А. І. Колосов
А. В. Якунін
Ю. В. Ситникова

В И Щ А
МАТЕМАТИКА
для економістів
у двох модулях
М О Д У Л Ь 2

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА ІМЕНІ О. М. БЕКЕТОВА**

**А. І. Колосов,
А. В. Якунін,
Ю. В. Ситникова**

ВИЩА МАТЕМАТИКА
для економістів
у двох модулях

МОДУЛЬ 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2015

Колосов А. І. Вища математика для економістів: у 2-х модулях. Модуль 2: конспект лекцій (для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства" і 6.030509 "Облік і аудит") / А. І. Колосов, А. В. Якунін, Ю. В. Ситникова; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. − 257 с.

Автори: А. І. Колосов,
А. В. Якунін,
Ю. В. Ситникова

Рецензент: *к. ф.-м. н., доц. Л. Б. Коваленко*

Подано конспект лекцій, доповнений матеріалом для самостійного опрацювання, зразками розв'язання типових задач і запитаннями для самоконтролю. Відображено розділи: інтегральне числення функцій однієї змінної; економічна динаміка та її моделювання; аналітична геометрія у просторі; функції багатьох змінних; числові ряди; елементи фінансової математики та математичної економіки.

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 10 від 22.05.2015 р.

Передмова

У конспекті лекцій викладено розділи, що відповідають другому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів економічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю сутності понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю на застосування до задач економічного змісту. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Частина викладеного матеріалу розрахована на самостійне опрацювання. До всіх розділів додаються контрольні запитання.

Основою даного посібника є цикл лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті економіки і підприємництва Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Конспект лекцій призначений для студентів економічних спеціальностей і може бути корисний для аспірантів, викладачів, економістів-практиків.

Змістовий модуль 1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ЕКОНОМІЧНА ДИНАМІКА ТА ЇЇ МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. Невизначений інтеграл

1.1.1. Первісна функція та невизначений інтеграл. Геометричний зміст невизначеного інтеграла

Основна задача диференціального числення – знаходження похідної $f'(x)$ відомої функції $f(x)$. Механічне тлумачення: за відомим законом руху матеріальної точки $s(x)$ диференціюванням знайти її швидкість $v(x) = s'(x)$.

Основною для інтегрального числення є обернена задача – знаходження функції $F(x)$ за відомою її похідною $F'(x) = f(x)$. У механічній інтерпретації: якщо відома швидкість $v(x) = s'(x)$ матеріальної точки, то інтегруванням можна знайти закон її руху $s(x)$.

Нехай X – деякий проміжок на множині дійсних чисел R. Тобто X – це множина вигляду $[a;b]$, $[a;b)$, $(a;b]$ або $(a;b)$, причому цей проміжок може бути скінченним чи нескінченним.

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на X, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність

$\boxed{F'(x) = f(x)}$ або, що те саме, $\boxed{dF(x) = f(x)dx}$.

Іншими словами, *функція* $f(x)$ *– похідна своєї первісної* $F(x)$.

Приклад 1. Знайти первісну для даної функції:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \cos 3x$; в) $f(x) = 1/x$.

□ а) Оскільки $(x^4)' = 4x^3$, то з означення первісної випливає, що функція $F(x) = x^4/4$ є первісна для $f(x) = x^3$: $(x^4/4)' = x^3$. Первісною є також $F(x) = x^4/4 + C$, де C – довільна стала, оскільки додавання константи не змінює значення похідної. При цьому $X = (-\infty; +\infty)$.

б) Оскільки $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$, то для $f(x) = \cos 3x$ первісною є функція $F(x) = (1/3)\sin 3x + C$, $X = (-\infty; +\infty)$.

в) Оскільки $(\ln x)' = 1/x$, то первісною для функції $f(x) = 1/x$ служить функція $F(x) = \ln x + C$, $X = (0; +\infty)$, а також $F(x) = \ln|x| + C$. $X = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. ■

<u>Теорема (про загальний вигляд усіх первісних)</u>. *Нехай* $F(x)$ *– деяка первісна функції* $f(x)$ *на проміжку* X. *Тоді функція* $F(x) + C$, *де* C *– довільна стала, також буде первісною функції* $f(x)$. *І навпаки, будь-яка первісна функції* $f(x)$ *на проміжку* X *може бути подана у вигляді* $F(x) + C$.

□ <u>Доведення</u> першої частини теореми випливає з властивостей похідної та означення первісної:

$$\left(F(x) + C\right)' = F'(x) + C' = f(x).$$

Для доведення другої частини припустимо, що $\Phi(x)$ – довільна первісна функції $f(x)$. Знайдемо похідну різниці $\Phi(x) - F(x) = \varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0, \quad x \in X.$$

З одержаної тотожності випливає, що $\varphi(x)$ є сталою, $\varphi(x) = C$. Тоді $\Phi(x) - F(x) = C$, звідки $\Phi(x) = F(x) + C$. ■

Множину всіх первісних функції $f(x)$ на проміжку X називають ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)\,dx$.

При цьому $f(x)$ називають ***підінтегральною функцією***, $f(x)\,dx$ – ***підінтегральним виразом***, $\int$ – ***знаком інтеграла***, x – ***змінною інтегрування***.

Якщо функція $F(x)$ є деякою первісною для $f(x)$, тоді

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}, \quad \text{де } C \text{ – довільна стала.}$$

Операція знаходження невизначеного інтеграла (множини всіх первісних функцій для $f(x)$) називається ***інтегруванням***.

Інтегрування – це обернена операція до диференціювання.

Зауваження. При інтегруванні різними способами однієї й тієї ж функції результати можуть відрізнятися за своїм зовнішнім виглядом.

Геометричний зміст. Первісна функції $f(x)$ є лінією $y = F(x)$, у кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює відповідному значенню функції $f(x)$. Невизначений інтеграл $\int f(x)\,dx$ – це сім'я таких «паралельних» ліній, що задається рівнянням $y = F(x) + C$ (рис. 1).

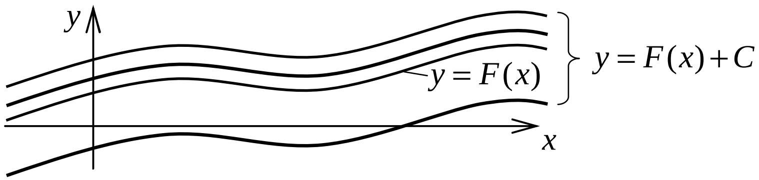

Рис. 1

1.1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів. Безпосереднє інтегрування

Невизначений інтеграл має наступні властивості:

1. *Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції*:

$$\boxed{(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = f(x)}.$$

2. *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу*:

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx}.$$

3. *Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала*:

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C}.$$

Ці три властивості випливають з означення невизначеного інтеграла. Наступні дві співпадають з відповідними властивостями похідної.

4. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної функції окремо*:

$$\boxed{\int\left(f(x)+g(x)-h(x)\right)dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx-\int h(x)\,dx}.$$

5. *Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити з-під знака інтеграла*:

$$\boxed{\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx,\quad a=const\neq 0}.$$

6. *Якщо* $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$ – *будь-яка неперервно диференційована функція, то*

$$\boxed{\int f(u)\,du=F(u)+C}.$$

Тобто, *змінною інтегрування може бути як незалежна змінна, так і довільна неперервно диференційована функція іншої змінної*.

□ <u>Доведемо</u> цю властивість. Розглянемо $\int f(u)\,du$, в якому $u=\varphi(x)$. Тоді $du=\varphi'(x)\,dx$. Нехай для підінтегральної функції первісною є $F(u)=F\left(\varphi(x)\right)$. Знайдемо її похідну:

$$F'\left(\varphi(x)\right)=F'(u)\,\varphi'(x)=f(u)\,\varphi'(x)=f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x).$$

Тоді за третьою властивістю

$$\int dF\left(\varphi(x)\right)=\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx=F\left(\varphi(x)\right)+C$$

або $\int f(u)\,du=F(u)+C$. ■

<u>Зауваження 1</u>. Згідно з властивостями 1 і 2 *правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням*.

<u>Зауваження 2</u>. Властивості 4 і 5 виражають <u>лінійність</u> операції інтегрування.

<u>Зауваження 3</u>. Властивість 6 виражає <u>інваріантність</u> формул інтегрування: *будь-яка формула залишається справедливою, якщо змінну інтегрування розглядати як довільну неперервно диференційовану функцію*.

На основі таблиці похідних (диференціалів) елементарних функцій можна скласти таблицю невизначених інтегралів:

Таблиця 1

Основні невизначені інтеграли			
1	$\int 0\,du = C$	5	$\int \sin u\; du = -\cos u + C$
2	$\int u^{\alpha}\, du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$	6	$\int \cos u\; du = \sin u + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\; u + C$
2б	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\,ctg\; u + C$
2в	$\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$	9	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
3	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	10	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + b}\right\rvert + C$ $(b \neq 0)$
4	$\int a^{u}\, du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C$ $(a > 0\,;\;\; a \neq 1)$	11	$\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\; arctg\dfrac{u}{a} + C$ $(a \neq 0)$
4а	$\int e^{u}\, du = e^{u} + C$	12	$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\,\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$ $(a > 0)$

Продовж. Табл. 1

Додаткові невизначені інтеграли			
1	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C$	2	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$
3	$\int tg\,u\,du = -\ln\left|\cos u\right| + C$	4	$\int ctg\,u\,du = \ln\left|\sin u\right| + C$
5	$\int sh u\,du = ch u + C$	6	$\int ch u\,du = sh u + C$
7	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th\,u + C$	8	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -\,cth\,u + C$
9	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm$ $\pm \frac{1}{2}a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$ $(a \neq 0)$	10	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{a}\sqrt{a^2 - u^2} +$ $+ \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
11	$\int e^{au}\sin bu\,du = \left(-b e^{au}\cos bu +\right.$ $\left.+ a e^{au}\sin bu\right)/\left(a^2+b^2\right) + C$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$	12	$\int e^{au}\cos bu\,du = \left(a e^{au}\cos bu +\right.$ $\left.+ b e^{au}\sin bu\right)/\left(a^2+b^2\right) + C$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$

Безпосереднім інтегруванням називають обчислення невизначеного інтеграла зведенням його до табличного на основі властивостей лінійності й інваріантності з використанням *тотожних перетворень* підінтегральної функції та *підведення під знак диференціалу*.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int (2x^3 - 3e^x + 1)\,dx$; б) $\int tg^2 x\,dx$; в) $\int 2^{\sin x}\cos x\,dx$.

□ а) Використавши властивості 4 та 5, запишемо даний інтеграл у вигляді лінійної комбінації табличних інтегралів

$$\int (2x^3 - 3e^x + 1)\,dx = 2\int x^3 dx - 3\int e^x dx + \int dx$$

і з огляду на наведену вище таблицю отримаємо

$$2x^{3+1}/(3+1) - 3e^x + x^{0+1}/(0+1) + C = x^4/2 - 3e^x + x + C\,.$$

б) Використавши властивості тригонометричних функцій та інтегралів, зробивши деякі елементарні перетворення, отримаємо

$$\int \left(\sin^2 x / \cos^2 x\right) dx = \int \left((1-\cos^2 x)/\cos^2 x\right) dx =$$

$$= \int \left(1/\cos^2 x - 1\right) dx = \int dx/\cos^2 x - \int dx = tgx - x + C .$$

в) Використавши підведення під знак диференціала, отримаємо

$$\int 2^{\sin x} \cos x \, dx = \int 2^{\sin x} \, d(\sin x) = 2^{\sin x} / \ln 2 + C . \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти інтеграли і результат перевірити диференціюванням:

$$\text{а)} \int \left(3x^3 - 1/x\right)^2 dx ; \qquad \text{б)} \int 3^{2x+1} 5^x \, dx .$$

$\square$ а) $\int (3x^3 - 1/x)^2 \, dx = \int (9x^6 - 6x^2 + 1/x^2) \, dx = 9\int x^6 \, dx -$

$$-6\int x^2 \, dx + \int (1/x^2) \, dx = 9x^7/7 - 2x^3 - 1/x + C ;$$

$$((9/7)x^7 - 2x^3 - 1/x + C)' = (9/7) \cdot 7x^6 - 2 \cdot 3x^2 +$$

$$+1/x^2 + 0 = (3x^3 - 1/x)^2 ;$$

б) $\int 3^{2x+1} 5^x \, dx = 3\int (3^2 \cdot 5)^x \, dx = 3\int 45^x \, dx = 3 \cdot 45^x / \ln 45 + C ;$

$$((3/\ln 45) \cdot 45^x + C)' = (3/\ln 45) \cdot 45^x \ln 45 + 0 = 3^{2x+1} 5^x . \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти інтеграл $\int \frac{3\sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 1}{x} \, dx$. Виділити первісну $y = F(x)$, графік якої проходить через точку $M_0(x_0 ; y_0)$, де $x_0 = 1$ і $y_0 = -10$. Обчислити значення $F(x_1)$ отриманої первісної в точці $x_1 = 64$.

$$\int \frac{3\sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 1}{x} \, dx = \int \left(3x^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 4x^{-1/3} + \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= 3\int x^{1/2} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 4\int x^{-1/3} dx + \int \frac{dx}{x} = 3 \cdot x^{3/2} / (3/2) - 2\sqrt{x} -$$

$$-4\cdot x^{2/3}\Big/(2/3)+\ln|x|+C=2x^{3/2}-2\sqrt{x}-6x^{2/3}+\ln|x|+C.$$

З умови $F(x_0)=y_0$ знайдемо відповідне значення довільної сталої та шукану первісну:

$$F(1)=-10:\;\; 2\cdot 1^{3/2}-2\sqrt{1}-6\cdot 1^{2/3}+\ln|1|+C=-10;$$

$$C=-4;\;\; F(x)=2x^{3/2}-2\sqrt{x}-6x^{2/3}+\ln|x|-4$$

Обчислимо значення первісної в указаній точці $x_1=64$:

$$F(64)=2\cdot 64^{3/2}-2\sqrt{64}-6\cdot 64^{2/3}+\ln|64|-4=908+\ln 64.\ \blacksquare$$

1.1.3. Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами

1. ***Метод заміни змінної*** (***підстановки***), що ґрунтується на властивості інваріантності, є основним при інтегруванні. Зокрема, підведення під знак диференціала можна розглядати як неявне застосування цього методу.

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)\,dx$, але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує.

Заміну змінної можна здійснити двома способами.

Перший спосіб. Зробимо заміну змінної у підінтегральному виразі, поклавши $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію $t=\varphi^{-1}(x)$. Тоді

$$\boxed{\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int g(t)\,dt=}$$

$$\boxed{=G(t)+C=G(\varphi^{-1}(x))+C}.$$

Після інтегрування у правій частині рівності замість t підставлено його вираз через стару змінну x.

Зауваження 1. Функція $\varphi(t)$ обирається таким чином, щоб отриманий інтеграл $\int g(t)\,dt$ був простішим, зокрема, мав табличний вигляд або його можна було звести до такого вигляду за допомогою елементарних перетворень. Далі будуть наведені стандартні підстановки $x=\varphi(t)$ для деяких класів інтегралів.

Зауваження 2. Заміна змінної може застосовуватися повторно.

Другий спосіб. Запишемо інтеграл $\int f(x)\,dx$ у вигляді $\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$, тобто виділимо диференціал деякої функції $\varphi(x)$, і застосовуючи підстановку $u=\varphi(x)$, перейдемо в інтегралі $\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ до нової змінної:

$$\boxed{\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du}.$$

Після цього знайдемо одержаний інтеграл і повернемося до старої змінної x, поклавши $u=\varphi(x)$:

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du=G(u)+C=G(\varphi(x))+C\,.$$

Зауваження 3. При другому способі за нову змінну вибирають функцію, похідна (диференціал) якої у вигляді множника, по суті, вже міститься у підінтегральному виразі.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int \sin(x^3+2)x^2dx\,; \qquad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{arctg\,x}}{1+x^2}\,dx\,.$$

□ а) Зробимо підстановку $u=x^3+2$. Тоді $du=3x^2dx$, $x^2dx=(1/3)\,du$ і, отже,

$$\int \sin(x^3+2)\,x^2dx=(1/3)\int \sin u\,du=(-1/3)\cos u+C=$$

$$=(-1/3)\cos(x^3+2)+C\,.$$

б) Зробимо підстановку $u=arctg\,x$. Тоді $dt=du/(1+x^2)$ і, отже,

$$\int \frac{\sqrt[3]{arctg\,x}}{1+x^2}\,dx=\int \sqrt[3]{u}\,du=\int u^{1/3}du=(3/4)u^{4/3}+C=$$

$$=(3/4)arctg^{4/3}x+C\,. \quad ■$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int f(ax+b)\,dx$, $a\neq 0$, якщо відомо, що $\int f(x)dx=F(x)$.

□ Застосуємо лінійну підстановку $u = ax + b$. Для цієї підстановки $du = a\,dx$.

$$\int f(ax+b)dx = (1/a)\int f(ax+b)adx = (1/a)\int f(u)du =$$
$$= (1/a)F(u) + C\,.$$

Повертаючись до початкової змінної, маємо

$$\int f(ax+b)\,dx = (1/a)F(ax+b) + C\,.\blacksquare$$

<u>Висновок 1</u>. Оскільки у наведеному прикладі розглядалася довільна функція $f(x)$, отриманий результат можна застосовувати як одну з властивостей невизначеного інтеграла.

<u>Приклад 3</u>. Знайти інтеграл

$$\int\left(1/\cos^2 6x + (2-9x)^{10} + \sin(x-6)\right)dx\,.$$

$$\square\ \int\left(1/\cos^2 6x + (2-9x)^{10} + \sin(x-6)\right)dx =$$
$$= \int dx/\cos^2 6x + \int (2-9x)^{10}dx + \int \sin(x-6)\,dx =$$
$$= (1/6)tg\,6x - (1/99)(2-9x)^{11} - \cos(x-6) + C. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 4</u>. Знайти інтеграл $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$.

$$\square\ \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left|\begin{array}{c} u = f(x) \\ du = f'(x)\,dx \end{array}\right| = \int \frac{du}{u} =$$
$$= \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C\,. \quad \blacksquare$$

<u>Висновок 2</u>. *Інтеграл дробу, в якому чисельник є похідною знаменника, дорівнює сумі натурального логарифма модуля знаменника і довільної сталої*: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

2. ***Метод інтегрування частинами***, що ґрунтується на правилі диференціювання добутку двох функцій, відіграє допоміжну роль і має специфічні сфери застосування.

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні. Візьмемо диференціал добутку цих функцій

$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$

а тепер проінтегруємо

$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv, \text{ але } \int d(uv) = uv + C.$$

Маємо ***формулу інтегрування частинами***

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}.$$

Зауваження 4. Застосовувати цей метод доречно, коли інтеграл праворуч простіший, ніж той, що ліворуч, або йому подібний. Як правило, за u вибирають функцію, що спрощується при диференціюванні. Функцію v знаходять у явному вигляді як одну з первісних $\int dv$ (звичайно, поклавши $C = 0$).

Типовими застосуваннями методу інтегрування частинами є випадки, коли підінтегральна функція містить добуток раціональних і трансцендентних функцій, а при цьому інші способи не прийнятні. Наведемо відповідні рекомендації щодо вибору u.

