$y(x_0) = y_0$, де $x_0 = a$. Нехай відрізок $[a;b]$ розбитий на n рівних частин одновимірною ***сіткою***: $a = x_0 < x_1 < \; ... \; < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$, де $x_i = x_0 + ih$ – i-й ***вузол*** ($i = 0,1,...,n$), $h = (b-a)/n$ – ***крок сітки***. Потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ поставленої задачі Коші на відрізку $[a;b]$ у вигляді наближених значень $\tilde{y}_i$, $i = \overline{0,n}$ ***сіткової функції*** $y_i = y(x_i)$, $i = \overline{0,n}$.

Згідно з методом Ейлера у кожному вузлі x_{i-1}, $i = 1,...,n$ замінимо похідну y' її ***скінченно різницевою апроксимацією вперед***:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \;\Rightarrow\; y'_{i-1} \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \approx \frac{\Delta \tilde{y}_i}{\Delta x_i} = \frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_{i-1}}{h},$$

а праву частину $f(x,y)$ обчислимо в точці $(x_{i-1};\tilde{y}_{i-1})$. У результаті отримаємо ***різницеве рівняння***

$$\boxed{\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + h\,f(x_{i-1},\tilde{y}_{i-1})},\; i = 1,2,...,n\;,$$

що є наближенням даного ДР з похибкою порядку h^2 на кожному кроці.

Додаючи початкову умову $\tilde{y}_0 = y_0$, дістанемо ***різницеву задачу Коші***, що апроксимує відповідну диференціальну задачу.

Якщо кожну пару сусідніх точок $M_{i-1}(x_{i-1};\tilde{y}_{i-1})$ і $M_i(x_i;\tilde{y}_i)$, $i = \overline{1,n}$ сполучити відрізком прямої, то шукана інтегральна крива $y = y(x)$, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$, наближено замінюється ***ламаною Ейлера*** $M_0 M_1 M_2 ... M_n$.

<u>Приклад 1</u>. Побудувати ламану Ейлера, що служить апроксимацією інтегральної кривої – розв'язку задачі Коші $y' = x^2 + y$, $y(1) = -2$ на відрізку $[1;2]$. Крок дискретизації $h = 0,2$. Обчислення проводити наближено до трьох десяткових знаків після коми.

□ За умовою $f(x,y) = x^2 + y$; $h = 0,2$; $x_0 = 1$; $y_0 = -2$. Кількість кроків $n = (b-a)/h = (2-1)/0,2 = 5$. Тоді за формулою $\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + h\,f(x_{i-1},\tilde{y}_{i-1})$ маємо:

$$i=1:\ \ x_0=1;\ \ \tilde{y}_0=y_0=-2;\ \ \ f(x_0,\tilde{y}_0)=1-2=-1;$$

$$\tilde{y}_1=\tilde{y}_0+h\,f(x_0,\tilde{y}_0)=-2+0{,}2\cdot(-1)=-2{,}2;$$

$$i=2:\ \ x_1=x_0+h=1+0{,}2=1{,}2;\ \ \ f(x_1,\tilde{y}_1)=(1{,}2)^2-2{,}2=$$

$$=-0{,}76;\ \ \tilde{y}_2=\tilde{y}_1+h\,f(x_1,\tilde{y}_1)=-2{,}2+0{,}2\cdot(-0{,}76)=-2{,}352.$$

Продовжуючи обчислення до кроку $i=n=5$, запишемо отримані результати у вигляді таблиці:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$\tilde{y}_i$	-2	$-2{,}2$	$-2{,}352$	$-2{,}43$	$-2{,}4$	$-2{,}24$
$f(x_i,\tilde{y}_i)$	-1	$-0{,}76$	$-0{,}392$	0,13	0,836	1,763

Ламана Ейлера $M_0M_1M_2...M_5$ показана на рис. 20. ■

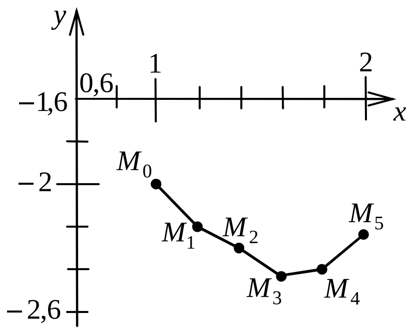

Рис. 20

Зауваження 1. Описаний метод Ейлера – ***явний*** (нове значення $\tilde{y}_i$ обчислюється безпосередньо) і ***однокроковий*** (на кожному кроці використовується значення розв'язку тільки в одній попередній точці x_{i-1}) зі сталою довжиною кроку h. Метод Ейлера є досить грубим і використовується, в основному, для отримання орієнтовних значень.

1.5.6. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням n***-го порядку*** $(n\geq 1)$ називається рівняння вигляду

$$\boxed{y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=f(x)},$$

де $y = y(x)$ − шукана функція аргументу x; $a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ та $f(x)$ − відомі неперервні функції від x (або сталі), причому $a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ − ***коефіцієнти***, $f(x)$ − ***права частина***. Тобто, таке ДР є лінійним відносно шуканої функції $y = y(x)$ та всіх її похідних.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним*** ДР (ЛОДР) (***лінійним рівнянням з нульовою правою частиною***), у протилежному випадку, коли $f(x) \neq 0$, − ***лінійним неоднорідним*** (ЛНДР) (***лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною***).

Загальні властивості лінійних ДР вищих порядків розглянемо на прикладі ***лінійного ДР другого порядку***

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)},$$

де $p(x)$ і $q(x)$ − коефіцієнти; $f(x)$ − права частина.

Система функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ $(n \geq 2)$ називається ***лінійно залежною*** в інтервалі $(a;b)$, якщо існують сталі числа $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, не всі рівні нулю, такі, що для відповідної лінійної комбінації у кожній точці $x \in (a;b)$ виконується рівність

$$\boxed{\mu_1 y_1(x) + \mu_2 y_2(x) + ... + \mu_n y_n(x) \equiv 0}.$$

Якщо ця тотожність виконується лише за умови, коли всі $\mu_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, то система функцій $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ називається ***лінійно незалежною*** в інтервалі $(a;b)$.

У випадку двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ умову лінійної залежності можна подати у вигляді

$$y_1(x)/y_2(x) = C = const, \ \forall x \in (a;b).$$

Наприклад, а) функції $y_1(x) = \ln x$ і $y_2(x) = \lg x$ лінійно залежні на півпрямій $(0;+\infty)$, оскільки

$$y_1(x)/y_2(x) = \ln x / \lg x = \ln 10 = const;$$

б) функції $y_1(x) = \sin x$ і $y_2(x) = \sin 2x$ лінійно незалежні на множині дійсних чисел R, оскільки

$$y_1(x)/y_2(x)=\sin x/\sin 2x=1/(2\cos x)\neq const\,.$$

1.5.7. Структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку. Характеристичне рівняння

На деякому проміжку $(a;b)$ розглянемо систему n функцій $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$, що є частинними розв'язками деякого одного ЛОДР n-го порядку $(n\geq 2)$ і тому n разів диференційовані. Сформуємо функціональний визначник

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

що називається ***визначником Вронського*** (***вронськіаном***) даної системи.

Ознаку лінійної залежності чи незалежності такої системи виражає наступна

<u>теорема 1</u>. *Якщо вронськіан $W(x)$ системи n частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ якого-небудь одного ЛОДР n-го порядку дорівнює нулю в деякій точці $x_0\in(a;b)$, то ця система розв'язків – лінійно залежна, причому вронськіан $W(x)$ тотожно рівний нулю на всьому проміжку $(a;b)$. Якщо вронськіан $W(x)$ системи $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ відмінний від нуля в деякій точці $x_0\in(a;b)$, то ця система розв'язків – лінійно незалежна, причому вронськіан $W(x)$ не перетворюється в нуль у жодній точці проміжку $(a;b)$.* (Без доведення).

Для даного ЛОДР n-го порядку будь-яка лінійно незалежна система n його частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ називається ***фундаментальною***.

Структуру загального розв'язку ЛОДР другого порядку відображає така

<u>теорема 2</u>. *Якщо функції* $y_1(x), y_2(x)$ *утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків ЛОДР другого порядку, то їх лінійна комбінація*

$$\boxed{\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2},$$

де C_1 *і* C_2 *− довільні сталі, служить загальним розв'язком цього рівняння*.

□ Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ − фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Перевіримо, чи їх лінійна комбінація $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ також є розв'язком (задовольняє ЛОДР). Для цього підставимо функцію $\bar{y}$ та її похідні у рівняння:

$$\bar{y}' = C_1 y_1' + C_2 y_2'; \quad \bar{y}'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'';$$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1(y_1'' +$$

$$+ py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Далі покажемо, що для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'$$

знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2.

Справді, для визначення C_1 і C_2 дістаємо лінійну алгебраїчну систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0; \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0', \end{cases}$$

визначником якої служить вронськіан

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Для фундаментальної системи $y_1(x)$, $y_2(x)$ вронськіан відмінний від нуля $W(x_0) \neq 0$. Тому система лінійних рівнянь відносно C_1 і C_2 завжди має і причому єдиний розв'язок.

Отже, $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ − загальний розв'язок ЛОДР. ■

Наприклад, частинними розв'язками ЛОДР другого порядку $y'' + y = 0$ є функції $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$. (Перевірте це самостійно). Їх вронськіан відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Тому ці розв'язки $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$ − лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему. Отже, загальний розв'язок ЛОДР можна подати у вигляді

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x .$$

Зауваження 1. Очевидний нульовий розв'язок ЛОДР $y = 0$ не утворює фундаментальної системи з довільними іншими частинними розв'язками, оскільки при цьому вронськіан тотожно рівний нулю. (Перевірте це самостійно).

Для ***ЛОДР*** n***-го порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 , \;\; a_i = const \in R , \; i = \overline{1,n}}$$

Ейлером розроблено загальний метод його розв'язування шляхом побудови фундаментальної системи та на її основі загального розв'язку. Розглянемо його на прикладі ***ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***:

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0 , \;\; p = const \in R ; \; q = const \in R} .$$

Частинні розв'язки шукаємо у вигляді експоненти $y = e^{kx}$, де k − невідомий сталий коефіцієнт. Підставимо цю функцію $y = e^{kx}$ та її похідні $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ у рівняння і дістанемо $(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$. Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то для визначення k отримуємо співвідношення $\boxed{k^2 + pk + q = 0}$, які називають ***харак-***

теристичним рівнянням даного ЛОДР.

Характеристичне рівняння є квадратним відносно k і на множині комплексних чисел завжди має два розв'язки k_1 і k_2. При цьому можливі три випадки, в залежності від знака дискримінанта $\boxed{D = p^2 - 4q}$.

Випадок 1. $D > 0$. Обидва корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1 \neq k_2$: $k_{1,2} = \left(-p \pm \sqrt{D}\right)/2$. Тоді $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$ − лінійно незалежні розв'язки, що утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок має вигляд $\boxed{\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок $y'' - 5y' + 6y = 0$.

$$\square\ k^2 - 5k + 6 = 0;\ D = 25 - 24 = 1 > 0;$$

$$k_1 = 3,\ k_2 = 2;\ \bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}. \quad \blacksquare$$

Випадок 2. $D = 0$. Корені k_1 і k_2 − дійсні рівні числа $k_1 = k_2 = k = -p/2$. Тобто, $k = -p/2$ − один корінь кратності $r = 2$. Тоді $y_1 = e^{kx}$ − частинний розв'язок. Знайдемо другий лінійно незалежний з ним розв'язок y_2. Скористаємося методом збурень.

Вважатимемо, що k_1 і k_2 відрізняються на нескінченно малу величину Δk: $k_1 = k$; $k_2 = k + \Delta k$; $\Delta k \to 0$. Таким чином, повертаємося до випадку 1. Тоді лінійна комбінація $y_{2*} = \left(e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx}\right)/\Delta k$ − теж частинний розв'язок. Переходячи у y_{2*} до границі при $\Delta k \to 0$, дістаємо невизначеність типу $0/0$, що розкривається за правилом Лопіталя:

$$y_2 = \lim_{\Delta k \to 0} y_{2*} = \lim_{\Delta k \to 0} \left(e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx}\right)/\Delta k = \left|0/0\right| =$$

$$= \lim_{\Delta k \to 0} (e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx})'/(\Delta k)' = \lim_{\Delta k \to 0} e^{(k+\Delta k)x} x = x e^{kx}.$$

Перевіримо, що одержана функція $y_2 = x\, e^{kx}$ є розв'язком ЛОДР:

$$y_2' = e^{kx} + kxe^{kx}; \quad y_2'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2xe^{kx} = 2ke^{kx} + k^2xe^{kx};$$

$$2ke^{kx} + k^2xe^{kx} + p(e^{kx} + kxe^{kx}) + qxe^{kx} = e^{kx}(k^2x + 2k +$$

$$+ p + pkx + qx) = \left|k = -p/2\right| = e^{kx}((-p/2)^2x + 2(-p/2) +$$

$$+ p + p(-p/2)x + qx) = -(1/4)e^{kx}(p^2 - 4q)x =$$

$$= \left|p^2 - 4q = D = 0\right| = -xe^{kx} \cdot 0 = 0.$$

До того ж, вронськіан системи $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x\,e^{kx}$ відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & x\,e^{kx} \\ k\,e^{kx} & e^{kx} + kx\,e^{kx} \end{vmatrix} = e^{2kx} \neq 0.$$

Тому ці розв'язки $y_1 = e^{kx}$ і $y_2 = x\,e^{kx}$ – лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему.

Отже, загальний розв'язок ЛОДР можна подати у вигляді

$$\boxed{\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\,e^{kx} + C_2x\,e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2x)}.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти загальний розв'язок $y'' - 2y' + y = 0$.

□ $D = 4 - 4 = 0$, $k_1 = k_2 = \mathrm{k} = 1$; $\bar{y} = e^x(C_1 + C_2x)$. ■

<u>Випадок 3</u>. $D < 0$. Характеристичне рівняння має два комплексно-спряжені корені $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, де $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{-D}/2$, $D = p^2 - 4q < 0$, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Тоді $y_{1к} = e^{k_1x} = e^{(\alpha + \beta i)x}$, $y_{2к} = e^{k_2x} = e^{(\alpha - \beta i)x}$ – комплексні лінійно незалежні розв'язки. Їх лінійна комбінація

$$\boxed{\bar{y}_к = C_1e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2e^{(\alpha - \beta i)x}}$$

є комплексним загальним розв'язком.

Але ДР має дійсні коефіцієнти, тому бажано мати розв'язки в дійсній формі. На основі формули Ейлера маємо:

$$y_{1к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x); \quad y_{2к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Можна показати, що *для комплекснозначної функції, яка є розв'язком диференціального рівняння, її уявна та дійсна частини також будуть його розв'язками*. (Зробіть це самостійно).

Таким чином, дістаємо лінійно незалежні дійсні частинні розв'язки $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, що утворюють фундаментальну систему. Дійсним загальним розв'язком є їх лінійна комбінація

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x =$$

$$= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти загальний розв'язок $y'' + 8y' + 25y = 0$.

$$\square\ k^2 + 8k + 25 = 0;\ D = 64 - 100 = -36 < 0;$$

$$k_{1,2} = (-8 \pm \sqrt{-36})/2 = (-8 \pm 6\sqrt{-1})/2 = (-8 \pm 6i)/2 = -4 \pm 3i;$$

$$\alpha = -4;\ \beta = 3;\quad \bar{y} = e^{-4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).\quad \blacksquare$$

<u>Приклад 4</u>. Розв'язати задачу Коші:

а) $y'' + 25y' = 0;\quad y(1) = -2;\ y'(1) = 0;$

б) $y'' - 9y = 0;\quad y(0) = 3;\ y'(0) = -3;$

в) $y'' + 4y' + 4y = 0;\quad y(0) = 1;\ y'(0) = 3;$

г) $y'' + 16y = 0;\quad y(\pi/2) = 6;\ y'(\pi/2) = 2;$

д) $y'' + 8y' + 20y = 0;\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 12.$

□ а) Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 + 25k = 0;\ k(k+25) = 0;\ k_1 = 0;\ k_2 = -25.$$

Оскільки корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1 \neq k_2$, то маємо випадок 1. У відповідній формі записуємо загальний розв'язок: $\bar{y} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-25x} = C_1 + C_2 e^{-25x}$.

Конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2 знаходимо, враховуючи початкові умови:

$$\bar{y}' = -25C_2e^{-25x};$$

$$\begin{matrix} y(1) = -2: \\ y'(1) = 0: \end{matrix} \quad \begin{cases} -2 = C_1 + C_2e^{-25\cdot 1}; \\ \quad 0 = -16C_2e^{-25\cdot 1}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 0; \\ C_1 = -2 - 0 = -2. \end{cases}$$

Тоді $y_K = -2$ − розв'язок задачі Коші.

б) $k^2 - 9 = 0;\ k^2 = 9;\ k_{1,2} = \pm 3;\ \bar{y} = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x};$

$$\bar{y}' = 3C_1e^{3x} - 3C_2e^{-3x}; \quad \begin{cases} 3 = C_1e^{3\cdot 0} + C_2e^{-3\cdot 0}; \\ -3 = 3C_1e^{3\cdot 0} - 3C_2e^{-3\cdot 0}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3; \\ C_1 - C_2 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = 2; \end{cases} \quad y_K = e^{4x} + 2e^{-4x}.$$

в) $k^2 + 4k + 4 = 0;\ D = 16 - 16 = 0;\ k_1 = k_2 = k = -2;$

$$\bar{y} = e^{-2x}(C_1 + C_2x);\ \bar{y}' = C_2e^{-2x} - 2(C_1 + C_2x)e^{-2x};$$

$$\begin{cases} 1 = e^{-2\cdot 0}(C_1 + C_2\cdot 0); \\ 3 = C_2e^{-2\cdot 0} - 2(C_1 + C_2\cdot 0)e^{-2\cdot 0}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 - 2C_1 = 3;\ C_2 = 5; \end{cases}$$

$$y_К = e^{-2x}(1 + 5x).$$

г) $k^2 + 16 = 0;\ k^2 = -16;\ k_{1,2} = \pm 4i;\ \alpha = 0;\ \beta = 4;$

$$\bar{y} = e^{0x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x;$$

$$\bar{y}' = -4C_1\sin 4x + 4C_2\cos 4x;$$

$$\begin{matrix} y(\pi/2) = 6: \\ y'(\pi/2) = 2: \end{matrix} \quad \begin{cases} 6 = C_1\cos(4\cdot\pi/2) + C_2\sin(4\cdot\pi/2); \\ 2 = -4C_1\sin(4\cdot\pi/2) + 4C_2\cos(4\cdot\pi/2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 = C_1; \\ 2 = 4C_2;\ C_2 = 1/2; \end{cases} \quad y_K = 6\cos x + (1/2)\sin 4x.$$

д) $k^2 + 8k + 20 = 0;\ D = 64 - 80 = -16 < 0;$

$$k_{1,2} = (-4 \pm \sqrt{-16})/2 = (-4 \pm 4i)/2 = -2 \pm 2i;\quad \alpha = -2;\ \beta = 2;$$

$$\bar{y} = e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\,; \quad \bar{y}' = -2e^{-2x}(C_1 \cos 2x +$$

$$+ C_2 \sin 2x) + e^{-2x}(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x)\,;$$

$$\begin{cases} 0 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0); \\ 12 = -2e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0(-2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1; \\ 12 = -2C_1 + 2C_2;\ C_2 = 6; \end{cases} \quad y_K = 6e^{-2x} \sin 2x\,. \ \blacksquare$$

1.5.8. Структура загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Принцип суперпозиції

Структуру загального розв’язку ЛНДР другого порядку визначає така

теорема 1. *Загальний розв’язок ЛНДР другого порядку*

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)}\,,$$

можна подати у вигляді суми загального розв’язку $\bar{y}$ *відповідного ЛОДР*

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0}$$

і якого-небудь частинного розв’язку y_* *ЛНДР*: $\boxed{y = \bar{y} + y_*}$.

