$.

З одержаного співвідношення для $d^2Q/dt^2$ маємо:

– у випадку еластичного попиту ($|E(p)|>1$) спостерігається прогресуюче зростання ($d^2Q/dt^2>0$ – графік угнутий);

– у випадку нееластичного попиту ($|E(p)|<1$) спостерігається уповільнене зростання ($d^2Q/dt^2<0$ – графік опуклий).

Якщо крива попиту є лінійною функцією $p(Q)=a-bQ$, де $a, b$ – сталі додатні коефіцієнти, то модель зростання випуску в умовах конкуренції набуває вигляду:

$$dQ/dt=\gamma(a-bQ)Q .$$

Звідси дістаємо:

$$dQ/dt=0: \ \gamma(a-bQ)Q=0; \ \ Q_{st1}=0; \ \ Q_{st2}=a/b .$$

Таким чином, ненульовий стаціонарний розв'язок має вигляд

$$Q_{st}=a/b .$$

Оскільки $d^2Q/dt^2=\gamma(dQ/dt)(a-2bQ)$, то

$$d^2Q/dt^2=0: \ \gamma(dQ/dt)(a-2bQ)=0; \quad Q=a/(2b)$$

– точка перегину графіка функції $Q=Q(t)$. При $Q<a/(2b)$ функція вгнута, а при $Q>a/(2b)$ вона опукла.

Загальний розв'язок $Q=Q(t)$ знаходимо, застосовуючи метод відокремлювання змінних:

$$\frac{dQ}{(a-bQ)Q}=\gamma dt; \quad \int\frac{dQ}{(a-bQ)Q}=\gamma\int dt;$$

$$Q=Cae^{a\gamma t}/\left(1+Cbe^{a\gamma t}\right),$$

$$C=\text{const} .$$

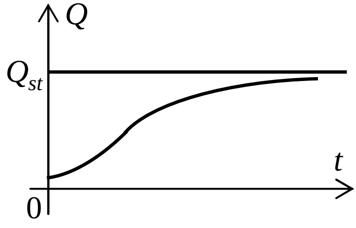


Рис. 69

Графік одержаного загального розв'язку називають ***логістичною кривою*** (рис. 69). Така функція також описує деякі процеси поширення реклами, зростання біологічних популяцій в умовах обмеженого середовища існування та ін.

Зауваження 2. З графіка на рис. 69 випливає, що при малих значеннях часу $t$ логістичне зростання майже не відрізняється від природного зростання за експоненціальним законом. Проте при великих значеннях $t$ темп зростання уповільнюється і логістична крива при $t \to \infty$ асимптотично наближається до прямої $Q = a/b$, що відповідає ненульовому стаціонарному розв'язку.

Динаміка ринкових цін.

Ціна $p$ на деякий товар змінюється залежно від взаємодії попиту $Q_d$ і пропозиції $Q_s$ на ринку. Припустимо для спрощення, що швидкість зміни ціни $dp/dt$ у будь-який момент часу $t$ прямо пропорційна незадоволеному попиту – різниці $Q_d - Q_s$. Тоді динаміка ціни може бути описана ***рівнянням Самуельсона***:

$$\boxed{dp/dt = c\,(Q_d\,(p) - Q_s\,(p))},$$

де $c$ – сталий додатний коефіцієнт.

Припустимо, що для деякого товару криві попиту та пропозиції є лінійними функціями:

$$Q_d\,(p) = \alpha - \beta p\,; \quad Q_s\,(p) = \gamma + \delta p\,,$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – сталі додатні коефіцієнти, причому $\alpha > \gamma$, оскільки при нульовій ціні, очевидно, попит перевищує пропозицію.

Тоді рівняння Самуельсона набуває вигляду:

$$dp/dt = c\,(\alpha - \beta p - \gamma - \delta p) \quad \text{або} \quad \boxed{dp/dt + c\,(\beta + \delta)\,p = c(\alpha - \gamma)}$$

– маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку зі сталим коефіцієнтом і сталою правою частиною.

Його частинним розв'язком служить стаціонарний розв'язок – ціна рівноваги $p_{st}$, що відповідає рівноважному стану $dp/dt = 0$:

$$c(\beta + \delta)\,p = c\,(\alpha - \gamma): \quad p_{st} = (\alpha - \gamma)/(\beta + \delta) = const\,.$$

Знайдемо загальний розв'язок $\overline{p}$ відповідного однорідного рівняння:

$$dp/dt + c\,(\beta + \delta)\,p = 0\,; \quad \frac{dp}{p} = -c\,(\beta + \delta)dt\,; \quad \int \frac{dp}{p} = -c(\beta + \delta)\int dt\,;$$

$$\ln p = -c(\beta+\delta)t + \ln C\,; \quad \overline{p} = C\,e^{-kt}\,, \quad k = c(\beta+\delta)\,, \quad C = \text{const}\,.$$

Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок $p$ неоднорідного рівняння має вигляд:

$$p = \overline{p} + p_{st} = C\,e^{-kt} + (\alpha-\gamma)/(\beta+\delta)\,.$$

Значення довільної сталої $C$ визначається врахуванням початкової умови $p(0) = p_0$. Звідки

$$C + (\alpha-\gamma)/(\beta+\delta) = p_0\,; \quad C = p_0 - (\alpha-\gamma)/(\beta+\delta) = p_0 - p_{st}\,.$$