Якщо підінтегральна функція має вигляд:

а) $P_n(x)\cos bx$, $P_n(x)\sin bx$, $P_n(x)\,e^{ax}$, $P_n(x)\,ch\,bx$, $P_n(x)\,sh\,bx$, то за u слід взяти многочлен $P_n(x)$;

б) $P_n(x)\ln x$, $P_n(x)\arcsin bx$, $P_n(x)\arccos bx$, $P_n(x)\,arctg\,bx$, $P_n(x)\,arcctg\,bx$, $P_n(x)\,arsh\,bx$, $P_n(x)\,arch\,bx$, $P_n(x)\,arth\,bx$, $P_n(x)\,arcth\,bx$, то за u слід взяти відповідно логарифмічну $\ln x$, обернену тригонометричну $\arcsin bx$, $\arccos bx$, $arctg\,bx$, $arcctg\,bx$ чи обернену гіперболічну $arsh\,bx$, $arch\,bx$, $arth\,bx$, $arcth\,bx$ функцію;

в) $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, $\int \cos\ln x\,dx$, $\int \sin\ln x\,dx$, то за u в перших двох інтегралах можна взяти будь-яку з двох функцій: показникову чи тригонометричну, а в останніх – відповідну тригонометричну функцію. Після двократного інтегрування частинами одержуємо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Знаходимо інтеграл як розв’язок цього рівняння.

Приклад 5. Знайти інтеграли:

а) $\int x5^x dx$; б) $\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx$; в) $\int \ln(x+3)\,dx$; г) $\int e^x \sin 7x\,dx$.

□ а) Нехай $x=u$, $5^x dx = dv$. Тоді $v=\int 5^x dx = 5^x/\ln 5$. Інтегруємо частинами:

$$\int x5^x dx = x5^x/\ln 5-(1/\ln 5)\int 5^x dx = x5^x/\ln 5+5^x/\ln^2 5+C .$$

б) Припустимо, що $u=x^2+4$; $dv=\cos x\,dx$. Тоді $du=2x\,dx$, $v=\sin x$. Інтегруємо частинами:

$$\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx=\left(x^2+4\right)\sin x-2\int x\sin x\,dx .$$

Застосувавши до інтегралу, який стоїть праворуч, ще раз інтегрування частинами $u=x$, $dv=\sin x\,dx$, $du=dx$, $v=-\cos x$, остаточно дістанемо:

$$\int\left(x^2+4\right)\cos x\,dx=\left(x^2+4\right)\sin x+2x\cos x-2\sin x+C .$$

в) Приймемо, що $u=\ln(x+3)$, $dv=dx$. Тоді $du=dx/(x+3)$, $v=x$. Маємо:

$$\int \ln(x+3)\,dx = x\ln(x+3)-\int x\,dx/(x+3)=x\ln(x+3)-$$

$$-\int\frac{x+3-3}{x+3}dx = x\ln(x+3)-\int dx+3\int\frac{dx}{x+3}=x\ln(x+3)-$$

$$-x+3\ln(x+3)+C .$$

г) Покладемо $u=\sin 7x$, $dv=e^x dx$. Спираючись на це, знаходимо $du=7\cos 7x\,dx$ та $v=e^x$. Використавши формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$I=\int e^x \sin 7x\,dx = e^x\sin 7x-\int e^x 7\cos 7x dx=$$

$$=e^x\sin 7x-7\int e^x\cos 7x\,dx .$$

До інтегралу, що залишився, знову застосовуємо інтегрування частинами, причому $u=\cos 7x$, $dv=e^x dx$; $du=-7\sin 7x\,dx$, $v=e^x$. Маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7\left(e^x \cos 7x - \int e^x (-7\sin 7x)\, dx\right) =$$

$$= e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49\int e^x \sin 7x\, dx .$$

Далі прирівнюємо початковий вираз до останнього отриманого. Одержану рівність можна розглядати як рівняння, в якому невідомим є шуканий інтеграл I . Розв'язавши це рівняння, маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49I \text{ ; } 50I = e^x \sin x - 7e^x \cos 7x ;$$

$$I = \int e^x \sin 7x\, dx = (1/50)\left(e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x\right) + C . \quad \blacksquare$$

Зауваження 5. Наведені методи вичерпують відомі загальні способи інтегрування. Вони можуть застосовуватися разом у різній послідовності й багаторазово. Далі будуть розглянуті особливості їх використання для інтегрування основних класів функцій. Треба творчо підходити до конкретної задачі, враховуючи її специфіку і допускаючи застосування нетипових способів інтегрування.

1.1.4. Інтегрування раціональних дробів

1. Розкладання многочлена з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники.

Розглянемо многочлен $P_n(x)$ ***стандартного вигляду*** з дійсними коефіцієнтами

$$\boxed{P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}; \quad a_i \in R; \; i = \overline{0, n} \; .$$

На множині комплексних чисел C будь-який многочлен $P_n(x)$ n-го степеня за основною теоремою алгебри має точно n коренів, а тому єдиним способом (з точністю до порядку співмножників) розкладається у добуток

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m} ,$$

де a_0 – старший коефіцієнт; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – різні (дійсні чи комплексні) корені; $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – відповідні кратності цих коренів, причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

При інтегруванні дійсних виразів бажано не виходити за межі множини дійсних чисел R . Розглянемо особливості розкладання на множники при цьому обмеженні.

Якщо комплексне число $a=\alpha+\beta i$ є коренем многочлена $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то й комплексно-спряжене з ним $\bar{a}=\alpha+\beta i$ також буде коренем даного многочлена. Добуток $(x-a)(x-\bar{a})$, що відповідає парі комплексно-спряжених коренів, породжує ***простий*** (***незвідний*** у множині дійсних чисел) квадратний тричлен x^2+px+q з дійсними коефіцієнтами $p,q\in R$ і від'ємним дискримінантом $D=p^2-4q<0$.

Таким чином, *будь-який многочлен* $P_n(x)$ *з дійсними коефіцієнтами можна подати, і причому єдиним способом (з точністю до порядку), у вигляді добутку різних простих (лінійних і квадратичних) дійсних множників у відповідних степенях*:

$$\boxed{P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_s)^{k_s}\times}$$

$$\boxed{\times(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}},$$

де лінійні двочлени $x-a$ відповідають його різним дійсним кореням $x_1,x_2,\dots,x_s$; квадратні тричлени x^2+px+q з від'ємним дискримінантом – різним парам спряжених комплексних коренів; $k_1,k_2,\dots,k_s$ і $l_1,l_2,\dots,l_t$ – кратності цих коренів, причому $k_1+\dots+k_s+2(l_1+\dots+l_t)=n$.

<u>Приклад 1</u>. Розкласти многочлен $P(x)=x^5-x^4-3x^3-$ $-5x^2-10x-6$ на різні прості дійсні множники.

□ За теоремою Вієта добуток коренів многочлена такого типу дорівнює вільному члену. Тобто, $x_1x_2x_3x_4x_5=-6$. Перевіримо числа $\pm1,\pm2,\pm3,,\pm6$, які є дільниками вільного члена -6.

Нехай $x=-1$. Тоді

$$P(-1)=(-1)^5-(-1)^4-3\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-10\cdot(-1)-6=$$
$$=-1-1+3-5+10-6=0.\quad \text{Отже, } x=-1 \text{ – корінь.}$$

Знизимо степінь, розділивши многочлен «кутом» на двочлен $x-(-1)=x+1$:

$$
\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{l} x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6 \\ \underline{x^5 + x^4} \end{array} & \underline{x+1} \\
\qquad -\begin{array}{l} -2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6 \\ \underline{-2x^4 - 2x^3} \end{array} & x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6 \\
\qquad\qquad -\begin{array}{l} -x^3 - 5x^2 - 10x - 6 \\ \underline{-x^3 - x^2} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad -\begin{array}{l} -4x^2 - 10x - 6 \\ \underline{-4x^2 - 4x} \end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\begin{array}{l} -6x - 6 \\ \underline{-6x - 6} \\ \qquad 0 \end{array} &
\end{array}
$$

Отримаємо

$$P(x) = (x+1)S(x), \text{ де } S(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6.$$

Тепер треба знайти корені многочлена четвертого степеня. Нехай $x = -1$. Тоді $S(-1) = 1 + 2 - 1 + 4 - 6 = 0$. Отже, $x = -1$ – корінь. Знизимо степінь, розділивши многочлен «кутом» на двочлен $x - (-1) = x + 1$. (Виконайте ділення самостійно). Одержимо

$$S(x) = (x+1)T(x), \quad \text{де } T(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6.$$

Тепер треба знайти корені многочлена третього степеня. Нехай $x = 3$. Тоді $T(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 6 = 0$. Отже, $x = 3$ – корінь. Знизимо степінь, розділивши многочлен «кутом» на двочлен $x - 3$. (Виконайте ділення самостійно). Отримаємо

$$T(x) = (x-3)(x^2 + 2),$$

де неповний квадратний тричлен $x^2 + 2$ є простим, оскільки дійсних коренів не має.

Отже, $P(x) = (x+1)^2 (x-3)(x^2+2)$. ■

2. Раціональні дроби.

Розглянемо два многочлена $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ степеня m і n відповідно:

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m;$$

$$Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n\,.$$

Раціональним дробом (***дробово-раціональною функцією***) називається відношення двох многочленів $P_m(x)/Q_n(x)$.

Якщо степінь m чисельника нижче степеня n знаменника, то дріб називається ***правильним***, якщо, навпаки, $m > n$ або $m = n$, то дріб – ***неправильний***.

Будь-який неправильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ *можна зобразити у вигляді суми многочлена і правильного дробу*

$$\boxed{P_m(x)/Q_n(x) = G_{m-n}(x) + R_k(x)/Q_n(x)},$$

причому цей розклад єдиний.

Тут $G_{m-n}(x)$ – многочлен, який називають ***цілою частиною*** раціонального дробу, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб, тобто $k < n$. Многочлени $G_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ – відповідно частка й остача від ділення «кутом» $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

<u>Приклад 2</u>. Вилучити цілу частину неправильного дробу $P(x)/Q(x) = (x^4 - 3x^2 + 5x + 4)/((x+4)(x-2))$ і подати його у вигляді суми многочлена та правильного дробу.

□ Для вилучення цілої частини використаємо ділення «кутом» многочлена на многочлен, спочатку виконавши множення в знаменнику і записавши результат у стандартному вигляді в порядку спадання степенів: $Q(x) = (x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$;

$$\begin{array}{r|l}
{}_{-}\,x^4 - 3x^2 + 5x + 4 & \underline{x^2 + 2x - 8} \\
\underline{x^4 + 2x^3 - 8x^2} \quad\;\; & x^2 - 2x + 9 \\
{}_{-}-2x^3 + 5x^2 + 5x + 4 & \\
\underline{-2x^3 - 4x^2 + 16x} \quad\;\; & \\
{}_{-}\,9x^2 - 11x + 4 & \\
\underline{9x^2 + 18x - 72} & \\
-29x + 76 &
\end{array}$$

Таким чином,

$$P(x)/Q(x) = x^2 - 2x + 9 + (-29x + 76)/((x+4)(x-2)). \quad \blacksquare$$

Зауваження 1. Вилучення цілої частини неправильного раціонального дробу інколи можна зробити простіше, виконавши алгебраїчні перетворення чисельника.

Приклад 3. Вилучити цілу частину неправильного дробу $x^4/(x^2+1)$ і подати його у вигляді суми многочлена та правильного дробу.

□ Скористаємося алгебраїчними перетвореннями:

$$x^4/(x^2+1) = (x^4 - 1 + 1)/(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1)/(x^2+1) +$$

$$+1/(x^2+1) = x^2 - 1 + 1/(x^2+1). \quad \blacksquare$$

3. Найпростіші раціональні дроби. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

Правильні раціональні дроби наступних чотирьох типів:

1) $\boxed{\dfrac{A}{x-a}}$; 2) $\boxed{\dfrac{A}{(x-a)^k},\ k \ge 2}$; 3) $\boxed{\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q},\ D = p^2 - 4q < 0}$;

4) $\boxed{\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},\ k \ge 2,\ D = p^2 - 4q < 0}$

називаються ***елементарними*** (***найпростішими***). Тут $A, B,\ a,\ p, q$ – дійсні числа, $k \in N$. Підкреслимо, що квадратний тричлен $x^2 + px + q$ має тільки комплексні корені.

Елементарні дроби першого і другого типів легко інтегруються заміною змінної $t = x - a$ (пробобіть це самостійно):

1) $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

2) $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C, \quad k \ge 2.$

Розглянемо інтегрування найпростішого дробу третього типу:

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$.

Виділимо в квадратному тричлені повний квадрат

$$x^2+px+q = x^2+2x\cdot(p/2)+(p/2)^2+q-(p/2)^2 =$$

$$=(x+p/2)^2+a^2;\ a=\sqrt{q-p^2/4}>0.$$

Зробимо заміну $t = x+p/2$. Тоді $x = t-p/2$, $dx = dt$. Одержимо

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A(t-p/2)+B}{t^2+a^2}dt = A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} +$$

$$+(B-Ap/2)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + (B-Ap/2)\cdot\frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a}.$$

Далі використовуємо заміну $u = t^2+a^2$. Тоді $du = 2tdt$, $tdt = (1/2)\,du$. Отримаємо

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = (1/2)\int \frac{du}{u} = (1/2)\ln|u|+C.$$

Повертаючись до старої змінної

$$t = x+p/2;\quad a=\sqrt{q-p^2/4};$$

$$u = t^2+a^2 = (x+p/2)^2+q-p^2/4 = x^2+px+q,$$

після спрощення остаточно маємо

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = (A/2)\ln|x^2+px+q| +$$

$$+\left((2B-Ap)\big/(4q-p^2)\right) arctg\left((2x+p)\big/\sqrt{4q-p^2}\right)+C.$$

<u>Зауваження 5</u>. Якщо в квадратному тричлені x^2+px+q дискримінант додатний $D>0$, то дріб $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ за означенням неелементарний і зводиться до двох дробів першого типу. Однак його можна інтегрувати й наведеним вище способом, де замість арктангенса з'явиться логарифм.

Зауваження 6. Одержані формули запам'ятовувати не потрібно. Краще безпосередньо застосовувати розглянуті підходи для інтегрування кожного конкретного елементарного дробу.

Зауваження 7. Інтегрування найпростішого дробу четвертого типу розглядати не будемо. Бажаючим вивчити це питання треба звернутися до більш ґрунтовних підручників.

4. Розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші.

Кожний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ *можна розкласти на суму скінченного числа найпростіших дробів вказаних чотирьох типів, причому цей розклад єдиний*.

Розглянемо довільний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$, в якому знаменник $Q_n(x)$ – зведений многочлен (старший коефіцієнт $b_0 = 0$), розкладений на прості дійсні множники

$$Q_n(x) = (x-x_1)^{k_1} \ldots (x-x_s)^{k_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \ldots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t} ,$$

де $k_1 + \ldots + k_s + 2(l_1 + \ldots + l_t) = n$.

Тоді правильний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна подати у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_{s1}}{(x-x_s)^{k_s}} +$$

$$+ \frac{A_{s2}}{(x-x_s)^{k_s-1}} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{x-x_s} + \ldots + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} +$$

$$+ \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1-1}} + \ldots + \frac{B_{1l_1} x + C_{1l_1}}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{(x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}} + \frac{B_{t2}x + C_{t2}}{(x^2 + p_t x + q_t)^{l_t-1}} + \ldots + \frac{B_{tl_t} x + C_{tl_t}}{x^2 + p_t x + q_t} .$$

Коефіцієнти A_{ij} $(i = \overline{1, s}\,;\ j = \overline{1, k_i})$ і B_{ij}, C_{ij} $(i = \overline{1, t}\,;\ j = \overline{1, l_t})$ визначаються після зведення правої частини до спільного знаменника і виділення тотожності многочленів у чисельниках праворуч і ліворуч (відкиданням однакових знаменників). Далі застосовуються наступні методи (окремо чи в комбінації):

– ***метод невизначених коефіцієнтів***: *прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях* x, *приходимо до системи лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів* (два многочлена тотожно рівні, коли рівні коефіцієнти при подібних членах – однакових степенях x);

– ***метод окремих значень*** (***метод підстановки***): *надаючи змінній* x *в отриманій тотожності конкретні значення, одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів* (тотожні вирази приймають однакові значення при довільному допустимому значенні аргументу x).

<u>Зауваження 8</u>. Використовуючи метод окремих значень, не треба розкривати дужки в многочленах, а підставляти зручно різні дійсні корені знаменника $Q_n(x)$, що приводить до простих рівнянь. Отримана система повинна мати розмірність, що дорівнює числу шуканих коефіцієнтів.

<u>Зауваження 9</u>. Метод підстановки рекомендується вживати, коли всі корені знаменника дійсні й серед них немає кратних. У протилежному випадку краще поєднати цей метод з методом невизначених коефіцієнтів. Але треба вибирати незалежні рівняння, щоб система мала єдиний розв'язок.

<u>Зауваження 10</u>. Існують інші, менш поширені, методи знаходження невідомих коефіцієнтів. Допитливі можуть з ними познайомитися, звернувшись до спеціалізованої літератури.

<u>Приклад 4</u>. Правильний раціональний дріб $P(x)/Q(x)$ розкласти на суму найпростіших дробів, де

а) $P(x) = -2x^4 - x^3 - 6x^2 + 18x + 13$

і $Q(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6$;

б) $P(x) = 7x - x^2 - 4$ і $Q(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$;

в) $P(x) = x^3 - 8$ і $Q(x) = x(x+4)(x^2 + 2x + 2)$.

□ а) Многочлен $Q(x)$ було розкладено на множники вище (див. Прикл.1): $Q(x)=(x+1)^2(x-3)(x^2+2)$.

Шукане розкладання дробу матиме вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+2},$$

де числа A,B,C,D і E ще треба знайти. Зводячи праву частину до спільного знаменника (ним служить многочлен $Q(x)$), з умови рівності дробів дістаємо (відкидаючи однакові знаменники) тотожність многочленів:

$$A(x+1)^2(x^2+2)+B(x-3)(x^2+2)+C(x-3)(x+1)(x^2+2)+$$

$$+(Dx+E)(x-3)(x+1)^2=P(x).$$

Знайдемо невідомі A,B,C,D,E методом невизначених коефіцієнтів. Розкривши дужки і звівши подібні, прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x у лівій і правій частинах отриманої тотожності. Отримаємо і розв'яжемо (зробіть це самостійно, наприклад, методом Гауса) систему п'яти лінійних рівнянь з п'ятьма невідомими:

$$\left.\begin{array}{l|l}
x^4 & A+C+D=-2, \\
x^3 & 2A+B-2C-D+E=-1\ , \\
x^2 & 3A-3B-C-5D-E=-6\ , \\
x^1 & 4A+2B-4C-3D-5E=18\ , \\
x^0 & 2A-6B-6C-3E=13\ ;
\end{array}\right\}
\begin{array}{l|}
A=-1; \\
B=1; \\
C=-2; \\
D=1; \\
E=-3.
\end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд ·

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{x-3}{x^2+2}.$$

б) Даний дріб розкладається на елементарні наступним чином: $P(x)/Q(x)=A/(x+1)+B/(x-2)+C/(x-3)$.