□ Перевіримо, що функція $y = \bar{y} + y_*$ є розв’язком ЛНДР:

$$y' = \bar{y}' + y_*'\,;\ y'' = \bar{y}'' + y_*''; \ \ \bar{y}'' + y_*'' + p(\bar{y}' + y_*') + q(\bar{y} + y_*) =$$

$$= (\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y}) + (y_*'' + py_*' + qy_*) = 0 + f(x) = f(x)\,.$$

Оскільки $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де $y_1(x), y_2(x)$ – фундаментальна система частинних розв’язків ЛОДР, то розв’язок $y = \bar{y} + y_* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_*$ містить дві довільні сталі C_1 і C_2. Можна показати (зробіть це самостійно, аналогічно доведенню теореми про структуру загального розв’язку ЛОДР), що для довільних початкових умов $y(x_0) = y_0;\ \ y'(x_0) = y_0'$ знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2. Тобто розв'язок $y = \bar{y} + y_*$ є загальним. ■

Принцип суперпозиції розв'язків ЛНДР другого порядку відображає наступна

теорема 2. *Якщо у ЛНДР другого порядку*

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)}$$

права частина є сумою двох функцій $\boxed{f(x) = f_1(x) + f_2(x)}$, *то його частинний розв'язок також можна подати у вигляді суми*

$\boxed{y_* = y_{*1} + y_{*2}}$, *де* y_{*1} *і* y_{*2} *– частинні розв'язки рівнянь*

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)} \text{ і } \boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)}$$

з тією ж самою частиною ліворуч і відповідними функціями $f_1(x)$, $f_2(x)$ *праворуч.*

(Доведіть самостійно безпосередньою підстановкою).

1.5.9. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо ***ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$\boxed{y'' + py' + qy = f(x), \quad p = const \in R; \ q = const \in R},$$

де права частина має ***спеціальний вигляд***

$$\boxed{f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)}.$$

Тут $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ − многочлени відповідно степеня n і m; a і b − дійсні сталі, з яких формується ***характерне комплексне число*** $z = a + bi$.

Зауваження 1. m і n − довільні невід'ємні цілі числа, $m \geq 0$, $n \geq 0$; a і b − довільні дійсні числа, в тому числі $a = 0,\ b = 0$.

Згідно з ***методом невизначених коефіцієнтів*** *структура ча-*

стинного розв'язку y_* ЛНДР формується за виглядом правої частини $f(x)$ з урахуванням того, коренем якої кратності r $(r \geq 0)$ є характерне число $z = a + bi$ для характеристичного рівняння. Невідомі параметри (коефіцієнти) цієї структури знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь, які одержуються прирівнюванням коефіцієнтів при подібних відносно x членах.

Частинний розв'язок має вигляд

$$\boxed{y_* = x^r e^{ax}(\overline{P_s}(x)\cos bx + \overline{Q}_s(x)\sin bx)}\,,$$

де $\overline{P_s}(x)$ і $\overline{Q}_s(x)$ − многочлени степеня $s = \max\{n, m\}$ з невідомими коефіцієнтами.

<u>Приклад 1.</u> Записати структуру частинного розв'язку y_*:

$y''+4y'+20y = e^{-2x}(x^2\cos 4x - \sin 4x)$.

□ $y''+4y'+13y = 0$; $k^2 + 4k + 13 = 0$; $D = -36$;

$k_{1,2} = -2 \pm 3i$; $\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{bi} = -2 + 3i$ − корінь

кратності $r = 1$; $s = \max\{2; 0\} = 2$;

$y_* = x^1 e^{-2x}((Ax^2 + Bx + C)\cos 4x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 4x)$,

де A, B, C, D, E, F – невідомі коефіцієнти. ■

<u>Приклад 2.</u> Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''-2y'-3y = e^x(10\cos x - 25\sin x)$.

□ $y''-2y'-3y = 0$; $k^2 - 2k - 3 = 0$; $D = 16$; $k_1 = 3$;

$k_2 = -1$; $\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$; $z = a + bi = 1 + i$ − не є коренем

$(r = 0)$; $s = \max\{0; 0\} = 0$; $y_* = e^x(A\cos x + B\sin x)$;

$y_*' = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) = e^x(A\cos x +$

$+ B\sin x - A\sin x + B\cos x)$; $y_*'' = e^x(A\cos x + B\sin x -$

$- A\sin x + B\cos x) + e^x(-A\sin x + B\cos x - A\cos x - B\sin x) =$

$= e^x(-2A\sin x + 2B\cos x)$;

$$e^x(-2A\sin x+2B\cos x)-2e^x(A\cos x+B\sin x-A\sin x+$$
$$+B\cos x)-3e^x(A\cos x+B\sin x)=e^x(10\cos x-25\sin x)\,|:e^x\neq 0;$$
$$-5A\cos x-5B\sin x=10\cos x-25\sin x;$$
$$\begin{array}{l} \cos x: \\ \sin x: \end{array}\begin{cases}-5A=10; & A=-2; \\ -5B=-25; & B=5;\end{cases}$$

Отже, маємо загальний розв’язок

$$y=\bar{y}+y_*=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+e^x(-2\cos x+5\sin x).\ ■$$

<u>Приклад 3.</u> Розв’язати задачу Коші:

$$y''+2y'+5y=12e^{-x}\sin 2x;\quad y(0)=0;\ y'(0)=5.$$

□ $y''+2y'+5y=0$; $k^2+2k+5=0$; $D=4-20=-16$;

$k_{1,2}=-1\pm 2i$; $\bar{y}=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;

$z=a+bi=-1+2i$ − корінь кратності $r=1$; $s=\max\{0;0\}=0$;

$$y_*=x^1e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x);\quad y_*'=e^{-x}(A\cos 2x+$$
$$+B\sin 2x)-xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+2xe^{-x}(-A\sin 2x+$$
$$+B\cos 2x);\quad y_*''=-2e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+4e^{-x}\times$$
$$\times(-A\sin 2x+B\cos 2x)-3xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)-$$
$$-4xe^{-x}(-A\sin 2x+B\cos 2x);$$
$$-2e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+4e^{-x}(-A\sin 2x+B\cos 2x)-$$
$$-3xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)-4xe^{-x}(-A\sin 2x+B\cos 2x)+$$
$$+2e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)-2xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)+$$
$$+4xe^{-x}(-A\sin 2x+B\cos 2x)+5xe^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)=$$
$$=12e^{-x}\sin 2x\ \ |\div e^{-x}\neq 0;$$
$$-2A\cos 2x-2B\sin 2x-4A\sin 2x+4B\cos 2x-3Ax\cos 2x-$$
$$-3Bx\sin 2x+4Ax\sin 2x-4Bx\cos 2x+2A\cos 2x+$$

$$+2B\sin 2x-2Ax\cos 2x-2Bx\sin 2x-4Ax\sin 2x+$$
$$+4Bx\cos 2x+5Ax\cos 2x+5Bx\sin 2x=12\sin 2x;$$
$$4B\cos 2x-4A\sin 2x=12\sin 2x;$$

$$\begin{array}{c|} \cos 2x \\ \sin 2x \end{array}\ \begin{cases} 4B=0; & B=0; \\ -4A=12; & A=-3; \end{cases}\quad y_*=-3xe^{-x}\cos 2x;$$

$$y=\bar{y}+y_*=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)-3xe^{-x}\cos 2x;$$

$$y'=-e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+2e^{-x}(-C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)-$$
$$-3e^{-x}\cos 2x+3xe^{-x}\cos 2x+6xe^{-x}\sin 2x;$$

$$\begin{array}{l} y(0)=0: \\ y'(0)=5: \end{array}\begin{cases} C_1=0; & C_1=0; \\ -C_1+2C_2-3=5; & C_2=4; \end{cases}$$

Таким чином, маємо розв’язок задачі Коші:

$$y_K=4e^{-x}\sin 2x-3xe^{-x}\cos 2x. \quad \blacksquare$$

Розглянемо більш детально окремі випадки правої частини спеціального вигляду і відповідні форми частинного розв’язку y_* ЛНДР зі сталими коефіцієнтами.

1. Права частина – многочлен степеня n:

$$\boxed{f(x)=P_n(x),\ \ P_n(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+...+A_n}\,.$$

Можливі наступні випадки структури y_* в залежності від того, чи є характерне число $z=a+bi=0+0i=0$ коренем характеристичного многочлена:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює характерному числу $z=0$, тобто $k_1\neq 0,\ k_2\neq 0$, то y_* шукаємо у вигляді многочлена того ж степеня n з невизначеними коефіцієнтами: $\boxed{y_*=\overline{P_n}(x)=\overline{A}_0x^n+\overline{A}_1x^{n-1}+...+\overline{A}_n}$.

б) Якщо один з коренів характеристичного рівняння дорівнює числу $z=0$, наприклад, $k_1=0,\ k_2\neq 0$, то:

$$\boxed{y_* = x\overline{P_n}(x) = \overline{A}_0 x^{n+1} + \overline{A}_1 x^n + ... + \overline{A}_n x}\,.$$

<u>Приклад 4.</u> Знайти загальний розв'язок:

а) $y''+3y'+2y = 1 - x^2$;   б) $7y''-y'=12x$.

□ а) $y''+3y'+2y = 0$; $k^2+3k+2=0$; $D=9-8=1$;

$$k_1=-1;\; k_2=-2;\; \overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x};$$

$$z=a+bi=0+0i=0 \text{ – не є коренем; } n=2;$$

$$y_* = Ax^2+Bx+C;\;\; y_*'=2Ax+B;\; y_*''=2A;$$

$$2A+3(2Ax+B)+2(Ax^2+Bx+C)=1-x^2;$$

$$2Ax^2+(6A+2B)x+(2A+3B+2C)=1-x^2;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{ll} 2A=-1; & A=-1/2; \\ 6A+2B=0; & B=-3A=3/2; \\ 2A+3B+2C=1; & C=1/2-A-(3/2)B=-5/4; \end{array}\right.$$

$$y_*=-x^2/2+(3/2)x-5/4;\;\; y=\overline{y}+y_*;$$

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}-x^2/2+(3/2)x-5/4.$$

б) $7y''-y'=0$; $7k^2-k=0$; $k(7k-1)=0$;

$$k_1=0;\; k_2=1/7;\; \overline{y}=C_1+C_2e^{x/7};$$

$$z=a+bi=0+0i=0 \text{ – корінь кратності } r=1;\;\; n=1;$$

$$y_*=x(Ax+B)=Ax^2+Bx;\;\; y_*'=2Ax+B;\;\; y_*''=2A;$$

$$7\cdot 2A-(2Ax+B)=12x;\; 14A-2Ax-B=12x;$$

$$-2Ax+(14A-B)=12x;\;\; \begin{array}{c|l} x^1 & \\ x^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{l} -2A=12; \\ 14A-B=0; \end{array}\right.\;\; A=-6;$$

$$B=14A;\;\; B=-84;\;\; y_*=-6x^2-84x;$$

$$y=\overline{y}+y_*;\;\; y=C_1+C_2e^{x/7}-6x^2-84x. \;\; ■$$

Зауваження 2. Підкреслимо, що у многочлені $P_n(x)$ коефіцієнти A_i, $i=\overline{1,n}$ можуть дорівнювати нулю. Але в будь-якому разі частинний розв'язок y_* шукаємо з повним многочленом $\overline{P_n}(x)$.

2. Права частина – добуток сталого множника на експоненту:

$$\boxed{f(x)=Ae^{ax}}.$$

При цьому в залежності від того, чи є характерне число $z=a+0i=a$ коренем характеристичного многочлена та якої кратності r, можливі наступні випадки структури y_*:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює числу $z=a$, тобто $k_1 \neq a, k_2 \neq a$, то $\boxed{y_*=\overline{A}e^{ax}}$.

б) Якщо тільки один з коренів характеристичного рівняння дорівнює $z=a$, наприклад, $k_1=a,\ k_2 \neq a$, то $\boxed{y_*=\overline{A}xe^{ax}}$.

в) Якщо обидва корені характеристичного рівняння дорівнюють числу $z=a$, тобто $k_1=k_2=a$, то $\boxed{y_*=\overline{A}x^2e^{ax}}$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок:

а) $y''+4y'+3y=8e^{3x}$; б) $y''-5y'-6y=2e^{-x}$;

в) $3y''-6y'+3y=e^{x}$; г) $y''-4y=e^{-2x}$.

□ а) $y''+4y'+3y=0$; $k^2+4k+3=0$; $D=4$; $k_1=-1$;

$k_2=-3$; $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$; $z=a+bi=3+0i=3$

– не є коренем; $y_*=\overline{A}e^{3x}$; $y_*'=3\overline{A}e^{3x}$; $y_*''=9\overline{A}e^{3x}$;

$9\overline{A}e^{3x}+4\cdot 3\overline{A}e^{3x}+3\overline{A}e^{3x}=8e^{3x}$; $24\overline{A}e^{3x}=8e^{3x}$; $\overline{A}=1/3$;

$y_*=e^{3x}/3$; $y=\overline{y}+y_*$; $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+e^{3x}/3$.

б) $y''-5y'-6y=0$; $k^2-5k-6=0$; $D=49$; $k_1=-1$;

$k_2=6$; $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$; $z=a+bi=-1+0i=-1$

– корінь кратності $r=1$; $y_*=\overline{A}xe^{-x}$; $y_*'=\overline{A}e^{-x}-\overline{A}xe^{-x}$;

$$y_*''=-\overline{A}e^{-x}-\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}=-2\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x};$$

$$-2\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}-5(\overline{A}e^{-x}-\overline{A}xe^{-x})-6\overline{A}xe^{-x}=2e^{-x};$$

$$-2\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}-5\overline{A}e^{-x}+5\overline{A}xe^{-x}-6\overline{A}xe^{-x}=2e^{-x};$$

$$-7\overline{A}e^{-x}=2e^{-x};\ \ \overline{A}=-2/7;\ \ y_*=(-2/7)xe^{-x};$$

$$y=\overline{y}+y_*;\ \ y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}-(2/7)xe^{-x}.$$

в) $3y''-6y'+3y=0$; $y''-2y'+y=0$; $D=0$;

$k_1=k_2=k=1$; $\overline{y}=e^x(C_1+C_2x)$; $z=a+bi=1+0i=1$

− корінь кратності $r=2$; $y_*=\overline{A}x^2e^x$; $y_*'=2\overline{A}xe^x+\overline{A}x^2e^x$;

$$y_*''=2\overline{A}e^x+2\overline{A}xe^x+2\overline{A}xe^x+\overline{A}x^2e^x=2\overline{A}e^x+4\overline{A}xe^x+$$

$$+\overline{A}x^2e^x;\ \ 3(2\overline{A}e^x+4\overline{A}xe^x+\overline{A}x^2e^x)-6(2\overline{A}xe^x+\overline{A}x^2e^x)+$$

$$+3\overline{A}x^2e^x=e^x;\ \ 6\overline{A}e^x+12\overline{A}xe^x+3\overline{A}x^2e^x-12\overline{A}xe^x-$$

$$-6\overline{A}x^2e^x+3\overline{A}x^2e^x=e^x;\ \ 6\overline{A}e^x=e^x;\ \ \overline{A}=1/6;$$

$$y_*=x^2e^x/6;\ \ y=\overline{y}+y_*;\ \ y=e^x(C_1+C_2x)+x^2e^x/6.$$

(Рівняння г) розв’язати самостійно). ■

3. <u>Права частина – лінійна комбінація косинуса і синуса одного і того ж аргументу</u>:

$$\boxed{f(x)=A\cos bx+B\sin bx}\ .$$

При цьому в залежності від того, чи є характерне число $z=0+bi=bi$ коренем характеристичного многочлена, можливі наступні випадки структури y_*:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює $z=bi$, тобто $k_{1,2}\neq\pm bi$, то $y_*=\overline{A}\cos bx+\overline{B}\sin bx$.

$$\boxed{y_*=\overline{A}\cos bx+\overline{B}\sin bx}\ .$$

б) Якщо один з коренів характеристичного рівняння дорівнює числу $z=bi$, тобто $k_{1,2}=\pm\beta i$ і $\beta=b$, то

$$\boxed{y_* = x(\overline{A}\cos bx + \overline{B}\sin bx)}\ .$$

<u>Зауваження 3.</u> A і B − довільні задані числа, одне з яких може дорівнювати нулю. У будь-якому разі частинний розв'язок y_* шукаємо у відповідному повному вигляді з $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

<u>Приклад 6.</u> Знайти загальний розв'язок:

а) $y''-6y'+5y = 2\cos x$; б) $y''+16y = 4\cos 4x - 24\sin 4x$.