Тоді крива ціни $p = p(t)$ (відповідний частинний розв'язок) задається співвідношенням:

$$p = (p_0 - p_{st})e^{-kt} + p_{st}\,.$$

Оскільки $p_0$ і $p_{st}$ – сталі величини, тому поведінка кривої ціни визначається характером експоненти $e^{-kt}$. Якщо $k > 0$, то маємо: $e^{-kt} \to 0$ при $t \to +\infty$. Тоді крива ціни $p = p(t)$ при $t \to +\infty$ асимптотично наближається до прямої $p = p_{st}$, що відповідає ціні рівноваги $p_{st}$ (рис. 70). У цій ситуації говорять про динамічну стабільність ринку. Умова $k > 0$ визначає обмеження на значення параметрів $c$, $\beta$ і $\delta$, що забезпечують динамічну стабільність.

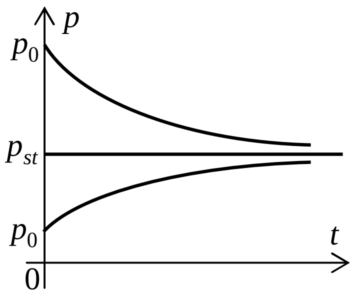


Рис. 70

Залежно від значень $p_0$ і $p_{st}$ для кривої ціни $p = p(t)$ можливі наступні три випадки (рис. 70): 1) якщо $p_0 = p_{st}$, тоді $p(t) = p_{st}$ – кривою ціни служить горизонтальна пряма, що відповідає ціні рівноваги; 2) якщо $p_0 > p_{st}$, тоді $(p_0 - p_{st})e^{-kt} > 0$ і крива ціни спадає з бігом часу відповідно до $e^{-kt}$, залишаючись вище прямої $p = p_{st}$; 3) якщо $p_0 < p_{st}$, тоді крива ціни зростає з бігом часу, залишаючись нижче прямої $p = p_{st}$.

Зауваження 3. Рівняння Самюельсона можна розглядати як диференційний аналог різницевої павутинної моделі ринку.

## 2.7. Різницеві рівняння в економічних задачах

Розглянемо деякі найпростіші застосування різницевих рівнянь для побудови моделей економічної динаміки з дискретним часом $n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Модель ділового циклу Самюельсона – Хікса.

Під час моделювання економічної динаміки за допомогою диференціальних рівнянь звичайно виходять з припущення про миттєвий характер впливу різних факторів. Насправді, такі дії відбуваються з деяким запізненням. Якщо наявність запізнення суттєво впливає на економічні процеси, то їх потрібно вводити у відповідні диференціальні рівняння. Проте часто простіше моделі із запізненням будувати у вигляді різницевих рівнянь.

При побудові макроекономічної ***моделі ділового циклу Самюельсона – Хікса*** припускається: 1) споживання $C_n$ на даному $n$-му періоді часу ($n = 0, 1, 2, \ldots$) лінійно залежить від доходу $Y_{n-1}$ на попередньому $(n-1)$-му періоді часу: $C_n = aY_{n-1} + b$, де $a$, $b$ – сталі додатні коефіцієнти ($a$ – ***гранична схильність до споживання***; $b$ – ***автономне споживання***); 2) інвестиції $I_n$ на даному $n$-му періоді прямо пропорційні до приросту доходу $Y_{n-1} - Y_{n-2}$ на попередньому періоді: $I_n = v(Y_{n-1} - Y_{n-2})$, де $v$ – сталий додатний коефіцієнт, який називають ***фактором акселерації***; 3) на кожному $n$-му періоді національний дохід $Y_n$ витрачається на споживання $C_n$ та інвестиції $I_n$: $Y_n = C_n + I_n$.

Підставляючи в останнє співвідношення вирази для $C_n$ і $I_n$, дістанемо рівняння:

$$Y_n = aY_{n-1} + b + v(Y_{n-1} - Y_{n-2}) \text{ або } \boxed{Y_n - (a+v)Y_{n-1} + vY_{n-2} = b},$$

що зв’язує доходи на трьох сусідніх періодах. Це лінійне неоднорідне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке називають ***рівнянням Хікса***.

У припущенні, що величина доходу залишається сталою:

$$Y_n = Y_{n-1} = Y_{n-2} = Y_{st},$$

можна знайти відповідний частинний стаціонарний розв'язок $Y_{st}$:

$$Y_{st} - (a+v)Y_{st} + vY_{st} = b; \quad Y_{st} = b/(1-a).$$

Для знаходження загального розв'язку $\overline{Y}_n$ відповідного однорідного різницевого рівняння $Y_n - (a+v)Y_{n-1} + vY_{n-2} = 0$ необхідно розглянути характеристичне рівняння $\lambda^2 - (a+v)\lambda + v = 0$.

За принципом суперпозиції загальний розв'язок $Y_n$ неоднорідного рівняння можна подати у вигляді: $Y_n = \overline{Y}_n + Y_{st}$.

