2.4. Визначники та їх властивості

2.4.1. Означення визначника. Мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника

Визначником (***детермінантом***) n***-го порядку*** називається число Δ_n, яке записується у вигляді квадратної таблиці

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

що має n ***рядків*** і n ***стовпців***.

Числа a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ називаються ***елементами*** визначника. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ називається ***головною діагоналлю***, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$ – ***побічною діагоналлю*** визначника.

Головна діагональ визначника проходить з лівого верхнього кута у правий нижній, а побічна діагональ – з правого верхнього кута у лівий нижній.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку Δ_n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержується з визначника Δ_n видаленням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається за формулою $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}}$.

Визначник n-го порядку Δ_n дорівнює алгебраїчній сумі всіх можливих добутків n його елементів, узятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця. Якщо в кожному добутку перші індекси елементів розміщені в порядку зростання, то знак добутку дорівнює $(-1)^s$, де s – число ***інверсій*** (ситуацій, коли більше число передує меншому) у переставленні других індексів.

2.4.2. Обчислення визначника

Загальне правило обчислення визначника має рекурентний характер (визначник n-го порядку Δ_n виражається через визначники $(n-1)$-го порядку Δ_{n-1}):

а) *Визначник першого порядку* Δ_1 $(n=1)$ *дорівнює самому елементу* a_{11}:

$$\Delta_1 = a_{11}\ .$$

б) *Визначник* n*-го порядку* Δ_n $(n \geq 2)$ *дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення*:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

(***розклад визначника за елементами першого рядка***).

Із загального правила можна одержати спрощені співвідношення для визначників другого та третього порядків:

1) визначник другого порядку Δ_2 обчислюється за формулою:

$$\boxed{\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$$

(правило «хреста» (схема на рис. 78, а)):
визначник другого порядку Δ_2 *дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей*);

Приклад 1. Обчислити визначник другого порядку за правилом «хреста» $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$.

□ $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5) - (-4)\cdot 3 = 2\ .$$ ■

2) визначник третього порядку Δ_3 обчислюється за формулою:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

(правило «трикутників» (схема на рис. 78, б):
визначник третього порядку дорівнює сумі шести доданків, кожне з яких є добутком трьох елементів: три добутки елементів, розміщених на головній діагоналі і у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна головній діагоналі, беруться зі знаком «+», а *три добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі і у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна побічній діагоналі, беруться зі знаком* «-»).

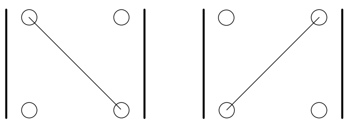

Рис. 78, а

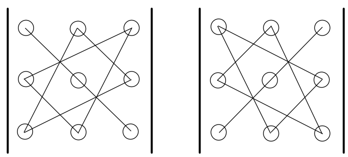

Рис. 78, б

Приклад 2. Знайти мінор M_{23} і алгебраїчне доповнення A_{23} елемента a_{23} даного визначника

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

□ $a_{23} = -1$; $M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-4) \cdot 6 = 24$;

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \cdot 24 = -24 . \quad ■$$

Приклад 3. Обчислити визначник третього порядку, розклавши його за елементами першого рядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-4)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(2-0) - 2(-1-0) - 4(-3+10) = -32 \ . \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Обчислити визначник третього порядку за правилом «трикутників»

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 9 + 3\cdot 3\cdot 2 +$$

$$+(-1)\cdot 4\cdot 5 - 5\cdot(-2)\cdot 2 - 3\cdot(-1)\cdot 9 - 3\cdot 4\cdot 2 =$$

$$= -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15 \ . \quad \blacksquare$$

Зауваження 1. Для обчислення визначників більш високих порядків ($n > 3$) таких зручних та легких для запам’ятовування схем не існує.

Зауваження 2. Елементами визначника можуть бути не тільки числа, а й об’єкти іншої природи, що допускають операції додавання і множення. Наприклад, функції одного й того ж аргументу.