□ а) $y''-6y'+5y = 0$; $k^2 - 6k + 5 = 0$; $D = 16$; $k_1 = 1$;

$$k_2 = 5;\ \ \overline{y} = C_1 e^{5x} + C_2 e^x;\ \ z = a + bi = 0 + 1i = i$$

− не є коренем; $y_* = \overline{A}\cos x + \overline{B}\sin x$; $y_*' = -\overline{A}\sin x +$

$+\overline{B}\cos x$; $y_*'' = -A\cos x - B\sin x$; $-\overline{A}\cos x - \overline{B}\sin x -$

$$-6(-\overline{A}\sin x + \overline{B}\cos x) + 5(\overline{A}\cos x + \overline{B}\sin x) = 2\cos x;$$

$$-\overline{A}\cos x - \overline{B}\sin x + 6\overline{A}\sin x - 6\overline{B}\cos x + 5\overline{A}\cos x + 5\overline{B}\sin x =$$

$$= 26\cos x;\ \ (-\overline{A} - 6\overline{B} + 5\overline{A})\cos x + (-\overline{B} + 6\overline{A} + 5\overline{B})\sin x =$$

$$= 26\cos x;\ \ (4\overline{A} - 6\overline{B})\cos x + (6\overline{A} + 4\overline{B})\sin x = 2\cos x;$$

$$\begin{array}{c|} \cos x \\ \sin x \end{array}\ \begin{cases} 4\overline{A} - 6\overline{B} = 2; \\ 6\overline{A} + 4\overline{B} = 0; \end{cases} \begin{cases} \overline{B} = (-3/2)\overline{A}; \\ 4\overline{A} + 9\overline{A} = 2;\ \overline{A} = 2/13;\ \overline{B} = -3/13; \end{cases}$$

$$y_* = 2/13\cos x - 3/13\sin x;$$

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^x + 2/13\cos x - 3/13\sin x.$$

б) $y''+16y = 0$; $k^2 + 16 = 0$; $k^2 = -16$; $k_{1,2} = \pm 4i$;

$$\overline{y} = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x;\ \ z = a + bi = 0 + 4i = 4i$$

− корінь кратності $r = 1$; $y_* = x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x)$;

$$y_*' = \overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x + x(-4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x);$$

$$y_*'' = -4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x - 4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x +$$

$$+ x(-16\overline{A}\cos 4x - 16\overline{B}\sin 4x) = -16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x) -$$

$$-8A\sin 4x + 8B\cos 4x;\ \ -16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x)x -$$

$$-8\overline{A}\sin 4x + 8\overline{B}\cos 4x + 16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x) = 4\cos 4x -$$

$$-24\sin 4x;\ \ -8\overline{A}\sin 4x + 8\overline{B}\cos 4x = 4\cos 4x - 24\sin 4x;$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos 4x\\ \sin 4x\end{array}\right|\ \begin{cases} 8\overline{B} = 4; & \overline{B} = 1/2;\\ -8\overline{A} = -24; & \overline{A} = 3;\end{cases}$$

$$y_* = x(3\cos 4x + (1/2)\sin 4x);\ \ y = \overline{y} + y_*;$$

$$y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + x(3\cos 4x + (1/2)\sin 4x).\ \blacksquare$$

Зауваження 4. Якщо права частина $f(x)$ не має спеціального вигляду, то часто її можна подати як скінченну суму

$$\boxed{f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)},$$

де кожний доданок $f_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ уже має спеціальний вигляд. Тоді за принципом суперпозиції $\boxed{y_* = y_{*1} + y_{*2} + \ldots + y_{*n}}$, де y_{*i} – частинний розв'язок рівняння $\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)}$ з тією ж самою лівою і відповідною правою частиною, $i = \overline{1,n}$.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок

$$\text{а)}\ y'' - 2y' + 6y = 18e^{2x} - 29\sin x;$$

$$\text{б)}\ y'' + 4y = 12e^{-2x} + 8x.$$

□ а) Для відповідного ЛОДР $y'' - 2y' + 6y = 0$ розв'язуємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 6 = 0;\ \ D = -20;\ k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}i$$

і записуємо його загальний розв'язок

$$\overline{y} = e^x(C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\sin\sqrt{5}x).$$

Права частина $f(x) = 18e^{2x} - 29\sin x$ не має спеціального вигляду, але її можна подати як суму двох доданків спеціального вигляду

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),\ \text{де}\ f_1(x) = 18e^{2x},\ f_2(x) = -29\sin x.$$

Тоді $y_* = y_{*1} + y_{*2}$. Знайдемо окремо y_{*1} і y_{*2}:

$$z_1 = a_1 + b_1 i = 2 + 0i = 2 \text{ − не є коренем; } \; y_{*1} = \overline{A}e^{2x};$$

$$y'_{*1} = 2\overline{A}e^{2x}; \; y''_{*1} = 4\overline{A}e^{2x}; \; 4\overline{A}e^{2x} - 2\cdot 2\overline{A}e^{2x} + 6\overline{A}e^{2x} =$$

$$= 18e^{2x}; \; 6\overline{A}e^{2x} = 18e^{2x}; \; \overline{A} = 3; \; y_{*1} = 3e^{2x};$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i = 0 + 1i = i \text{ − не є коренем; } \; y_{*2} = \overline{A}\cos x + \overline{B}\sin x;$$

$$y'_{*2} = -\overline{A}\sin x + \overline{B}\cos x; \; y''_{*2} = -\overline{A}\cos x - \overline{B}\sin x;$$

$$-\overline{A}\cos x - \overline{B}\sin x - 2(-\overline{A}\sin x + \overline{B}\cos x) + 6(\overline{A}\cos x +$$

$$+\overline{B}\sin x) = -29\sin x;$$

$$-(5\overline{A} - 2\overline{B})\cos x + (2\overline{A} + 5\overline{B})\sin x = -29\sin x;$$

$$\begin{array}{c|} \cos x \\ \sin x \end{array} \begin{cases} 5\overline{A} - 2\overline{B} = 0; \\ 2\overline{A} + 5\overline{B} = -29; \end{cases} \begin{cases} \overline{B} = (5/2)\overline{A}; \\ 2\overline{A} + 5\cdot(5/2)\overline{A} = -29; \end{cases}$$

$$\overline{A} = -2; \; \overline{B} = -5; \; y_{*2} = -2\cos x - 5\sin x;$$

$$y_* = y_{*1} + y_{*2} = 3e^{2x} - 2\cos x - 5\sin x.$$

Отже, загальний розв’язок ЛНДР

$$y = \overline{y} + y_* = e^{x}(C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\sin\sqrt{5}x) +$$

$$+ 3e^{2x} - 2\cos x - 5\sin x.$$

(Рівняння б) розв’язати самостійно). ■

Приклад 8. Розв’язати задачу Коші:

а) $y'' + 4y' = -16x + 8 + 40\sin 2x$; $y(0) = 3$; $y'(0) = 7$;

б) $y'' + 4y' + 5y = 2e^{-x} + 6\cos x$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$.

□ а) $y'' + 4y' = 0$; $k^2 + 4k = 0$; $k(k+4) = 0$; $k_1 = 0$;

$$k_2 = -4; \; \overline{y} = C_1 + C_2 e^{-4x}; \; f(x) = f_1(x) + f_2(x);$$

$$f_1(x) = -16x + 5; \; f_2(x) = 40\sin 2x; \; y_* = y_{*1} + y_{*2};$$

$$z_1 = a_1 + b_1 i = 0 + 0i = 0 \text{ − корінь кратності } r = 1; \; n = 1;$$

$$y_{*1} = (\overline{A}x + \overline{B})x = \overline{A}x^2 + \overline{B}x\,; \quad y'_{*1} = 2\overline{A}x + \overline{B}\,; \quad y''_{*1} = 2\overline{A}\,;$$

$$2\overline{A} + 4(2\overline{A}x + \overline{B}) = -16x + 8\,; \;\; 8\overline{A}x + 2\overline{A} + 4\overline{B} = -16x + 8\,;$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \left\{\begin{array}{ll} 8\overline{A} = -16; & \overline{A} = -2; \\ 2\overline{A} + 4\overline{B} = 8; & 2\cdot(-2) + 4\overline{B} = 8;\ \overline{B} = 3; \end{array}\right. \\ x^0 & \end{array} \quad y_{*1} = -2x^2 + 3x\,;$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i = 0 + 2i = 2i \ - \text{не є коренем;}$$

$$y_{*2} = \overline{A}\cos 2x + \overline{B}\sin 2x\,; \quad y'_{*2} = -2\overline{A}\sin 2x + 2\overline{B}\cos 2x\,;$$

$$y''_{*2} = -4\overline{A}\cos 2x - 4\overline{B}\sin 2x\,; \quad -4\overline{A}\cos 2x - 4\overline{B}\sin 2x +$$

$$+ 4(-2\overline{A}\sin 2x + 2\overline{B}\cos 2x) = 40\sin 2x\,;$$

$$(-4\overline{A} + 8\overline{B})\cos 2x + (-8\overline{A} - 4\overline{B})\sin 2x = 40\sin 2x\,;$$

$$\begin{array}{c|l} \cos 2x & \left\{\begin{array}{ll} -4\overline{A} + 8\overline{B} = 0; & \overline{A} = 2\overline{B}; \\ -8\overline{A} - 4\overline{B} = 40; & -8\cdot 2\overline{B} - 4\overline{B} = 40;\ \overline{B} = -2;\ \overline{A} = -4; \end{array}\right. \\ \sin 2x & \end{array}$$

$$y_{*2} = -4\cos 2x - 2\sin 2x\,; \quad y_* = y_{*1} + y_{*2} = -2x^2 + 3x -$$

$$-4\cos 2x - 2\sin 2x\,; \quad y = \overline{y} + y_* = C_1 + C_2 e^{-4x} - 2x^2 + 3x -$$

$$-4\cos 2x - 2\sin 2x\,; \quad y' = -4C_2 e^{-4x} - 4x + 3 + 8\sin 2x -$$

$$-4\cos 2x\,; \quad \begin{array}{r} y(0) = 3: \\ y'(0) = 7: \end{array} \left\{\begin{array}{ll} C_1 + C_2 - 4 = 3; & C_2 = -2; \\ -4C_2 + 3 - 4 = 7; & C_1 = 7 - C_2 = 9; \end{array}\right.$$

$$y_K = 9 - 2e^{-4x} - 2x^2 + 3x - 4\cos 2x - 2\sin 2x\,.$$

(Задачу б) розв’язати самостійно). ■

Приклад 9. Розв’язати крайову задачу:

$$y'' + 4y = 8x + 9\sin x; \qquad y(0) = 0; \;\; y'(\pi) = 5\,.$$

(Розв’язати самостійно. Відповідь: $y = 2x + 3\sin x$.)

Зауваження 5. Розв’язуючи самостійно зазначені диференційні рівняння зверніть ще раз увагу на комбіновану праву частину цих диференційних рівнянь, яку слід подати як суму двох доданків спеціального вигляду та знайти окремо для кожного доданку відповідний частинний розв’язок.

1.5.10. Лінійні різницеві рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду

Лінійне різницеве рівняння k***-го порядку зі сталими коефіцієнтами*** можна подати у вигляді

$$\boxed{a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + a_n y_{n+k-1} + \ldots + a_k y_n = f_n}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

де a_m, $m = \overline{0,k}$ – ***сталі коефіцієнти***, причому $a_0 \neq 0$ і $a_k \neq 0$; f_n – ***права частина*** (відома сіткова функція). Якщо права частина f_n тотожно дорівнює нулю, то рівняння називається ***однорідним***. У противному разі рівняння називається ***неоднорідним***.

<u>Зауваження 1</u>. Методи розв'язування лінійних різницевих рівнянь (РР) аналогічні методам розв'язування лінійних ДР. Надалі обмежимося розглядом ***лінійних неоднорідних РР другого порядку зі сталими коефіцієнтами*** (ЛНРР), які можна подати у формі:

$$\boxed{y_{n+2} + p\,y_{n+1} + q\,y_n = f_n}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Загальний розв'язок ЛНРР $y_n = y(n, C_1, C_2)$ містить дві довільні сталі C_1 і C_2, число яких дорівнює порядку рівняння.

Надавши в загальному розв'язку конкретні значення довільним сталим C_1 і C_2, одержимо ***частинний розв'язок***.

Для однозначного визначення конкретних значень C_1 і C_2 і відповідного частинного розв'язку звичайно використовують ***початкові умови***: $y_0 = y_{0,0}$ і $y_1 = y_{0,1}$. Відповідно розглядається ***початкова задача*** (***задача Коші***).

Загальний розв'язок ЛНРР y_n можна подати у вигляді суми $y_n = \bar{y}_n + y_{*n}$, де $\bar{y}_n$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\boxed{y_{n+2} + p\,y_{n+1} + q\,y_n = 0}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

а y_{*n} – деякий частинний розв'язок самого неоднорідного РР.

Ненульовий розв'язок однорідного РР (ЛОРР) будемо шукати у вигляді показникової функції $\boxed{y_n = \lambda^n,\ \lambda \neq 0}$.

Підставимо в рівняння і одержимо

$$\lambda^{n+2} + p\lambda^{n+1} + q\lambda^n = 0, \quad n = 0,1,2,...,$$

Оскільки $\lambda \neq 0$, то поділивши обидві частини на λ^n, отримаємо ***характеристичне рівняння***: $\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$.

У залежності від знака дискримінанта $D = p^2 - 4q$ можливі наступні три випадки:

1. $\boxed{D > 0}$, тоді характеристичне рівняння має два різні дійсні корені $\lambda_1 \neq \lambda_2$. При цьому

$$\boxed{\bar{y}_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n}.$$

2. $\boxed{D = 0}$, тоді характеристичне рівняння має один дійсний двократний корінь: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -p/2$. Маємо

$$\boxed{\bar{y}_n = (C_1 + C_2 n)\lambda^n}.$$

3. $\boxed{D < 0}$, тоді характеристичне рівняння має два комплексно-спряжені корені: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm i\sqrt{-D}}{2}$. Позначимо $\boxed{\alpha = -p/2}$ і $\boxed{\beta = \sqrt{-D}/2}$. Тоді

$$\boxed{\bar{y}_n = r^n(C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi)}.$$

При цьому:

а) якщо $\boxed{\alpha = 0}$, то $\boxed{r = \beta}$ і $\boxed{\varphi = \pi/2}$;

б) якщо $\boxed{\alpha \neq 0}$, то $\boxed{r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ і $\boxed{\varphi = arctg\,|(\beta/\alpha|}$.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок $\bar{y}_n$ лінійного однорідного рівняння:

а) $y_{n+2} + 8y_{n+1} + 12y_n = 0, \quad n = 0,1,2,...;$

б) $y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 0, \quad n = 0,1,2,...;$

в) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 0$, $.n = 0,1,2,\dots$.

□ а) Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 8\lambda + 12 = 0$ має два різні дійсні корені: $\lambda_1 = -6 \neq \lambda_2 = -2$. Тоді

$$\bar{y}_n = C_1(-6)^n + C_2(-2)^n.$$

б) Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ має один дійсний двократний корінь: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -3$. Тоді

$$\bar{y}_n = (C_1 + C_2 n)(-3)^n.$$

в) Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$ має два комплексно-спряжені корені: $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Отже, $\alpha = 1 \neq 0$ і $\beta = \sqrt{3}$. Тоді $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2$ і $\varphi = arctg\,|(\beta/\alpha| = \pi/3$. Маємо

$$\bar{y}_n = 2^n\left(C_1\cos\frac{n\pi}{3} + C_2\sin\frac{n\pi}{3}\right). \quad ■$$

<u>Приклад 2</u>. Розв'язати різницеву задачу Коші: знайти частинний розв'язок $y_{чn}$ лінійного однорідного різницевого рівняння

$$y_{n+2} - 8y_{n+1} + 16y_n = 0, \quad n = 0,1,2,\dots,$$

який задовольняє початковим умовам $y_0 = 2$ і $y_1 = -3$.

□ Знайдемо загальний розв'язок:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 4; \quad \bar{y}_n = (C_1 + C_2 n)\,4^n.$$

Далі врахуємо початкові умови:

$$\begin{array}{l} y_0 = 2: \\ y_1 = -3: \end{array} \begin{cases} (C_1 + C_2\cdot 0)4^0 = 2; & C_1 = 2; \\ (C_1 + C_2\cdot 1)4^1 = -3; & 8 + 4C_2 = -3; \quad C_2 = -11/4. \end{cases}$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y_{чn} = (2 - 11n/4)\,4^n, \quad n = 0,1,2,\dots. \quad ■$$

Знаходження деякого частинного розв'язку y_{*n} неоднорідного рівняння розглянемо тільки для випадку правої частини спеціального вигляду

$$\boxed{f_n = P_l(n)\,b^n},\quad b = const\,,\ n = 0,1,2,\ldots,$$

де $P_l(n)$ – відомий многочлен від n степеня l.

Будемо шукати частинний розв'язок y_{*n} за виглядом правої частини у формі:

$$\boxed{y_{*n} = n^s \overline{P}_l(n)\,b^n},$$

де $\overline{P}_l(n) = A_0 n^l + A_1 n^{l-1} + \ldots + A_{l-1} n + A_l$ – многочлен від n степеня l з невідомими коефіцієнтами A_m, $m = \overline{0,l}$; s – кратність числа b як кореня характеристичного рівняння, $s \ge 0$.

Невідомі значення A_m, $m = \overline{0,l}$ можна знайти *методом невизначених коефіцієнтів*.

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок y_{*n} за виглядом правої частини заданого різницевого рівняння:

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} - 10y_n = 2^n(14n-3)\,,\ \ n = 0,1,2,\ldots.$$

□ Знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0\,;\ \ \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -3 \\ \lambda_1\lambda_2 = -10 \end{cases};\ \ \begin{matrix} \lambda_1 = -5 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix}.$$

Оскільки права частина містить у собі многочлен першого порядку, а основа показникової функції в правій частині $b = 2$ є простим коренем ($s = 1$) характеристичного рівняння ($b = \lambda_2 = 2$), то частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$y_{*n} = n^1(An + B)\,2^n = (An^2 + Bn)\,2^n\,,$$

де A і B – невідомі сталі коефіцієнти.

Для визначення A і B підставимо y_{*n} у різницеве рівняння та дістанемо тотожність відносно n:

$$(A(n+2)^2 + B(n+2))\,2^{n+2} + 3(A(n+1)^2 + B(n+1))\,2^{n+1} -$$

$$-10\,(An^2 + Bn)\,2^n = 2^n(14n-3)\,.$$

Спростимо тотожність, розділивши ліву і праву частини почленно на $2^n \neq 0$, а потім розкривши дужки і звівши подібні:

$$4An^2 + 16An + 16A + 4Bn + 8B + 6An^2 + 12An + 6A + 6Bn + 6B -$$
$$-10An^2 - 10Bn = 14n - 3; \quad 28An + 22A + 14B = 14n - 3.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях n, складемо систему для визначення A і B та розв'яжемо її:

$$\begin{matrix} n^1: \\ n^0: \end{matrix} \begin{cases} 28A = 14 & A = 1/2 = 0{,}5 \\ 22A + 14B = -3 & B = -1 \end{cases}.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок $y_{*n} = (0{,}5n^2 - n)\,2^n$. ■

Приклад 4. Розв'язати різницеву задачу Коші: знайти частинний розв'язок $y_{чn}$ лінійного неоднорідного різницевого рівняння

$$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 40\,(-6)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

який задовольняє початковим умовам $y_0 = 3$ і $y_1 = -9$.

□ Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного РР:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0; \quad \lambda_1 = -2 \neq \lambda_2 = -1; \quad \bar{y}_n = C_1\,(-1)^n + C_2\,(-2)^n.$$

Далі знайдемо частинний розв'язок y_{*n} заданого неоднорідного РР за виглядом його правої частини, враховуючи що основа показникової функції $b = -6$ не є коренем ($s = 0$) характеристичного рівняння, а многочлен в правій частині має нульовий степінь:

$$y_{*n} = n^0 A(-6)^n = A(-6)^n;$$

$$A(-6)^{n+2} + 3A(-6)^{n+1} + 2A(-6)^n = 40\,(-6)^n;$$

$$36A - 18A + 2A = 40; \quad 20A = 40; \quad A = 2; \quad y_{*n} = 2\,(-6)^n.$$

Тоді загальний розв'язок початкового неоднорідного РР:

$$y_n = \bar{y}_n + y_{*n} = C_1\,(-1)^n + C_2\,(-2)^n + 2\,(-6)^n.$$

Для визначення відповідних значень довільних сталих C_1 і C_2 скористаємося початковими умовами:

$$\begin{matrix} y_0 = 3: \\ y_1 = -9: \end{matrix}\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 = 3; & C_2 = 1 - C_1; \\ -C_1 - 2C_2 - 12 = -9; & -C_1 - 2 + 2C_1 = 3; \end{cases} C_1 = 5; C_2 = -4.$$

Отже, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y_{чп} = 5(-1)^n - 4(-2)^n + 2(-6)^n, \quad n = 0,1,2,\ldots \quad ■$$

1.6. Контрольні запитання

1. Яка функція є первісною для даної функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?
3. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
4. Як перевірити правильність виконання операції інтегрування?
5. У чому полягає спосіб безпосереднього інтегрування?
6. У яких двох формах реалізується метод заміни змінної в невизначеному інтегралі?
7. Наведіть формулу методу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. Коли доречно застосовувати цей метод?
8. Наведіть типові випадки застосування інтегрування частинами і дайте відповідні рекомендації щодо вибору u.
9. Наведіть стандартний вигляд многочлена $P_n(x)$ n-го степеня.
10. Як розкладається многочлен з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники?
11. Що називається раціональним дробом? За якої умови раціональний дріб є правильним? Неправильним?
12. Як подати неправильний раціональний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу?
13. Які правильні раціональні дроби називаються елементарними (найпростішими)?
14. Який вигляд має розклад правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів?
15. Які методи застосовуються для знаходження коефіцієнтів цього розкладу? У чому суть методу невизначених коефіцієнтів і методу окремих значень? Дайте рекомендації щодо їх застосування.
16. Як інтегруються елементарні дроби різних типів?
17. Як інтегруються правильні раціональні дроби у наступних випадках: а) корені знаменника дійсні й прості; б) корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні; в) корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно спряжені?