Зауваження 1. У залежності від значень граничної схильності до споживання $a$ і фактору акселерації $v$ можливі п'ять типів динаміки: 1) стійке зростання; 2) стійке затухання; 3) незатухаючі коливання (зі сталою амплітудою); 4) коливання із затухаючою амплітудою; 5) коливання зі зростаючою амплітудою. На практиці спостерігаються наступні обмеження на коефіцієнти: $a < 1$ і $v > 1$. При цьому розв'язок рівняння Хікса відноситься до одного з останніх трьох типів: є нестійким і має коливальний характер – зростання змінюється на швидке спадання і навпаки (рис. 71). Тобто реальна економіка є нестійкою – періоди підйому чергуються з періодами спаду.

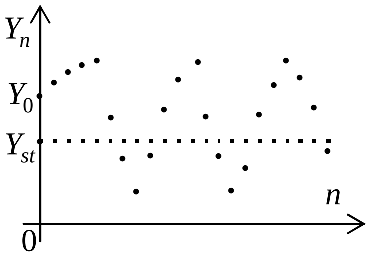


Рис. 71

Розглянемо докладніше найцікавіший випадок комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння, що спостерігається при від'ємному дискримінанті $D = (a+v)^2 - 4v < 0$ (коливальні типи динаміки). Тоді

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \text{ де } \alpha = (a+v)/2;$$

$$\beta = \sqrt{-D}/2 = \sqrt{4v - (a+v)^2}/2;$$

$$\overline{Y}_n = r^n(C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi), \quad C_1, C_2 = const;$$

$$Y_n = \overline{Y}_n + Y_{st} = r^n(C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi) + Y_{st}.$$

Тут

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{v}; \quad \varphi = arctg\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = arctg\sqrt{\frac{4v}{(a+v)^2} - 1}.$$

Одержаний розв'язок $Y_n$ носить коливальний характер і є незатухаючим при $v = 1$, затухаючим при $v < 1$ і з постійно зростаючою амплітудою при $v > 1$.

<u>Приклад 1</u>. Для моделі Самуельсона – Хікса задано, що $a = 0{,}32$, $v = 1{,}28$, $b = 3{,}4$. Знайти частинний розв'язок $Y_{ч\,n}$, який задовольняє початковим умовам $Y_0 = 6$ і $Y_1 = 5{,}8$.

□ Рівняння Хікса набуває вигляду:

$$Y_n - (0{,}32 + 1{,}28)Y_{n-1} + 1{,}28Y_{n-2} = 3{,}4;$$

$$Y_n - 1{,}6Y_{n-1} + 1{,}28Y_{n-2} = 3{,}4.$$

Його частинний стаціонарний розв'язок $Y_{st}$:

$$Y_{st} = b/(1-a) = 3{,}4/(1-0{,}32) = 5.$$

Знайдемо загальний розв'язок $Y_n$:

$$r = \sqrt{v} = \sqrt{1{,}28}; \quad \varphi = arctg\sqrt{\frac{4v}{(a+v)^2} - 1} =$$

$$= arctg\sqrt{\frac{4\cdot 1{,}28}{(0{,}32+1{,}28)^2} - 1} = arctg\,1 = \frac{\pi}{4};$$

$$Y_n = r^n(C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi) + Y_{st} =$$

$$= 1{,}28^{n/2}\left(C_1\cos\frac{n\pi}{4} + C_2\sin\frac{n\pi}{4}\right) + 5.$$

Для визначення відповідних значень довільних сталих $C_1$ і

$C_2$ скористаємося початковими умовами:

$$\begin{array}{r} Y_0 = 6: \\ Y_1 = 5{,}8: \end{array} \begin{cases} C_1 + 5 = 6; \\ 1{,}28^{1/2}\left(C_1 \cdot \sqrt{2}/2 + C_2 \cdot \sqrt{2}/2\right) + 5 = 5{,}8; \end{cases}$$

$$C_1 = 1; \;\; 0{,}8C_1 + 0{,}8C_2 = 0{,}8; \;\; C_2 = 1 - C_1 = 0.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має коливальний вигляд зі зростаючою амплітудою:

$$Y_{чп} = 1{,}28^{n/2}\cos(n\pi/4) + 5, \;\; n = 0,1,2,\ldots \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. На практиці коливання з постійно зростаючою амплітудою не спостерігаються, оскільки: 1) розмір національного доходу не перевищує величини доходу повної зайнятості, а це обмежує амплітуду коливань зверху; 2) обсяг інвестування повинен хоча б перекривати величину амортизації, а це обмежує амплітуду коливань знизу. Ці обставини вказують на певні недоліки і обмеженість застосування моделі Самюельсона – Хікса.

Павутинна модель ринку.

Розглянемо випадок ринку одного товару й опишемо процес пошуку («нащупування») на ньому рівноважної ціни – торг між продавцем і покупцем.