Зводячи праву частину до спільного знаменника, з умови рівності дробів дістаємо тотожність многочленів:

$$A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2)=P(x).$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти A, B і C, скористаємося методом окремих значень. Для отримання простої системи візьмемо ті значення x, що є коренями знаменника $Q(x)$, тобто $x=-1$, $x=2$ та $x=3$. Тоді

$$\begin{array}{r|l} x=-1 & 12A=-12, \\ x=\ \ 2 & -3B=6, \\ x=\ \ 3 & 4C=8; \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}}\right\} \quad \begin{array}{l} A=-1; \\ B=-2; \\ C=2. \end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд

$$P(x)/Q(x)=-1/(x+1)-2/(x-2)+2/(x-3).$$

в) Многочлен $Q(x)$ уже розкладений на різні прості дійсні множники (переконайтеся самостійно, що квадратний тричлен x^2+2x+2 має від'ємний дискримінант). Шукане розкладання дробу на суму найпростіших матиме вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

Зводячи праву частину до спільного знаменника, з умови рівності дробів маємо тотожність многочленів:

$$A(x+4)(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2)+$$
$$+(Cx+D)x(x+4)=P(x).$$

Оскільки знаменник $Q(x)$ має лише два різних дійсних кореня $x=0$ і $x=-4$, то для складання системи рівнянь відносно невідомих A, B, C і D використаємо комбінацію методів окремих значень і невизначених коефіцієнтів. Дістанемо і розв'яжемо систему чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{array}{c|c} x=0 & 8A=-8, \\ x=-4 & -40B=-72, \\ x^3 & A+B+C=1, \\ x & 10A+2B+4D=0; \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \quad \begin{array}{c} A=-1; \\ B=9/5 \\ C=1-A-B=1/5; \\ D=-(5A+B)/2=8/5. \end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = -\frac{1}{x} + \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{x+4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{x+8}{x^2+2x+2}. \quad \blacksquare$$

5. Розгляд основних випадків інтегрування раціональних дробів.

Нехай треба обчислити інтеграл від раціонального дробу $\int P(x)dx / Q(x)$. Якщо дріб неправильний, то його подаємо у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу. Останній дріб розкладаємо на суму найпростіших дробів.

<u>Приклад 5</u>. Знайти інтеграл $I = \int \frac{2x^3 - 15x - 45}{x^2 - 6x + 13} dx$.

□ Оскільки дріб неправильний, то діленням «кутом» виділимо в ньому цілу частину (проробіть це самостійно), а потім проінтегруємо, використовуючи метод заміни змінної:

$$I = \int (2x-3)\,dx + \int (-44x-6)\,dx \Big/ (x^2 - 6x + 13) =$$

$$= \left| x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4;\ t = x-3;\ x = t+3;\ dx = dt \right| = x^2 -$$

$$-3x + \int \frac{-44(t+3)-6}{t^2+4} dt = x^2 - 3x - 44\int \frac{t\,dt}{t^2+4} - 6\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \left| u = t^2 + 4;\ du = 2t\,dt;\ t\,dt = (1/2)\,du \right| = x^2 - 3x - 44 \times$$

$$\times \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - 6 \cdot \frac{1}{2} arctg\,\frac{t}{2} = x^2 - 3x - 22\ln|u| - 3arctg\,\frac{t}{2} + C =$$

$$= \left|\ t = x-3;\ u = t^2 + 4 = (x-3)^2 + 4 = x^2 - 6x + 13\ \right| =$$

$$= x^2 - 3x - 22\ln(x^2 - 6x + 13) - 3\,arctg\,\frac{x-3}{2} + C$$

$$= 3arctg\,(x+1) - \ln|x-2| + C. \ \blacksquare$$

З попереднього відомо, що структура розвинення на елементарні дроби визначається коренями знаменника $Q(x)$. Тут можливі такі випадки:

а) Корені знаменника дійсні й прості, тобто

$$Q(x) = (x-a)(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-d).$$

У цьому разі правильний дріб розкладається на найпростіші дроби тільки першого типу

$$P(x)/Q(x) = A/(x-a) + B/(x-b) + \ldots + D/(x-d).$$

Тоді

$$\int \frac{P(x)\,dx}{Q(x)} = \int \frac{A\,dx}{x-a} + \int \frac{B\,dx}{x-b} + \ldots + \int \frac{D\,dx}{x-d} =$$

$$= A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + \ldots + D\ln|x-d| + C.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $I = \int \frac{4x^2 - 13x + 7}{(x^2 - 5x + 6)(x+1)}\,dx$.

□ $I = \int \frac{4x^2 - 13x + 7}{(x-2)(x-3)(x+1)}\,dx = \int \frac{A\,dx}{x-2} + \int \frac{B\,dx}{x-3} + \int \frac{C\,dx}{x+1}$.

Тут $4x^2 - 13x + 7 = A(x-3)(x+1) + B(x-2)(x+1) +$

$$+ C(x-2)(x-3).$$

Використавши метод підстановки (пробобіть це самостійно), маємо: $A = 1;\; B = 1; C = 2$.

$$I = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{2dx}{x+1} =$$

$$= \ln|x-2| + \ln|x-3| + 2\ln|x+1| + C. \quad ■$$

б) Корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні:

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot (x-b)^{\beta} \ldots (x-d)^{\gamma}.$$

У цьому разі дріб розкладається на найпростіші дроби першого і другого типів.

Приклад 7. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 8}{(x+2)^3(x-1)}\,dx$.

$\square$ $I=\int\frac{A\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{B\,dx}{(x+2)^2}+\int\frac{C\,dx}{x+2}+\int\frac{D\,dx}{x-1}$.

Маємо тотожність $x^3+4x^2+5x+8=A(x-1)+$

$$+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2(x-1)+D(x-1)^3.$$

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів (проробіть це самостійно), отримаємо: $A=-2, B=-1, \; C=1/3, D=2/3$.

Тоді $I=\int\frac{-2\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{-1\,dx}{(x+2)^2}+\int\frac{(1/3)\,dx}{x+2}+\int\frac{(2/3)\,dx}{x-1}=$

$$=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C. \quad \blacksquare$$

в) <u>Корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно-спряжені</u>:

$$Q(x)=(x^2+px+q)...(x^2+rx+s)(x-a)^{\alpha}...(x-c)^{\gamma}.$$

У цьому разі дріб $P(x)/Q(x)$ розкладається на найпростіші дроби першого, другого і третього типів.

<u>Приклад 8</u>. Знайти інтеграл $I=\int\frac{-x^2+x-8}{(x^2+2x+2)(x-2)}dx$.

$\square$ $I=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+2x+2}+\int\frac{C\,dx}{x-2}$.

Тут $-x^2+x-8=(Ax+B)(x-2)+C(x^2+2x+2)$.

Використаємо комбінацію методу окремих значень і методу невизначених коефіцієнтів. Нехай $x=2$ (дійсний корінь), маємо $10C=-10$, $C=-1$; нехай $x=0$ (довільно взяте значення), тоді $-2B+2C=-8$; $B=4+C=3$. Прирівнявши коефіцієнти при x^2, маємо $A+C=-1$; $A=-1-C=0$. Отже,

$$I=\int\frac{3\,dx}{x^2+2x+2}-\int\frac{dx}{x-2}=3\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}-\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=3\,arctg\,(x+1)-\ln|x-2|+C. \; \blacksquare$$

Зауваження 11. Розглядати випадок, коли у знаменнику є кратні комплексні корені ми не будемо. Бажаючих поглибити свою математичну підготовку відсилаємо до більш ґрунтовних підручників.

Справедливе твердження: *інтеграл від будь-якої раціональної функції може бути визначений через елементарні функції у скінченному вигляді.*

1.1.5. Інтегрування тригонометричних виразів

Інтегралів від тригонометричних функцій може бути безліч. Більшість з них взагалі не обчислюються аналітично. Тому розглянемо деякі найголовніші типи таких функцій, що завжди інтегруються.

Домовимося, що запис $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означає раціональну функцію вказаних аргументів.

1. Інтеграли вигляду:

$$\boxed{\int \cos ax\, \cos bx\; dx\,,\ \int \sin ax\, \cos bx\; dx\,, \int \sin ax\, \sin bx\; dx}$$

знаходяться за допомогою тригонометричних формул перетворення добутків у суму відповідно:

$$\cos ax \cos bx = \big(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\big)/2\,;$$

$$\sin ax \cos bx = \big(\sin(a+b)x + \cos(a-b)x\big)/2\,;$$

$$\sin ax \sin bx = \big(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\big)/2\,.$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $I = \int \sin 8x \cos 2x\, dx$.

□ $I = (1/2)\int (\sin 10x + \sin 6x)\, dx =$

$$= (-1/20)\cos 10x - (1/12)\cos 6x + C\,. \blacksquare$$

2. Інтеграл вигляду $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\, dx}$. Покажемо, що *цей інтеграл за допомогою* ***універсальної тригонометричної підстановки*** $\boxed{tg\,(x/2) = t}$ *завжди зводиться до інтеграла від раціональної функції*. Виконаємо необхідні перетворення:

$$\sin x = \frac{2tg\,(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}; \ \ \cos x = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2arctg\,t; \ \ dx = 2dt/(1+t^2).$$

Отже, $\sin x$, $\cos x$ і dx мають раціональні вирази відносно t. Оскільки раціональна функція від раціональних функцій знову раціональна, маємо:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int \frac{R\big(2t/(1+t^2), (1-t^2)/(1+t^2)\big)2\,dt}{1+t^2}.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{3\sin x + \cos x}$.

$$\square \ \ I = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\big(6t/(1+t^2)+(1-t^2)/(1+t^2)\big)} = \int \frac{2\,dt}{6t+1-t^2} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{(t-3)^2-10} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln\left|\frac{t-3-\sqrt{10}}{t-3+\sqrt{10}}\right| + C =$$

$$= \big(-1/\sqrt{10}\big)\ln\left|\big(tg(x/2)-3-\sqrt{10}\big)\big/\big(tg(x/2)-3+\sqrt{10}\big)\right| + C. \ \blacksquare$$

Поряд з універсальною також є інші підстановки, що у ряді випадків дають значно простіші раціональні вирази і тим самим швидше ведуть до мети:

а) $\boxed{\int R(\sin x)\cos x\,dx}$. Підстановка $\boxed{\sin x = t}$, $\cos x\,dx = dt$ зводить цей інтеграл до $\int R(t)\,dt$;

<u>Приклад 3</u>. Знайти інтеграл $I = \int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin x - 2}$.

$$\square \ \ I = \int \frac{\cos^2 x\ \cos x\,dx}{\sin x - 2} = \left|\cos^2 x = 1-\sin^2 x\right| =$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\,dx}{\sin x - 2} = \left|\begin{array}{c} \sin x = t; \\ \cos x\,dx = dt \end{array}\right| = \int \frac{(1-t^2)\,dt}{t-2} =$$

$$=\int\left(-t-2-3/(t-2)\right)dt=(-1/2)t^2-2t-3\ln|t-2|+C=$$

$$=(-1/2)\sin^2 x-2\sin x-3\ln|\sin x-2|+C\,. \quad \blacksquare$$

б) $\boxed{\int R(\cos x)\sin x dx}$. Підстановка $\boxed{\cos x=t}$, $-\sin x\,dx=dt$ зводить цей інтеграл до $-\int R(t)\,dt$;

Приклад 4. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x-16}dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $\cos x=t$).

в) $\boxed{\int R(tg\,x)\,dx}$. Підстановка $\boxed{tg\,x=t}$, $x=arctg\,t$, $dx=dt/(1+t^2)$, зводить цей інтеграл до $\int R(t)dt/(1+t^2)$;

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{tg\,x\,(1+tg^2x)}{tg^2x+2tg\,x+5}dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $tg\,x=t$).

г) $\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x)\,dx$. Підстановка $tg\,x=t$, $x=arctg\,t$ зводить цей інтеграл до $\int R(t)\,dt$ тому що

$$\sin^2 x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{t^2}{1+t^2};\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+t^2};$$

$$\sin x\cos x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{t}{1+t^2};\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{dx}{\sin^2 x+6\sin x\cos x}$.

$$\square\quad I=\left|\begin{array}{l} t=tg\,x; \\ x=arctg\,t; \end{array}\; dx=\frac{dt}{1+t^2};\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\right.$$

$$\left.\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right|=\int\frac{dt/(1+t^2)}{\left(t/\sqrt{1+t^2}\right)^2+6\left(t/\sqrt{1+t^2}\right)\left(1/\sqrt{1+t^2}\right)}=$$

$$= \int \frac{dt}{t(t+6)} = \int \frac{A dt}{t} + \int \frac{B dt}{t+6} = \left| \begin{array}{c|c} & A(t+6)+Bt=1 \\ t=0 & \left.\begin{array}{l} 6A=1 \\ -6B=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=1/6 \\ B=-1/6 \end{array} \\ t=-6 & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t+6} = \frac{1}{6}\ln|t| - \frac{1}{6}\ln|t+6| + C =$$

$$= \left| t = tg\, x \right| = (1/6)\ln|tg\, x| - (1/6)\ln|tg\, x + 6| + C. \quad \blacksquare$$

д) $\boxed{\int \sin^m x \cos^n x\, dx}$, де m і n – цілі числа. Тут можливі такі особливості:

- Якщо хоча б одне з чисел m чи n – непарне, то відокремлюємо від непарного степеня одну функцію, що в добутку з dx дає диференціал «кофункції» (без врахування знака). Цю «кофункцію» приймаємо за нову змінну t.

Наприклад, нехай $n = 2p+1$, тоді

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x\, dx =$$

$$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p \cos x\, dx.$$

Зробимо заміну: $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$. Отже,

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m (1-t^2)^p\, dt$$

– інтеграл від раціональної функції.

Зауваження 1. Якщо можливо, то треба вибирати непарний додатний (краще менший за модулем) показник степеня. При цьому показник степеня іншої функції може бути довільним.

Зауваження 2. Якщо обидва числа m і n – непарні від'ємні, то краще застосувати підстановку $\boxed{tg\, x = t}$.

Приклад 7. Знайти інтеграл $I = \int \sqrt[6]{\cos x} \sin^5 x\, dx$

□ $I = \int \sqrt[6]{\cos x} \sin^4 x \sin x\, dx = \int \sqrt[6]{\cos x} (1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx =$

$$= \left| \cos x = t;\ -\sin x\, dx = dt \right| =$$

$$= -\int t^{1/6}(1-t^2)^2 dt = -\int (t^{1/6} - 2t^{13/6} + t^{25/6})\, dt = (-6/7)t^{7/6} +$$

$$+(12/19)t^{19/6}-(6/31)t^{31/6}=-(6/7)(\cos x)^{7/6}+$$

$$+(12/19)(\cos x)^{19/6}-(6/31)(\cos x)^{31/6}+C\ . \ ■$$

• Якщо m і n – парні невід'ємні числа, то використовуємо формули зниження степеня тригонометричних функцій:

$$\boxed{\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2\ ;\ \cos^2 x=(1+\cos 2x)/2}.$$

Отже, $\int \sin^m x \cos^n x\, dx = 2^{-p-q}\int (1-\cos 2x)^p (1+\cos 2x)^q\, dx$, де $m=2p$ і $n=2q$.

Після піднесення до степенів p, q і множення матимемо $\cos 2x$ як у парних, так і непарних степенях. Члени з непарними степенями інтегруються, як показано вище. Члени з парними степенями знову перетворюємо за формулами зниження степеня. Продовжуючи цей процес, дійдемо до інтегралів від сталих величин і функцій $\cos kx$, які легко інтегруються.

<u>Зауваження 3</u>. Для зниження степеня можна додатково використати формулу $\sin x \cos x = (\sin 2x)/2$.

<u>Приклад 8</u>. Знайти інтеграл $I=\int \sin^2 3x \cos^2 3x\, dx$.

□ $I = \left|\sin^2 3x \cos^2 3x = (\sin 3x \cos 3x)^2 = \left((1/2)\sin 6x\right)^2 = \right.$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 6x \right| = \frac{1}{4}\int \sin^2 6x\, dx = \left|\sin^2 6x = \frac{1-\cos 12x}{2}\right| =$$

$$=(1/8)\int (1-\cos 12x)\, dx = (1/8)\,x-(1/96)\sin 12x + C\ . \ ■$$

• Якщо m і n – парні числа, з яких хоча б одне від'ємне, то робимо заміну $\boxed{tg\, x = t}$, або $ctg\, x = t$;

<u>Приклад 9</u>. Знайти інтеграл $I=\int dx/\cos^4 x$

□ $I = \left| tg\, x = t;\ x = arctg\, t;\ dx = dt/(1+t^2) \right| =$

$$=\int \frac{dt}{(1+t^2)\cdot 1/(1+t^2)^2} = \int \frac{dt}{1/(1+t^2)} = \int (1+t^2)\, dt =$$

$$= t + (1/3)t^3 + C = tg\,x + (1/3)\,tg^3 x + C\,. \blacksquare$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $I = \int \left(\cos^2 x / \sin^6 x\right) dx$.
(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $tg\,x = t$).

1.1.6. Інтегрування деяких типів ірраціональностей. Тригонометричні підстановки

Не від усякої ірраціональної функції інтеграл можна виразити через елементарні функції у скінченній формі. Розглянемо інтеграли від ірраціональних функцій, що за допомогою підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій і, отже, інтегруються.

1. Інтеграл вигляду

$$\boxed{\int R\left(x, (ax+b)^{m/n}, \dots, (ax+b)^{r/s}\right) dx, \quad a \neq 0}.$$

Він зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки $\boxed{ax + b = t^k}$, де k – найменший спільний знаменник дробів у показниках степенів $m/n, \dots, r/s$. Тоді $x = (t^k - b)/a$; $dx = (k/a)t^{k-1}dt$. Після інтегрування за змінною t повертаємося до початкової змінної x: $t = (ax+b)^{1/k} = \sqrt[k]{ax+b}$.

Приклад 1. Знайти інтеграл $I = \int \frac{(\sqrt{x-1} + 2x)\,dx}{x - 2\sqrt{x-1}}$.

□ Робимо заміну: $x - 1 = t^2$; $x = t^2 + 1$; $dx = 2tdt$. Тоді

$$I = \int \frac{(t + 2t^2 + 2)2t\,dt}{t^2 + 1 - 2t} = \int \frac{(4t^3 + t^2 + 4t)\,dt}{t^2 - 2t + 1} = \int (4t + 10)\,dt +$$

$$= \int \left(4t + 10 + (20t - 10)/(t-1)^2\right)dt = 2t^2 + 10t +$$

$$+ \int \frac{\left(20(t-1) + 10\right)dt}{(t-1)^2} = 2t^2 + 10t + \int \left(\frac{20}{t-1} + \frac{10}{(t-1)^2}\right)dt =$$

$$= 2t^2 + 10t + 20\ln|t-1| - 10/(t-1) + C = \left|t = \sqrt{x-1}\right| = 2(x-1) +$$

$$+ 10\sqrt{x-1} + 20\ln|\sqrt{x-1} - 1| - 10/\left(\sqrt{x-1} - 1\right) + C\,. \quad \blacksquare$$

2. Для інтегралів наведених нижче типів застосовують спеціальні тригонометричні підстановки в залежності від вигляду підкореневого виразу:

1) $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx \quad \Rightarrow \quad x = a \cdot \sin t\,,\ dx = a \cos t dt}$;

2) $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{\sin t}\,,\ dx = -\frac{a \cdot \cos t}{\sin^2 t} dt}$;

3) $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx \quad \Rightarrow \quad x = a \cdot tgt\,,\ dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt}$.