18. Як за допомогою підстановок інтеграли з лінійними ірраціональностями зводяться до інтегралів від раціональних функцій?
19. Як знаходяться інтеграли вигляду
$$\int \cos ax \cos bx \, dx, \ \int \sin ax \cos bx \, dx, \ \int \sin ax \sin bx \, dx \,?$$
20. У чому полягає універсальна тригонометрична підстановка?
21. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$?
22. Як за допомогою тригонометричних підстановок інтегруються вирази, що містять квадратний корінь із суми чи різниці квадратів?
23. Що таке інтегральна сума? Який її геометричний та економічний зміст?
24. Що називається визначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний і фізичний зміст?
25. Сформулюйте необхідну умову інтегрованості функції.
26. У чому полягає достатня умова інтегрованості?
27. Наведіть формулу Ньютона – Лейбниця, що встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами.
28. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
29. Якою подвійною нерівністю задається оцінка визначеного інтеграла?
30. Що називається середнім інтегральним значенням функції на відрізку? Сформулюйте теорему про середнє інтегральне. У чому полягає її геометричний зміст?
31. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі?
32. Наведіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
33. Що таке невласний інтеграл на необмеженому проміжку? У чому полягає його геометричний зміст?
34. Що таке невласний інтеграл від необмеженої функції? У чому полягає його геометричний зміст?
35. Наведіть дві основні схеми застосування визначеного інтеграла.
36. Яка плоска область називається правильною (стандартною) в напрямку осі Oy ? Осі Ox ? Просто правильною?
37. Як знаходиться площа правильної в напрямку осі Oy плоскої області? Правильної в напрямку осі Ox області?
38. Як знаходиться довжина дуги плоскої лінії у випадку, коли лінія задана явно в прямокутних координатах?
39. Як знаходиться об'єм тіла з відомими площами паралельних перерізів? Як знаходиться об'єм тіла обертання?

40. Наведіть приклади економічних задач, які розв'язуються за допомогою визначеного інтеграла.
41. Що таке диференціальне рівняння? Як визначається його порядок?
42. Що називається розв'язком ДР?
43. Що таке інтегральна крива ДР?
44. Що називається загальним розв'язком ДР? Частинним розв'язком? Який їх геометричний зміст?
45. Що таке початкові та крайові умови? Як ставиться початкова задача (задача Коші)? Крайова задача?
46. Що таке особливий розв'язок ДР?
47. Як методом Ейлера наближено будується розв'язок задачі Коші для ДР першого порядку?
48. Яка система функцій $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)\ \ (n \geq 2)$ називається лінійно залежною? Лінійно незалежною?
49. Яка структура загального розв'язку ЛОДР другого порядку?
50. Що таке характеристичне рівняння для ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
51. За якими формулами будується загальний розв'язок ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від виду коренів характеристичного рівняння?
52. Яка структура загального розв'язку ЛНДР другого порядку?
53. У чому полягає принцип суперпозиції розв'язків ЛНДР?
54. Для ЛНДР що таке права частина спеціального вигляду?
55. Як методом невизначених коефіцієнтів будується частинний розв'язок ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає правій частині спеціального вигляду?
56. Що таке різницеве рівняння? Як визначається його порядок?
57. Що називається розв'язком різницевого рівняння?
58. Як задається загальний розв'язок лінійного РР першого порядку зі сталим коефіцієнтом?
59. Яка структура загального розв'язку ЛНРР другого порядку?
60. Що таке характеристичне рівняння для ЛОРР другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
61. За якими формулами будується загальний розв'язок ЛОРР другого порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від виду коренів характеристичного рівняння?
62. Як методом невизначених коефіцієнтів будується частинний розв'язок ЛНРР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає правій частині спеціального вигляду?

Змістовий модуль 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. РЯДИ. ЕЛЕМЕНТИ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ

2.1. Площина та пряма у просторі

2.1.1. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

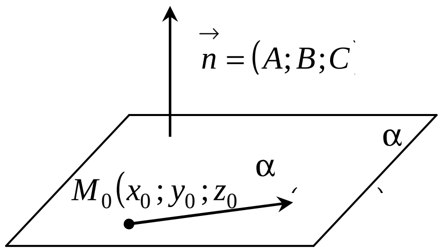

Рис. 21

Нехай на площині α задана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***вектор нормалі*** $\vec{n} = (A;B;C) \neq \vec{0}$ (рис. 21).

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Точка M належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$. Використовуючи умову перпендикулярності векторів, маємо

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

або в координатній формі

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

– ***рівняння площини, що проходить через задану точку*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\vec{n} = (A;B;C)$.

Приклад. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;1;1)$ і перпендикулярна до площин $5x+2y-z+3=0$ і $x-y+3z+7=0$.

□ Оскільки нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(5;2;-1)$ і $\vec{n}_2=(1;-1;-3)$, то за нормальний вектор шуканої площини можна взяти вектор $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$:

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=-7\vec{i}+14\vec{j}-7\vec{k}$$

Оскільки вектор $\vec{n}_0=(1;-2;1)$ колінеарний вектору $\vec{n}=(7;-14;7)$, то за нормальний вектор шуканої площини можна взяти вектор $\vec{n}_0$.

Отримаємо рівняння площини, яка проходить через точку M_0 і перпендикулярна двом заданим площинам

$$x+1-2(y-1)+z-1=0 \Rightarrow x-2y+z+2=0. \quad ■$$

2.1.2. Загальне рівняння площини. Окремі випадки загального рівняння площини

Розкриємо дужки в рівнянні

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

і отримаємо $Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$. Згрупуємо сталі величини та позначимо $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Тоді одержимо

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

– ***загальне рівняння площини***, що є лінійним відносно координат x,y,z, причому хоча б один з коефіцієнтів A,B,C відмінний від нуля, тобто $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Зауваження. Загальне рівняння площини визначається з точністю до сталого множника.

Рівняння довільної площини можна звести до загального вигляду.

<u>Теорема</u>. *Будь-яка площина визначається лінійним рівнянням відносно координат* x, y, z. *Кожному лінійному рівнянню зі змінними* x, y, z *відповідає деяка площина.* (Без доведення)

У таблиці 2 відображені особливості розміщення площини, коли один або декілька коефіцієнтів її загального рівняння дорівнюють нулю. (Частина ілюстративних зображень окремих випадків розміщення площини наведена на рис. 22 – 24. Ілюстрації для інших випадків зробіть самостійно).

Таблиця 2

№ п/п	Рівняння	Характеристика розміщення площини
1	$By + Cz + D = 0$	паралельна осі Ox
2	$Ax + Cz + D = 0$	паралельна осі Oy
3	$Ax + By + D = 0$	паралельна осі Oz (рис. 22)
4	$Ax + By + Cz = 0$	проходить через початок координат $O(0;0;0)$ (рис. 23)
5	$Cz + D = 0$	перпендикулярна до осі Oz (рис. 24)
6	$By + D = 0$	перпендикулярна до осі Oy
7	$Ax + D = 0$	перпендикулярна до осі Ox
8	$By + Cz = 0$	проходить через вісь Ox
9	$Ax + Cz = 0$	проходить через вісь Oy
10	$Ax + By = 0$	проходить через вісь Oz
11	$z = 0$	Координатна площина Oxy
12	$y = 0$	Координатна площина Oxz
13	$x = 0$	Координатна площина Oyz

<u>Приклад</u>. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{NP}$.

□ $M \in \alpha$; $\vec{n} = \overrightarrow{NP} \perp \alpha$; $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$;

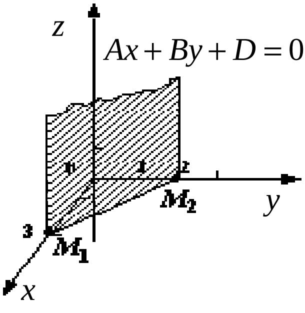

Рис. 22

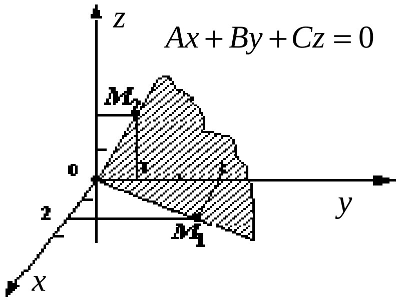

Рис. 23

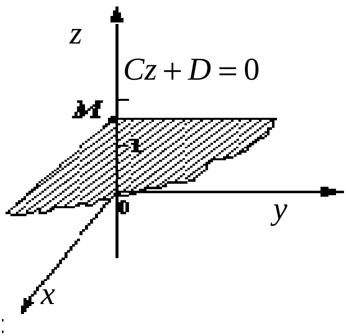

Рис. 24

$$\vec{n}=\vec{NP}=(1-5;\ -3-(-6);$$
$$-1-0\ )=(-4;\ 3;\ -1);$$
$$-4(x-1)+3(y-(-1))+$$
$$+(-1)(z-2)=0;$$
$$-4x+4+3y+3-z+2=0;$$
$$-4x+3y-z+9=0;$$
$$4x-3y+z-9=0.\ \blacksquare$$

2.1.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай на площині α задано три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ і $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій.

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо три вектори $\vec{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\vec{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ і $\vec{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$, що виходять з однієї точки M_1. Точка $M(x;y;z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні (рис. 25).

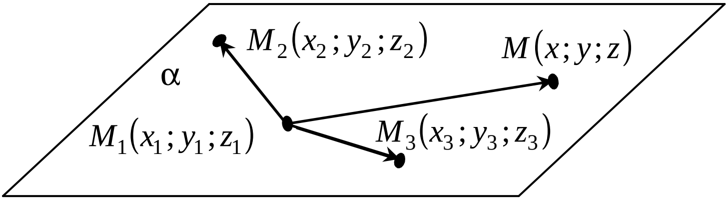

Рис. 25

Використовуючи умову компланарності трьох векторів, маємо

$$(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

або в координатній формі

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

– ***рівняння площини, що проходить через три задані точки***.

Приклад. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через ці точки. Знайти одиничний вектор нормалі.

$$\square \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-2 \\ 5-1 & -6-(-1) & 0-2 \\ 1-1 & -3-(-1) & -1-2 \end{vmatrix} = 0 \; ; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \; ;$$

$$11x + 12y - 8z + 17 = 0\; ; \quad \vec{n} = (A; B; C) = (11; 12; -8)\; ;$$

$$\left|\vec{n}\right| = \sqrt{11^2 + 12^2 + (-8)^2} = \sqrt{329}\; ; \; \vec{n}_0 = \left(\frac{11}{\sqrt{329}}; \frac{12}{\sqrt{329}}; -\frac{8}{\sqrt{329}}\right). \blacksquare$$

2.1.4. Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай площина α перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ і $M_3(0;0;c)$ (рис. 26).

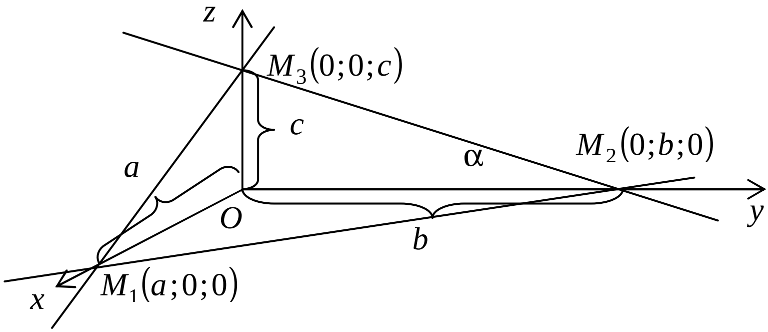

Рис. 26

Використовуючи рівняння площини, що проходить через три точки, маємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0 \qquad bcx + acy + abz - abc = 0; \qquad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

– ***рівняння площини у відрізках на осях***.

<u>Приклад 1</u>. Звести загальне рівняння площини

$$3x - 6y + 8z + 12 = 0$$

до вигляду рівняння у відрізках на осях.

□ $3x - 6y + 8z = -12 \quad \big| : (-12)\,; \quad \dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{-2/3} = 1.$ ■

<u>Приклад 2</u>. Знайти точки перетину площини

$$\alpha: \quad 3x - 2y + 6z - 12 = 0$$

з координатними осями і зобразити площину, побудувавши її сліди – лінії перетину з координатними площинами.

□ $\alpha \cap Ox: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 3x - 2y + 6z - 12 = 0 \end{cases}$; $\begin{matrix} a = 4 \\ M_1(4;0;0) \end{matrix}$;

$\alpha \cap Oy: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 3x - 2y + 6z - 12 = 0 \end{cases}$; $\begin{matrix} b = -6 \\ M_2(0;-6;0) \end{matrix}$;

$\alpha \cap Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3x - 2y + 6z - 12 = 0 \end{cases}$; $\begin{matrix} c = 2 \\ M_3(0;0;2) \end{matrix}$.

Площина α зображена на рис. 27. ■

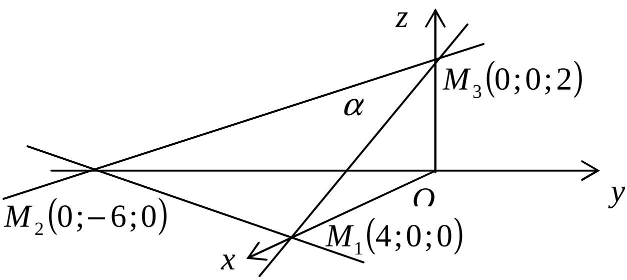

Рис. 27

2.1.5. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини α_1 і α_2 своїми загальними рівняннями: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їх векторами нормалей $\vec{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ (рис. 28). Отже,

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для площин.

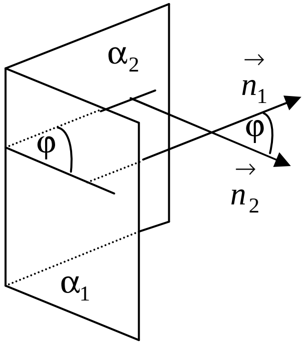

Рис. 28

Умова перпендикулярності двох площин:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}\ .$$

Умова паралельності двох площин:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}\ .$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}}\ .$$

Приклад. Знайти косинус кута між заданою площиною $\alpha_1:\ 2x - y - 2z + 6 = 0$ і координатною площиною Oxy.

$$\square\quad \vec{n}_1 = (2;-1;-2)\ ;\ \ \alpha_2:\ z = 0\ ;\ \ \vec{n}_2 = \vec{k} = (0;0;1);$$

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = -\frac{2}{3}\ . \quad \blacksquare$$

2.1.6. Відстань від точки до площини

Нехай у просторі задані площина α своїм загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і деяка точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ (рис. 29).

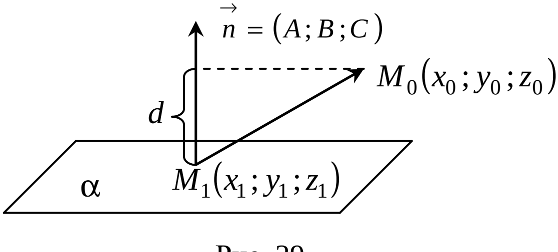

Рис. 29

Візьмемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1;y_0-y_1;z_0-z_1)$. Тоді відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n}=(A;B;C)$

$$d=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Оскільки $-Ax_1-By_1-Cz_1=D$, то

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}.$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти відстань d від точки $M_0(2;-4;3)$ до площини $\alpha:\ 3x-2y-6z-1=0$. (Розв'язати самостійно).

<u>Приклад 2.</u> Задана піраміда з вершинами $A(3;4;0)$, $B(4;-3;1)$, $C(-4;1;-1)$, $D(-1;-1;5)$. Знайти довжину висоти піраміди, проведеної з вершини D. (Розв'язати самостійно).

2.1.7. Рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно даному вектору (канонічні рівняння прямої)

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{s}=(m;n;p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, що їй паралельний (рис. 30).

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій прямій та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. Точка M належить прямій тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{s}$. Використовуючи умову паралельності векторів, маємо ***канонічні***

рівняння прямої:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

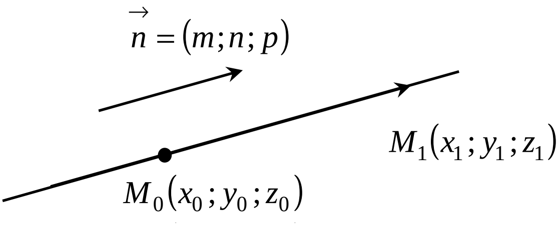

Рис. 30

2.1.8. Параметричні рівняння прямої

Якщо у канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

і розв'язати їх відносно x, y та z, то отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m}=t\,; \quad \frac{y-y_0}{n}=t\,; \quad \frac{z-z_0}{p}=t\,; \quad \boxed{\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}}$$

– ***параметричні рівняння прямої***, де змінна t служить параметром.

Приклад. Пряма задана своїми канонічними рівняннями. Записати її параметричні рівняння:

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+4}{0}=\frac{z}{-2}. \quad \text{(Розв'язати самостійно).}$$

2.1.9. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай на прямій l задано дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$. За напрямний вектор можна взяти

$$\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

Тоді з канонічних рівнянь маємо

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

– ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***.

Приклад. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-2;0;3)$ і $M_2(4;-2;3)$. (Розв'язати самостійно).

2.1.10. Пряма як перетин двох площин. Загальні рівняння прямої

Просторова лінія може задаватися як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l є лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ і } \alpha_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

то система $\boxed{\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}}$ називається ***загальними рівняннями прямої***.

Зауваження 1. Загальні рівняння прямої визначаються неоднозначно.

Зауваження 2. Рівняння

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

де λ – параметр, задає пучок площин, які проходять через пряму l.

Приклад. Пряма l задана своїми загальними рівняннями

$$\begin{cases}x-2y+4z-10=0\\3x+2y-2z+6=0\end{cases}.$$

Знайти її 1) канонічні рівняння; 2) параметричні рівняння.

□ 1) Знайдемо напрямний вектор прямої

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k} .$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x = 0$, тоді

$$\begin{cases} -2y + 4z - 10 = 0 \\ 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases} ; \quad y = -1; \quad z = 2 \ ; \quad M_0(0;-1;2) .$$

Канонічні рівняння:

$$\frac{x-0}{-4} = \frac{y-(-1)}{14} = \frac{z-2}{8} ; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-2}{4} .$$

(Параметричні рівняння знайти самостійно). ■

2.1.11. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності та паралельності двох прямих

Нехай задано дві прямі своїми канонічними рівняннями

$$l_1 : \ \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \ \text{ і } \ l_2 : \ \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} .$$

Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їх напрямними векторами $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ і $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$. Отже,

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}} .$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$\boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0} .$$

Умова паралельності двох прямих: $\boxed{\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}}$.

Приклад. Знайти кут між прямими:

$$l_1: \begin{cases} 3x - 2y + z - 6 = 0 \\ 2x + y - 2z + 8 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad l_2: \frac{x}{-3} = \frac{y-6}{0} = \frac{z-1}{4}.$$

(Розв'язати самостійно).

2.1.12. Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими

Дві прямі у просторі можуть перетинатися або бути паралельними чи мимобіжними.

Нехай задано дві непаралельні прямі

$$l_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ і } l_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Прямі l_1 і l_2 перетинаються, коли вектори $\vec{s_1} = (m_1; n_1; p_1)$, $\vec{s_2} = (m_2; n_2; p_2)$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ – компланарні (лежать в одній площині). Використовуючи умову компланарності трьох векторів $(\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{s_1}) \cdot \vec{s_2} = 0$, одержуємо ***умову перетину двох непаралельних прямих***:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0}.$$

Зауваження 1. Для довільних прямих l_1 і l_2 ця рівність є умовою їх належності одній площині. Якщо ця умова не виконується, то прямі l_1 і l_2 є мимобіжними.

Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими l_1 і l_2, розглянемо вектор $\vec{a} = \vec{s_1} \times \vec{s_2}$, який перпендикулярний до обох прямих. Тоді відстань d між прямими l_1 і l_2 дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ на вектор $\vec{a}$

$$d = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right| \Big/ \left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \left(\vec{s_1} \times \vec{s_2}\right)\right| \Big/ \left|\vec{s_1} \times \vec{s_2}\right| .$$

Зауваження 2. Ця формула справедлива також для прямих l_1 і l_2, що перетинаються. Зрозуміло, що при цьому $d = 0$.

Приклад. Знайти відстань d між заданими прямими:

а) $l_1: \ \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+5}{-3} = \dfrac{z+3}{2}$ і $l_2: \ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$;

б) $l_1: \ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z-2}{0}$ і $l_2: \ \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{4}$.

□ а) $$\vec{a} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} .$$

Оскільки $\vec{a} \neq \vec{0}$, то прямі l_1 і l_2 – непаралельні. Далі знаходимо: $\overrightarrow{M_1M_2} = (0-2; 2-(-5); 3-(-3)) = (-2; 7; 6)$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21} \ ; \ |\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}| = -2 \cdot (-4) +$$

$$+ 7 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 = 0 \ ; \quad d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|0|}{\sqrt{21}} = 0 .$$

Отже, прямі l_1 і l_2 перетинаються.

б) (Розв’язати самостійно). ■

2.1.13. Відстань від точки до прямої

Нехай треба знайти відстань d від точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ до прямої l, яка задана параметричними рівняннями:

$$x = mt + x_0;\quad y = nt + y_0;\quad z = pt + z_0\ .$$

Розглянемо три способи визначення цієї відстані.

<u>Спосіб 1</u>. Візьмемо на прямій відому точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та побудуємо паралелограм на векторах $\vec{s} = (m;n;p)$ і $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0;y_1 - y_0;z_1 - z_0)$ (рис. 31). Площа S цього паралелограма

$$S = |\vec{s}|\cdot d \quad \text{або} \quad S = |\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|\ .$$

Звідси

$$\boxed{d = |\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}| \big/ |\vec{s}|}\ .$$

<u>Спосіб 2</u>. Проведемо через точку M_1 площину α, яка перпендикулярна до прямої l (рис. 32).

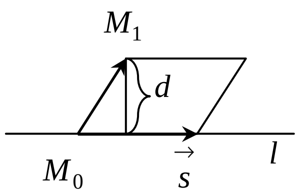

Рис. 31

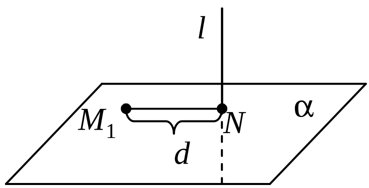

Рис. 32

Вектор нормалі $\vec{n}$ площини α колінеарний напрямному вектору $\vec{s}$ прямої l. Можна вважати, що $\vec{n} = \vec{s} = (m;n;p)$. Тоді

$$\alpha:\ \ m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0\ .$$

Далі треба знайти точку N перетину прямої та площини. Ця точка є основою перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на пряму l. Отже, $d = M_1N$.

Спосіб 3. Розглянемо функцію $u = d^2(t)$, яка дорівнює квадрату відстані

$$d(t) = \sqrt{(x_1 - mt - x_0)^2 + (y_1 - nt - y_0)^2 + (z_1 - pt - z_0)^2}$$

від точки M_1 до довільної точки прямої l.

Відстань d від точки M_1 до прямої l відповідає найменшому значенню цієї функції. Зі змісту задачі випливає, що мінімум існує і є єдиним екстремальним значенням. Тому відповідне значення параметра t_m визначається однозначно з необхідної умови екстремуму $u'(t) = 0$:

$$-2m(x_1 - mt - x_0) - 2n(y_1 - nt - y_0) - 2p(z_1 - pt - z_0) = 0 \ ;$$

$$t_m = \frac{m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0) + p(z_1 - z_0)}{m^2 + n^2 + p^2} \ .$$

Тоді $d = d(t_m)$.

Приклад. Знайти відстань d від заданої точки M_1 до заданої прямої l:

$$M_1(2;\, 3;\, -5)\ ; \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{2} .$$

□ Застосовуємо спосіб 1:

$$\vec{s} = (-1; -2; 2); \quad |\vec{s}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3 \ ;$$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (2 - (-1);\, 3 - 2;\, -2 - 0) = (3;\, 1;\, -2);$$

$$\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k} \ ;$$

$$|\vec{s}\times \overrightarrow{M_0M_1}| = \sqrt{2^2+4^2+5^2} = 5\sqrt{2}\ ;$$

$$d = |\vec{s}\times \overrightarrow{M_0M_1}| \big/ |\vec{s}| = \frac{5\sqrt{2}}{3}\ .$$

(<u>Способами 2 і 3</u> розв’язати задачу самостійно). ■

2.1.14. Перетин прямої з площиною

Нехай задано пряму l параметричними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$l:\ \begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases};\quad \alpha:\ Ax + By + Cz + D = 0\ .$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини треба скласти і розв’язати систему їх рівнянь. Цю систему зручно розв’язувати методом вилучення невідомих (методом Гауса), підставляючи вирази для x, y, z із параметричних рівнянь прямої у рівняння площини. Дістаємо рівняння для t

$$(Am + Bn + Cp)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)\ .$$

1) Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, тобто пряма не паралельна площині, то пряма і площина перетинаються в одній точці, що відповідає значенню параметра

$$t = -\ (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)/(Am + Bn + Cp)\ .$$

2) Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тобто точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ прямої l не лежить на площині α, то рівняння для t розв’язків не має. Пряма паралельна площині і не лежить на ній.

3) Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тобто точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ прямої l лежить на площині α, то рівняння для t виконується при всіх значеннях параметра. Пряма лежить на площині.

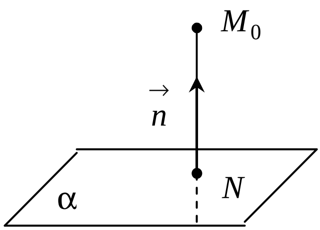

Рис. 33

<u>Приклад</u>. Знайти проекцію N точки $M_0(2;-5;4)$ на площину $\alpha:\ 3x+2y-z-6=0$.

□ Точка N є основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину α (рис. 33). Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої M_0N колінеарний вектору нормалі $\vec{n}$ площини. Можна вважати, що $\vec{s}=\vec{n}=(3;\ 2;\ -1)$. Тоді параметричні рівняння прямої M_0N:

$$x=3t+2;\qquad y=2t-5;\qquad z=-t+4.$$

Підставляючи ці вирази у рівняння площини, одержимо значення параметра t, що відповідає точці перетину N прямої та площини

$$3(3t+2)+2(2t-5)-(-t+4)-6=0\ ;\quad t=-1\ .$$

Тоді

$$x=3(-1)+2=-1;\quad y=2(-1)-5=-7;\quad z=-(-1)+4=5\ .$$

Отже, проекцією є точка $N(-1;-7;5)$. ■

2.1.15. Кут між прямою та площиною. Умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини

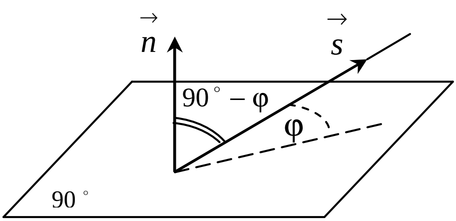

Рис. 34

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$l:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p};$$

$$\alpha:\ Ax+By+Cz+D=0\ .$$

Кут φ між ними (рис. 34) доповнює кут між напрямним вектором прямої $\vec{s}=(m;n;p)$ і вектором нормалі площини $\vec{n}=(A;B;C)$ до 90°.

Тоді $$\cos\left(90^\circ-\varphi\right)=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Застосовуючи тригонометричну формулу зведення і враховуючи, що кут φ між прямою і площиною – гострий, маємо

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини:

$$\boxed{\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}}.$$

Умова паралельності прямої та площини:

$$\boxed{Am+Bn+Cp=0}.$$

Приклад 1. Знайти кут між прямою l і площиною α:

$$l:\ \begin{cases}x+4y-2z-8=0\\2x+3y-z+6=0\end{cases}\quad \text{і}\quad \alpha:\ \frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$$

(Розв’язати самостійно).

Приклад 2. Перевірити, що пряма $\frac{x-3}{-5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{3}$ перпендикулярна до площини $10x-4y-6z+3=0$.

(Розв’язати самостійно).

Приклад 3. Перевірити, що пряма $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-2}$ паралельна площині $2x+2z-1=0$. (Розв’язати самостійно).

2.2. Поверхні другого порядку

2.2.1. Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору R^3, координати котрих задовольняють алгебраїчне рівняння другого степеня

$$\boxed{Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0},$$

де хоча б один з коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля, тобто виконується умова $\boxed{A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2\neq 0}$.

Це рівняння може визначати сферу, еліпсоїд, гіперболоїд (однопорожнинний або двопорожнинний), параболоїд (еліптичний або гіперболічний), конус, циліндр (еліптичний, гіперболічний або параболічний). За допомогою паралельного переносу й повороту системи координат зазначене рівняння другого порядку можна звести до канонічного вигляду. Форму та розташування поверхонь вивчають методом перерізів. Для цього перетинають поверхню координатними площинами та їм паралельними і визначають тип кривої, що одержується в перерізі.

Зауваження. Крім зазначених поверхонь, загальному рівнянню другого порядку може відповідати один з вироджених випадків: сукупність двох площин чи прямих, площина, пряма, точка чи порожня множина. Порожній множині відповідає певна уявна поверхня, при цьому загальне рівняння втрачає геометричний смисл. Надалі обмежимося розглядом тільки дійсних невироджених поверхонь.

2.2.2. Поверхні обертання. Сфера. Еліпсоїд

Поверхня, утворена обертанням плоскої лінії (***твірної***, ***меридіана***) l навколо заданої прямої a_0 (***осі обертання***), що лежить у площині лінії l, називається ***поверхнею обертання***.

Коло, яке описує довільна точка твірної l при обертанні, називається ***паралеллю***. Площина паралелі перпендикулярна до осі обертання a_0.

Правило: *Щоб одержати рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї площини, треба у рівнянні лінії зробити заміну змінних: змінну, що відповідає осі обертання, залишити тією самою, а іншу змінну замінити на «плюс / мінус» квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат.*

Зокрема

$$\boxed{\underset{\circlearrowleft Oz}{F(y,z)=0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\, z\right)=0}.$$

Якщо коло $y^2+z^2=R^2$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо осі Oz, то дістанемо ***сферу***.

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\underset{\circlearrowleft Oz}{y^2+z^2=R^2} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=R^2.$$

Звідси отримуємо $\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2}$ – ***канонічне рівняння сфери***.

Рівняння сфери зі зміщеним центром у точці $M_o(x_0,y_0,z_0)$ і радіусом R має вигляд (рис. 35):

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}.$$

Зауваження 3. Сфера є обмеженою замкненою поверхнею, яка симетрична відносно центра. Довільна пряма, що проходить через її центр, є віссю симетрії сфери. Довільна площина, що проходить через центр сфери, служить її площиною симетрії.

Приклад 1. Показати, що задане рівняння є рівнянням сфери, та знайти її центр і радіус:

а) $4x^2+4y^2+4z^2-16x+24y+12z+25=0$;

б) $3x^2+3y^2+3z^2-6y+5z+3=0$.

□ а) Згрупуємо окремо члени з x, y і z, а потім виділимо повні квадрати двочленів відповідного вигляду $x \pm a$, $y \pm b$ і

$z \pm c$:

$$4x^2+4y^2+4z^2-16x+24y+12z+25=0;$$

$$4(x^2-4x)+4(y^2+6y)+4(z^2+3z)+25=0;$$

$$(x^2-2\cdot 2x+2^2-2^2)+(y^2+2\cdot 3y+3^2-3^2)+$$

$$+\left(z^2+2\cdot(3/2)z+(3/2)^2-(3/2)^2\right)+25/4=0;$$

$$(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+(z+3/2)^2-9/4+25/4=0;$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+3/2)^2=9.$$

Одержане рівняння описує сферу з центром у точці $C\left(2,-3,\,-3/2\right)$ і радіусом $R=3$.

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$x^2+(y-1)^2+(z+5/6)^2=25/36$; $C\left(0,1,\,-5/6\right)$; $R=5/6$. ■

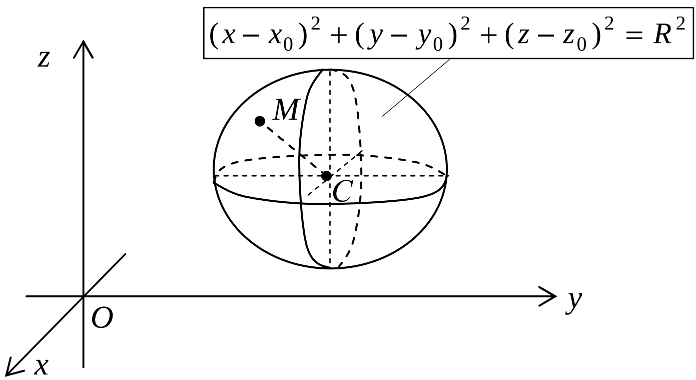

Рис. 35

Піддаючи сферу $x^2+y^2+z^2=R^2$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж кожної з координатних осей Ox, Oy і Oz з коефіцієнтами деформації відповідно $k_x=R/a$, $k_y=R/b$ і $k_z=R/c$ ($a,b,c>0$), треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну: $x\to k_x x$; $y\to k_y y$; $z\to k_z z$. У результаті матимемо

$$\left((R/a)x\right)^2+\left((R/b)y\right)^2+\left((R/c)z\right)^2=R^2; \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

– ***канонічне рівняння еліпсоїда*** (рис. 36).

Величини a, b і c називаються ***півосями еліпсоїда***. Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, то маємо еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою $a=b=c=R$, то – сферу.

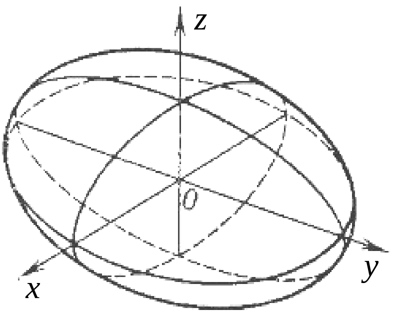

Рис. 36

Еліпсоїд симетричний відносно координатних площин, координатних осей і початку координат, який називають ***центром еліпсоїда***. Еліпсоїд в цілому лежить в межах прямокутного паралелепіпеда зі сторонами $2a$, $2b$ і $2c$, який симетричний відносно координатних площин.

Для з'ясування форми поверхні використовуємо метод перерізів. Розсічемо поверхню площиною $x=h$ (рис. 36):

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}.$$

1) При $|h|<a$ маємо $1-\frac{h^2}{a^2}=H^2>0$ – у перерізі вийде еліпс із півосями Hb і Hc.

2) При $h=\pm a$ одержимо дві точки $(a;0;0)$ і $(-a;0;0)$.

3) При $|h|>a$ вираз $1-\frac{h^2}{a^2}<0$ – площина й поверхня не перетинаються.

Зауваження 2. Лінією перетину еліпсоїда довільною площиною є еліпс.

Приклад 2. Звести рівняння заданого еліпсоїда до канонічного вигляду і побудувати його зображення: $16x^2+9y^2+36z^2=144$.

(Виконати самостійно).

2.2.3. Однопорожнинний гіперболоїд

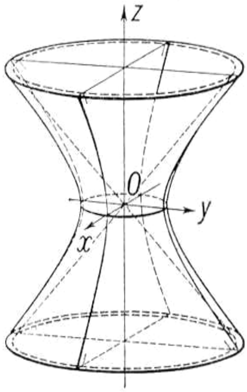

Рис. 37

Канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1},\ a,b,c>0$$

Поверхня симетрична відносно координатних площин. Початок координат є центром симетрії (рис. 37). Перерізи поверхні площинами $x=0$, $y=0$ є гіперболами:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Переріз поверхні площиною $z=h$ є еліпсом:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}=H^2 \Rightarrow \frac{x^2}{(aH)^2}+\frac{y^2}{(bH)^2}=1.$$

Зауваження. Однопорожнинний гіперболоїд належить до ***лінійчатих поверхонь***, твірні яких є прямими лініями. Він може бути побудований за допомогою двох систем прямих ліній. Лінійчаті поверхні широко використовуються в будівництві.

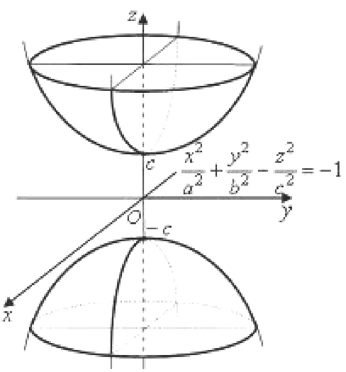

Рис. 38

2.2.4. Двопорожнинний гіперболоїд

Канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда має вигляд:

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1},\ (a,b,c>0) \quad (4)$$

Поверхня симетрична відносно координатних осей і координатних площин. Центр симетрії знаходиться в початку координат (рис. 38).

Перерізи поверхні площинами $x=0$ і

$y = 0$ є гіперболами відповідно:

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Розглянемо перерізи поверхні площиною $z = h$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1.$$

1) $|h| < c$ – переріз є порожньою множиною;

2) $|h| = c$ – у перерізі маємо дві точки: $(0;0;c)$ і $(0;0;-c)$;

3) $|h| > c$ – переріз є еліпсом: $\frac{x^2}{(aH)^2}+\frac{y^2}{(bH)^2}=1$, $\left(H^2 = h^2/c^2 - 1\right)$.

2.2.5. Конічні поверхні. Конус другого порядку

Конічною поверхнею називається поверхня, яку описує пряма (***твірна***), що проходить через фіксовану точку O (***вершину*** конуса) та іншу змінну точку, яка рухається вздовж заданої кривої l_0 (***напрямної*** конуса), причому вершина O не лежить на напрямній l_0.

Канонічне рівняння конуса другого порядку (***еліптичного конуса***) (рис. 39) має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0}, \ (a,b,c>0).$$

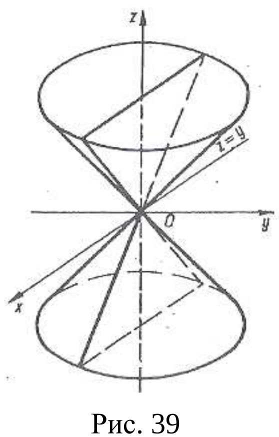

Рис. 39

Зокрема, якщо $a = b$, то рівняння

$$\boxed{x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/c^2 = 0}$$

визначає ***круговий конус***.

Еліптичний конус симетричний відносно координатних осей і координатних площин. Центр симетрії знаходиться в початку координат (рис. 39). Його перерізи площинами $x = 0$ і $y = 0$ є прямими, що перетинаються: $y = \pm bz/c$, $x = \pm az/c$. А перерізи площинами $z = h$ є еліпсами:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}, \quad \frac{x^2}{(aH)^2}+\frac{y^2}{(bH)^2}=1, \quad \left(H^2=h^2/c^2\right).$$

Зауваження. Коло, еліпс, гіперболу і параболу можна одержати як лінії перетину кругового конуса площиною.

Приклад. Звести рівняння заданого конуса другого порядку до канонічного вигляду і побудувати зображення його відповідної частини: $4x^2+9y^2=36z^2$, $|z|\le 2$. (Виконати самостійно).