Дві основні величини ринкових відносин – це попит $Q_d$ і пропозиція $Q_s$ що залежать від ціни товару $p$ на ринку: $Q_d = Q_d(p)$ і $Q_s = Q_s(p)$. При малих значеннях ціни $p$ справедлива нерівність $Q_d(p) > Q_s(p)$, тобто попит перевищує пропозицію. При більших значеннях $p$ навпаки $Q_d(p) < Q_s(p)$, тобто пропозиція перевищує попит. Припускаючи, що функції $Q_d = Q_d(p)$ і $Q_s = Q_s(p)$ неперервні, приходимо до висновку, що існує ***рівноважна ціна*** товару $p = p_{st}$, при якій попит і пропозиція співпадають: $Q_d(p_{st}) = Q_s(p_{st})$. Відповідний об'єм запропонованого і реалізованого товару $Q_{st} = Q_d(p_{st}) = Q_s(p_{st})$ називається ***рівноважним***.

Розглянемо найпростішу ***павутинну модель*** пошуку рівноважної ціни. Вона пояснює явище регулярного повторення циклів зміни цін та обсягів продажу, наприклад, сільськогосподарської продукції.

Припустимо, що об'єм пропозиції $Q_{sn}$ на даному $n$-му періоді часу ($n = 0,1,2,...$) залежить від ціни товару $p_{n-1}$ на попередньому $(n-1)$-му періоді часу: $Q_{sn} = Q_s(p_{n-1})$. При цьому попит $Q_{dn}$ на даному $n$-му періоді часу залежить від поточної ціни товару $p_n$: $Q_{dn} = Q_d(p_n)$. Умова динамічної рівноваги $Q_{dn} = Q_{sn}$ попиту і пропозиції на кожному $n$-му періоді часу ($n = 0,1,2,...$) приводить до різницевого рівняння першого порядку:

$$\boxed{Q_d(p_n) = Q_s(p_{n-1})}, \quad n = 0,1,2,....$$

<u>Зауваження 3</u>. Припущення про запізнення пропозиції від ціни цілком обґрунтоване: рішення про обсяг виробництва приймається з урахуванням поточної ціни, проте виробничий цикл має певну тривалість, тому пропозиція, що відповідає прийнятому рішенню, з'явиться на ринку по закінченню даного циклу.

Для спрощення покладемо, що функції попиту і пропозиції є лінійними:

$$Q_{dn} = \alpha - \beta p_n; \quad Q_{sn} = \gamma + \delta p_{n-1},$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – сталі додатні коефіцієнти, причому $\alpha > \gamma$, оскільки при нульовій ціні, очевидно, попит перевищує пропозицію.

Тоді маємо лінійне неоднорідне різницеве рівняння першого порядку:

$$\alpha - \beta p_n = \gamma + \delta p_{n-1} \quad \text{або} \quad \boxed{p_n = -k\, p_{n-1} + a},$$

де $a$, $k$ – сталі додатні коефіцієнти: $a = (\alpha - \gamma)/\beta$: $k = \delta/\beta$.

Його стаціонарний частинний розв'язок – рівноважну ціну $p_{st}$ – знайдемо при умові $p_n = p_{n-1} = p_{st} = const$:

$$p_{st} = -k\, p_{st} + a; \quad \boxed{p_{st} = a/(1+k)} \quad \text{або} \quad p_{st} = (\alpha - \gamma)/(\beta + \delta).$$

Загальний розв'язок $\overline{p}_n$ відповідного однорідного рівняння

$$p_n = -k\, p_{n-1}$$

задається формулою $\overline{p}_n = C(-k)^n$, де $C = \text{const}$.

Тоді за принципом суперпозиції загальний розв'язок $p_n$ неоднорідного рівняння має вигляд:

$$\boxed{p_n = \overline{p}_n + p_{st} = C(-k)^n + p_{st}}.$$

Якщо за початкову умову прийняти значення ціни $p_0$ у період часу $n = 0$, то для довільної сталої $C$ отримаємо:

$$p_0 = C(-k)^0 + p_{st}\,;\;\; C = p_0 - p_{st}\,.$$

Тоді відповідний частинний розв'язок задається співвідношенням:

$$\boxed{p_n = (p_0 - p_{st})\,(-k)^n + p_{st}}.$$

Якщо $p_0 = p_{st}$, тоді $p_n = p_{st} = const$, $n = 0,1,2,...$, тобто ціни стабільні та співпадають з рівноважною ціною.

Якщо $p_0 \neq p_{st}$, то поведінка ціни $p_n$, $n = 0,1,2,...$ визначається степеневою функцією $(-k)^n$. Оскільки $k > 0$, то знаки $(-k)^n$ регулярно чергуються, тобто ціна коливається. При цьому мають місце три випадки: 1) якщо $0 < k < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(-k)^n = 0$ і послідовність цін $p_n$, $n = 0,1,2,...$ носить затухаючий коливальний характер, збігаючись до ціни рівноваги: $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_{st}$ (стан рівноваги – стійкий; говорять, що коливання ціни стримуються); 2) якщо $k = 1$, то послідовність цін набуває вигляду $p_0$, $2p_{st} - p_0$, $p_0$, $2p_{st} - p_0$, …, тобто періодично коливається навколо ціни рівноваги $p_{st}$ з амплітудою $|\,p_0 - p_{st}\,|$ ((стан рівноваги – нестійкий; кажуть, що коливання ціни періодичні); 3) якщо $k > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(-k)^n = \infty$ і послідовність цін необмежено зростає, коливально віддаляючись від ціни рівноваги (стан рівноваги – нестійкий; говорять, що коливання ціни зростають).