<u>Приклад 2</u>. Знайти інтеграл $\int x^2 \sqrt{9 - x^2}\, dx$.

□ Зробимо підстановку $x = 3\sin t$ з метою позбутись ірраціональності. Тоді $dx = 3\cos t\, dt$ і

$$\int x^2 \sqrt{9 - x^2} dx = \int (3\sin t)^2 \sqrt{9 - 9\sin^2 t}\, 3\cos t\, dt =$$

$$= \int 9\sin^2 t \cdot 3\,|\cos t\,| \cdot 3\cos t\, dt = 81 \int \sin^2 t \cos^2 t\, dt =$$

$$= (81/4) \int \sin^2 2t\, dt = (81/8) \int (1 - \cos 4t)\, dt =$$

$$= (81/8) \cdot \left(\int dt - \int \cos 4t\, dt\right) = (81/8) \cdot t - (81/8) \cdot \int \cos 4t\, dt$$

при умові $\cos t \ge 0$. Нехай $t = u/4$. Тоді $dt = (1/4)\, du$ і

$$\int \cos 4t\, dt = (1/4) \int \cos u\, du = (1/4) \sin u + C.$$

Отже $\int x^2 \sqrt{9 - x^2} dx = (81/8) \cdot t - (81/8) \cdot (1/4) \sin u + C$.

Повернемось до початкової змінної x:

$$t = \arcsin(x/3); \quad u = 4t = 4\arcsin(x/3).$$

Тоді

$$\int x^2 \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{81}{8} \arcsin(x/3) - \frac{81}{32} \sin(4\arcsin(x/3)) + C.$$

Звичайно, отриманий результат можна спростити, використовуючи тригонометричні тотожності. ■

1.1.7. Інтеграли, що «не беруться»

Диференціювання ґрунтується на формулах для похідної кожної з операцій, за допомогою яких формуються елементарні функції. Тому *похідна довільної елементарної функції також є елементарною*.

При інтегруванні не існує відповідних формул для добутку, частки і суперпозиції функцій. Тому *не кожну первісну, навіть коли вона існує, можна подати через елементарні функції у скінченному вигляді*.

Говорять, що інтеграл $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ «***не береться***», якщо первісна $F(x)$ – неелементарна функція.

Такого типу первісні, що часто застосовуються в математиці та інших дисциплінах, називаються ***спеціальними функціями***. Для них складені відповідні таблиці, побудовані графіки і створені комп'ютерні програми.

Наведемо деякі інтеграли, що «не беруться», і відповідні спеціальні функції:

а) $\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int e^{-x^2/2}dx = \Phi(x)+C$, де первісна $\Phi(x)$, що задовольняє додатковій умові $\Phi(0)=0$, називається ***функцією Лапласа*** (***інтегралом ймовірностей***);

б) $\int \frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{Si}\,(x)+C$, де первісна $\mathrm{Si}\,(x)$, що задовольняє додатковій умові $\mathrm{Si}\,(0)=0$, називається ***інтегральним синусом***.

1.2. Визначений інтеграл

1.2.1. Інтегральна сума. Її геометричний та економічний зміст. Поняття визначеного інтеграла. Умови його існування. Формула Ньютона – Лейбниця

Визначений інтеграл відіграє значну роль як у суто теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосуваннях. До його обчислення зводяться задачі знаходження площі фігури, об'єму тіла, центру ваги плоскої кривої, моменту інерції та інші.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних (не обов'язково рівних) елементарних частин точками поділу x_i, $i=\overline{0,n}$ такими, що $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. На кожному частинному відрізку $[x_{i-1};x_i]$ візьмемо по одній довільній (не обов'язково середній) точці c_i, $i=\overline{1,n}$. Обчислимо значення функції $f(c_i)$ і помножимо його на довжину відповідного частинного відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Складемо суму отриманих добутків

$$S_n(f) = f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_i)\Delta x_i + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Цей вираз називається ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Зауваження 1. Інтегральна сума $S_n(f)$, як це випливає з її побудови, не є функцією змінної n і не є функцією змінної x. Інтегральна сума залежить як від способу розбиття, тобто від вибору точок поділу x_i, $i=\overline{0,n}$, так і від вибору точок c_i, $i=\overline{1,n}$ по одній на кожному частинному відрізку.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Фігура, обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу віссю Ox і вертикальними прямими $x=a$ і $x=b$ (рис.2), називається ***криволінійною трапецією***.

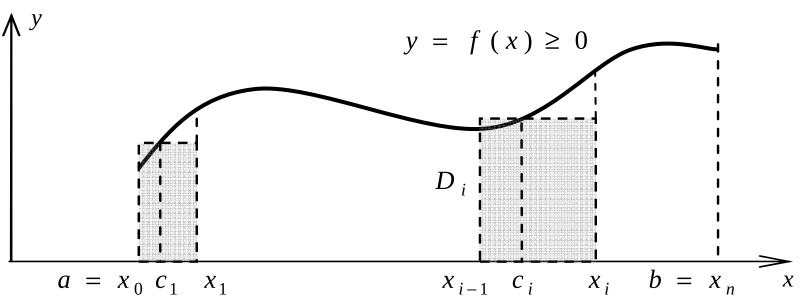

Рис. 2

Знайдемо її площу S

Добуток $f(c_i)\Delta x_i$ чисельно дорівнює площі прямокутника D_i з основою Δx_i і висотою $f(c_i)$. *Інтегральна сума* $S_n(f)$ чисельно дорівнює площі східчастої фігури, утвореної з таких прямокутників, і *служить наближеним значенням площі криволінійної трапеції*: $S \approx S_n(f)$.

Економічний зміст. Розглянемо задачу про об'єм виробництва зі змінною продуктивністю праці. Аналізуючи будь-яке виробництво помічаємо, що продуктивність праці в різні моменти часу t різна. Нехай продуктивність праці за період часу від 0 до T описується неперервною функцією $f(t)$. Розіб'ємо проміжок $[0;T]$ на n елементарних проміжків тривалістю $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$. Вважаючи продуктивність протягом часу Δt_i сталою і рівною $f(\bar{t}_i)$, де $\bar{t}_i$ – довільно взята точка з $[t_{i-1}, t_i]$, наближено визначимо об'єм продукції ΔQ_i, виробленої за елементарний проміжок часу Δt_i: $\Delta Q_i \approx f(\bar{t}_i)\Delta t_i$.

Тоді об'єм продукції Q, виробленої за весь період часу від 0 до T, наближено визначається як $Q \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{t}_i)\Delta t_i$, тобто *інтегральна сума* $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{t}_i)\Delta t_i$ *наближено дорівнює об'єму продукції, виробленої за період часу* $[0;T]$.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $S_n(f)=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ – її інтегральна сума на $[a;b]$. Позначимо через $\max \Delta x_i$ найбільшу з довжин відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i=\overline{1,n}$. Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум при умові $\max \Delta x_i \to 0$. Очевидно, що при цьому число n у розбитті прямує до нескінченності.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому здрібненні розбиття відрізка $[a;b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i},$$

де a і b – відповідно ***нижня*** і ***верхня межі інтегрування***; $[a;b]$ – ***відрізок інтегрування***.

Підкреслимо, що границя розглядається при будь-яких розбиттях відрізка $[a;b]$ таких, що $\max \Delta x_i \to 0$, і при будь-якому виборі точок c_i на елементарних відрізках $[x_{i-1};x_i]$, $i = \overline{1,n}$.

Зауваження 2. Не зважаючи на близькість позначень, невизначений і визначений інтеграли різні за суттю, оскільки невизначений інтеграл – це сім'я функцій (первісних), а визначений інтеграл – це число (значення границі).

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *чисельно дорівнює площі* S *відповідної криволінійної трапеції*: $\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$.

Економічний зміст. Збільшуючи кількість n проміжків розбиття Δt_i, одержуємо все точніші формули для обчислення об'єму виробленої продукції. При $\max \Delta t_i \to 0$ (відповідно $n \to \infty$) маємо точну рівність

$$\boxed{Q = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{t}_i)\Delta t_i = \int_0^T f(t)\,dt},$$

тобто, визначений інтеграл $\int_0^T f(t)\,dt$ *від продуктивності праці* $f(t)$ *дорівнює об'єму продукції* Q, *виробленої за період часу* $[0;T]$.

Теорема 1 (***необхідна умова інтегрованості***). *Якщо функція інтегрована на деякому відрізку, то вона обмежена на ньому.*

□ Припустимо супротивне. Нехай функція $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ необмежена. Тоді для довільного розбиття існує хоча б один елементарний відрізок $[x_{i-1};x_i]$, де функція необмежена. Вибираючи на ньому відповідним чином точку c_i, можна зробити значення функції $f(c_i)$, а з нею інтегральну суму $S_n(f)$ як завгодно великою. Тому скінченна границя для $S_n(f)$ не існує. ■

Зауваження 3. Умова обмеженості функції є необхідною, але не є достатньою для інтегрованості функції.

Теорема 2 (***достатня умова інтегрованості***). *Функція, неперервна на відрізку, інтегрована на ньому.*

Зауваження 4. Розглядаючи визначені інтеграли, надалі будемо припускати підінтегральну функцію неперервною на проміжку інтегрування.

Визначений інтеграл фактично відкрито понад 2000 років тому. Але широкого застосування він довго не мав, оскільки безпосередньо знаходити границі інтегральних сум важко навіть у найпростіших випадках. Невизначений інтеграл відкрито значно пізніше (у XXVII столітті) і для нього розроблено досить ефективні методи обчислення. Тоді ж був встановлений зв'язок між цими типами інтегралів, що дозволило розширити сфери застосування інтегрального числення.

Теорема (***Ньютона – Лейбниця***). *Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і* $F(x)$ *– яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції* $y = f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *дорівнює приросту первісної* $F(x)$ *на цьому відрізку*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b}$$ – ***формула Ньютона – Лейбниця***.

Тут символом $\boxed{F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$ позначено приріст первісної (читається: «$F(x)$ з підстановкою від a до b»).

□ Розглянемо приріст $F(b) - F(a)$. Перепишемо його, додаючи та віднімаючи значення функції в кожній внутрішній точці розбиття $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, враховуючи, що $x_0 = a, x_n = b$, та використовуючи на кожному елементарному відрізку формулу Лагранжа, а потім зробимо граничний перехід:

$$F(b) - F(a) = (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \ldots +$$

$$+ (F(x_n) - F(x_{n-1})) = \left| F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\,\Delta x_i \right.,$$

$$\left. c_i \in [x_{i-1}; x_{i-1}] \right| = F'(c_1)\Delta x_1 + F'(c_2)\Delta x_2 + \ldots + F'(c_n)\Delta x_n =$$

$$= \left| F'(c_i) = f(c_i) \right| = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots +$$

$$+ f(c_n)\Delta x_n = S_n(f); \quad \lim_{\Delta x_i \to 0} (F(b) - F(a)) = \lim_{\Delta x_i \to 0} S_n(f).$$

Таким чином $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

<u>Приклад</u>. Знайти інтеграл $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

□ Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона – Лейбниця, отримаємо:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1. \quad ■$$

<u>Зауваження 5</u>. Формула Ньютона – Лейбниця залишається справедливою для будь-якої інтегрованої на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$, що має неперервну первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F'(x) = f(x)$ на всьому відрізку $[a;b]$ за винятком хіба що скінченного числа точок.

1.2.2. Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення

Спираючись на означення та формулу Ньютона – Лейбниця, що зв'язує визначений інтеграл з невизначеним, можна встановити <u>основні властивості визначеного інтеграла</u>.

<u>Найпростіші властивості</u>:

1. *Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування* (змінна інтегрування є «німою»):

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt}.$$

2. *Визначений інтеграл з рівними між собою межами інтегрування дорівнює нулю*:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}.$$

3. *Якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}.$$

<u>Властивість адитивності за проміжком</u>:

4. *Для будь-яких трьох чисел* a, b *і* c *справедлива рівність*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx},$$

якщо тільки всі ці інтеграли існують.

Доведення спирається на властивість інтегральної суми, яку можна розділити на окремі частини, що відповідають частинам всього відрізка інтегрування.

<u>Властивості лінійності</u>:

5. *Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла*:

$$\boxed{\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \text{ де } A = const}.$$

$$\square\quad \int_a^b Af(x)\,dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n A\, f(c_i)\Delta x_i =$$

$$= A \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

6. *Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій окремо*. Так, у разі трьох функцій:

$$\boxed{\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx}.$$

Доведення спирається на відповідну властивість границі суми.

Властивості монотонності:

7. *Якщо підінтегральна функція неперервна і невід'ємна на відрізку* $[a;b]$, $f(x) \geq 0, x \in [a;b]$, *а верхня межа інтегрування більша або дорівнює нижній* $b \geq a$, *то визначений інтеграл на цьому відрізку також невід'ємний*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geq 0}.$$

8. *Якщо на відрізку* $[a;b]$, *де* $a < b$, *функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *задовольняють нерівності*

$$\boxed{f(x) \leq \varphi(x), \text{ то } \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx}.$$

Іншими словами, *нерівність між неперервними функціями можна інтегрувати почленно при умові, що верхня межа інтегрування більша нижньої*.

□ Розглянемо різницю

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (\varphi(x) - f(x))\,dx =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n (\varphi(c_i) - f(c_i))\Delta x_i .$$

Тут кожна різниця $\varphi(c_i) - f(c_i) \geq 0$, $\Delta x_i > 0$. Отже, кожен член суми додатний, додатна вся сума і невід'ємна її границя, тобто $\int_a^b (\varphi(x) - f(x))\,dx \geq 0$. Звідси

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \text{або} \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx. \ \blacksquare$$

9. *Абсолютна величина визначеного інтеграла не перевищує визначеного інтеграла від абсолютної величини підінтегральної функції при умові, що верхня межа інтегрування не менша за нижню* $b \geq a$:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}.$$

□ За властивістю модуля $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Враховуючи властивість 8, з цього випливає

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

або $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$. ■

Для функції $f(x)$, інтегрованої на відрізку $[a;b]$, ***середнім інтегральним значенням*** на цьому відрізку називається число μ, яке визначається рівністю

$$\boxed{\mu = \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx}.$$

<u>Теорема</u> (***про середнє значення***). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *то на інтервалі* $(a;b)$ *існує хоча б одна точка* c *така, що середнє інтегральне* μ *функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *дорівнює значенню функції* $f(c)$ *в цій точці:*

$$\boxed{f(c) = \mu = \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx}.$$

□ Нехай $a < b$. Якщо m і M найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тобто $m \le f(x) \le M$, тоді:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx; \quad m \le \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx \le M .$$

Вираз, який розташований всередині цієї подвійної нерівності, дорівнює μ. Тобто, $m \le \mu \le M$. Тоді за теоремою про проміжне значення неперервної на відрізку функції при деякому значенні c $(a < c < b)$ будемо мати $\mu = f(c)$. ■

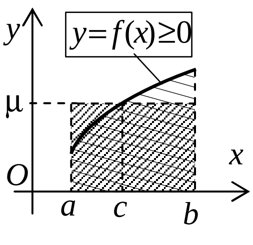

Рис. 3

<u>Геометричний зміст</u> (рис. 3). Для неперервної невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ всередині цього відрізка знайдеться хоча б одна точка c така, що площа відповідної криволінійної трапеції дорівнює площі прямокутника з тією ж основою $b-a$ і висотою $\mu = f(c)$.

Приклад. Продуктивність праці робітника протягом восьмигодинної зміни описується функцією $f(t)=1+t^{2/3}-0{,}55t$, $t\in[0;8]$. Знайти $\overline{f}$ – середню продуктивність праці робітника за зміну.

$$\square\quad \overline{f}=\frac{1}{8}\int_0^8(1+t^{2/3}-0{,}55t)\,dt=\frac{1}{8}\left(t+\frac{t^{5/3}}{5/3}-0{,}55\cdot\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^8=$$

$$=(1/8)\cdot(8+19{,}2-17{,}6)=1{,}2.\quad\blacksquare$$

1.2.3. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. *Нехай функція* $y=f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *а функція* $x=\varphi(t)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $x'=\varphi'(t)$ *і монотонна на відрізку* $[\alpha;\beta]$, *причому* $\varphi(\alpha)=a$ *і* $\varphi(\beta)=b$. *Тоді справедлива* ***формула заміни змінної у визначеному інтегралі***

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\left|\, x=\varphi(t);\ dx=\varphi'(t)\,dt;\ t=\varphi^{-1}(x);\right.}$$

$$\boxed{\left.\alpha=\varphi^{-1}(a);\ \beta=\varphi^{-1}(b)\,\right|=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt},$$

де $t=\varphi^{-1}(x)$ *– обернена функція.*

□ Якщо $F(x)$ – деяка первісна для функції $f(x)$, то можемо записати

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C;\quad \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(t))+C.$$

Справедливість останньої рівності перевіряється диференціюванням обох частин по t. З цих рівностей відповідно маємо:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a);\quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=$$

$$=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

Праві частини одержаних виразів рівні, отже, ліві частини теж рівні: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$. ■

Зауваження 1. При заміні змінної значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі відрізка $[a;b]$, коли аргумент t змінюється на проміжку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha)=a$ і $\varphi(\beta)=b$. Монотонна на $[\alpha;\beta]$ функція $x=\varphi(t)$ ці умови задовольняє.

Зауваження 2. Аналогічно випадку невизначеного інтеграла, формула заміни змінної може використовуватись як в прямому, так і в зворотному напрямку.

Зауваження 3. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної: якщо обчислено один з визначених інтегралів формули заміни, то маємо деяке число; цьому числу дорівнює також інший інтеграл.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

$$\square \quad I = \left| \begin{matrix} x+1=t^2;\ \ x=t^2-1;\ dx=2t\,dt; \\ t=\sqrt{x+1};\ \ t_1=\sqrt{3+1}=2;\ t_2=\sqrt{8+1}=3 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_2^3 \frac{t^2-1-3}{t} 2tdt = 2\int_2^3 (t^2-4)\,dt = 2\int_2^3 t^2dt - 8\int_2^3 dt =$$

$$= (2/3)t^3\Big|_2^3 - 8t\Big|_2^3 = (2/3)\cdot(3^3-2^3) - 8\cdot(3-2) = 14/3. \quad ■$$

Приклад 2. Обчислити: а) $\int_2^7 \frac{\sqrt[4]{3x-5}\,dx}{\sqrt{3x-5}+1}$; б) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$.

(Розв’яжіть самостійно, використовуючи відповідно підстановки: а) $3x-5=t^4$; б) $x=2/\cos t$).