Приклад 5. Розв'язати рівняння:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & x \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} = 0; \qquad \text{б)}\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & x \\ x & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

□ а) $2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & x \\ x & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +$

$$+1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0\ ; \quad -2x^2 - 2x + 4 = 0\ ;$$

$$x^2 + x - 2 = 0\ ; \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 1.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

2.4.3. Основні властивості визначника

Зауваження 1. Для скорочення формулювань будь-який рядок чи будь-який стовпець називатимемо ***рядом***.

Властивість 1. *Сума добутків елементів будь-якого ряду на їх алгебраїчні доповнення не залежить від номера ряду і дорівнює значенню визначника*:

$$\boxed{\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}}$$

– ***розклад визначника за*** i ***-м рядком***;

$$\boxed{\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}}$$

– ***розклад визначника за*** j ***-м стовпцем***.

Зауваження 2. При розкладанні визначника рекомендується вибирати такий ряд, в якому найбільше нульових елементів.

Наслідок. *Визначник з нульовим рядом дорівнює нулю*.

Властивість 2. *Значення визначника не зміниться після заміни всіх його рядків відповідними стовпцями і навпаки*.

Операція заміни всіх рядків визначника Δ_n відповідними стовпцями і навпаки називається ***транспонуванням*** визначника. Отриманий визначник Δ_n^T називається ***транспонованим***, його значення дорівнює значенню самого визначника Δ_n: $\Delta_n^T = \Delta_n$.

Наприклад,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -4 & 7 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \ \Delta^T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}; \ \Delta^T = \Delta .$$

Властивість 3. *Якщо поміняти місцями два паралельних ряди, то визначник змінить знак на протилежний, не змінившись за абсолютною величиною*.

Властивість 4. *Визначник з двома однаковими паралельними рядами дорівнює нулю*.

Властивість 5. *Спільний множник елементів будь-якого ряду можна виносити за знак визначника*.

Іншими словами, *щоб помножити визначник на деяке число, треба на це число помножити всі елементи одного довільно вибраного ряду*.

Наприклад,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -5 & -20 & 5 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Властивість 6. *Визначник, у якого елементи двох паралельних рядів відповідно пропорційні, дорівнює нулю*.

Властивість 7. *Сума добутків елементів будь-якого ряду на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого паралельного йому ряду дорівнює нулю*:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 , \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0, \quad i \neq j} \, .$$

Властивість 8. *Значення визначника не зміниться, якщо до всіх елементів якого-небудь ряду додати відповідні елементи ін-*

шого паралельного йому ряду, помножені на одне і те саме число.

Властивість 9. *Якщо кожний елемент якого-небудь ряду є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких відповідний ряд складається з перших доданків, а в другому – з других доданків.*

2.4.4. Зведення визначника до східчастого вигляду

Визначник, у якому всі елементи, що знаходяться нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***визначником верхнє трикутного вигляду*** (рис. 79).

Аналогічно вводиться поняття визначника ***нижнє трикутного вигляду*** (рис. 80).

Окремим випадком визначника трикутного вигляду є визначник ***східчастої форми*** як трапеція. На рис. 81 подано ***верхнє трапецієвидний*** визначник.

Зауваження. Будь-який визначник можна звести до трикутного вигляду, користуючись основними його властивостями.

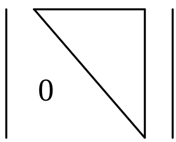

Рис. 79

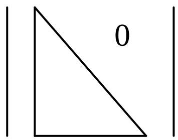

Рис. 80

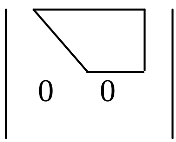

Рис. 81

Теорема. *Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів його головної діагоналі*. (Доведіть самостійно).