Рис. 72 відповідає випадку $0<k<1$ (стійка модель). На горизонтальній осі відкладаються об'єми $Q$ виробленого і реалізованого товару, а на вертикальній – ціни $p$. Прямі $Q_d = Q_d(p)$ і $Q_s = Q_s(p)$ задають залежності попиту $Q_d$ і пропозиції $Q_s$ від ціни товару $p$. Збіжний процес пошуку рівноважної ціни відображається павутиною (спіраллю), що скручується до точки рівноваги $(Q_{st}\,;\,p_{st})$, яка виконує роль ***стійкого фокусу***.

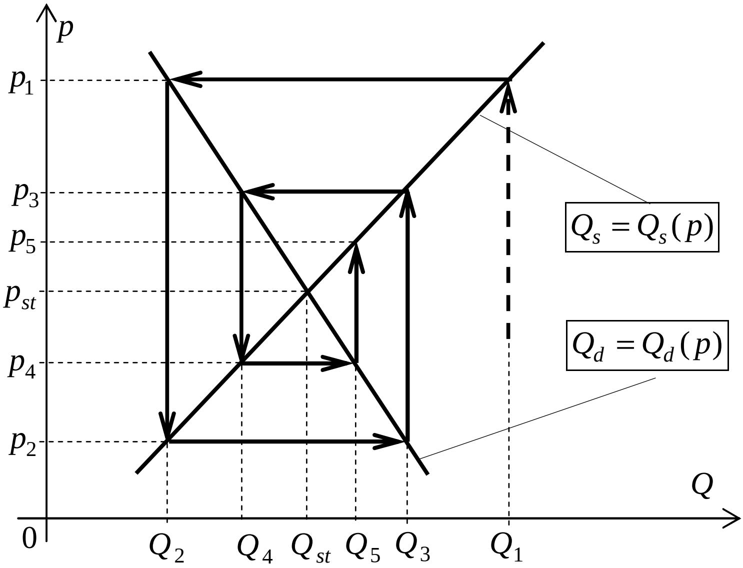


Рис. 72

Аналогічно, рис. 73 відповідає випадку $k>1$ (нестійка модель). Процес пошуку рівноважної ціни є розбіжним і відображається павутиною (спіраллю), що розкручується від точки рівноваги $(Q_{st}\,;\,p_{st})$, яка є ***нестійким фокусом***.

Зауваження 4. На збіжність чи розбіжність павутинної моделі значний вплив здійснюють еластичності попиту та пропозиції.

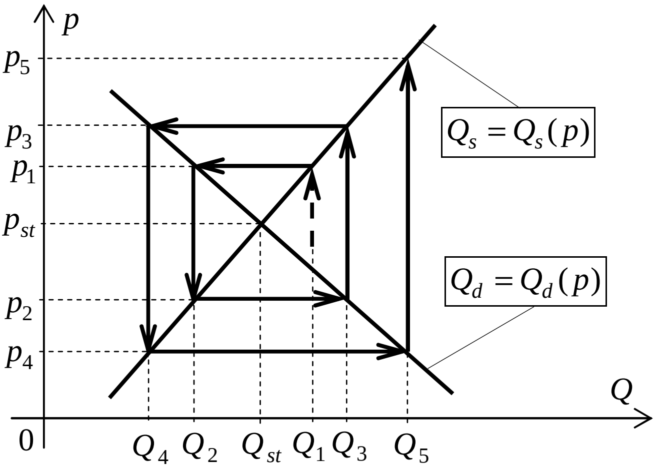


Рис. 73

Зауваження 5. На практиці при $k > 1$ необмежене зростання коливань не спостерігається, оскільки при значних відхиленнях від рівноваги лінійний вигляд залежностей попиту і пропозиції від ціни стає нереалістичним. У більш адекватній нелінійній павутинній моделі при цій умові $k > 1$ встановлюються коливання хоча й великої, проте скінченної амплітуди.

Приклад 2. Для павутинної моделі ринку $p_n = -k\, p_{n-1} + a$ задано, що $a = 3{,}6$; $k = 0{,}8$. Знайти частинний розв'язок $p_{чn}$, який задовольняє початковій умові $p_0 = 2{,}5$.

□ Павутинна модель набуває вигляду: $p_n = -0{,}8\, p_{n-1} + 3{,}6$.

Стаціонарний частинний розв'язок – рівноважна ціна $p_{st}$ – визначається за формулою $p_{st} = a/(1+k)$: $p_{st} = 3{,}6/(1+0{,}8) = 2$.

Загальний розв'язок $p_n$ неоднорідного рівняння має вигляд:

$$p_n = C(-k)^n + p_{st} = C(-0{,}8)^n + 2\,.$$

Відповідне значення довільної сталої $C$ знайдемо з початкової умови: $p_0 = 2{,}5$: $C(-0{,}8)^0 + 2 = 2{,}5$; $C = 0{,}5$.