Зауваження 4. При обчисленні визначеного інтеграла заміну змінної можна проводити у відповідному невизначеному інтегралі. Тоді треба повернутись до початкової змінної і застосувати формулу Ньютона – Лейбниця. Звичайно цим користуються у простих випадках, коли заміну здійснюють усно.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x}$, виконуючи заміну змінної у відповідному невизначеному інтегралі.

$$\square\ I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x}=\left|\int\frac{dx}{4+5\cos x}=\right|t=tg\,\frac{x}{2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2\,arctg\,t;\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}\left|=\int\frac{2\,dt\big/(1+t^2)}{4+5\cdot(1-t^2)\big/(1+t^2)}=\right.$$

$$=-2\int\frac{dt}{t^2-9}=-2\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\,(x/2)-3}{tg\,(x/2)+3}\right|+C\ \left|=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\,(x/2)-3}{tg\,(x/2)+3}\right|\right|_0^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\ln\left|\frac{tg\,(\pi/4)-3}{tg\,(\pi/4)+3}\right|-\ln\left|\frac{tg\,0-3}{tg\,0+3}\right|\right)=\frac{1}{3}\ln 2.\ \blacksquare$$

1.2.4. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – диференційовані функції від x на відрізку $[a;b]$. Тоді $(uv)'=u'v+v'u$. Інтегруємо обидві частини рівності у межах від a до b, маємо

$$\int_a^b(u\,v)'\,dx=\int_a^b u'\,v\,dx+\int_a^b u\,v'\,dx\,.$$

Оскільки $\int(u\,v)'\,dx=u\,v+C$, тому $\int_a^b(u\,v)'\,dx=u\,v\Big|_a^b$.

Отже $u\,v\Big|_a^b=\int_a^b v\,du+\int_a^b u\,dv$. Звідси остаточно маємо ***формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі***

$$\boxed{\int_a^b u\,dv=u\,v\Big|_a^b-\int_a^b v\,du},$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-2}^{0} (4x^2 - 12x - 8)\cos 2x\,dx\,.$$

$$\square \quad I = \begin{vmatrix} u = 4x^2 - 12x - 8; & dv = \cos 2x\,dx; \\ du = (8x - 12)\,dx; & v = (1/2)\sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$= (4x^2 - 12x - 8)(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} (1/2)\sin 2x \cdot (8x - 12)\,dx =$$

$$= 32\sin 4 - 2\int_{-2}^{0} (2x - 3)\sin 2x\,dx = \Big| u = 2x - 3; \;\; du = 2dx;$$

$$dv = \sin 2x\,dx; \;\; v = -(1/2)\cos 2x \,\Big| = 32\sin 4 -$$

$$-2\left((2x - 3)\cdot(-1/2)\cos 2x\Big|_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} (-1/2)\cos 2x \cdot 2dx\right) =$$

$$= 32\sin 4 - 3 + 7\cos 4 - 2\int_{-2}^{0} \cos 2x\,dx = 32\sin 4 - 3 +$$

$$+ 7\cos 4 - 2\cdot(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^{0} = 31\sin 4 + 7\cos 4 - 3\,. \;\; \blacksquare$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int_{0}^{\pi/2} e^{4x}\cos 5x\,dx\,.$

(Розв’яжіть самостійно).

1.3. Невласні інтеграли першого та другого роду

При вивченні визначеного інтеграла виходили з двох умов: а) скінченність проміжку інтегрування; б) неперервність (або хоча б обмеженість) підінтегральної функції.

Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним.

Так у випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на n частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума очевидно не має скінченної границі.

Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до ***невласного інтеграла*** – інтеграла на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

Невласний інтеграл по нескінченному проміжку від обмеженої функції також називають ***невласним інтегралом першого роду***.

Нехай функція $f(x)$ визначена на вправо нескінченному проміжку $[a;+\infty)$ й інтегрована на будь-якому відрізку $[a;b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді границю $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ називають ***невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею*** і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким чином,

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, а підінтегральну функцію $f(x)$ – ***інтегрованою*** на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$. Сама границя приймається за ***значення*** цього ***інтеграла***.

Якщо ж вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл називається ***розбіжним***, а функція $f(x)$ – ***неінтегрованою*** на $[a;+\infty)$.

Невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею визначається аналогічно (на вліво нескінченному проміжку $(-\infty;b]$):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Невласний інтеграл з обома нескінченними межами визначається рівністю

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx},$$

де c – довільне фіксоване дійсне число. *Інтеграл ліворуч у цій формулі існує (є збіжним) лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли праворуч*. Можна довести, що інтеграл, визначений цією рівністю, не залежить від вибору числа c.

З наведених означень випливає, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею визначеного інтеграла зі змінною межею інтегрування.

Збіжні невласні інтеграли мають усі основні властивості звичайних визначених інтегралів. Тому при розгляді невласного інтеграла перш за все виникає питання про його збіжність, яке вирішується або його безпосереднім обчисленням, або за допомогою спеціальних ***ознак збіжності***.

<u>Геометричний зміст.</u> Нехай функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на проміжку $[a;+\infty)$, а відповідний *невласний інтеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається. Тоді природно вважати, що він *визначає площу необмеженої області – трапеції з нескінченною основою*, що на рис. 4 позначена похилими та перехресними штрихами. Починаючи з деякого значення b, ця площа приблизно дорівнює площі обмеженої області, яка позначена на рис. 4 перехресними штрихами. Тобто, при $x \to +\infty$ функція $f(x)$ прямує до нуля настільки швидко, що площа відповідної нескінченної криволінійної трапеції виявляється скінченною.

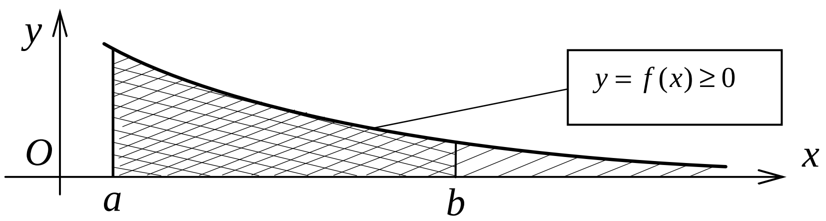

Рис. 4

<u>Приклад 1</u>. Обчислити дані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\text{а) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}; \quad \text{б) } \int_3^{+\infty} \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{2} \frac{x^2dx}{x^6+64}.$$

□ а) $$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^b = \frac{1}{2}\times$$

$$\times \lim_{b\to+\infty} \Big(\ln\left|(b-1)/(b+1)\right| - \ln(1/3)\Big) = (1/2)(\ln 1 + \ln 3) = (1/2)\ln 3.$$

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I=(1/2)\ln 3$.

$$\text{б) } I=\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{3}^{b}\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} t=x^2+3x-10; \quad dt=2x+3; \\ t_1=3^2+3\cdot 3-10=8;\ t_2=b^2+3b-10\end{matrix}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{8}^{b^2+3b-10}\frac{dt}{t}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln|t|\Big|_{8}^{b^2+3b-10}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|b^2+3b-10|-\ln|8|\right)=+\infty.$$

Невласний інтеграл розбігається.

в) (Розв’яжіть самостійно). ■

<u>Зауваження 2.</u> При обчисленні невласних інтегралів для скорочення іноді застосовують запис, аналогічний формулі Ньютона – Лейбниця. Наприклад,

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a),\ \text{де}\ F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)}.$$

Аналогічно узагальнюється формула інтегрування частинами:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} u\,dv=u\,v\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty} v\,du}.$$

<u>Приклад 2</u>. Обчислити невласний інтеграл $I=\int_{-\infty}^{0} x\,e^{x/4}dx$ або встановити його розбіжність.

$$\square\ \ I=\int_{-\infty}^{0} x\,e^{x/4}dx=\left|u=x;\ dv=e^{x/4}dx; du=dx;\ v=4e^{x/4}\right|=$$

$$=\left(x\cdot 4e^{x/4}\right)\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}4\,e^{x/4}dx=-4e^{-\infty}-4\cdot 4e^{x/4}\Big|_{-\infty}^{0}=\left|e^{-\infty}=0\right|=$$

$=0-16\ (e^0-e^{-\infty})=-16$. Інтеграл збігається і дорівнює -16. ■

<u>Зауваження 3.</u> Застосування заміни змінної може звести невласний інтеграл до звичайного визначеного інтеграла.

Перейдемо до розгляду невласних інтегралів від необмежених функцій (невласних інтегралів другого роду).

Нехай функція $f(x)$ інтегрована на будь-якому проміжку

$[a;\eta]$, де $\eta < b$, тобто існує визначений інтеграл $\int\limits_a^\eta f(x)dx$, і функція $f(x)$ необмежена на проміжку $[a;b]$. У цьому випадку точку b називають ***особливою***. Тоді границю $\boxed{\lim\limits_{\eta\to b-0}\int\limits_a^\eta f(x)dx}$ називають ***невласним інтегралом від необмеженої функції*** (***невласним інтегралом другого роду***) на проміжку $[a;b]$ і позначають $\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx}$.

Якщо ця границя існує й скінченна, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називається ***збіжним***; якщо ж ця границя не існує чи дорівнює нескінченності, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ – ***розбіжний***.

Аналогічно визначається невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ від необмеженої функції з особливою точкою a:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\eta\to a+0}\int\limits_\eta^b f(x)\,dx}.$$

У випадку, коли внутрішня точка $c\in(a;b)$ особлива, тобто в будь-якому околі точки c функція $f(x)$ необмежена, то за невласний інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ приймають суму границь:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\eta\to c-0}\int\limits_a^\eta f(x)\,dx + \lim\limits_{\mu\to c+0}\int\limits_\mu^b f(x)\,dx}.$$

<u>Приклад 3.</u> Обчислити невласний інтеграл чи встановити його розбіжність

$$\text{а) } \int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x+x^2}; \quad \text{в) } \int_2^6 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

□ а) Особлива точка $x = 3$. Отже, за означенням невласного інтеграла, формулами заміни змінної та Ньютона – Лейбниця, знайдемо

$$\int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\eta\to 3-0}\int_0^\eta \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{9-x^2}=t;\ \ 9-x^2=t^2 \\ x^2=9-t^2;\ \ 2xdx=-2tdt \\ xdx=-tdt \\ t_н=3;\ \ t_в=\sqrt{9-\eta^2} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\eta\to 3-0}\left(-\int_3^{\sqrt{9-\eta^2}} \frac{(9-t^2)tdt}{t} \right) = \lim_{\eta\to 3-0}\left(\left(-9t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_3^{\sqrt{9-\eta^2}} \right) =$$

$$= \lim_{\eta\to 3-0}\left(-9\sqrt{9-\eta^2}+27+\frac{\sqrt{(9-\eta^2)^3}}{3}-9 \right) = 18.$$

Отже, інтеграл збігається, його значення дорівнює 18.

б) Особливі точки: $x = 0$ і $x = -1 \notin [0;1]$. Маємо

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+x^2} = \lim_{\eta\to +0}\int_\eta^1 \frac{dx}{x+x^2} = \lim_{\eta\to +0}\int_\eta^1 \frac{1+x-x}{x+x^2}dx =$$

$$= \lim_{\eta\to +0}\left(\int_\eta^1 \frac{1+x}{x(1+x)}dx - \int_\eta^1 \frac{x}{x(1+x)}dx \right) = \lim_{\eta\to +0}\left(\ln|x|\Big|_\eta^1 - \ln|1+x|\Big|_\eta^1 \right) =$$

$$= \lim_{\eta\to +0}\left(\ln 1 - \ln\eta - \ln 2 + \ln(1+\eta)\right) = \infty.$$

Отже, інтеграл розбіжний.

в) Особливі точки:

$x^2 - 4x + 3 = 0$; $x = 3$ і $x = 1 \notin [2;6]$. Маємо

$$I = \int_2^6 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \lim_{\eta\to 3-0}\int_2^\eta \frac{dx}{x^2-4x+3} + \lim_{\mu\to 3+0}\int_\mu^6 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

Знайдемо відповідний невизначений інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-3)} = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \right) dx =$$

$$= \left| A(x-3) + B(x-1) = 1; \quad \begin{matrix} x=1: \\ x=3: \end{matrix} \begin{cases} -2A = 1; & A = -1/2; \\ 2B = 1; & B = 1/2 \end{cases} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{-1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x-3} \right) dx = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C .$$

Тоді $I = \lim\limits_{\eta\to 3-0} \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| \right)\Bigg|_2^{\eta} + \lim\limits_{\mu\to 3+0} \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| \right)\Bigg|_{\mu}^{6} =$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\eta\to 3-0} \left(\ln\left|\frac{\eta-3}{\eta-1}\right| - \ln 1 \right) + \frac{1}{2}\lim_{\mu\to 3+0} \left(\ln\frac{3}{5} - \ln\left|\frac{\mu-3}{\mu-1}\right| \right) - \textit{границя не існує}.$$

Отже, інтеграл $I = \int\limits_2^6 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ розбігається. ■

1.4. Геометричні та економічні застосування визначеного інтеграла

Різноманітні застосування визначеного інтеграла реалізуються за однією з двох схем:

1) Для шуканої величини, в припущенні адитивності (можливість підсумовування по елементам розбиття) і лінійності в малому (лінійна залежність між головними частинами нескінченно малих приростів, що фігурують в задачі), складається інтегральна сума, що наближено її визначає, а потім здійснюється граничний перехід при необмеженому здрібненні розбиття і одержується точне значення у вигляді визначеного інтеграла.

2) Складають співвідношення для диференціала (або похідної) шуканої функції, а потім саму функцію знаходять інтегруванням.

Розглянемо задачі обчислення основних кількісних характеристик геометричних об'єктів (довжини, площі, об'єму) та деякі економічні застосування інтегрального числення.

1.4.1. Обчислення площі плоскої фігури

Під час розгляду питання про обчислення площі плоскої фігури основним є поняття правильної області.

Непорожня множина D точок координатної площини Oxy називається ***областю*** (***відкритою областю***), якщо виконуються такі умови: 1) вона ***відкрита***, тобто разом з кожною своєю точкою містить деякий окіл цієї точки; 2) вона ***зв'язна***, тобто будь-які дві її точки можна сполучити деякою ламаною L, всі точки якої належать цій множині D.

Точка M_0 називається ***межовою точкою*** області D, якщо в кожному її околі містяться точки, що належать і що не належать цій області.

Множина всіх межових точок Γ області D називається ***межею*** цієї області.

Зауваження 1. Надалі розглядаються області, межа яких Γ складається зі скінченного числа кусково-неперервних кривих та ізольованих точок.

Якщо при русі вздовж межі Γ область D весь час залишається ліворуч, то такий напрям орієнтації межі Γ називається ***додатним обходом***.

Об'єднання області D з її межею Γ, називається ***замкненою областю***.

Зауваження 2. Домовимось ділянку межі Γ зображати суцільною лінією, якщо вона входить в область D, і пунктирною лінією, якщо вона не входить в область D.

Область D називається ***обмеженою***, якщо існує таке додатне число C, що відстань будь-якої точки області D до початку координат не перевищує числа C. У протилежному випадку область D називається ***необмеженою***.

Нехай D – деяка замкнена плоска область (рис. 5), відрізок $[a;b]$ - її проекція паралельно осі Oy на вісь Ox. Область D називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку осі*** Oy, якщо виконуються наступні умови: 1) вона обмежена знизу «горизонтальною» ***лінією входу*** $y = y_1(x)$, зверху – «горизонтальною» ***лінією виходу*** $y = y_2(x)$, а зліва і справа – вертикальними прямими відповідно $x = a$ і $x = b$ ($a < b$); 2) довільна пробна пряма $x = c$, що паралельна осі Oy, так само напрямлена і проходить через деяку внутрішню точку c відрізка $[a;b]$, перетинає межу цієї області лише в двох точках: в одній точці на ближній лінії входу та в одній точці на дальній лінії виходу; 2) лінію входу (аналогічно лінію виходу) можна задати в явному вигляді одним рівнянням $y = y_1(x)$ (аналогічно $y = y_2(x)$), розв'язаним відносно y.

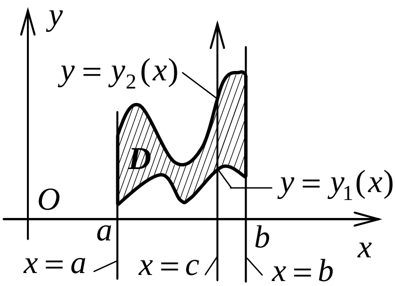

Рис. 5

Правильна в напрямку осі Oy плоска область D може бути задана системою нерівностей

$$\boxed{\begin{cases} a \le x \le b; \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \end{cases}}$$

де $D \xrightarrow{Oy} [a;b] \subset Ox$.

Площу такої області можна подати як алгебраїчну суму площ відповідних криволінійних трапецій, одна з основ кожної з яких лежить на осі Ox. Тоді площу правильної в напрямку осі Oy області D можна обчислити за формулою:

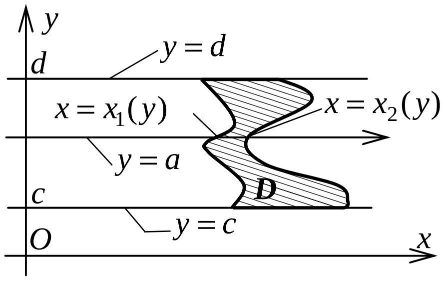

Рис. 6

$$\boxed{S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx}.$$

Аналогічно визначається ***правильна*** (***стандартна***) ***в напрямку осі*** Ox плоска область D (рис. 6). При цьому змінні x і y міняються ролями. (Сформулюйте означення самостійно).

Правильна в напрямку осі Ox плоска область D може бути задана системою нерівностей

$$\boxed{\begin{cases} c \le y \le d; \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), \end{cases}} \qquad \text{де } D \xrightarrow{Ox} [c;d] \subset Oy.$$

Площу правильної в напрямку осі Ox області D можна обчислити за формулою:

$$\boxed{S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy}.$$

Якщо область D – правильна в напрямку обох координатних осей Ox і Oy, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Наприклад, область, обмежена еліпсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, є правильною. Область D: $x^2 \le y \le 2 - x^2$; $x \in [-1;1]$, обмежена двома вертикальними параболами, що перетинаються, – правильна в напрямку осі Oy, але неправильна в напрямку осі Ox. Кругове кільце $r^2 \le x^2 + y^2 \le R^2$ – неправильне в обох напрямках.

Зауваження 3. Якщо область D – неправильна, то звичайно прямими, що паралельні осям координат, її розбивають на правильні частини, що не мають спільних внутрішніх точок.

Приклад 1. Знайти площу області D, обмеженої лініями $x = 4 - \sqrt{y}$, $x - y + 2 = 0$ та $y = 1$. Задачу розв'язати двома способами: а) використовуючи інтегрування за змінною x; б) використовуючи інтегрування за змінною y. Для кожного способу зробити відповідний рисунок.