Приклад. Обчислити визначник, попередньо звівши його до верхнє трикутного вигляду, де ненульові елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці:

$$\text{а)}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б)}\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 4 & -2 \\ 7 & 5 & -3 & -7 \\ -4 & 8 & -8 & 3 \end{vmatrix}.$$

□ а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \left| R_1 \leftrightarrow R_3 \right| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} R_2 := R_2 - 3R_1 \\ R_3 := R_3 - 2R_1 \\ R_4 := R_4 - R_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 & 14 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 & 14 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \left| R_2 \leftrightarrow R_4 \right| =$$

$$= \left| R_2 \leftrightarrow R_4 \right| = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_3 := R_3 + 3R_2 \\ R_4 := R_4 - 2R_2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \left| R_3 := R_3 + R_4 \right| = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| R_4 := R_4 - 8R_3 \right| = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{vmatrix} = 54\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 54$, де R_i – i-й рядок.

б) (Розв’язати самостійно). ■

2.5. Матриці та операції над ними

Матриці – це математичні об'єкти, які застосовуються для компактного запису таблично заданої інформації. Вони, зокрема, спрощують подання систем лінійних алгебраїчних або диференціальних рівнянь, у результаті чого розв'язування систем зводиться до виконання дій з матрицями.

2.5.1. Означення матриці. Рівність матриць. Види матриць. Визначник квадратної матриці

Матрицею розміру (***розмірності***) $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з m ***рядків*** і n ***стовпців***.

Числа a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ називаються ***елементами*** матриці. Перший індекс i вказує номер рядка, а другий j – номер стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони мають однаковий розмір $m \times n$ і їх відповідні елементи рівні

$$\boxed{A_{m\times n} = B_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij},\ i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}}\,.$$

Матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називається ***нульовою*** і позначається 0.

Матриця, у якої число стовпців дорівнює числу рядків $m = n$, називається ***квадратною*** n***-го порядку***.

Якщо $m \neq n$, то матриця називається ***прямокутною***.

Матриця, яка складається тільки з одного рядка $m = 1$, називається ***матрицею-рядком*** (***вектором-рядком***).

Матриця, яка складається тільки з одного стовпця $n = 1$, називається ***матрицею-стовпцем*** (***вектором-стовпцем***).

Для квадратної матриці A n-го порядку сукупність елементів $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ називається ***головною діагоналлю***, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$ – ***побічною діагоналлю***.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що знаходяться вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***нижнє трикутною*** (***верхнє трикутною***)

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}; \; U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Прямокутна матриця, у якої всі елементи, що знаходяться вище (нижче) головної діагоналі a_{11}, $a_{22}, ..., a_{rr}$ $(r = \min\{m, n\})$ дорівнюють нулю, називається ***матрицею східчастої форми***. Окремим випадком такої матриці є ***нижнє трапецієвидна*** (***верхнє трапецієвидна***) ***матриця***. На рис. 82 подана ***верхнє трапецієвидна*** матриця.

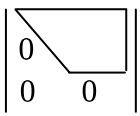

Рис. 82

Квадратна матриця D, у якої всі елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною***:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається ***одиничною*** і позначається E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Кожній квадратній матриці A n-го порядку ставиться у відповідність визначник

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

який називається ***визначником*** (***детермінантом***) матриці A.

Якщо визначник матриці A дорівнює нулю $\det A = 0$, то матриця називається ***виродженою*** (***особливою*** або ***сингулярною***). Якщо ж визначник матриці A відмінний від нуля $\det A \neq 0$, то матриця називається ***невиродженою*** (***неособливою*** або ***регулярною***).

2.5.2. Операції над матрицями

Сумою матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називається така матриця $C = A + B$ того ж розміру, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів вихідних матриць

$$\boxed{C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}, \quad i = \overline{1,m}; \;\; j = \overline{1,n} \;\; .$$

Аналогічно вводиться ***різниця*** матриць

$$\boxed{C = A - B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}}, \quad i = \overline{1,m}; \;\; j = \overline{1,n} \;\; .$$

Добутком матриці A розміру $m \times n$ ***та числа*** α називається така матриця $C = \alpha A$ того ж розміру, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента вихідної матриці на це число $\boxed{C = \alpha A \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = \alpha a_{ij}}, \quad i = \overline{1,m}; \;\; j = \overline{1,n} \;\; .$

Таким чином, *операції додавання та віднімання матриць і множення матриці на число виконуються поелементно*.