Отже, шуканий частинний розв’язок $p_{чп}$ має затухаючий коливальний характер: $p_{чп} = 0{,}5\,(-0{,}8)^n + 2$, $n = 0,1,2,\ldots$. ■

Динамічна модель Леонтьєва міжгалузевого балансу.

Розглянута раніше статична модель Леонтьєва міжгалузевого балансу записується у вигляді матричного рівняння:

$$\boxed{X = AX + Y}, \text{ де } X^T = (x_1\, x_2 \ldots x_m); \; Y^T = (y_1\, y_2 \ldots y_m);$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тут $m$ − кількість галузей у господарстві; $X$ – вектор-план валового випуску; $Y$ – вектор кінцевих продуктів; $A$ – матриця прямих витрат; $a_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) - коефіцієнти прямих витрат, що задають витрати продукції $i$-ї галузі на виробництво одиниці продукції $j$-ї галузі..

У цій моделі всі величини покладають осередненими за деякий проміжок часу і «одномоментними». Насправді вектор-план – валовий продукт, що призначений для внутрішнього і кінцевого споживання в $n$-му періоді часу ($n = 0,1,2,\ldots$) – визначається не поточним валовим випуском $X_n$, а випуском $X_{n+1}$ у наступний ($n+1$)-й період. Це запізнення обумовлене багатьма факторами, зокрема інерцією планування та налаштування виробництва, необхідністю мобілізації внутрішніх ресурсів, затримкою транспортування сировини й енергоносіїв та ін.

З урахуванням запізнення система рівнянь міжгалузевого балансу в припущенні про сталість частки внутрішнього споживання кожної галузі набуває вигляду:

$$\boxed{X_{n+1} = AX_n + Y_n}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Маємо ***динамічну модель Леонтьєва з дискретним часом*** –

систему лінійних різницевих рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

***Головна задача міжгалузевого балансу***, що розв'язується з використанням динамічної моделі Леонтьєва, полягає у знаходженні зміни в часі $n = 0,1,2,...$ вектора-плану $X_n$, який при відомій матриці прямих витрат $A$ забезпечує задану динаміку вектора кінцевих продуктів $Y_n$, $n = 0,1,2,...$.

Якщо в початковий період часу $n = 0$ задано значення вектора валового випуску $X_0$, то відповідний частинний розв'язок системи лінійних різницевих рівнянь можна подати у вигляді:

$$\boxed{X_n = A^n X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} Y_k}, \quad n = 1,2,....$$

Зауваження 6. При умові $Y_n = Y_0 = const$, $n = 0,1,2,...$ розв'язок $X = (E - A)^{-1} Y_0$ статичної моделі Леонтьєва служить стаціонарним частинним розв'язком динамічної моделі.

Зауваження 7. При певних умовах найбільше власне число матриці $(E - A)^{-1}$ визначає максимально можливий темп зростання економіки, а відповідний власний вектор характеризує необхідні для цього міжгалузеві пропорції.

Приклад 3. Нехай економічна система складається з трьох галузей виробництва: $m = 3$. Для динамічної моделі Леонтьєва відома матриця прямих витрат $A$, а в початковий період часу $n = 0$ задано значення вектора валового випуску $X_0$ і вектора кінцевих продуктів $Y_0$. Знайти значення вектора валового випуску $X_3$ в період часу $n = 3$, якщо всі компоненти вектора кінцевого споживання $Y_n$ збільшуються на 20% за кожний період, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}; \quad X_0 = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}; \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

□ З умови задачі випливає, що динаміка вектора кінцевих продуктів має вигляд: $Y_n = Y_0 \cdot 1{,}2^n$, $n = 0,1,2,\dots$. Тоді

$$X_3 = A^3 X_0 + \sum_{k=0}^{2} A^{3-k-1} Y_k = A^3 X_0 + A^2 Y_0 + A Y_1 + Y_2 .$$

Проведемо обчислення:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}19 & 0{,}13 \\ 0{,}13 & 0{,}17 & 0{,}11 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}19 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0{,}107 & 0{,}132 & 0{,}105 \\ 0{,}087 & 0{,}11 & 0{,}084 \\ 0{,}126 & 0{,}147 & 0{,}104 \end{pmatrix};$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot 1{,}2^1 = \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \\ 48 \end{pmatrix}; \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot 1{,}2^2 = \begin{pmatrix} 144 \\ 72 \\ 57{,}6 \end{pmatrix};$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0{,}107 & 0{,}132 & 0{,}105 \\ 0{,}087 & 0{,}11 & 0{,}084 \\ 0{,}126 & 0{,}147 & 0{,}104 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}18 & 0{,}19 & 0{,}13 \\ 0{,}13 & 0{,}17 & 0{,}11 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}19 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 60 \\ 48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 144 \\ 72 \\ 57{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 272{,}2 \\ 174{,}3 \\ 211{,}3 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, у разі зазначеного темпу зростання кінцевого продукту на 20% за кожний період необхідно через три часові періоди збільшити компоненти валового випуску відповідно на

$$\frac{272{,}2-200}{200} \cdot 100\% = 36{,}1\%, \quad \frac{174{,}3-100}{100} \cdot 100\% = 74{,}3\%,$$