□ Знайдемо характерні точки області D – її кутові точки, в яких перетинаються лінії, що утворюють межу області. Для цього складемо і розв'яжемо відповідні системи з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} x = 4 - \sqrt{y}; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = 3;\ A(3;1); \quad \begin{cases} x - y + 2 = 0; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = -1;\ B(-1;1);$$

$$\begin{cases} x = 4 - \sqrt{y}; \\ x - y + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = (4-x)^2,\ x \le 4; \\ x - (4-x)^2 + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 2; \\ x_2 = 7 > 4; \end{matrix}$$

$$y_1 = (4-2)^2 = 4; \quad C(2;4).$$

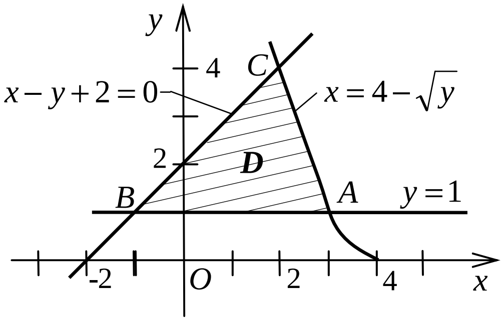

Рис. 7

За цими точками побудуємо ескізи заданих ліній – двох прямих $x - y + 2 = 0$, $y = 1$ і лівої половини $x = 4 - \sqrt{y}$ вертикальної параболи. Одержимо попереднє зображення області D (рис. 7) і проаналізуємо її форму.

а) Щоб скористатися формулою $S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx$, необхідно подати область D як правильну в напрямку осі Oy. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то її треба розбити на правильні частини. З рис. 7 видно, що область D – неправильна, оскільки її верхня межа утворена двома різними лініями, що з'єднуються в кутовій точці C. Тому розбиваємо область D на дві правильні частини D_1 і D_2 (рис. 8).

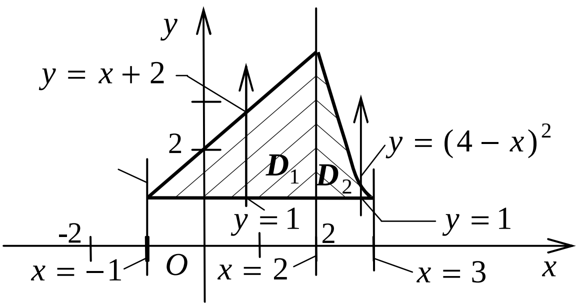

Рис. 8

Нехай площа першої фігури S_1, площа другої фігури S_2. Тоді шукана площа заданої області $S = S_1 + S_2$. Проведемо обчислення:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{2}((x+2)-1)\,dx + \int_{2}^{3}\left((x-4)^2 - 1\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}(x+1)\,dx + \int_{2}^{3}(x^2 - 8x + 15)dx = \left((1/2)x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{2} +$$

$$+ \left((1/3)x^3 - 4x^2 + 15x\right)\Big|_{2}^{3} = 2 + 2 - 1/2 + 1 + 9 - 36 + 45 -$$

$$-8/3 + 16 - 30 = 35/6 \text{ (кв. од.).}$$

б) Щоб скористатися формулою $S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy$, необхідно розглянути область D як правильну в напрямку осі Ox. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то треба розбити її на правильні частини. З рис. 7 видно, що область D у напрямку осі Ox є правильною. Відповідне зображення подано на рис. 9.

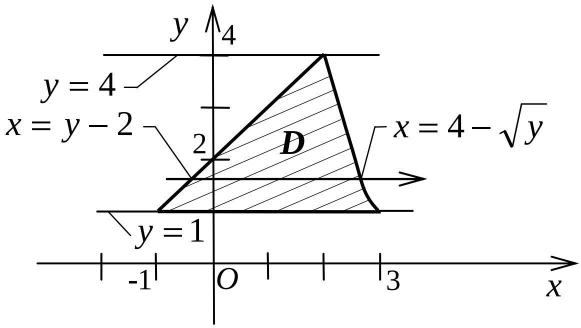

Рис. 9

Проведемо обчислення:

$$S = \int_1^4 \left(\left(4 - \sqrt{y}\right) - (y-2)\right)dy = \int_1^4 \left(6 - \sqrt{y} - y\right)dy =$$

$$= \left(6y - (2/3)\,y^{3/2} - (1/2)\,y^2\right)\Big|_1^4 = 24 - 16/3 - 8 - 6 + 2/3 +$$

$$+1/2 = 35/6 \text{ (кв. од.).} \quad \blacksquare$$

Зауваження 4. Звичайно, при обчисленні площі конкретної фігури треба використовувати особливості її форми і вибирати той спосіб її подання як правильної області, що приводить до більш простих розрахунків.

Приклад 2. Обчислити площу фігури D, обмеженої параболами $y = 2x - x^2 + 3$ і $y = x^2 - 4x + 3$.

□ Знайдемо точки перетину парабол:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 + 3; \\ y = x^2 - 4x + 3; \end{cases} \quad 2x - x^2 + 3 = x^2 - 4x + 3; \ 2x(x-3) = 0;$$

$$x_1 = 0; \ y_1 = 3; \ x_2 = 3; \ y_2 = 0; \ x = 3; \ A(0;3); \ B(3;0).$$

Характерними точками також є вершини парабол. Для знаходження вершин і зручності побудови парабол виділимо в їх рівняннях повні квадрати двочлена:

$$y = 2x - x^2 + 3 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 + 3 = 4 - (x-1)^2; \ C(1;4);$$

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1; \ E(2;-1).$$

Вказану фігуру D зображено на рис. 10.

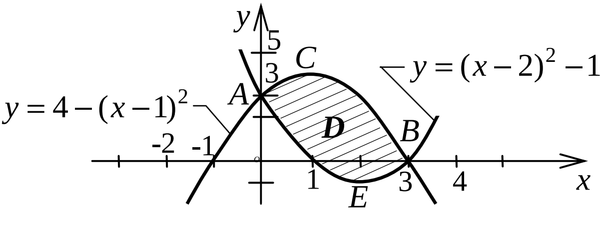

Рис. 10

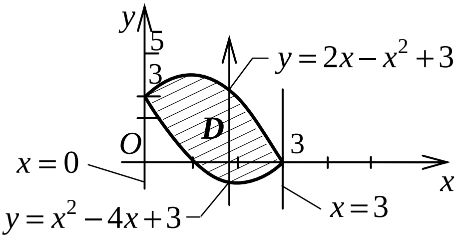

Рис. 11

З нього видно, що область D – правильна в напрямку осі Oy. Крім того, задані рівняння кривих, що обмежують область, мають явний вигляд відносно змінної y. Відповідне зображення подано на рис. 11.

За формулою $S=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))\,dx$ маємо:

$$S=\int_0^2 \left((2x-x^2+3)-(x^2-4x+3)\right)dx=\int_0^2 (6x-2x^2)\,dx=$$

$$=\left(3x^2-(2/3)x^3\right)\Big|_0^3=27-18=9 \text{ (кв. од.).} \quad \blacksquare$$

1.4.2. Обчислення довжини дуги кривої

Нехай на координатній площині Oxy задана деяка лінія рівнянням у явній формі $y=y(x)$. Потрібно обчислити довжину L її дуги L_{AB}. (рис. 12).

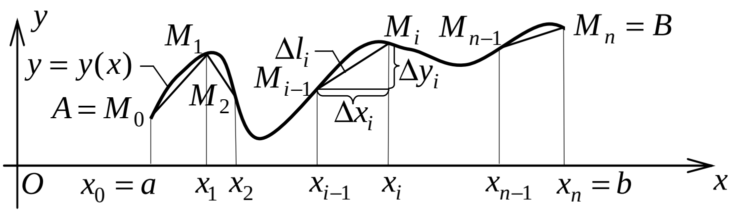

Рис. 12

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i=\overline{1,n}$ точками $A=M_0, M_1, M_2, ..., M_n=B$ з абсцисами $a=x_0<x_1<x_2<...<x_i<...<x_n=b$ і проведемо хорди $M_0M_1, M_1M_2, ..., M_{i-1}M_i, ..., M_{n-1}M_n$, довжини яких позначимо відповідно через Δl_1, $\Delta l_2, \ldots, \Delta l_i, ..., \Delta l_n$. Тоді маємо ламану $M_0M_1...M_i...M_{n-1}M_n$, вписану в дугу L_{AB}. Довжина ламаної L_n дорівнює сумі довжин її ланок $L_n=\sum_{i=1}^n \Delta l_i$.

Довжиною L ***дуги*** L_{AB} називають границю довжини L_n вписаної ламаної при необмеженому здрібненні розбиття, тобто коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля (при цьому число n

цих ланок прямує до нескінченності):

$$L = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \ .$$

<u>Теорема 1</u>. *Якщо функція* $y = y(x)$, *визначена на відрізку* $[a;b]$, *неперервна разом зі своєю похідною на цьому відрізку, то довжина* L *дуги* L_{AB}, *що служить її графіком на відрізку* $[a;b]$, *обчислюється за формулою*

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx} \ .$$

□ Позначимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\Delta y_i = y(x_i) - y(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1+(\Delta y_i / \Delta x_i)^2}\,\Delta x_i$$

За формулою Лагранжа про скінченні прирости маємо

$\Delta y_i / \Delta x_i = (y(x_i) - y(x_{i-1}))/(x_i - x_{i-1}) = y'(c_i)$, де $x_{i-1} < c_i < x_i$.

Отже, $\Delta l_i = \sqrt{1+(y'(c_i))^2}\,\Delta x_i$, оскільки $\Delta x_i > 0$.

Таким чином, довжина вписаної ламаної дорівнює

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(y'(c_i))^2}\,\Delta x_i \ .$$

За умовою похідна $y'(x)$ – неперервна, тому функція $\sqrt{1+(y'(x))^2}$ теж неперервна. Тоді вираз для довжини ламаної L_n є інтегральною сумою для неперервної функції. Отже, існує визначений інтеграл – границя L_n при необмеженому здрібненні розбиття, що дає довжину L дуги L_{AB}:

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(y'(c_i))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx \ . \ \blacksquare$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти довжину вказаної дуги

$$y = \ln x, \ x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}].$$

□ Похідна $y' = 1/x$. Тоді:

$$L=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(1/x)^2}\,dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}dx=\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=$$

$$=\left|x^2+1=t^2;\ \sqrt{1+x^2}=t;\ \ x=\sqrt{t^2-1};\ dx=t\,dt\Big/\sqrt{t^2-1}\ ;\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}t_1=\sqrt{1+3}=2;\\ t_1=\sqrt{1+8}=3\end{array}\right|=\int\limits_2^3\frac{t\cdot t\,dt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{t^2-1}}=\int\limits_2^3\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=\int\limits_2^3 dt+$$

$$+\int\limits_2^3\frac{dt}{t^2-1}=t\,\Big|_2^3+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3=3-2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=$$

$$=1+(1/2)\ln(3/2)\ \text{(од.).}\ \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти довжину кола $x^2+y^2=R^2$.

□ Довжина L_1 дуги кола, що розташована у першому квадранті, складає четверту частину довжини L всього кола. Рівняння цієї дуги має вигляд $y=\sqrt{R^2-x^2}$, звідки $y'=-x\big/(R^2-x^2)^{1/2}$. Тоді довжину L кола можна обчислити так:

$$L=4L_1=4\int\limits_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4R\int\limits_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=4R\arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_0^R=$$

$$=4R(\arcsin 1-\arcsin 0)=2\pi R\ \ \text{(од.).}\ \blacksquare$$

1.4.3. Обчислення об’єму тіла обертання

1. <u>Об'єм тіла з відомими площами паралельних перерізів</u>.

Нехай маємо деяке тіло T. Припустимо, що відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною, що перпендикулярна до осі Ox (рис. 13). Ця площа залежить від положення січної площини, тобто є функцією від x: $S=S(x)$. Знайдемо об'єм V тіла T.

Припустимо, що функція $S(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$, що служить проекцією тіла T на вісь Ox. Проведемо довільно площини $x = x_0$, $x = x_1$, ..., $x = x_i$, ..., $x = x_n$, де $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b$. Тим самим тіло розбивається на елементарні шари між сусідніми площинами $x = x_{i-1}$ і $x = x_i$. На кожному частинному проміжку $[x_{i-1}; x_i]$ візьмемо довільну точку c_i і для кожного i-го шару побудуємо елементарний циліндр, твірна якого паралельна осі Ox і має довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а напрямною служить контур перерізу тіла T площиною $x = c_i$. Тоді об'єм шару ΔV_i наближено дорівнює об'єму такого циліндра з площею основи $S(c_i)$ і висотою Δx_i: $\Delta V_i \approx S(c_i)\Delta x_i$. Об'єм V тіла T наближено дорівнює сумі V_n об'ємів усіх частинних циліндрів: $V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\,\Delta x_i$. Точність цього наближення підвищується зі зменшенням кроків Δx_i розбиття.

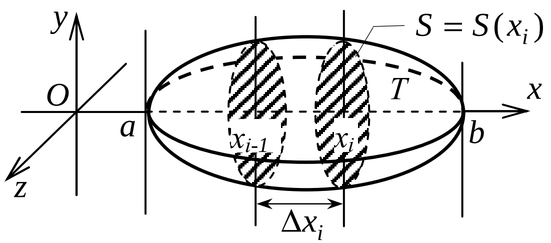

Рис. 13

Границя цієї суми (якщо вона існує) при необмеженому здрібненні розбиття (коли $\max \Delta x_i \to 0$ і при цьому, очевидно, $n \to \infty$) визначає об'єм V даного тіла T: $V = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\,\Delta x_i$.

Таким чином, об'єм V є границею інтегральної суми V_n для неперервної функції $S(x)$ на відрізку $[a; b]$, тому вказана границя існує і дорівнює визначеному інтегралу: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$.

Приклад 1. Знайти об'єм еліпсоїда

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

□ У перерізі еліпсоїда (рис. 14) площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, утворюється еліпс

$$\begin{cases} y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 - x^2/a^2; \\ x = const \end{cases}$$

або $\quad y^2\Big/\left(b^2(1 - x^2/a^2)\right) + z^2\Big/\left(c^2(1 - x^2/a^2)\right) = 1$

з півосями $b_1 = b\sqrt{1 - x^2/a^2}, \quad c_1 = c\sqrt{1 - x^2/a^2}$.

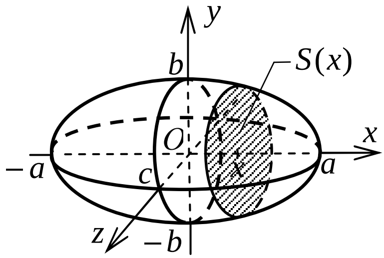

Рис. 14

Площа такого еліпса

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - x^2/a^2\right).$$

Обчислимо об'єм еліпсоїда, враховуючи його симетрію відносно площини Oyz:

$$V = \pi bc\int_{-a}^{a}(1 - x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc\int_{0}^{a}(1 - x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc\left(x - x^3/(3a^2)\right)\Big|_0^a = (4/3)\pi abc \text{ (куб.од.). } \blacksquare$$

2. Об'єм тіла обертання.

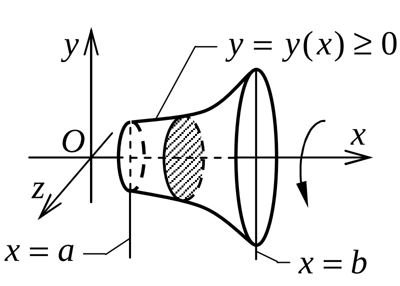

Рис. 15

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком неперервної невід'ємної функції $y = y(x) \geq 0$, віссю Ox і двома прямими $x = a$ та $x = b$, де $a \leq b$. Якщо обертати цю фігуру навколо осі Ox, то утвориться тіло обертання T (рис. 15). Переріз цього тіла площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, – круг з площею $S(x) = \pi R^2 = \pi(y(x))^2$. Тоді об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

$$\boxed{V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx}\,.$$

Приклад 2. Знайти об’єм тіла, що утворене обертанням плоскої фігури, обмеженої лініями $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$, навколо осі Ox.

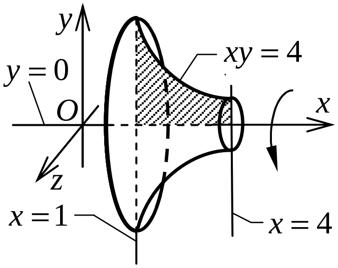

Рис. 16

□ Тіло, об’єм якого треба знайти, зображене на рис. 16. Фігура (криволінійна трапеція), що обертається, показана штриховою.

Проведемо обчислення:

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx = \pi\int_1^4 (4/x)^2\,dx =$$

$$= 16\pi(-1/x)\,\Big|_1^4 = 12\pi \text{ (куб.од.). } \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти об’єм тіла, що утворене обертанням плоскої фігури D, обмеженої дугою синусоїди $y = 4\sin x,\ x \in [0;\pi/6]$, віссю Oy і горизонтальною прямою $y = 2$, навколо осі Ox.

(Розв’яжіть самостійно).

1.4.4. Застосування визначеного інтегралу в економічних задачах

1. Задача про розподіл доходів населення держави. Рівень розвитку держави характеризується тим, як вона забезпечує рівень життя своїх громадян. Одним з таких показників є матеріальний добробут. Легко і досить точно проводити порівняльний аналіз розподілу населення за рівнем добробуту дозволяє ***коефіцієнт Джині***, який характеризує нерівність в розподілі доходів населення. Він безпосередньо зв’язаний з ***кривою Лоренца*** $y = f(x)$ (крива OmA на рис. 17), яка відображає залежність відсотка y доходів населення від відсотка x тих, які ці доходи мають. При рівномірному (досконалому) розподілі крива Лоренца вироджується в пряму –

бісектрису OA, а тому площа фігури OAB між бісектрисою OA і кривою Лоренца, віднесена до площі трикутника OAB (***коефіцієнт Джині*** $\boxed{k = S_{OAm}/S_{\Delta OAB}}$), характеризує ступінь нерівномірності розподілу доходів населення.

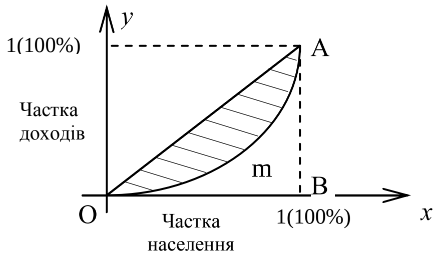

Рис. 17

Приклад 1. Нехай $y = x^3/(2-x^4)^2$ – крива Лоренца, визначена за дослідженнями розподілу доходів у деякій країні, де x – відсоток населення, y – відсоток доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джині k.

□ $k = S_{OAm}/S_{\Delta OAB}$;

$$S_{OAm} = \int_0^1 \left(x - x^3/(2-x^4)^2 \right) dx = \int_0^1 x dx -$$

$$-\int_0^1 \frac{x^3 dx}{(2-x^4)^2} = \left| u = 2 - x^4;\ du = -4x^3 dx;\ u_1 = 2;\ u_2 = 1 \right| =$$

$$= x^2/2 \Big|_0^1 + \frac{1}{4}\int_2^1 \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot(-1/u)\Big|_2^1 = 0{,}375;$$

$$S_{\Delta OAB} = 0{,}5; \quad k = 0{,}375/0{,}5 = 0{,}75.$$

Досить велике значення коефіцієнта k показує значну нерівномірність розподілу доходів серед населення даної країни. ■

Зауваження 1. Очевидно, що $0 \le f(x) \le x$ при $x \in [0;1]$. Тому коефіцієнт нерівномірності розподілу доходів задовольняє співвідношення $0 \le k \le 1$. Коли $k = 0$, доходи розподілено рівномірно. Коли $k = 1$, нерівномірність розподілу найбільша.