Зауваження 1. Щоб визначник помножити на число, треба на це число помножити кожний елемент одного довільно вибраного рядка чи стовпця. Щоб матрицю помножити на число, треба на це число помножити кожний елемент матриці в цілому.

Приклад 1. Для заданих матриць A і B знайти їх вказану лінійну комбінацію

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 6 & -4\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\\ -3 & -4 & 2\end{pmatrix};\quad C=2A-3B\ .$$

Іншими словами, *виконати зазначені дії над заданими матрицями.*

$$\square\quad 2A=\begin{pmatrix}-4 & 12 & -8\\ 6 & 0 & -2\end{pmatrix};\quad 3B=\begin{pmatrix}15 & -6 & 9\\ -9 & -12 & 6\end{pmatrix};$$

$$C=2A-3B=\begin{pmatrix}-19 & 18 & -17\\ 15 & 12 & -8\end{pmatrix}.\quad \blacksquare$$

Добутком матриці A розміру $m\times p$ ***на матрицю*** B розміру $p\times n$ називається така матриця $C=AB$ розміру $m\times n$, кожний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка першого співмножника A та j-го стовпця другого співмножника B

$$\boxed{C_{m\times n}=A_{m\times p}B_{p\times n}\ \Leftrightarrow\ c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\,b_{kj}},\quad i=\overline{1,m};\ \ j=\overline{1,n}\ .$$

Зауваження 2. Добуток AB існує тільки тоді, коли розміри матриць A і B ***узгоджені***: перший співмножник A має число стовпців, яке дорівнює числу рядків другого співмножника B. Навіть коли обидва добутки AB і BA мають смисл, то в загальному випадку $AB\neq BA$. Якщо $AB=BA$, то матриці A і B називаються ***переставними***. Зрозуміло, що переставні матриці завжди квадратні.

Зауваження 3. Зазначимо деякі властивості добутку матриць:

1) $AE=A$; $EA=A$; 2) $(AB)C=A(BC)$;

3) $A(B+C)=AB+AC$; 4) $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$;

5) для квадратних матриць A і B справедливо

$$\boxed{\det(AB)=\det(BA)=\det A\cdot\det B}.$$

Приклад 2. Для заданих матриць A і B знайти добутки AB і BA (Примітка. *Спочатку зверніть увагу на узгодженість розмірів.* Поміркуйте, *чи можна починати виконувати множення без* *перевірки узгодженості розмірів матриць? Чому?*):

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -4\\ 3 & 2 & -5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}.$$

□ $$C_{2\times2}=A_{2\times3}\,B_{3\times2}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot3+3\cdot2+(-4)\cdot4 & -2\cdot(-1)+3\cdot0+(-4)\cdot1\\ 3\cdot3+2\cdot2+(-5)\cdot4 & 3\cdot(-1)+2\cdot0+(-5)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -2\\ -7 & -8\end{pmatrix};$$

$$D_{3\times3}=B_{3\times2}\,A_{2\times3}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot(-2)+(-1)\cdot3 & 3\cdot3+(-1)\cdot2 & 3\cdot(-4)+(-1)\cdot(-5)\\ 2\cdot(-2)+0\cdot3 & 2\cdot3+0\cdot2 & 2\cdot(-4)+0\cdot(-5)\\ 4\cdot(-2)+1\cdot3 & 4\cdot3+1\cdot2 & 4\cdot(-4)+1\cdot(-5)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-9 & 7 & -7\\ -4 & 6 & -8\\ -5 & 14 & -21\end{pmatrix}.\quad ■$$

Якщо в матриці A поміняти місцями відповідні рядки і стовпці, то одержимо ***транспоновану*** матрицю A^T. Операція переходу від матриці A до матриці A^T називається ***транспонуванням***.