$$\frac{211{,}3-100}{100} \cdot 100\% = 111{,}3\%$$

порівняно з їх початковими значеннями. ■

## 2.8. Контрольні запитання

1. Що таке вектор нормалі площини? Які його координати?
2. Наведіть основні типи рівняння площини.
3. Які можливі випадки розташування площини відносно координатних осей в залежності від рівності нулю коефіцієнтів загального рівняння?
4. Як з'ясувати, що точка належить площині?
5. Який кут ми вважаємо кутом між двома площинами?
6. Як обчислюється кут між площинами?
7. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
8. Як обчислюється відстань від точки до площини?
9. Як знайти точку перетину трьох площин?
10. Що таке напрямний вектор прямої?
11. Наведіть основні типи рівняння прямої у просторі.
12. Як отримати параметричні рівняння прямої з її канонічного рівняння?
13. Як обчислюється кут між прямими у просторі?
14. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.
15. Як обчислюється кут між прямою і площиною?
16. Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.
17. Як знаходиться відстань між непаралельними прямими?
18. Як знаходиться відстань від точки до прямої у просторі?
19. Як знайти точку перетину прямої та площини?
20. Яка поверхня називається сферою? Наведіть канонічне рівняння сфери та рівняння сфери зі зміщеним центром.
21. Які лінії буде отримано, якщо сферу перерізати площинами?
22. Запишіть загальне рівняння поверхні другого порядку.
23. Яка поверхня називається циліндричною? Запишіть канонічні рівняння еліптичного, гіперболічного, параболічного циліндрів.
24. Яка фігура знаходиться в осьовому перерізі циліндричної поверхні?
25. Яка поверхня називається конічною? Наведіть канонічне рівняння конуса другого порядку.

26. Як утворюється поверхня обертання? Як знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї ж площини?
27. Запишіть канонічні рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, еліптичного та гіперболічного параболоїдів. Які з цих поверхонь є лінійчатими?
28. Проаналізуйте канонічні рівняння вивчених поверхонь, назвіть їх подібності та відмінності.
29. Визначить ознаки за якими можна впевнено стверджувати що задана поверхня конічна або циліндрична?
30. Наведіть означення функції $n$ змінних та її області визначення.
31. Як знайти природну область визначення (область допустимих значень) функції багатьох змінних?
32. Дайте означення функції двох змінних та її області визначення. Який геометричний зміст цих понять? Наведіть приклади графіків функцій двох змінних.
33. Що називається лінією рівня функції двох змінних? Поверхнею рівня функції трьох змінних? Наведіть приклади ліній та поверхонь рівня.
34. Як Ви розумієте поняття гладкої лінії?
35. Запишіть вирази для повного та частинних приростів функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M_0$.
36. Наведіть означення частинних похідних функції багатьох змінних. У чому полягає геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних?
37. Як за правилами диференціювання функції однієї змінної знаходяться частинні похідні функції багатьох змінних?
38. Що таке частинні та повний диференціали функції $n$ змінних?
39. Сформулюйте необхідні та достатні умови диференційованості функції двох змінних.
40. У чому полягає інваріантність форми повного диференціала?
41. Як застосовується повний диференціал у наближених обчисленнях?
42. За якими формулами проводиться диференціювання складених функцій багатьох змінних? Запишіть формулу повної похідної.
43. За якими формулами проводиться диференціювання неявно заданих функцій однієї і двох змінних?
44. Дайте означення похідних і диференціалів вищих порядків.

45. Сформулюйте умови незалежності мішаної частинної похідної від порядку диференціювання.
46. Наведіть означення дотичної площини і нормальної прямої до поверхні.
47. Запишіть загальне рівняння дотичної площини і канонічні рівняння нормальної прямої до поверхні, що задана явно. Який вигляд набувають ці рівняння у випадку неявного задання поверхні?
48. У чому полягає геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних?
49. Дайте означення похідної за напрямом і градієнта функції трьох змінних.
50. Запишіть формули для обчислення похідної за напрямом і градієнта у прямокутних координатах.
51. Як зв’язані похідна за напрямом і градієнт, градієнт і вектор нормалі до поверхні рівня?
52. Запишіть формулу Тейлора для функції $n$ змінних.
53. Наведіть означення точки локального мінімуму (максимуму) функції багатьох змінних.
54. Сформулюйте необхідні умови локального екстремуму.
55. Яка точка називається стаціонарною?
56. Сформулюйте достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.
57. Як ставиться задача на умовний екстремум для функції двох змінних?
58. У чому полягає метод множників Лагранжа для знаходження умовного екстремуму функції двох змінних?
59. Як знаходяться найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області?
60. Як за методом найменших квадратів знаходяться коефіцієнти шуканої лінійної функції?
61. Наведіть приклади економічних задач на екстремум.
62. Що називається числовим рядом? Наведить приклади.
63. Що називається частковою сумою, загальним членом, сумою, залишком ряду?
64. Який ряд вважають збіжним? Розбіжним?
65. У чому полягає необхідна ознака збіжності та відповідна достатня ознака розбіжності ряду?
66. Сформулюйте властивості дій з рядами.
67. Який числовий ряд називається знакододатним?