2.2.6. Еліптичний параболоїд

Канонічне рівняння еліптичного параболоїда (рис. 40) має вигляд:

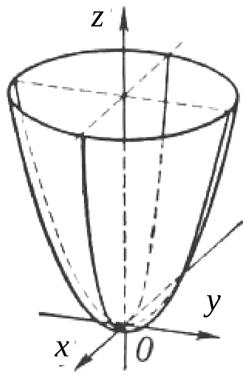

Рис. 40

$$\boxed{\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z}, \ (p,q>0)$$

Поверхня симетрична відносно координатних площин $x0z$, $y0z$ і вісі $0z$. Перерізи поверхні площинами $x=0$, $y=0$ є параболами:

$$y^2=2qz, \quad x^2=2pz$$

Перерізи поверхні площинами $z=h>0$ є еліпсами

$$x^2/(\sqrt{2ph})^2+y^2/(\sqrt{2qh})^2=1$$

2.2.7. Гіперболічний параболоїд

Канонічне рівняння гіперболічного параболоїда (рис. 41) має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z}, \ (p,q>0)$$

Гіперболічний параболоїд має форму сідла. Початок координат $O(0,0,0)$ (***вершина*** гіперболічного параболоїда) є ***сідловою точкою*** (***точкою перевалу***) цієї поверхні. Дві координатні площини Oxz і Oyz служать площинами симетрії, а координатна вісь Oz – віссю симетрії.

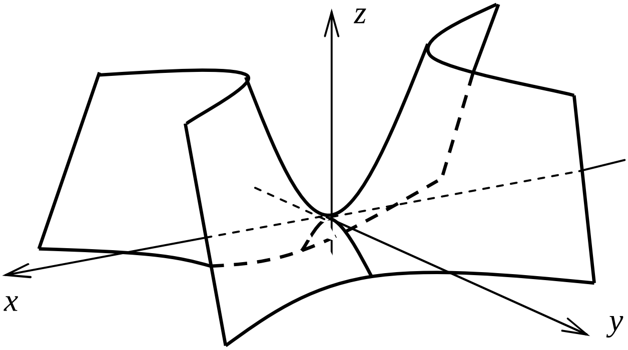

Рис. 41

1) У перерізі поверхні площиною $x=0$ одержуємо параболу: $y^2=-2qz$. Гілки параболи напрямлені вниз.
2) У перерізі поверхні площиною $y=0$ отримуємо параболу: $x^2=2pz$. Гілки параболи напрямлені вгору.
3) У перерізі поверхні площиною $z=h$, $h\neq 0$ дістаємо гіперболу: $x^2/p-y^2/q=2h$. А при перетині з координатною площиною $z=0$ отримуємо дві прямі, що перетинаються у початку координат.

Зауваження. Гіперболічний параболоїд є лінійчатою поверхнею.

2.2.8. Циліндричні поверхні. Циліндри другого порядку

Циліндричною поверхнею (***циліндром***) називається поверхня, описана прямою (***твірною***) l, що рухається паралельно заданій прямій a_0 вздовж заданої лінії (***напрямної***) l_0, причому вказані лінії l_0 і a_0 не лежать в одній площині. Якщо напрямна циліндра лежить у площині $x0y$, а твірна паралельна осі $0z$, то рівняння циліндра має вигляд: $F(x,y)=0$ або $y=f(x)$. Аналогічно,

$F(x,z)=0$ або $z=f(x)$ − рівняння циліндричної поверхні, твірна якої паралельна осі $0y$; $F(y,z)=0$ або $z=f(y)$ − рівняння циліндричної поверхні, твірна якої паралельна осі $0x$.

Якщо напрямною циліндричної поверхні є крива другого порядку, то поверхню називають ***циліндричною поверхнею другого порядку*** (рис. 42 − 44).

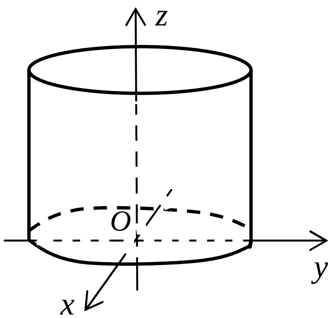

Рис. 42

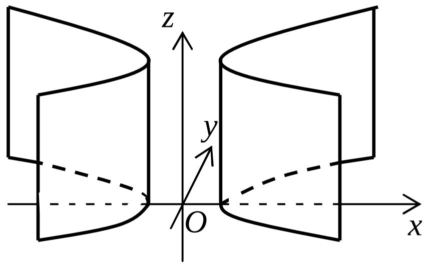

Рис. 43

За типом кривої, що утворюється у перерізі циліндра з площиною, перпендикулярною твірній, розрізняють такі циліндри другого порядку:

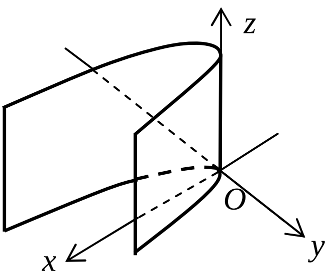

Рис. 44

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ − ***еліптичний*** (рис. 42), з окрема, ***круговий*** $\boxed{x^2+y^2=R^2}$;

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ − ***гіперболічний*** (рис. 43);

$\boxed{x^2=2py}$ − ***параболічний*** (рис. 44).

Аналогічно можна записати рівняння циліндричних поверхонь другого порядку, твірні яких паралельні осям $0x$ чи $0y$.

<u>Зауваження</u>. Циліндр є лінійчатою поверхнею. Його можна уявити як «огорожу» з прямих, виставлену вздовж напрямної l_0.

2.3. Функції багатьох змінних. Диференціювання функцій багатьох змінних

2.3.1. Поняття функції багатьох змінних. Область визначення

Нехай n – деяке фіксоване натуральне число. Упорядкована множина n довільних дійсних чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називаються ***n*-*вимірною точкою*** і позначається однією буквою, наприклад, M. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються ***координатами*** точки M. Позначається $M(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Множина всіх n-вимірних точок називається ***n*-*вимірним точковим простором*** R^n.

Нехай задано деяку n-вимірну непорожню множину D. Якщо за вказаним правилом (***законом відповідності***) f кожній точці M цієї множини відповідає одне цілком певне значення дійсної змінної u, то кажуть, що задано ***функцію*** n ***змінних*** $u = f(M) =$ $= f(x_1, x_2, ..., x_n)$. При цьому множину D називають ***областю визначення*** функції $u = f(M)$. Незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ називають ***аргументами***, а залежну змінну u – ***функцією***.

Якщо D – область на координатній площині Oxy (плоска, двовимірна), то функція $z = f(M) = f(x, y)$ є ***функцією двох змінних*** x, y.

Якщо D – область у тривимірному координатному просторі $Oxyz$, то функція $u = f(M) = f(x, y, z)$ є ***функцією трьох змінних*** x, y, z.

Нехай $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ – деяка точка n-вимірного простору. Множина всіх точок цього простору, для кожної з яких $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ відстань $\rho = M_0M$ від точки M_0 менша ε, тобто виконується умова

$$\boxed{\rho = M_0M = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2} < \varepsilon},$$

де $\varepsilon > 0$ – деяке додатне число, називається ***ε-околом*** точки M_0 і позначається $U(M_0, \varepsilon)$.

У випадку двовимірного простору (площини) ε-околом точки M_0 є внутрішня частина круга радіуса ε з центром M_0.

Зауваження 1. Надалі обмежимось, в основному, розглядом функцій лише двох і, рідше, трьох змінних. На випадок функцій більшого числа змінних відповідні результати поширюються за аналогією.

Зауваження 2. Якщо функція задана аналітично (формулами) без будь-яких додаткових умов, то розглядають її ***природну область визначення*** (***область допустимих значень***) D – множину всіх тих точок, у яких дані аналітичні вирази мають смисл.

Приклад. Знайти і зобразити штриховкою на координатній площині Oxy природну область визначення D заданої функції:

а) $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$; б) $z = \sqrt{y^2 - 1 - x}$;

в) $z = \arcsin\big((x - 3y)/6\big) + 1\big/\sqrt{9 - x^2 - y^2} - \ln x$.

□ а) Природна область визначення D даної функції $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$ – множина всіх тих точок (x, y), для яких $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, бо логарифм визначений тільки для додатних значень аргументу, а жодних інших обмежень на змінні x, y немає.

Щоб зобразити область D геометрично, знайдемо її межу:

$$9 - x^2 - 9y^2 = 0; \quad x^2 + 9y^2 = 9; \quad x^2\big/9 + y^2\big/1 = 1.$$

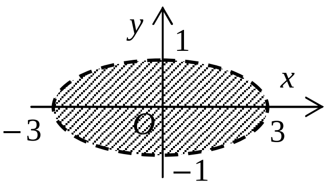

Рис. 45

Це рівняння еліпса з півосями $a = 3$ та $b = 1$. Даний еліпс у залежності від знака виразу $9 - x^2 - 9y^2$ ділить всю координатну площину Oxy на дві частини – внутрішню і зовнішню (рис. 45).

Щоб виявити, яка з частин входить у область визначення, тобто задовольняє умову $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, треба взяти довільно по одній пробній внутрішній точці з кожної частини і для них перевірити цю умову. Наприклад, для точки $O(0,0)$ умова виконується $9-0^2-9\cdot 0^2=9>0$, тому внутрішня область, обмежена еліпсом, входить в D. Для точки $B(0,2)$ ця умова не виконується $9-0^2-9\cdot 2^2=-27<0$, тому область, що лежить поза еліпсом, не входить в D.

Отже, внутрішніми точками області визначення D даної функції є точки, обмежені еліпсом. Сам еліпс не належить області D, тому що для його точок $9-x^2-9y^2=0$ і відповідна нерівність не виконується. Така лінія зображується пунктиром. Область D – відкрита (рис. 45).

б) Квадратний корінь добувається тільки з невід'ємних чисел, тому $y^2-1-x\geq 0$. Жодних інших обмежень на аргументи x, y немає.

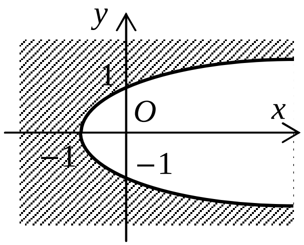

Рис. 46

Рівняння $y^2-1-x=0$ визначає параболу, яка в залежності від знака виразу y^2-1-x поділяє координатну площину на дві частини – внутрішню і зовнішню.

Точка $O(0,0)$ лежить усередині параболи і не задовольняє належній умові. Точка $A(-2,0)$ лежить зовні параболи і задовольняє цій умові. Отже, область визначення D складається з точок, що лежать ззовні параболи. Область D – замкнена, її межа позначена суцільною лінією (рис. 46).

в) Природна область визначення D даної функції – множина всіх тих точок (x,y), які задовольняють системі

$$\begin{cases} -1\leq (x-3y)/6\leq 1; \\ 9-x^2-y^2>0; \\ x>0. \end{cases}$$

Межа області D визначається рівняннями

$(x-3y)/6=-1$; $(x-3y)/6=1$; $9-x^2-y^2=0$; $x=0$

або $\quad x-3y+6=0$; $x-3y-6=0$; $x^2+y^2=9$; $x=0$.

Перші два рівняння визначають пару паралельних прямих, третє рівняння – коло з центром у початку координат і радіусом $R=3$, а четверте рівняння задає вісь Oy. Кожна пряма ділить координатну площину на дві півплощини. Точки прямих $x-3y+6=0$ і $x-3y-6=0$ задовольняють відповідні нерівності. Такі лінії зображуються суцільно. Коло ділить координатну площину на внутрішню і зовнішню частини (всередині круга і поза кругом). Для точок кола і прямої $x=0$ відповідні нерівності не виконуються, тому вони зображуються пунктиром. Використовуючи пробні точки, знаходимо область визначення D (рис. 47). ■

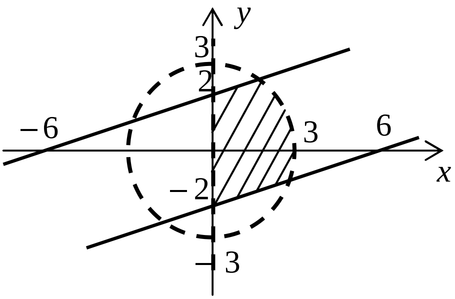

Рис. 47

2.3.2. Геометричне зображення функції двох змінних. Лінії та поверхні рівня

Множина всіх точок $P(x,y,z)$ простору, координати яких задовольняють рівняння $z=f(x,y)$, називається ***графіком*** функції двох змінних $z=f(x,y)$.

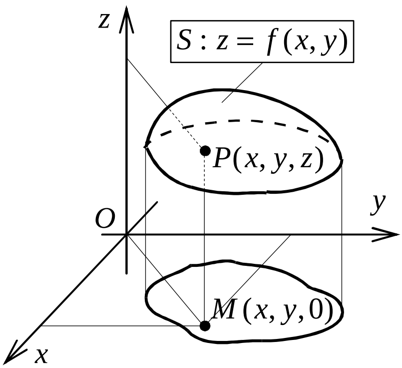

Рис. 48

Звичайно графіком є деяка поверхня S, що проектується на площину Oxy на область визначення D (рис. 48). (Поверхня $z=f(x,y)$ – це «дах», що «нависає» над плоскою областю D).

<u>Приклад 1</u>. Побудувати по-

верхню, яка є графіком функції $z = x^2 + y^2/4$ (еліптичний параболоїд).

□ Використовуємо метод паралельних перерізів.

Знаходимо головні перерізи (перерізи координатними площинами).

Oyz: $x = 0$; $z = y^2/4$; $y^2 = 4z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz.

Oxz: $y = 0$; $z = x^2$; $x^2 = z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz.

Oxy: $z = 0$; $x^2 + y^2/4 = 0$; $O(0,0)$ – початок координат (вершина параболоїда).

Додатково знаходимо переріз поверхні площиною, що паралельна координатній площині Oxy: $z = 0$.

$z = 9$; $x^2 + y^2/4 = 9$; $x^2/9 + y^2/36 = 1$ – еліпс з великою піввіссю $a = 6$, що паралельна осі Oy, і з малою піввіссю $b = 3$, що паралельна осі Ox.

Еліптичний параболоїд $z = x^2 + y^2/4$ зображений на рис. 49.

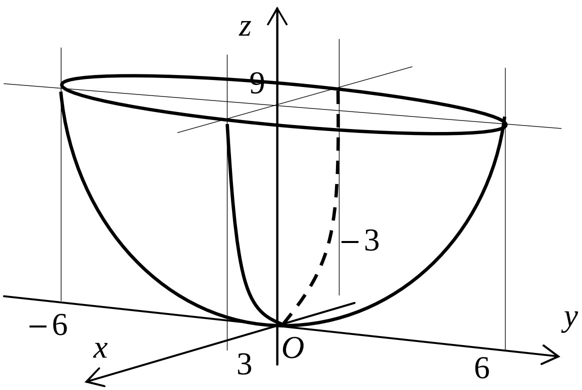

Рис. 49

Зауваження 1. Функцію трьох чи більше змінних зобразити за допомогою графіка неможливо.

Зауваження 2. Для функції двох чи більше змінних не можна ввести поняття монотонності (зростання чи спадання). Наприклад, для функції $z = f(x,y)$, що зображена на рис. 50, у точці $M(x,y)$ у напрямку променя l_1 ця функція спадає $f(M_1) < f(M)$, а у напрямку променя l_2 ця функція зростає $f(M_2) > f(M)$.

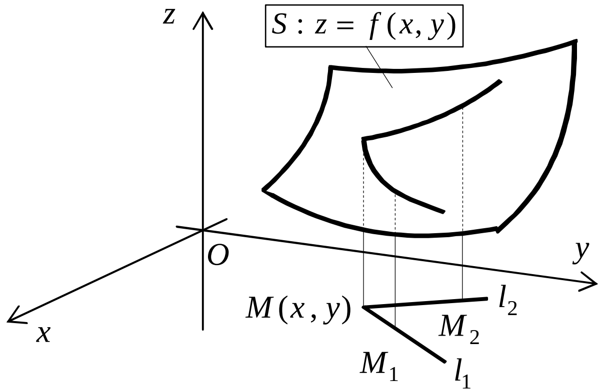

Рис. 50

Для графічного зображення функцій двох і трьох змінних використовуються також відповідно лінії та поверхні рівня.

Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x,y)$ називається множина всіх точок координатної площини Oxy, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $z = C$, $C = const$. Рівняння лінії рівня

$$\boxed{f(x,y) = C}.$$

Через кожну точку $M_0(x_0, y_0)$ області D проходить єдина лінія рівня $f(x,y) = f(M_0)$.

При різних C дістанемо різні лінії рівня для даної функції $z = f(x,y)$, кожна з яких виконує роль проекції лінії перетину поверхні $z = f(x,y)$ відповідною площиною $z = C$ (рис. 51).

Якщо вибрати числа $C_1, C_2, ..., C_n$ так, щоб вони утворювали арифметичну прогресію з різницею d $C_{n+1} = C_n + d$, то отримаємо топографічну карту рельєфу поверхні $z = f(x, y)$. За взаємним розташуванням ліній рівня можна судити про характер рельєфу: там, де лінії розміщуються густіше, функція $z = f(x, y)$ змінюється швидше (поверхня крутіша); там, де лінії розміщуються рідше, функція змінюється повільніше (поверхня більш полога).

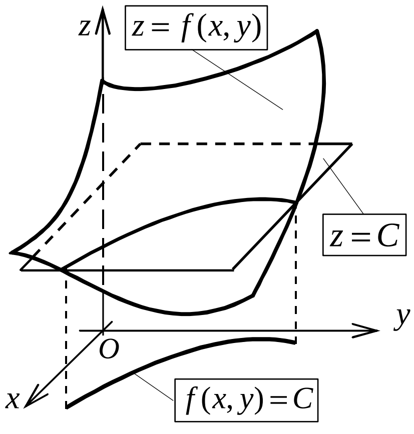

Рис. 51

Приклади ліній рівня: ізотерми, ізобари на географічних картах; еквіпотенціальні лінії плоского електростатичного поля в електротехніці; криві байдужості функції загальної корисності $TU(Q_1, Q_2)$ споживання товарів двох видів Q_1, Q_2 у мікроекономіці.

<u>Приклад 2</u>. Побудувати сім'ю ліній рівня функції $z = x^2 + y^2 + 2$ при $C_1 = 2, C_2 = 3, C_3 = 4, C_4 = 5$.

□ $x^2 + y^2 + 2 = C$; $x^2 + y^2 = C - 2$.

$C_1 = 2$: $x^2 + y^2 = 0$ – точка $O(0;0)$ (вироджене коло).

$C_2 = 3$: $x^2 + y^2 = 1$ – коло радіуса $R = 1$ з центром $O(0;0)$.

$C_3 = 4$: $x^2 + y^2 = 2$ – коло радіуса $R = \sqrt{2}$ з центром $O(0;0)$.

$C_4 = 5$: $x^2 + y^2 = 3$ – коло радіуса $R = \sqrt{3}$ з центром $O(0;0)$.

Сім'я ліній рівня $x^2 + y^2 = C - 2$ – це сім'я концентричних кіл з центром у початку координат $O(0;0)$ (рис. 52).

Функція $z = f(x, y)$ зростає вздовж кожного радіального напрямку. Поверхня $z = f(x, y)$ – це симетрична «чаша» з круто зростаючими краями (параболоїд обертання). ■

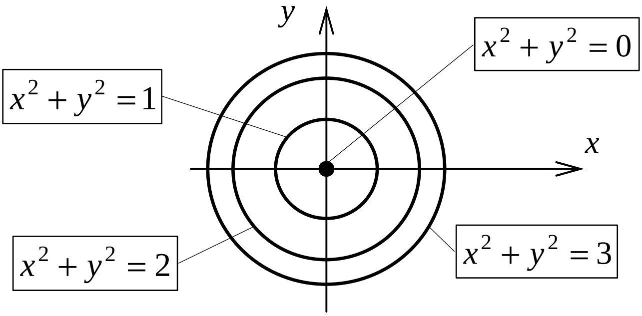

Рис. 52

Поверхнею рівня функції трьох змінних $u=f(x,y,z)$ називається множина всіх точок простору $Oxyz$, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $u=C$, $C=const$. Рівняння поверхні рівня

$$\boxed{f(x,y,z)=C}.$$

<u>Приклад 3</u>. Побудувати сім'ю поверхонь рівня функції $u=x^2+y^2+z^2$ при $C_1=0,\ C_2=1,\ C_3=4$.