2. Задача про дисконтування. Визначення початкової суми грошей за її кінцевою величиною, одержаною через час t (років) при річній відсотковій ставці p, називається ***дисконтуванням.*** Задачі такого типу зустрічаються при визначенні економічної ефекти-

вності капіталовкладень.

Нехай K_t – кінцева сума, одержана за t років, а K_0 – сума, що дисконтується (початкова сума). K_0 у фінансовому аналізі називають ***теперішньою вартістю*** очікуваних у майбутньому грошових надходжень.

Якщо відсотки прості, то $K_t = K_0(1+tp/100)$, де $p/100$ – номінальна річна відсоткова ставка, подана у вигляді десяткового дробу. Звідси $K_0 = K_t \big/ (1+p/100)$.

У випадку складних відсотків маємо: $K_t = K_0(1+p/100)^t$. Тоді $K_0 = K_t(1+p/100)^{-t}$.

Якщо відсотки нараховуються рівномірно n разів протягом кожного року, тоді $K_t = K_0(1+(p/n)/100)^{nt}$. Звідси $K_0 = K_t(1+(p/n)/100)^{-nt}$.

У разі неперервного нарахування відсотків (при $n \to \infty$) маємо: $K_t = K_0 e^{tp/100}$. Тоді $K_0 = K_t e^{-tp/100}$.

Нехай щорічний дохід, що надходить, змінюється з часом і описується функцією $f(t)$, а відсотки нараховуються неперервно при відповідній відсотковій ставці $p/100$. Тоді дисконтований дохід K_0 за визначений час $[0;T]$ обчислюється за формулою

$$\boxed{K_0 = \int_0^T f(t) e^{-tp/100} dt}.$$

<u>Приклад 2.</u> Знайти дисконтований дохід за чотири роки при відсотковій ставці 5%, якщо початкові капіталовкладення становили 15 млн. грн. і планується щорічно збільшувати капіталовкладення на 2 млн. грн.

□ Згідно умови задачі капіталовкладення задано функцією $f(t) = 15 + 2t$ і $p = 5$, $T = 4$. Обчислимо суму дисконтування вкладень:

$$K_0 = \int_0^T f(t) e^{-tp/100} dt = \int_0^4 (15 + 2t) e^{-0,05t} dt \approx 68 \text{ (млн. грн.)}$$

(інтеграл обчислити самостійно, використовуючи інтегрування частинами).

Отже, для нарахування однакової суми, що утворилась за чотири роки, щорічні капіталовкладення від 15 млн. грн. до 23 млн. грн. рівнозначні одночасному початковому вкладенню 68 млн. грн. при тій самій відсотковій ставці та неперервному нарахуванні відсотків. ■

Зауваження 2. Як відомо з фінансового аналізу, якщо в деякому проекті доходи $P(t)$ і витрати $C(t)$ здійснюються неперервно протягом n років, тоді різниця доходів і витрат за елементарний проміжок часу $[t, t+\Delta t]$ приблизно дорівнює $\big(P(t)-C(t)\big)\Delta t$. Відповідно теперішня вартість ΔTB цієї різниці визначається за формулою $\Delta TB = \big(P(t)-C(t)\big)e^{-tp/100}\Delta t$, де $e^{-tp/100}$ – коефіцієнт дисконтування, t – поточний рік життя проекту. Тоді початкова вартість TB всієї різниці доходів і витрат протягом n років при неперервній капіталізації обчислюється за формулою:

$$\boxed{TB = \int_0^n \big(P(t)-C(t)\big)e^{-tp/100}dt}.$$

Отже, теперішня вартість TB залежить від таких трьох факторів: різниці доходів і витрат $P(t)-C(t)$; терміну життя проекту n і величини відсоткової ставки p. У загальному випадку інвестиції будуть вигідними, якщо $TB > C_0$, тобто якщо приведена вартість інвестицій буде більше за початкові капіталовкладення.

3. Задача про зміну капіталу**.** Нехай $I(t)$ – чисті інвестиції (загальні капіталовкладення, що були здійснені за певний проміжок часу, за винятком інвестицій на відшкодування амортизації), $K(t)$ – капітал підприємства (основні фонди), тоді $I(t) = K'(t)$, тобто за одиницю часу капітал збільшується на суму чистих інвестицій. Якщо відома функція чистих інвестицій $I(t)$, то можна знайти зміну капіталу ΔK за проміжок часу $[t_1; t_2]$ за формулою: $\boxed{\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt}$.

Приклад 3. Чисті інвестиції змінюються з часом за формулою $I(t) = 10000e^t \big/ (1+e^t)$ грош. од./рік. Знайти: а) приріст капіталу ΔK (з точністю до цілих грош. од.) за перші п'ять років; б) проміжок часу $[0;T]$ (з точністю до року), протягом якого приріст капіталу ΔK досягне $100\,000$.

$$\square \text{ а) } \Delta K = \int_0^5 \frac{10000e^t}{1+e^t}dt = \left| u = 1+e^t;\ du = e^t dt;\right.$$

$$\left. u_1 = 2;\, u_2 = 1+e^5 \right| = 10000\int_2^{1+e^5} \frac{du}{u} = 10000\ln|u|\Big|_2^{1+e^5} =$$

$$= 10000\left(\ln(1+e^5) - \ln 2\right) \approx 43136 \text{ (грош. од.)};$$

$$\text{б) } \int_0^T \frac{10000e^t}{1+e^t}dt = 100000;\ \ 10000\left(\ln(1+e^T) - \ln 2\right) = 100000;$$

$$\ln(1+e^T) - \ln 2 = 10;\ \ \ln(1+e^T) = \ln(2\cdot e^{10});$$

$$1+e^T = 2\cdot e^{10};\ \ e^T = 2e^{10} - 1;\ \ T = \ln(2e^{10} - 1) \approx 11 \text{ (років)}. \ \blacksquare$$

Приклад 4. Знайти (з точністю до цілих грош. од.) середнє значення μ витрат $C(x) = 100x - 10x^2 + 270$ грош. од. якщо обсяг продукції x змінюється від 3 до 9 одиниць. Вказати (з точністю до цілих одиниць продукції) обсяг продукції $\bar{x}$, при якому витрати приймають середнє значення.

□ Середнє значення μ функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ обчислюється за теоремою про середнє значення і досягається хоча б в одній внутрішній точці $\bar{x}$ цього відрізка:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx;\quad \mu = \frac{1}{9-3}\int_3^9 (100x - 10x^2 + 270)\,dx =$$

$$= \frac{5}{3}\left(5x^2 - \frac{x^3}{3} + 27x\right)\Bigg|_3^9 = 480;$$

$$f(\bar{x})=\mu\,; \quad C(\bar{x})=100\bar{x}-10\bar{x}^2+300=480;$$

$$\bar{x}^2-10\bar{x}+18=0\,; \; D=100-72=28;$$

$$\bar{x}_1=5-\sqrt{7}\approx 2\notin(3;9)\,; \quad \bar{x}_2=5+\sqrt{7}\approx 8\,. \quad \blacksquare$$

<u>4. Задача про максимізацію прибутку за часом.</u> Метою будь-якого виробництва є досягнення максимального прибутку. Тобто, досягнення максимальної різниці між доходами і видатками. Позначимо $P(t)$, $D(t)$ і $V(t)$ відповідно функції, що виражають залежності прибутку, доходу та видатків від часу t. Тоді $P(t)=D(t)-V(t)$. Похідні $P'(t)$, $D'(t)$ і $V'(t)$ є функціями маргінальних прибутку, доходу та витрат відповідно. При цьому $P'(t)=D'(t)-V'(t)$. Загальний прибуток $P(T)$ за час $[0;T]$ можна знайти за формулою

$$P(T)=\int_0^T P'(t)dt=\int_0^T \left(D'(t)-V'(t)\right)dt\,.$$

Якщо функція $P(t)$ досягає свого екстремуму (з економічних міркувань – максимуму), то її похідна дорівнює 0:

$$P'(t)=D'(t)-V'(t)=0, \text{ звідки } D'(t)=V'(t)\,.$$

Тобто, в процесі економічної діяльності настає такий момент часу T_k (***тривалість прибуткового існування***), коли маргінальні доходи і видатки зрівнюються $D'(T_k)=V'(T_k)$. При цьому загальний прибуток досягає свого максимуму $\max P(t)=P(T_k)$ і подальша діяльність у цій сфері втрачає економічний сенс.

<u>Приклад 5</u>. Нехай прибутки, доходи та видатки вимірюються в мільйонах гривень, а час – у роках. Маргінальні витрати і доходи підприємства після початку його діяльності визначаються співвідношеннями: $V'(t)=3+2t^{1/3}$, $D'(t)=9-t^{1/3}$. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства T_k. Знайти максимальне значення $P(T_k)$ загального прибутку, що одержується за цей час.

□ $D'(t)=V'(t)$; $9-t^{1/3}=3+2t^{1/3}$; $t^{1/3}=2$; $T_k=8$.

Отже, підприємство є прибутковим вісім років. За цей час загальний прибуток досягає максимального значення і становить:

$$P(T_k) = \int_0^{T_k} P'(t)dt = \int_0^{T_k} \left(D'(t) - V'(t)\right)dt\,;$$

$$P(8) = \int_0^8 \left(9 - t^{1/3} - 3 - 2t^{1/3}\right)dt = 3\int_0^8 \left(2 - t^{1/3}\right)dt =$$

$$= 3(2t - 3t^{4/3}/4)\Big|_0^8 = 3\cdot(16-12) = 12 \text{ (млн. грн.).} \quad ■$$

<u>5. Задача про об’єм продукції, виробленої за проміжок часу</u>.

Згідно з економічним змістом визначеного інтеграла

$$\boxed{Q(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau}$$

– об’єм продукції, виробленої за період часу $[0;t]$, дорівнює визначеному інтегралу від продуктивності праці $f(t)$ на проміжку $[0;t]$.

<u>Приклад 6</u>. Продуктивність праці описана рівнянням

$$f(t) = -(5/2)t^2 + 15t + 50\,.$$

Знайти об’єм продукції, виробленої за час $0 \le t \le 6$.

□ Об’єм продукції, виробленої за час $0 \le t \le 6$, дорівнює

$$Q(6) = \int_0^6 \left(-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 50\right)dt = \left(-\frac{5t^3}{6} + \frac{15t^2}{2} + 50t\right)\Bigg|_0^6 = 390\,. \quad ■$$

<u>Приклад 7</u>. Продуктивність праці робітника протягом зміни описується функцією $f(t) = -t^2 + 8t + 20$. Знайти максимально можливу тривалість робочої зміни $t_{\max}$, доки продуктивність праці не досягне нульового рівня, і обчислити об’єм продукції $Q(t_{\max})$, виробленої за таку зміну. (Розв’яжіть самостійно).

<u>6. Задача про стратегію розвитку</u>.

<u>Приклад 8</u>. Компанія повинна обрати одну із двох можливих стратегій розвитку: 1) вкласти 12 млн. гривень у нове обладнання і одержувати 3 млн. гривень прибутку кожного року на протязі 10

років його експлуатації; 2) вкласти 16 млн. гривень у більш досконале обладнання, яке дозволить одержати 5 млн. гривень прибутку щорічно, але на протязі більш короткого строку експлуатації у 7 років. Яку стратегію треба обрати компанії, якщо номінальна облікова щорічна відсоткова ставка 10%?

□ Нехай $f(t)$ – щорічний прибуток на момент часу t (рік), $V(0)$ – початкові капіталовкладення, p – номінальна облікова щорічна відсоткова ставка. Тоді дійсне значення загального чистого прибутку $P(T)$ за період часу $[0;T]$ можна знайти за формулою:

$$\boxed{P(T)=\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt/100}dt - V(0)}.$$

Для першої стратегії дійсне значення загального чистого прибутку за 10 років становить

$$P_1=\int_0^{10} 3e^{-0,1t}dt-12=-30e^{-0,1t}\Big|_0^{10}-12\approx 7 \quad \text{(млн. грн.)}.$$

Для другої стратегії маємо :

$$P_2=\int_0^{7} 5e^{-0,1t}dt-16=-50e^{-0,1t}\Big|_0^{7}-16\approx 9 \quad \text{(млн. грн.)}.$$

Отже, друга стратегія рівнем прибутку краще першої і тому її доцільно обрати для подальшого розвитку компанії. ■

1.5. Економічна динаміка та її моделювання: диференціальні та різницеві рівняння

1.5.1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь

При вивченні різноманітних явищ у науці, техніці та інших сферах часто не вдається безпосередньо встановити функціональну залежність між значеннями шуканих і відомих величин, проте можливо виявити зв'язки між нескінченно малими приростами (диференціалами) змінних, що фігурують у задачі. Диференціальні зв'язки завдяки лінеаризації, як правило, суттєво простіші скінченних. Крім того, результати спостережень чи експериментів часто подаються в диференціальній формі. Тому для моделювання неперервних динамічних процесів широко використовуються диференціальні та інші споріднені з ними рівняння. Далі наведемо декілька прикладів подібних задач.

Задача 1. Повні витрати V залежать від об'єму (кількості одиниць) виробленої продукції x. Знайти функцію $V = V(x)$, якщо відомо: швидкість росту витрат dV/dx для всіх значень x дорівнює середнім витратам на одиницю продукції V/x.

Таким чином, маємо диференціальне рівняння $\boxed{dV/dx = V / x}$, розв'язком якого при додатковій умові $V(1) = V_0$ служить лінійна функція: $V = V_0 x$.

Задача 2. Нехай в початковий момент $t = 0$ часу t на деякій фірмі вироблялося x_0 одиниць продукції, а швидкість зростання dx/dt випуску продукції x в довільний момент часу t прямо пропорційна поточному об'єму інвестування $I(t)$ зі сталим коефіцієнтом пропорційності k. Знайти залежність $x = x(t)$ кількості виробленої продукції від часу при сталому інвестуванні $I(t) = I_0$.

Таким чином, приходимо до диференціального рівняння $\boxed{dx/dt = kI_0}$. Розв'язком цього рівняння при додатковій умові $x(0) = x_0$ служить лінійна функція: $x = kI_0 t + x_0$.

Задача 3. Еластичність попиту η на деяку продукцію з об'ємом попиту x, кожна одиниця якої пропонується за ціною p, визначається за формулою $\eta = \dfrac{p}{x} \cdot \dfrac{dx}{dp}$. Знайти функцію попиту $x = x(p)$ (залежність між об'ємом x попиту на товар і та його ціною p), якщо відомо: еластичність попиту стала і дорівнює -1.

Таким чином, маємо диференціальне рівняння $\boxed{\dfrac{p}{x} \cdot \dfrac{dx}{dp} = -1}$, розв'язком якого при додатковій умові $x(1) = x_0$ служить гілка гіперболи: $x = x_0 / p$.

Задача 4. Відомо, що швидкість зростання dK/dt інвестованого капіталу K в довільний момент часу t прямо пропорційна поточній величині капіталу $K(t)$ з коефіцієнтом пропорційності $p/100$, де p – узгоджений відсоток неперервного зростання капіталу. Знайти закон зростання $K = K(t)$ інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової інвестиції $K(0) = K_0$.

Таким чином, маємо диференціальне рівняння $\boxed{\dfrac{dK}{dt} = \dfrac{p}{100}K}$, розв'язком якого при додатковій умові $K(0) = K_0$ служить експонента: $K = K_0 e^{pt/100}$.

Задача 5. Нехай ведеться виборча компанія. У початковий момент часу $t_0 = 0$ агітаційну інформацію про кандидата A мають x_0 громадян, загальна кількість яких дорівнює X. Далі ця інформація поширюється через спілкування людей між собою. Припустимо, що швидкість цього процесу dx/dt (зростання числа громадян $x = x(t)$, ознайомлених з даною інформацією за час t) прямо пропорційна як числу x вже проінформованих на даний момент t людей, так і числу $X - x$ громадян, ще не охоплених агітацією.

Таким чином, приходимо до диференціального рівняння

$$\boxed{dx/dt = kx(X - x)} \text{ або } \boxed{dx/dt = kXx - kx^2},$$

де k − додатний сталий коефіцієнт пропорційності. Розв'язком цього рівняння при додатковій умові $x(0) = x_0$ служить ***логістична крива***:

$$\boxed{x = X\Big/\left(1 + (X / x_0 - 1)\, e^{-Xkt}\right)}.$$

Подібне диференціальне рівняння моделює поширення технічних нововведень, зростання популяції певного виду тварин та інші процеси. Це рівняння можна доповнити ще одним доданком $-v$, що враховує різні втрати інформації:

$$\boxed{dx/dt = kXx - kx^2 - v}.$$

1.5.2. Поняття про диференціальне рівняння. Загальний і частинний розв’язки та їх геометричний зміст

Рівняння називається ***диференціальним***, якщо воно містить похідні (диференціали) шуканої функції.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної (диференціала), що входить у нього.

Коли шукана функція $y = y(x)$ є функцією однієї змінної x, то диференціальне рівняння (ДР) називають ***звичайним***. Далі будемо займатися лише звичайними ДР.

Диференціальне рівняння n ***–го порядку*** зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', ..., \ y^{(n)}$ (чи відповідні диференціали).

Диференціальне рівняння n –го порядку можна подати в ***загальному вигляді***

$$\boxed{F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0},$$

де $y = y(x)$ – шукана функція. Рівняння може не містити в явному вигляді незалежну змінну x, саму шукану функцію y та її похідні нижчих порядків $y', y'', ..., y^{(n-1)}$, але до нього обов’язково повинна входити n -а похідна $y^{(n)}$.

Це неявна форма запису ДР. Розв’язавши загальне рівняння відносно найвищої похідної, отримаємо ***канонічний*** (***нормальний***) ***вигляд*** ДР

$$\boxed{y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)}.$$

Наприклад, $y'''-3(y')^4 - \sqrt{y} - 2\sin x = 0$ – ДР третього порядку, подане у загальній (неявній) формі; $y^{(6)} = y'''-4x(y')^8$ – ДР шостого порядку, записане в канонічній (явній) формі.

Уже відома задача знаходження первісної $y = F(x)$ для даної функції $f(x)$ породжує найпростіше диференціальне рівняння $y' = f(x)$, розв’язування якого зводиться до інтегрування.

Розв'язком диференціального рівняння називається довільна функція $y = y(x)$, що при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність.

Графік розв’язку ДР називається ***інтегральною кривою***.

<u>Зауваження 1</u>. Розв’язок ДР n–го порядку є n разів диференційованою функцією. Тому інтегральна крива є досить гладкою.

Процес знаходження розв'язку ДР називається його ***інтегруванням***.

<u>Зауваження 2</u>. Розв’язок ДР, записаний ***у неявній формі***, часто називають ***інтегралом*** диференціального рівняння. Розв’язок ДР також може подаватися ***в параметричній формі***.

<u>Зауваження 3</u>. Диференціальне рівняння вважається ***розв’язаним***, якщо множина його розв’язків задається співвідношеннями без диференціювання, що можуть включати операції інтегрування відомих функцій. Серед вказаних інтегралів допускаються й ті, що не виражаються через елементарні функції у скінченному вигляді. Як правило, будемо намагатися знаходити розв’язок ДР у найбільш простій явній формі та обчислювати всі наявні інтеграли.

<u>Приклад 1</u>. Перевірити, чи служить явно задана функція $y = C_1 + C_2 e^{10x} - x^3/30 - x^2/100 - x/500$, де C_1, C_2 − довільні сталі, розв’язком диференціального рівняння $y'' - 10y' = x^2$.