<u>Приклад 3</u>. Для даної матриці A знайти транспоновану A^T:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix};\qquad \text{б) } A=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ -5 & 7\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

□ а) $$A=\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix};\quad A^T=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -5 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}.$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

2.5.3. Обернена матриця та її обчислення

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується умова

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = E}\,.$$

Приклад 1. Перевірити, що дана матриця A невироджена:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

□ $\det A = \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13 \neq 0$ – матриця A невироджена. ■

Теорема. *Для будь-якої невиродженої квадратної матриці A n-го порядку існує єдина обернена матриця A^{-1}, яка обчислюється за формулою*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці A.

(Без доведення).

Приклад 2. Упевнитися, що дана матриця A невироджена, і знайти обернену матрицю A^{-1}. Перевірити рівності $AA^{-1} = E$ і $A^{-1}A = E$.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -6 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ а) $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ – матриця A невироджена.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \ ; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \ ; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \ ;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \ ; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \ ;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \ ; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \ ;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \ ; \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рівності $AA^{-1} = E$ і $A^{-1}A = E$ перевірте самостійно.

б) (Розв'язати самостійно). ■

2.5.4. Мінори матриці. Ранг матриці

Виділимо в матриці A розміру $m \times n$ будь-які k рядків і k стовпців $(1 \leq k \leq \min\{m, n\})$. Визначник, складений з елементів, які стоять на перетині виділених рядів, називається ***мінором*** M_k k-го порядку матриці A.

Рангом $rank\, A$ матриці A розміру $m \times n$ називається найбільший порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці.

Зрозуміло, що $0 \le rank\, A \le \min\{m, n\}$, при цьому ранг дорівнює нулю тільки для нульової матриці.

Якщо $rank\, A = \min\{m, n\}$, то матриця A називається ***матрицею повного рангу***.

Базисним мінором матриці A називається довільний відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці.

2.5.5. Обчислення рангу матриці

Розглянемо верхнє трапецієвидну матрицю $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{1(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

в якій ненульові елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

<u>Теорема 1</u>. *Ранг трапецієвидної матриці* $\tilde{A}$ *дорівнює числу* r *її ненульових рядків:* $rank\, \tilde{A} = r$. *За її базисний мінор* $\tilde{M}_r$ *можна взяти кутовий мінор*

$$\tilde{M}_r = \begin{vmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

(Без доведення).

Елементарними перетвореннями матриці називаються наступні операції:

1) переставлення місцями будь-яких двох паралельних рядів;

2) множення елементів будь-якого ряду на довільне ненульове число;

3) додавання до всіх елементів будь-якого ряду відповідних елементів будь-якого іншого паралельного йому ряду, помножених на одне і те ж довільне число.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними***, якщо одну з них можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначається $A \sim B$.

Теорема 2. *Еквівалентні матриці мають один і той же ранг*

$$A \sim B \;\Rightarrow\; rank\, A = rank\, B .$$

Іншими словами, *елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.* (Без доведення).

Метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці полягає у зведені даної матриці A розміру $m \times n$ за допомогою елементарних перетворень рядків і переставлення стовпців до еквівалентної східчастої верхнє трапецієвидної (зокрема, верхнє трикутної) матриці $\tilde{A}$, в якій всі ненульові елементи головної діагоналі $\tilde{a}_{ii}$, $i = \overline{1, r}$ дорівнюють одиниці: $\tilde{a}_{ii} = 1$, $i = \overline{1, r}$.

Тоді $rank\, A = rank\, \tilde{A} = r$.

Приклад 1. Знайти ранг даної матриці A методом елементарних перетворень

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\square\; A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix} \sim \left| S_1 \leftrightarrow S_3 \right| \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & -6 & -3 & 5 \\ -6 & 9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left| R_1 := -R_1 \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 5 & -6 & -3 & 5 \\ -6 & 9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix} R_2 := R_2 - 5R_1 \\ R_3 := R_3 + 6R_1 \end{vmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -2\\ 0 & 9 & 7 & 15\\ 0 & -9 & -7 & -15\end{pmatrix}\sim\left|R_3 := R_3 + R_2\right|\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -2\\ 0 & 9 & 7 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\left|R_2 := R_2/9\right|\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 7/9 & 5/3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$rank\,A = r = 2$, де R_i – i-й рядок; S_j – j-й стовпець. ■

2.5.6. Приклади застосування матриць в економічних задачах

В економічній теорії та практиці для зберігання, систематизації, аналізу різноманітної інформації та планування діяльності роботи окремого підприємства чи галузі економіки в цілому широко користуються таблицями – матрицями. Наведемо приклади розв'язання деяких типових задач.