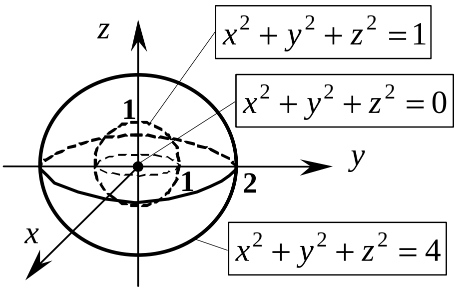

Рис. 53

□ Поверхні рівня $x^2+y^2+z^2=C$ – це сім'я концентричних сфер з центром у початку координат $O(0;0;0)$. На рис. 53 зображено поверхні рівня при $C_1=0,\ C_2=1,\ C_3=4$. ■

<u>Приклад 4</u>. Побудувати сім'ю поверхонь рівня функції $u=x^2+y^2-z$ при $C_1=0,\ C_2=1,\ C_3=4$. (Розв'язати самостійно).

2.3.3. Частинні прирости. Повний приріст. Границя. Неперервність. Точки розриву

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y фіксованою (рис. 54).

Різниця $\boxed{\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}$ називається ***частинним приростом по*** x функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x.

Аналогічно $\boxed{\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}$ – ***частинний приріст по*** y.

Якщо одночасно надати змінній x приросту Δx, а змінній y приросту Δy, то різниця $\boxed{\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}$ називається ***повним приростом*** функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$.

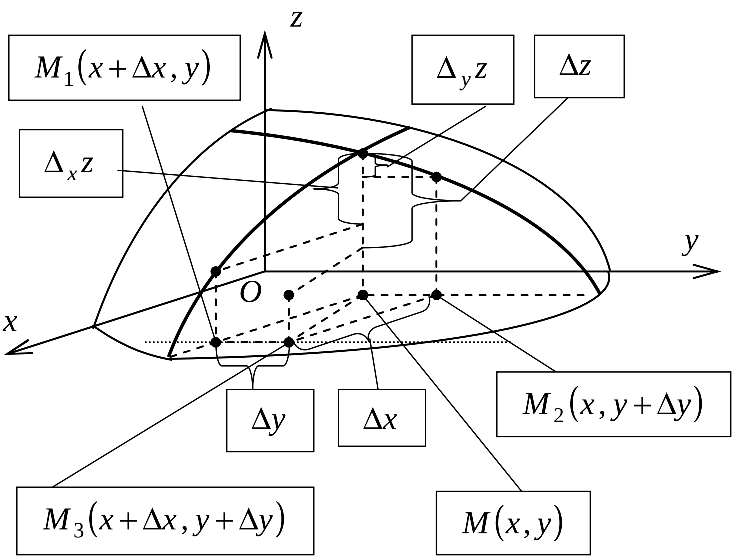

Рис. 54

Зауваження 1. Із рис. 54 зрозуміло, що повний приріст Δz, у загальному випадку, не дорівнює сумі частинних приростів:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z .$$

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, крім, можливо, самої точки M_0. Число A називається ***границею функції*** $z = f(x, y)$ ***в точці*** M_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якої точки M із δ-околу точки M_0, крім, можливо, самої точки M_0, виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Позначається

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{x \to x_0,\, y \to y_0} f(x, y) = A .$$

Іншими словами, число A називається ***границею функції*** $z = f(x, y)$ ***в точці*** M_0, якщо їх різниця $\alpha = f(x, y) - A$ є нескінченно малою величиною при $M \to M_0$:

$$\alpha = f(x, y) - A \to 0 \quad \text{при } M \to M_0 .$$

Зауваження 2. Точка M необмежено наближається до точки M_0 довільним способом. Важливо лише, що відстань $\rho = M_0 M$ від точки M_0 прямує до нуля.

Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною в точці*** M_0, якщо виконуються умови:

1) функція $z = f(x, y)$ визначена в самій точці M_0 і в деякому її околі;

2) існує скінченна границя $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Оскільки для неперервної функції $z = f(x, y)$ її приріст прямує до нуля .при $M \to M_0$: $\Delta z = f(M) - f(M_0) \to 0$ і при цьому прирости всіх аргументів прямують до нуля:

$$\Delta x = x - x_0 \to 0 \,; \quad \Delta y = y - y_0 \to 0 \,,$$

то означення неперервної в точці функції можна подати так.

Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною в точці*** M_0, якщо в цій точці нескінченно малим приростам Δx і Δy її аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції Δz:

$$\lim_{\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0} \Delta z = 0 .$$

Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною в області*** D**,** якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Властивості функції багатьох змінних, що неперервна в обмеженій замкненій області, аналогічні відповідним властивостям функції однієї змінної, що неперервна на відрізку.

Властивість 1. Функція $z = f(x, y)$, що неперервна в обмеженій замкненій області D, є обмеженою і досягає в ній свого найменшого m і найбільшого M значення.

Властивість 2. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, а m і M – відповідно її найменше і найбільше значення у цій області, то для будь-якого числа μ, що задовольняє нерівність $m \le \mu \le M$, у області D знайдеться хоча б одна точка $N \in D$, в якій значення функції дорівнює числу μ.

Якщо в точці M_0 порушується хоча б одна з умов неперервності, то ця точка називається ***точкою розриву*** функції $z = f(x, y)$, а сама функція $z = f(x, y)$ називається ***розривною*** в точці M_0.

Зауваження 4. У випадку функції двох змінних точки розриву можуть бути ***ізольованими*** чи утворювати ***лінії розриву***. Для функції трьох змінних точки розриву, крім цього, можуть утворювати ***поверхні розриву***.

Наприклад, функція $z = 1/(x^2 + y^2)$ має ізольовану точку розриву $O(0,0)$, для функції $z = 1/(2x + y + 2)$ пряма $2x + y + 2 = 0$ є лінією розриву, а функція $u = 1/(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ має поверхню розриву – сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2.3.4. Частинні похідні та їх обчислення. Геометричний зміст частинних похідних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y фіксованою.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x називається границя відношення частинного приросту по x цієї функції $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ до відповідного приросту аргументу Δx, коли останній прямує до нуля:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}\,.$$

Застосовуються також позначення:

$$z_x^I;\; f_x^I;\; f_x^I(x, y);\; f_x^I(M);\; \frac{\partial z}{\partial x};\; \frac{\partial f}{\partial x};\; \frac{\partial f(x, y)}{\partial x};\; \frac{\partial f(M)}{\partial x};\; \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M .$$

Аналогічно

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}\,.$$

Таким чином,

$$\partial z/\partial x = \left[dz/dx\right]_{y=const};\quad \partial z/\partial y = \left[dz/dy\right]_{x=const}.$$

Зауваження. Якщо у функції багатьох змінних $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ всі аргументи, крім вибраного x_j, зафіксувати, то отримаємо функцію $u = \varphi_j(x_j) = f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ тільки однієї вибраної змінної x_j. До цієї функції можна застосувати весь апарат математичного аналізу функцій однієї змінної. Зокрема, *частинна похідна за вибраною змінною обчислюється за правилами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи всі інші аргументи сталими* (*фіксованими*, «*замороженими*»):

$$\boxed{\partial u/\partial x_j = \left[du/dx_j\right]_{x_i=const,\; i=\overline{1,n};\; i\neq j}},\quad j = \overline{1, n}.$$

Приклад. Знайти всі частинні похідні заданої функції:

а) $z = x^2 / y - \sin y + \pi$; б) $z = x^y$; в) $u = e^{xy^2 z} / z$;

г) $u = x\cos(xy^3 - z)$; д) $u = tg\left(xy^4 / z^2\right)$.

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 / y - \sin y + \pi\right)'_x = \left(x^2 / y\right)'_x - (\sin y)'_x + \pi'_x =$

$$= (1/y)\,(x^2)'_x - 0 + 0 = (1/y)\cdot 2x = 2x/y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 / y - \sin y + \pi\right)'_y = \left(x^2 / y\right)'_y - (\sin y)'_y + \pi'_y = x^2\,(1/y)'_x -$$

$$- \cos y + 0 = x^2 \cdot \left(-1/y^2\right) - \cos y = -\,x^2 / y^2 - \cos y;$$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x = y\,x^{y-1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y = x^y \ln x$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{xy^2 z} / z\right)'_x = \dfrac{1}{z}\,(e^{xy^2 z})'_x = \dfrac{1}{z}\cdot e^{xy^2 z}(xy^2 z)'_x =$

$$= (1/z)\cdot e^{xy^2 z}\cdot y^2 z = y^2 e^{xy^2 z}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{xy^2 z} / z\right)'_y = \frac{1}{z}\,(e^{xy^2 z})'_y =$$

$$= (1/z)\cdot e^{xy^2 z}(xy^2 z)'_y = (1/z)\cdot e^{xy^2 z}\cdot xz\cdot 2y = 2xye^{xy^2 z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(e^{xy^2 z} / z\right)'_z = \frac{(e^{xy^2 z})'_z \cdot z - e^{xy^2 z}\, z'_z}{z^2} = \frac{e^{xy^2 z}\,(xy^2 z)'_z \cdot z - e^{xy^2 z}}{z^2} =$$

$= (e^{xy^2 z}\, xy^2 z - e^{xy^2 z}) / z^2$. (Завдання г) і д) виконати самостійно). ■

Розглянемо геометричний зміст частинних похідних.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Графіком функції $z = f(x, y)$ є деяка поверхня (рис. 55).

Рівняння $y = y_0$ визначає січну площину, яка перпендикулярна до осі Oy. Ця площина перетинає поверхню $z = f(x, y)$ по деякій плоскій лінії l. Оскільки $\partial z/\partial x = [dz/dx]_{y=y_0}$, то виходячи з геометричного змісту звичайної похідної, маємо $\partial z/\partial x|_{M_0} = tg\,\alpha$.

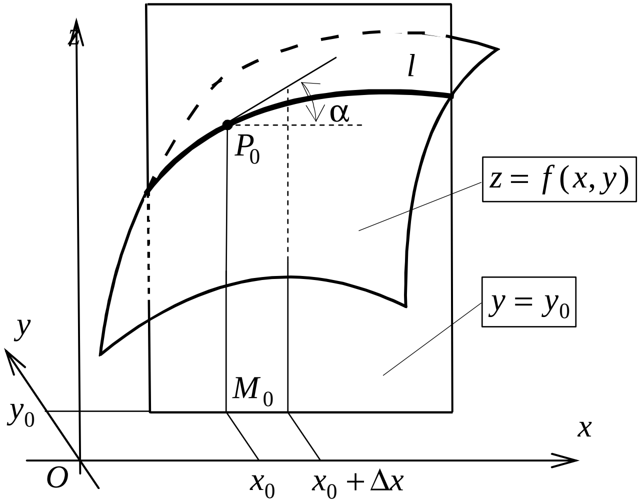

Рис. 55

Частинна похідна $\partial z/\partial x|_{M_0}$ *чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу* α *дотичної до лінії перерізу* l *поверхні* $z = f(x, y)$ *площиною* $y = y_0$ *у відповідній точці* $P_0(x_0, y_0, z_0)$, *де* $z_0 = f(x_0, y_0)$. (<u>Геометричний зміст</u> частинної похідної).

Загальні рівняння дотичної прямої до лінії перерізу l поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$: $\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0); \\ y = y_0. \end{cases}$

Аналогічно $\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \\ x = x_0 \end{cases}$

– загальні рівняння дотичної прямої до лінії перерізу l поверхні $z = f(x, y)$ площиною $x = x_0$.

2.3.5. Частинні та повний диференціали

Нехай задано функцію багатьох змінних $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Якщо всі аргументи, крім вибраного x_j, зафіксувати, то одержимо функцію $u = \varphi_j(x_j) = f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ тільки однієї вибраної змінної x_j, диференціал якої називається ***частинним диференціалом функції*** $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***за змінною*** x_j і позначається $d_{x_j} u$.

Частинний диференціал зв'язаний з відповідною частинною похідною співвідношенням

$$\boxed{d_{x_j} u = \frac{\partial z}{\partial x_j}\, dx_j},$$

де dx_j – диференціал незалежної змінної x_j. Диференціал незалежної змінної збігається з її приростом $dx_j = \Delta x_j$.

Приклад 1. Знайти частинні диференціали функції:

а) $z = arctg\,(y/x)$; б) $u = 3x^2yz - x\ln y$.

□ а) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot y\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$d_x z = -\frac{y\,dx}{x^2+y^2}; \quad d_y z = \frac{x\,dx}{x^2+y^2};$$

б) $$\frac{\partial u}{\partial x} = 3yz\cdot 2x - \ln y\cdot 1 = 6xyz - \ln x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2z\cdot 1 - x\cdot\frac{1}{y} = 3x^2z - x/y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2y\cdot 1 - 0 = 3x^2y;$$

$$d_x u = (6xyz - \ln x)\,dx; \; d_y u = (3x^2z - x/y)\,dy; \; d_z u = 3x^2y\;dz. \;\blacksquare$$

Функція $z = f(M) = f(x, y)$ називається ***диференційованою*** в точці $M(x, y)$, якщо її повний приріст $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - - f(x, y)$ можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

де A, B – незалежні від Δx і Δy величини; $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ і $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ функції.

Повним диференціалом dz функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ називається головна частина її повного приросту в цій точці, лінійна щодо приростів Δx і Δy аргументів:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Теорема 1 (***необхідна умова диференційованості***). *Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в деякій точці $M(x, y)$, то вона неперервна в цій точці*.
(Без доведення)

Теорема 2. *Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M(x; y)$, тобто $dz = A\,dx + B\,dy$, то ця функція має в точці $M(x; y)$ частині похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$, причому*

$$\partial z/\partial x = A; \quad \partial z/\partial y = B.$$

Іншими словами, *повний диференціал функції $z = f(x, y)$ дорівнює сумі добутків частинних похідних цієї функції на диференціали відповідних аргументів* $\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$.
(Без доведення)

Теорема 3 (***Достатня умова диференційованості***). *Якщо функція $z = f(x, y)$ має в деякій точці $M(x; y)$ неперервні частинні похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$, то ця функція диференційована в точці M.*
(Без доведення)

Приклад 2. Знайти повний диференціал функції:

а) $u = \ln\left(x + \sqrt{y + z^2}\right)$; б) $u = e^{z^2}\sin^2(x + y^3)$.

□ а) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{x+\sqrt{y+z^2}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x+\sqrt{y+z^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y+z^2}}\cdot 1=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{x+\sqrt{y+z^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+z^2}}\cdot 2z=$$

$$=\frac{z}{\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)};\quad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=$$

$$=\frac{2\sqrt{y+z^2}\,dx+dy+2z\,dz}{2\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)};$$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{z^2}\cdot 2\sin(x+y^3)\cdot\cos(x+y^3)=e^{z^2}\sin 2(x+y^3)$;

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{z^2}2\sin(x+y^3)\cos(x+y^3)\cdot 3y^2=3y^2e^{z^2}\sin 2(x+y^3);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\sin^2(x+y^3)\cdot e^{z^2}\cdot 2z=2ze^{z^2}\sin^2(x+y^3);$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=e^{z^2}\sin 2(x+y^3)\,dx+$$

$$+3y^2e^{z^2}\sin 2(x+y^3)\,dy+2z\,e^{z^2}\sin^2(x+y^3)\,dz.\quad ■$$

Зауваження. При достатньо малих приростах аргументів Δx і Δy повний приріст Δz функції $z=f(x,y)$ можна наближено замінити повним диференціалом $\Delta z\approx dz$. Звідси маємо формулу для наближеного обчислення значення функції

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y.$$

Приклад 3. Знайти повний приріст і повний диференціал функції $z=x/y$ в точці $M(9,3)$ при $\Delta x=0{,}1$ і $\Delta y=-0{,}2$.

□ $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=$

$$= \frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} - \frac{x}{y} = \frac{(x+\Delta x)y - x(y+\Delta y)}{y(y+\Delta y)} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y+\Delta y)};$$

$$\Delta z = \frac{3\cdot 0{,}1 - 9\cdot(-0{,}2)}{3\cdot(3-0{,}2)} = \frac{2{,}1}{3\cdot 2{,}8} = 0{,}25; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2};$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \frac{1}{y}\,\Delta x - \frac{x}{y^2}\,\Delta y;$$

$$dz = (1/3)\cdot 0{,}1 - (9/3^2)\cdot(-0{,}2) \approx 0{,}233. \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Знайти наближене значення

$$\text{а)}\ A = 1{,}98\cos 1; \qquad \text{б)}\ A = \sqrt{17}\ln 3.$$

□ а) Розглянемо функцію $z = z(x, y) = x\cos y$. Нехай $x = 2$; $y = \pi/3$. Тоді $\Delta x = 1{,}98 - 2 = -0{,}02$; $\Delta y = 1 - \pi/3 \approx -0{,}047$.

Дістанемо:

$$A = 1{,}98\cos 1 = z(2+\Delta x,\ \pi/3 + \Delta y) \approx z(2, \pi/3) +$$

$$+ \frac{\partial z(2, \pi/3)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial z(2, \pi/3)}{\partial y}\,\Delta y; \quad z(2, \pi/3) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y; \quad \frac{\partial z(2, \pi/3)}{\partial x} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x\sin y;$$

$$\frac{\partial z(2, \pi/3)}{\partial y} = -2\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \approx -1{,}73;$$

$$A = 1{,}98\cos 1 \approx 1 + (1/2)\cdot(-0{,}02) + (-1{,}73)\cdot(-0{,}047) \approx$$

$$\approx 1 - 0{,}01 + 0{,}081 \approx 1{,}07.$$

б) Розв’язати самостійно. ■

Теорема 4 (***Інваріантність форми повного диференціала***). *Повний диференціал складеної функції* $z = f(x, y)$, *де* $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, *можна подати у вигляді*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

який збігається з виглядом повного диференціала звичайної функції.

Іншими словами, *вигляд повного диференціала функції не залежить від того, чи є її аргументи незалежними змінними чи функціями інших змінних*.
(Без доведення)

2.3.6. Похідні складених функцій

Обмежимось розглядом трьох важливих випадків у припущенні, що всі частинні похідні неперервні.

1) Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, аргументи якої самі є функціями незалежної змінної t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тоді повна похідна складеної функції однієї змінної t $z = f\left(x(t), y(t)\right)$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}.$$

2) Якщо аргументи функції двох змінних $z = f(x, y)$ самі є функціями інших двох незалежних змінних $x = x(u, v)$ і $y = y(u, v)$. Тоді частинні похідні складеної функції двох змінних $z = f\left(x(u, v), y(u, v)\right)$ обчислюються за формулами:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}}; \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}}.$$

3) Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, де другий аргумент y сам є функцією першого аргументу x: $y = y(x)$. Тоді ***повна похідна*** за x складеної функції однієї змінної $z = f\left(x, y(x)\right)$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}.$$

<u>Зауваження</u>. Праворуч у цій формулі перший доданок $\partial z / \partial x$ – це частинна похідна за x, обчислена в припущенні, що $y = const$.

У лівій частині маємо dz/dx – повну похідну за x, обчислену при умові, що y є функцією від x: $y = y(x)$.