68. У чому полягає інтегральна ознака Коші? Як при цьому оцінюються сума і залишок збіжного знакододатного ряду?
69. В яких випадках доцільно застосовувати інтегральну ознаку Коши?
70. При яких умовах збігаються і розбігаються найпоширеніші еталонні ряди – узагальнений гармонічний ряд і ряд геометричної прогресії?
71. Сформулюйте основну ознаку порівняння.
72. У чому полягає гранична ознака порівняння? Як треба підбирати відповідний еталонний ряд?
73. Сформулюйте ознаку Даламбера.
74. Коли краще застосовувати ознаку Даламбера, щоб не натрапити на випадок невизначеності?
75. У чому полягає радикальна ознака Коші?
76. Коли краще застосовувати радикальну ознаку, щоб не натрапити на випадок невизначеності?
77. Який числовий ряд називається знакозмінним?
78. Що таке знакопочерговий ряд (ряд Лейбниця)?
79. У чому полягає ознака Лейбниця збіжності знакопочергового ряду?
80. Який знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним? Умовно збіжним?
81. Сформулюйте достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.
82. В якому порядку краще досліджувати знакозмінний ряд на абсолютну й умовну збіжність?
83. Наведіть приклади застосування рядів у економічних дослідженнях.
84. Опишіть наступні застосування диференціальних рівнянь в економічних задачах: неокласична модель зростання, модель природного зростання випуску, зростання випуску в умовах конкуренції, динаміка ринкових цін.
85. Опишіть наступні застосування різницевих рівнянь в економічних задачах: складні відсотки, економічна модель розвитку Самюельсона – Хікса, павутинна модель ринку, динамічна модель Леонтьєва.

# СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ, 2010. – 448 с.

3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 383 с.

4. Бугір М. К. Математика для економістів. – К.: Академія, 2003. – 520 с.

5. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: У 2 ч. Ч.1. – К.: КНЕУ, 2001. – 546 с. Ч.2. – К.: КНЕУ, 2002. – 451 с.

6. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Математичний практикум. – К.: КНЕУ, 2004. – 682 с.

7. Васильченко І. П. Вища математика для економістів. – К.: Знання-Прес, 2002. – 454с.

8. Грисенко М. В. Математика для економістів: методи й моделі, приклади й задачі. – К.: Либідь. 2007. – 720 с.

9. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: Высш. шк., 1997. – Ч.1. – 304 с. Ч.2. – 416 с.

10. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Приклади і задачі. – К.: Академія, 2003. – 624с.

11. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.

12. Клюшин В. Л. Высшая математика для экономистов. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 448 с.

13. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов. – СПб.: Питер, 2005. – 464 с.

14. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 471 с.

15. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика. Практикум. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.

16. Крушевский А. В. Справочник по экономико-математическим моделям и методам. – К.: Техника, 1982. – 208 с.

17. Липовик В. В. Вища математика для економістів. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2003. – 263с.

18. Лопатников Л. И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. – М.: Дело, 2003. – 520 с.

19. Лютий О. І., Макаренко О. І. Збірник задач з вищої математики: – К.: КНЕУ, 2003. – 305 с.

20. Макаренко В. О. Вища математика для економістів. – К.: Знання, 2008. – 517 с.

21. Макаров С. И. Математика для экономистов. – М.: КНОРУС, 2008. – 264 с.

22. Малярець Л. М., Ігначкова А. В. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2006. – 544 с.

23. Міхайленко В. М., Федоренко Н. Д. Збірник прикладних задач з вищої математики. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.

24. Пастушенко С. М., Підченко Ю. П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.

25. Сборник задач по высшей математике для экономистов / Под ред. В. И. Ермакова. – М.: Инфра–М, 2003. – 575 с.

26. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В. Математика в экономике: В 2-х ч. Ч. 1. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 224 с.

27. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В., Шандра И. Г. Математика в экономике: В 2-х ч. Ч. 2. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 376 с.

28. Справочник по математике для экономистов / Под ред. В. И. Ермакова. – М.: Высш. шк., 1987. – 336 с.

29. Станішевський С. О. Вища математика. – Х.: ХНАМГ, 2005.–270 с.

30. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. – Х.: Рубікон, 1999.–320 с.

31. Травкін Ю. І., Малярець Л. М. Математика для економістів. – Х.: ВД «ІНЖЕК», 2005. – 816 с.

32. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.

33. Экономико-математический энциклопедический словарь / Глав. ред. В. И. Данилов-Данильян. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 688 с.

## З М І С Т

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**Колосов** Анатолій Іванович,
**Якунін** Анатолій Вікторович,
**Ситникова** Юлія Валеріївна

# ВИЩА МАТЕМАТИКА
## для економістів
## у двох модулях

# МОДУЛЬ 2

## КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”)

За авторською редакцією
Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

Комп’ютерне верстання *А. В. Якунін*
Дизайн обкладинки *Ю. В. Ситникова*

План 2014, поз. 48 Л
Підп. до друку 16.06.2015 Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 15,0
Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства ім. О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014