□ Диференціюючи вказану функцію, знайдемо

$$y' = 10C_2 e^{10x} - x^2/10 - x/50 - 1/500;$$

$$y'' = 100C_2 e^{10x} - x/5 - 1/50.$$

Підставимо функцію та її похідні у рівняння:

$$100C_2 e^{10x} - x/5 - 1/50 - 10\left(10C_2 e^{10x} - x^2/10 - x/50 - \right.$$

$$\left. -1/500\right) = x^2; \quad x^2 = x^2.$$

Оскільки тотожність вірна, то вказана функція є розв’язком заданого ДР. ■

Щоб знайти шукану функцію з ДР n-го порядку, треба в загальному випадку виконати n операцій інтегрування, що дає n довільних сталих. Таким чином, диференціальне рівняння має безліч розв’язків.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку є функція $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, що містить n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ і задовольняє диференціальному рівнянню при будь-яких допустимих значеннях $C_1, C_2, ..., C_n$.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку при конкретних фіксованих значеннях довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$.

Геометричний зміст. Загальному розв'язку відповідає сім'я інтегральних кривих. При цьому через кожну внутрішню точку області визначення сім'ї проходить єдина інтегральна крива. Частинному розв'язку відповідає конкретний екземпляр з сім'ї інтегральних ліній.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = 3x^2$. Вказати три його частинні розв'язки.

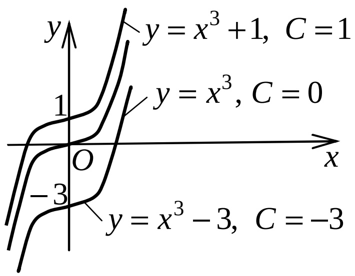

Рис. 18

□ $dy / dx = 3x^2$; $dy = 3x^2 dx$;

$$y = 3\int x^2 dx = x^2 + C.$$

Отже, $y = x^3 + C$ – загальний розв'язок. Геометрично йому відповідає однопараметрична сім'я інтегральних кривих. Поклавши послідовно $C = -3$, $C = 0$ і $C = 1$, отримаємо три частинні розв'язки, зображені на рис. 18. ■

1.5.3. Початкові та крайові умови. Задача Коші та крайова задача

Для знаходження конкретних значень довільних сталих, що входять у загальний розв'язок, звичайно використовуються:

1) ***початкові умови*** – відомі значення функції та її похідних в деякій одній фіксованій точці $x = x_0$; або

2) ***крайові*** (***граничні***) ***умови*** – відомі значення функції та її похідних в декількох різних фіксованих точках.

Початкових або крайових умов повинно бути стільки, скільки довільних сталих.

Для ДР n-го порядку початкові умови мають вигляд:

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0';\ldots;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ − відомі числа (початкові дані).

Диференціальне рівняння разом з початковими умовами називають ***початковою задачею*** (***задачею Коші***).

Диференціальне рівняння разом з крайовими умовами називають ***крайовою*** (***граничною***) ***задачею***.

<u>Приклад 1</u>. Розв’язати задачу Коші (знайти частинний розв’язок заданого ДР, що задовольняє вказаним початковим умовам):

$$y'' = \cos x;\quad y(0) = 1;\ y'(0) = 2.$$

□ Знайдемо загальний розв’язок рівняння:

$$y' = \int \cos x dx;\quad y' = \sin x + C_1;\ y = \int (\sin x + C_1)\, dx;$$

$$y = -\cos x + C_1 x + C_2.$$

В одержаний загальний розв’язок та його першу похідну підставимо задані початкові умови і знайдемо C_1, C_2:

$$1 = -\cos 0 + C_1 \cdot 0 + C_2;\ 2 = \sin 0 + C_1;\ C_1 = 2,\ C_2 = 2.$$

Тоді частинний розв’язок рівняння (розв'язок задачі Коші):

$$y_K = -\cos x + 2x + 2.\ \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Розв’язати крайову задачу (знайти частинний розв’язок заданого ДР, що задовольняє вказаним граничним умовам):

$$y'' = 12x;\quad y(0) = 3;\ y'(1) = -1.$$

□ Знайдемо загальний розв’язок рівняння:

$$y' = 12\int x\, dx;\ y' = 6x^2 + C_1;\ y = \int (6x^2 + C_1)\, dx;$$

$$y = 2x^3 + C_1 x + C_2.$$

В отриманий загальний розв’язок та його першу похідну підставимо задані крайові умови і знайдемо C_1, C_2:

$$3 = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2;\ -1 = 3 \cdot 1 + C_1;\ C_1 = -4,\ C_2 = 3.$$

Звідси частинний розв’язок (розв'язок крайової задачі):

$$y_b = 2x^3 - 4x + 3\,. \quad \blacksquare$$

Зауваження 1. У диференціального рівняння можуть існувати так звані ***особливі розв’язки***, які неможливо дістати із загального розв’язку ні при яких значеннях довільних сталих. Геометрично особлива інтегральна крива не входить у сім’ю, що відповідає загальному розв’язку, а тому не може лежати всередині області існування цієї сім’ї.

Наприклад, нехай маємо рівняння $y' = y^{2/3}$. При $y \neq 0$ отримаємо: $y^{-2/3}y' = 1$; $(3y^{1/3})' = 1$; $3y^{1/3} = x + C$. Звідси $y = (1/27)(x+C)^3$ − загальний розв’язок. Але розв’язок $y(x) \equiv 0$ до нього не входить і тому є особливим.

Зауваження 2. У деяких випадках виникає обернена задача знаходження ДР, що описує задану сім’ю інтегральних кривих.

Приклад 3. Знайти ДР першого порядку, загальний розв’язок якого $y = C\sin x - x^2$, де C − довільна стала.

□ Продиференціюємо загальний розв’язок. Вираз для похідної $y' = C\cos x - 2x$ не можна назвати диференціальним рівнянням, оскільки коефіцієнт C − невизначений. Вилучимо з нього C. Для цього з початкового рівняння $y = C\sin x - x^2$ виразимо C і підставимо знайдене значення у співвідношення для похідної:

$$C = (y + x^2)/\sin x\,; \quad y' = \cos x(y + x^2)/\sin x - 2x \text{ або}$$

$$y'\sin x = y\cos x + x^2\cos x - 2x\sin x$$

− шукане ДР першого порядку. ■

Зауваження 3. Теорія диференціальних рівнянь ще далека до завершення. Для ДР у канонічній формі доведено теореми, що виражають достатні умови існування та єдиності розв'язку відповідної задачі Коші. На жаль, аналогічні умови для крайових задач значно жорсткіші, менше просунені й досить віддалені від необхідних. У практичних застосуваннях задача Коші, при певних обмеженнях, має єдиний розв'язок, крайова задача може мати довільну кількість розв'язків.

1.5.4. Різниці. Оператор зсуву. Різницеві рівняння. Приклади застосування різницевих рівнянь в економічних задачах

Різниці. Оператор зсуву. Різницеві рівняння.

Комп'ютерний супровід неперервних за часом процесів будь-якої природи передбачає їх дискретизацію – перехід від неперервно змінюваного аргументу до дискретно змінюваного, оскільки цифрова ЕОМ може оперувати лише з числами. Крім того, економічна інформація звичайно фіксується дискретно, наприклад через рік, місяць, тиждень і т. д. Аналіз таких оцифрованих даних приводить до різницевих рівнянь. Різницеве рівняння в математичному відношенні часто розглядається як деяке наближення відповідного диференціального чи як деякий його дограничний варіант. Теорія різницевих рівнянь в багатьох аспектах схожа з теорією диференціальних рівнянь, проте в силу специфіки функцій з дискретним аргументом має і самостійне значення. Далі наводяться стислі відомості про різницеві рівняння.

Функція дискретного аргументу (***сіткова функція***) звичайно позначається так:

$$\boxed{y_n = f(x_n)} \text{ або } \boxed{y_n = y(x_n)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

де x_n – відповідне номеру n одне значення аргументу (n***-й вузол***) з деякої множини (***сітки*** або ***розбиття***) – послідовності точок $\{x_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, що накриває деякий проміжок (скінченній чи нескінченний), причому

$$\ldots < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 \ldots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} < \ldots \,.$$

Відстані $\boxed{h_n = x_{n+1} - x_n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ між сусідніми вузлами сітки можуть бути довільними додатними числами. Проте найчастіше розглядають випадок ***рівномірної сітки*** зі сталим ***кроком дискретизації*** $h_n = h > 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Тоді $x_n = x_0 + nh$, а сіткова функція $y_n = f(x_n)$ стає ***функцією цілочисельного аргументу*** – номеру n вузла сітки: $y_n = y(n) = f(x_0 + nh)$. Її графіком на координатній площині Oxy є дискретний набір точок $(n; y_n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (див. рис. 19).

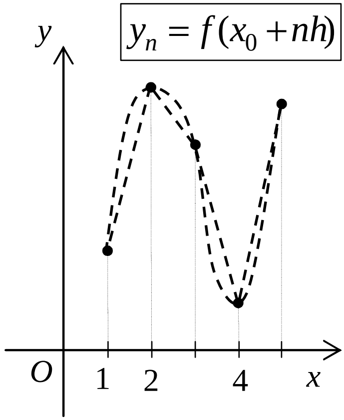

Рис. 19

Зауваження 1. Підкреслимо, що між цілочисельними значеннями аргументу n така функція невизначена. Тому зворотній перехід від сіткової функції до функції неперервного аргументу (її ***обвідній***) неоднозначний. На рис. 19 пунктирними лініями зображено дві обвідні. Однією з них є ламана, якій відповідає кусково-лінійна функція.

Приклад 1. Для заданої функції $y = f(x)$, що визначена на відрізку $[a;b]$, побудувати рівномірні сітку вузлами
$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < x_N = b$
і скласти відповідну сіткову функцію $y_n = y(n) = f(x_0 + nh)$, $n = 0,1,..., N$, якщо $y = 5x^2 - 4x$; $a = 1$, $b = 2$ і $N = 5$.

□ Крок дискретизації $h = \dfrac{b-a}{N} = \dfrac{2-1}{5} = \dfrac{1}{5}$, Одержуємо сітку $\{1; 1{,}2; 1{,}4; 1{,}6; 1{,}8; 2\}$ Ординати сіткової функції $y_n = 5x_n^2 - 4x_n$, $n = \overline{0, N}$ утворюють множину $\{1; 2{,}4; 4{,}2; 6{,}4; 9; 12\}$ ■

Для характеристики швидкості змінювання сіткової функції $y_n = y(n)$ використовується ***перша спадна різниця*** (***спадна різниця першого порядку***) $\boxed{\Delta y_n = y_{n+1} - y_n}$, що є аналогом першої похідної функції неперервного аргументу.

Розглядаючи в свою чергу Δy_n як сіткову функцію, можна знайти її першу спадну різницю, тобто ***другу спадну різницю*** (***спадну різницю другого порядку***) початкової функції $y_n = y(n)$:

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) =$$
$$= y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Аналогічно визначається ***спадна різниця*** k ***-го порядку***:

$$\Delta^k y_n = \Delta(\Delta^{k-1} y_n).$$

Приклад 2. Знайти всі спадні різниці до k-го порядку: включно для функції $y_n = e^{an}$, де $a = const$.

□ $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = e^{a(n+1)} - e^{an} = (e^a - 1)e^{an} = (e^a - 1)y_n$.

Отже, перша різниця пропорційна самій функції. Тоді

$$\Delta^2 y_n = (e^a - 1)\left(e^a - 1)e^{an}\right) = (e^a - 1)^2 e^{an} = (e^a - 1)^2 y_n; \ \ldots;$$

$$\Delta^k y_n = (e^a - 1)\left(e^a - 1)^{k-1} e^{an}\right) = (e^a - 1)^k e^{an} = (e^a - 1)^k y_n. \quad ■$$

Введемо символічний ***оператор зсуву*** S, дія якого на функцію $y(x)$ полягає у зростанні аргументу на сталу величину $h > 0$ – крок дискретизації: $Sy(x) = y(x+h)$. При цьому як для додатних, так і від'ємних значень дійсної змінної t справедлива рівність $S^t y(x) = y(x+th)$.

Тоді ***оператор спадної різниці*** Δ можна виразити через оператор зсуву: $\Delta = S - 1$. Відповідно маємо $\Delta^k = (S-1)^k$. Звідси, застосовуючи формулу бінома Ньютона, дістаємо:

$$\Delta^k = (S-1)^k = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m S^{k-m} \quad \text{або} \quad \Delta^k y_n = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m y_{n+k-m}.$$

Рівняння загального вигляду

$$\boxed{F(n, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}) = 0}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

називається ***різницевим рівнянням*** (***рівнянням у скінченних різницях***) ***k-го порядку*** (РР) відносно шуканої функції $y_n = y(n)$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Приклад 3. Визначити порядок різницевих рівнянь:

а) $y_{n+3} = 3ny_n$; б) $y_{n+2} + 2n - 8y_{n+6} = y_n$; в) $y_{n+1}^2 + 8y_n^3 + y_n = 4$.

□ Рівняння а) 3 порядку, тому що зв'язує y_n з y_{n+3}. Рівняння б) має 6 порядок, оскільки зв'язує y_n і y_{n+6}. Рівняння в) першого порядку, тому що зв'язує y_{n+1} і y_n. ■

Зауваження 2. В означенні РР індекс n змінюється від 0 і далі приймає цілі додатні значення. Але n може починати змінюватись з іншого значення, наприклад, з –2 або 5. У таких випадках n буде приймати відповідні наступні значення.

Розв'язком різницевого рівняння називається будь-яка сіткова функція $y_n = y(n)$, $n = 0,1,2,...$, що в результаті підстановки в різницеве рівняння перетворює його на тотожність.

Приклад 4. Показати, що послідовність $y_n = n(n+1)/2$, $n = 1,2,3,...$ є розв'язком різницевого рівняння $y_n - y_{n-1} = n$.

□ Треба показати, що дана послідовність задовольняє рівняння для всіх можливих значень n. Для цього спочатку знайдемо y_{n-1}, підставивши замість n у формулу для $y_n = y(n)$ значення $n-1$: $y_{n-1} = (n-1)(n-1+1)/2 = (n-1)n/2$.

Тепер підставимо y_n та y_{n-1} у рівняння:

$$n(n+1)/2 - (n-1)n/2 = n; \quad n = n \text{ – вірно.}$$

Отже, задана послідовність $y_n = y(n)$, $n = 1,2,3,...$ задовольняє різницеве рівняння для всіх $n = 1,2,3,...$, тому ця сіткова функція є розв'язком рівняння. ■

Лінійне різницеве рівняння першого порядку зі сталим коефіцієнтом можна подати у вигляді

$$\boxed{y_{n+1} - a\,y_n = f_n}, \quad n = 0,1,2,...,$$

де a – сталий коефіцієнт, $a \neq 0$; f_n – права частина (відома сіткова функція).

У математиці фінансів особливе значення має лінійне рівняння вигляду $\boxed{y_{n+1} - a\,y_n = b}$, де $b = const$. Його ***загальний розв'язок*** задається співвідношенням:

$$y_n = \begin{cases} Ca^n - b/(a-1), \; a \neq 1; \\ C + nb, \; a = 1 \end{cases} \quad (n = 0,1,2,...),$$

де C – довільна стала. Значення C можна визначити, якщо задано хоча б один член послідовності y_n. Якщо відомий y_p, тобто задана ***початкова умова*** $y_p = y_{p0}$, тоді

$$C = \begin{cases} a^{-p}\left(y_{p0} + b/(a-1)\right), \ a \neq 1; \\ y_{p0} - pb, \ \ a = 1. \end{cases}.$$

Відповідно маємо ***частинний розв'язок***

$$\boxed{y_n = \begin{cases} Ca^{n-p}\left(y_{p0} + b/(a-1)\right) - b/(a-1), \ a \neq 1; \\ y_{p0} + (n-p)b, \ a = 1 \end{cases}} \quad (n = 0,1,2,...).$$

<u>Приклад 5</u>. Знайти частинний розв'язок лінійного різницевого рівняння $y_{n+1} - 2y_n = 3$ при початковій умові $y_0 = 7$.

□ Загальним розв'язком є сіткова функція

$$y_n = Ca^n - b/(a-1) = C2^n - 3/(2-1) = C2^n - 3 \ \ (n = 0,1,2,...).$$

Надавши у цій рівності аргументу n значення $n = 0$ і використовуючи значення y_0, одержимо: $y_0 = C2^0 - 3 = 7$; $C = 10$.

Отже, шуканий розв'язок має вигляд: $y_n = 10 \cdot 2^n - 3$. ■

<u>Приклади застосування різницевих рівнянь в економічних задачах</u>.

Різницеві рівняння досить широко використовуються для побудови моделей економічної динаміки з дискретним часом: складні відсотки, модель ділового циклу Самюельсона – Хікса, павутинні моделі ринку, динамічна модель Леонтьєва та ін. Докладно їх розглянемо далі. Поки що обмежимось однією конкретною задачею на складні відсотки.

<u>Приклад 5</u>. Робітник поклав на свій банківський рахунок накопичень 10300 гривень і щомісяця вносить ще по 150 гривень на цей рахунок з отриманням прибутку $1{,}5\%$ за кожен місяць. Знайти величину його накопичень одразу після здійснення n-го внеску; зокрема, при $n = 25$.

□ Нехай y_n – значення рахунку відразу після n-го внеску ($n = 1, 2, ...$). Тоді перше, початкове значення величини рахунку становить $y_1 = 10300$. Можна виразити y_{n+1} ($n = 1, 2, \ldots$) через y_n таким чином: значення рахунку після ($n+1$)-го внеску дорівнює його значенню після n-го внеску + відсоток прибутку + останній внесок. Тобто,

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}015 y_n + 150; \quad y_{n+1} = 1{,}015 y_n + 150.$$

Остання рівність є лінійним різницевим рівнянням першого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно сіткової функції y_n ($n = 1, 2, \ldots$). Його загальний розв'язок (отримайте його самостійно!) має вигляд: $y_n = C \cdot 1{,}015^n - 10000$.

Конкретне значення довільної сталої C знаходиться з початкової умови:

$$y_1 = 10300: \; C \cdot 1{,}015^1 - 10000 = 10300; \quad C = 20000.$$

Отже, частинним розв'язком поставленої різницевої задачі Коші є сіткова функція

$$y_n = 20000 \cdot 1{,}015^n - 10000, \; n = 1, 2, \ldots.$$

При $n = 25$ одержимо

$$y_{25} = 20000 \cdot 1{,}015^{25} - 10000 \approx 19019 \text{ (грн.)}. \quad \blacksquare$$

Приклад 6. 2000 гривень зберігаються з простим 8% прибутком за кожен рік, y_n – величина накопичень після n років зберігання. Запишіть різницеве рівняння для y_n та знайдіть його розв'язок. Якою буде величина накопичень через 10 років?

(Розв'язати самостійно).

1.5.5 Метод Ейлера

Цей метод відноситься до ***чисельних методів*** розв'язання диференціальних рівнянь і служить прикладом застосування різницевих рівнянь у наближених обчисленнях.

На відрізку $[a;b]$ розглянемо диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$, для якого задана початкова умова