<u>Приклад</u>. Знайти значення вказаних похідних складеної функції у відповідній точці:

а) dz/dt, якщо $z = xe^{xy}$, де $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $t_0 = \pi$;

б) $\partial z/\partial u$ і $\partial z/\partial v$, якщо $z = arctg(x^2 + y)$, де $x = u\ln v$, $y = v\cos u$, $u_0 = \pi$, $v_0 = 1$;

в) dz/dx, якщо $z = \arcsin(xy)$, де $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

□ а) $x_0 = x(t_0) = \pi\cos\pi = -\pi$; $y_0 = y(t_0) = \pi\sin\pi = 0$;

$$dx/dt = \cos t - t\sin t; \quad dx/dt\big|_{t=\pi} = \cos\pi - \pi\sin\pi = -1;$$

$$dy/dt = \sin t + t\cos t; \quad dy/dt\big|_{t=\pi} = \sin\pi + \pi\cos\pi = -\pi;$$

$$\partial z/\partial x = e^{xy} + xye^{xy}; \quad \partial z/\partial x\big|_{t=\pi} = e^{-\pi\cdot 0} - \pi\cdot 0\cdot e^{-\pi\cdot 0} = 1;$$

$$\partial z/\partial y = x^2 e^{xy}; \quad \partial z/\partial y\big|_{t=\pi} = (-\pi)^2 e^{-\pi\cdot 0} = \pi^2;$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}; \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\pi} = 1\cdot -1) + \pi^2\cdot(-\pi) = -(\pi^3 + 1).$$

б) $x_0 = x(u_0, v_0) = \pi\cdot\ln 1 = 0$; $y_0 = y(u_0, v_0) = 1\cdot\cos\pi = -1$;

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \ln v; \quad \left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{u=\pi,\, v=1} = \ln 1 = 0; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v}; \quad \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{u=\pi,\, v=1} = \frac{\pi}{1} = \pi;$$

$$\partial y/\partial u = -v\sin u; \ \partial y/\partial u\big|_{u=\pi,\, v=1} = -1\cdot\sin\pi = 0; \ \partial y/\partial v = \cos u;$$

$$\partial y/\partial v\big|_{u=\pi,\, v=1} = \cos\pi = -1; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + (x^2 + y)^2};$$

$$\partial z/\partial x\big|_{u=\pi,\, v=1} = \frac{2\cdot 0}{1 + (0^2 - 1)^2} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x^2 + y)^2};$$

$$\partial z/\partial y\,\Big|_{u=\pi,\,v=1} = \frac{1}{1+(0^2-1)^2} = \frac{1}{2}\,; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\,;$$

$$\partial z/\partial u\,\Big|_{u=\pi,\,v=1} = 0\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0\,; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\,;$$

$$\partial z/\partial v\Big|_{u=\pi,\,v=1} = 0\cdot\pi + (1/2)\cdot(-1) = -1/2\,;$$

в) $y_0 = y(x_0) = \ln 1 = 0$; $\quad dy/dx = 1/x$; $\quad dy/dx\,\Big|_{x=1} = 1/1 = 1$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}\,; \quad \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \frac{0}{\sqrt{1-(1\cdot 0)^2}} = 0\,; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}}\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{1-(1\cdot 0)^2}} = 1\,; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\,; \quad \frac{dz}{dx}\bigg|_{x=1} = 0 + 1\cdot 1 = 1\,. \ \blacksquare$$

2.3.7. Диференціювання неявно заданих функцій

Теорема 1. (***умови існування неявної функції***). *Якщо функція* $F(x,y)$ *та її частинні похідні* $F'_y(x,y)$, $F'_x(x,y)$ *визначені та неперервні в деякому околі точки* $M_0(x_0,y_0)$ *і при цьому* $F(x_0,y_0)=0$, *а* $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$, *то рівняння* $F(x,y)=0$ *в деякому околі точки* $M_0(x_0,y_0)$ *визначає єдину неявну неперервну і диференційовану функцію* $y=y(x)$, *причому* $y_0 = y(x_0)$.

(Без доведення).

Теорема 2. *Нехай функція* $y=y(x)$ *задається неявно рівнянням* $F(x,y)=0$, *де функція* $F(x,y)$ *та її частинні похідні* $F'_y(x,y)$ *і* $F'_x(x,y)$ *неперервні в околі деякої точки* $M(x,y)$, *координати якої задовольняють це рівняння, і при цьому* $F'_y(x,y)\neq 0$. *Тоді в цій точці* $\boxed{y'_x = -F'_x(x,y)\big/F'_y(x,y)}$. (Без доведення).

Приклад 1. Написати рівняння дотичної до кривої

$$l:\quad x^3y^4 - 3y^2 = 4 \quad \text{у точці} \quad M_0(1;2)\,.$$

□ Перевіримо, чи задовольняє точка $M_0(1;2)$ рівняння лінії

$$l: \quad F(x,y)=x^3y^4-3y^2-4=0\,;$$

$$M_0(1;2): \quad F(x_0,y_0)=1^3\cdot 2^4-3\cdot 2^2-4=0\,; \quad 0=0\,; \quad M_0\in l\,.$$

Рівняння дотичної прямої $\quad y-y_0=y_0^I\cdot(x-x_0)\,.$

Знайдемо шукану похідну $\quad y_0^I=y_x^I\Big|_{M_0}$:

$$y_x^I=-F_x^I\big/F_y^I\,; \quad F_x^I=3x^2y^4\,; \quad F_y^I=4x^3y^3-6y\,;$$

$$y_x^I=-\frac{3x^2y^4}{4x^3y^3-6y}=-\frac{3x^2y^3}{4x^3y^2-6}\,;$$

$$y_0^I=y_x^I\Big|_{M_0}=-3\cdot 1^2\cdot 2^3\big/(4\cdot 1^2\cdot 2^2-6)=-12/5\,.$$

Рівняння шуканої дотичної

$$y-2=-\frac{12}{5}(x-1)\,; \quad y=-\frac{12}{5}x+\frac{22}{5}\,. \quad ■$$

Зауваження. Нехай рівняння $F(x,y,z)=0$ задає неявно функцію двох змінних $z=z(x,y)$. Тоді, фіксуючи y, за теоремою 2 отримаємо $\boxed{\partial z/\partial x=-F_x^I(x,y)\big/F_z^I(x,y)}$.

Фіксуючи x, аналогічно маємо $\boxed{\partial z/\partial y=-F_y^I(x,y)\big/F_z^I(x,y)}$.

Приклад 2. Знайти значення частинних похідних функції $z=z(x,y)$, яка задана неявно рівнянням $x^2+2e^y+xz=5$, у точці $M_0(1;0;2)$.

□ Перевіримо, чи задовольняє точка $M_0(1;0;2)$ задане рівняння, що визначає деяку поверхню

$$S: \quad F(x,y,z)=x^2+2e^y+xz-5=0\,; \quad M_0(1;0;2): \; F(x_0,y_0,z_0)=$$

$$=1^2+2\cdot e^0+1\cdot 2-5=0\,; \quad 0=0\,; \quad M_0\in S\,.$$

Знайдемо шукані похідні:

$$F'_x = 2x + z; \quad F'_y = 2e^y; \quad F'_z = x; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+z}{x};$$

$$\partial z/\partial x\big|_{M_0} = -(2\cdot 1 + 2)/1 = -4; \ \partial z/\partial x = -F'_y\big/F'_z; \ \partial z/\partial x = -2e^y\big/x;$$

$$\partial z/\partial y\big|_{M_0} = -2e^0\big/1 = -2. \ \blacksquare$$

Приклад 3. Продиференціювати неявно задану функцію $z = z(x, y)$ двох змінних: $y^2 - \sin yz + xz^4 - 3 = 0$.

$\square$ $F'_x = z^4$; $F'_y = 2y - z\cos yz$; $F'_z = -y\cos yz + 4xz^3$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{z^4}{-y\cos yz + 4xz^3}; \ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_y}{F'_z} - \frac{2y - z\cos yz}{-y\cos yz + 4xz^3}. \ \blacksquare$$

Приклад 4. Обчислити частинні похідні неявно заданої функції $z = z(x, y)$ у вказаній точці:

$x\sin y + y\sin x + z^2 \sin x - z^3 + 1 = 0$; $M_0(0; \pi/2; 1)$. (Самостійно).

2.3.8. Дотична площина і нормаль до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала

Нехай поверхня S задана рівнянням $z = f(x, y)$ і $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – деяка точка цієї поверхні (рис. 56). Рівняння дотичної площини α_d у точці P_0 будемо шукати у вигляді

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0),$$

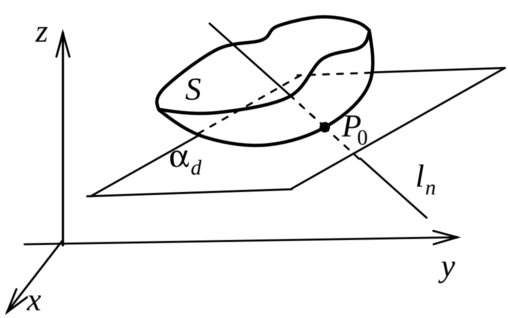

Рис. 56

де A, B – невизначені коефіцієнти.

З геометричного змісту частинних похідних $f'_x(x_0, y_0)$ і $f'_y(x_0, y_0)$ випливає, що рівняння дотичних у точці P_0 до ліній перетину поверхні S: $z = f(x, y)$

площинами $y = y_0$ і $x = x_0$ мають відповідно вигляд:

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0); \\ y = y_0; \end{cases} \qquad \begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \\ x = x_0. \end{cases}$$

Ці дві прямі є лініями перетину дотичної площини α_d відповідно з площинами $y = y_0$ і $x = x_0$. Тому рівняння дотичних прямих можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0); \\ y = y_0; \end{cases} \qquad \begin{cases} z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0); \\ x = x_0. \end{cases}$$

Порівнюючи ці рівняння з попередніми рівняннями дотичних прямих, знаходимо $A = f'_x(x_0, y_0)$; $B = f'_y(x_0, y_0)$.

Отже, ***рівняння дотичної площини*** α_d має вигляд:

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}.$$

Вектор нормалі дотичної площини

$$\vec{n} = (A,\ B,\ C) = \left(f'_x(x_0, y_0),\ f'_y(x_0, y_0),\ -1\right)$$

називається також ***вектором нормалі до поверхні*** S: $z = f(x, y)$ у точці дотику $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пряма l_n, яка проходить через точку P_0 перпендикулярно до дотичної площини α_d у цій точці, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***) до поверхні S: $z = f(x, y)$ у цій точці P_0.

Взявши вектор нормалі дотичної площини за напрямний вектор, можна записати ***канонічні рівняння нормальної прямої***:

$$\boxed{l_n:\ \frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}}.$$

Зауваження 1. Якщо поверхня S задана неявно рівнянням $F(x; y; z) = 0$, то:

1) рівняння дотичної площини

$$\boxed{\alpha_d:\ \ F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+}$$
$$\boxed{+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0}$$

і вектор нормалі $\vec{n}=\left(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)\right)$;

2) канонічні рівняння нормальної прямої

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}}.$$

<u>Приклад</u>. Написати рівняння дотичної площини α_d та нормальної прямої l_n до заданої поверхні S в указаній точці $P_0(x_0;y_0;z_0)$:

а) $x_0=0$, $y_0=2$, а поверхня S задана явно рівнянням $z=x^2-y\cos x+y^3-2x$;

б) $P_0(1;-2;-1)$, а поверхня S задана неявно рівнянням $x^2+y^2/x-z^3+4yz=14$.

□ а) $z=f(x,y)=x^2-y\cos x+y^3-2x$;

$$z_0=f(x_0,y_0)=0^2-2\cos 0+2-0^3=6;\quad P_0(0;2;6);$$

$$f'_x=2x+y\sin x-2;\quad f'_x\big|_{P_0}=2\cdot 0+2\cdot\sin 0-2=-2;$$

$$f'_y=-\cos x+3y^2;\quad f'_y\big|_{P_0}=-\cos 0+3\cdot 2^2=11;$$

$$\alpha_d:\ z-z_0=f'_x\big|_{P_0}(x-x_0)+f'_y\big|_{P_0}(y-y_0);$$

$$z-6=-2(x-0)+11(y-2);\quad -2x+11y-22-z+6=0;$$

$-2x+11y-z-16=0$; $2x-11y+z+16=0$ – дотична площина;

$$l_n: \quad \frac{x-x_0}{f'_x\big|_{P_0}} = \frac{y-y_0}{f'_y\big|_{P_0}} = \frac{z-z_0}{-1}; \quad \frac{x-0}{-2} = \frac{y-2}{11} = \frac{z-6}{-1}$$

– нормальна пряма;

б) Перевіримо спочатку, чи належить указана точка $P_0(1;-2;-1)$ даній поверхні S :

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 / x - z^3 + 4yz - 14 = 0; \; 1^2 + (-2)^2 / 1 - (-1)^3 +$$

$$+4\cdot(-2)\cdot(-1) - 14 = 0; \quad 0 = 0 \text{ вірно}; \quad P_0(1;-2;-1) \in S.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці дотику P_0 :

$$F'_x = 2x - y^2 / x^2; \; F'_x\big|_{P_0} = 2\cdot 1 - (-2)^2 / 1^2 = -2; \; F'_y = 2y/x + 4z;$$

$$F'_y\big|_{P_0} = 2\cdot(-2)/1 + 4\cdot(-1) = -8; \; F'_z = -3z^2 + 4y; \; F'_z\big|_{P_0} = -3\times$$

$$\times(-1)^2 + 4\cdot(-2) = -11.$$

Складаємо рівняння дотичної площини та нормальної прямої:

$$\alpha_d: \quad F'_x\big|_{P_0}(x-x_0) + F'_y\big|_{P_0}(y-y_0) + F'_z\big|_{P_0}(z-z_0) = 0;$$

$$-2\cdot(x-1) - 8\cdot(y+2) - 11\cdot(z+1) = 0; \; 2x - 2 + 8y + 16 +$$

$$+11z + 11 = 0; \quad 2x + 8y + 11z + 25 = 0$$ – дотична площина;

$$l_n: \quad \frac{x-x_0}{F'_x\big|_{P_0}} = \frac{y-y_0}{F'_y\big|_{P_0}} = \frac{z-z_0}{F'_z\big|_{P_0}}; \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z+1}{-11};$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{8} = \frac{z+1}{11}$$ – нормальна пряма. ■

Порівнюючи рівняння дотичної площини

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$

з формулою повного диференціала, яку можна подати у вигляді

$$dz = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

бачимо, що праві частини цих виразів збігаються.

Отже, й ліві частини є рівними. Тобто, *повний диференціал функції* dz *дорівнює приросту* $\Delta z = z - z_0$ *аплікати дотичної площини* α_d, *проведеної до поверхні* $S: z = f(x, y)$ *у точці* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 57). (Геометричний зміст повного диференціалу).

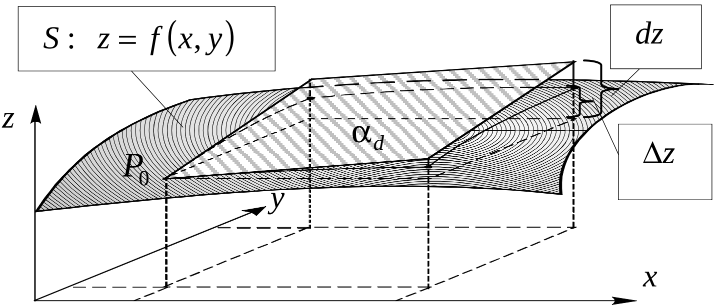

Рис. 57

2.3.9. Похідна за напрямом і градієнт

Нехай у деякому околі фіксованої точки $M(x, y, z)$ задано функцію трьох змінних $u = u(M) = u(x, y, z)$. Проведемо з цієї точки M довільний ненульовий вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$. У напрямі цього вектора на деякій відстані Δl від початку M візьмемо іншу точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ (рис. 58). Тоді

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\ ;$$

$$\Delta x = \Delta l \cos\alpha; \quad \Delta y = \Delta l \cos\beta; \quad \Delta z = \Delta l \cos\gamma .$$

Різниця $\Delta_l u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)$ значень функції в точках M_1 і M називається ***приростом функції*** $u = u(x, y, z)$ ***у напрямі вектора*** $\vec{l}$.

Якщо функція $u = u(x, y, z)$ неперервна і має неперервні частинні похідні, то

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$ при $\Delta l \to 0$.

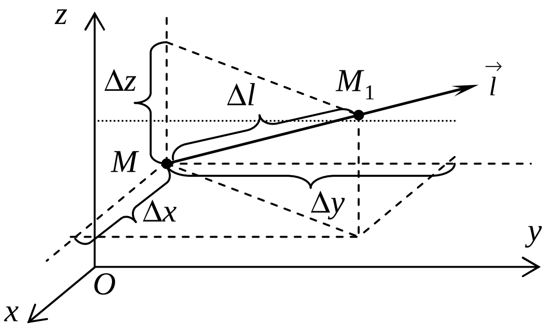

Рис. 58

Тоді $$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l\,\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l\,\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta l\,\cos\gamma +$$

$$+\varepsilon_1 \Delta l\,\cos\alpha + \varepsilon_2 \Delta l\,\cos\beta + \varepsilon_3 \Delta l\,\cos\gamma\ .ё$$

Похідною функції $u = u(x, y, z)$ ***у точці*** $M(x, y, z)$ ***за напрямом вектора*** $\vec{l}$ називається границя $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}}$.

Похідна за напрямом обчислюється за формулою:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}$$

і визначає швидкість змінювання функції за напрямом вектора $\vec{l}$ у точці $M(x, y, z)$.

Зауваження. Якщо напрям вектора $\vec{l}$ співпадає з напрямом одного з координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ чи $\vec{k}$, то похідна за напрямом $\partial u/\partial l$ співпадає з відповідною частинною похідною:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial i}=\frac{\partial u}{\partial x}};\quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial j}=\frac{\partial u}{\partial y}};\quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial k}=\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Приклад 1. Для заданої функції $u=u(x,y,z)$ і вказаного вектора $\vec{l}$ знайти похідну за напрямом $\partial u/\partial l$ у зазначеній точці M :

а) $u=(x^2+y^2)tg\,z$; $\vec{l}(-1;\,2;\,-2)$; $M(1;-2;\,\pi/4)$;

б) $u=\sqrt{x^2+2y}\ln(x+y+z)$; $\vec{l}(-6;\,2;\,-3)$; $M(3;-4;2)$.

□ а) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\ tgz$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y\ tgz$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{x^2+y^2}{\cos^2 z}$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=2\cdot 1\cdot tg\frac{\pi}{4}=2\,;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=2\cdot(-2)\cdot tg\frac{\pi}{4}=-4\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x^2+y^2}{\cos^2 z}\,;\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\frac{1^2+(-2)^2}{\cos^2(\pi/4)}=10\,;\ |\,\vec{l}\,|=\sqrt{l_x^2+l_y^2+l_y^2}\,;$$

$$|\,\vec{l}\,|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=3\,;$$

$$\cos\alpha=l_x\Big/|\,\vec{l}\,|;\ \ \cos\beta=l_y\Big/|\,\vec{l}\,|;\ \ \cos\gamma=l_z\Big/|\,\vec{l}\,|;\ \ \cos\alpha=-1/3;$$

$$\cos\beta=\frac{2}{3};\ \ \cos\gamma=\frac{-2}{3};\ \ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma;$$

$$\partial u/\partial l\,\Big|_M=2\cdot(-1/3)+(-4)\cdot(2/3)+10\cdot(-2/3)=-10\,.$$

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь: $\partial u/\partial l\,\Big|_M=-1$. ■

Градієнтом функції $u=u(x,y,z)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\boxed{grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}}\,.$$