Приклад 1. У таблиці наведено дані стосовно сукупного продажу по всіх п'яти магазинах торговельної фірми за перший і другий квартали (у тис. грош. од.):

Вид продукції	Магазини				
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й
Перший квартал					
Сири	25	60	45	50	40
Ковбаси	30	45	40	35	60
Риба	45	30	35	40	55
Другий квартал					
Сири	30	65	55	60	45
Ковбаси	30	40	45	35	50
Риба	55	35	40	35	50

Знайти: а) загальні об'єми продаж фірми за перше півріччя за видами товарів і за магазинами; б) приріст продаж у другому кварталі порівняно з першим за видами товарів і за магазинами.

□ Зміст цієї таблиці можна подати у вигляді двох прямокутних матриць одного розміру 3×5, кожна з яких демонструє сукупний продаж по 5 магазинах у першому (матриця A) та у другому (матриця B) кварталах:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 60 & 45 & 50 & 40 \\ 30 & 45 & 40 & 35 & 60 \\ 45 & 30 & 35 & 40 & 55 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 30 & 65 & 55 & 60 & 45 \\ 30 & 40 & 45 & 35 & 50 \\ 55 & 35 & 40 & 35 & 50 \end{pmatrix}.$$

Кожний їх елемент легко інтерпретувати. Наприклад, $a_{34} = 40$ означає, що у першому кварталі продано риби на 40 тис. грош. од. у четвертому магазині. Тоді

а) загальні об'єми продаж фірми за перше півріччя знайдемо як суму матриць A і B:

$$A + B = \begin{pmatrix} 25 & 60 & 45 & 50 & 40 \\ 30 & 45 & 40 & 35 & 60 \\ 45 & 30 & 35 & 40 & 55 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 65 & 55 & 60 & 45 \\ 30 & 40 & 45 & 35 & 50 \\ 55 & 35 & 40 & 35 & 50 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 25+30 & 60+65 & 45+55 & 50+60 & 40+45 \\ 30+30 & 45+40 & 40+45 & 35+35 & 60+50 \\ 45+55 & 30+35 & 35+40 & 40+35 & 55+50 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 55 & 125 & 100 & 110 & 85 \\ 60 & 85 & 85 & 70 & 110 \\ 100 & 65 & 75 & 75 & 105 \end{pmatrix};$$

б) приріст продаж у другому кварталі порівняно з першим знайдемо як різницю між сукупним продажем у другому кварталі (матриця B) і першому кварталі (матриця A):

$$B - A = \begin{pmatrix} 30 & 65 & 55 & 60 & 45 \\ 30 & 40 & 45 & 35 & 50 \\ 55 & 35 & 40 & 35 & 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 60 & 45 & 50 & 40 \\ 30 & 45 & 40 & 35 & 60 \\ 45 & 30 & 35 & 40 & 55 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30-25 & 65-60 & 55-45 & 60-50 & 45-40 \\ 30-30 & 40-45 & 45-40 & 35-35 & 50-60 \\ 55-45 & 35-30 & 40-35 & 35-40 & 50-55 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & -10 \\ 10 & 5 & 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

Приклад 2. Підприємство виробляє чотири типи продукції, використовуючи три види ресурсів згідно з таблицею:

Вид ресурсу	Норми витрати на одиницю продукції (ум. од.)			
	1-й тип	2-й тип	3-й тип	4-й тип
Метал	12	20	10	8
Пластмаса	6	5	4	16
Електроенергія	4	2	6	5

Вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на умовну одиницю задається таблицею:

Вид ресурсу	Метал	Пластмаса	Електроенергія
Вартість ресурсу (грош. од.)	0,5	0,2	0,4

Нехай підприємство повинно виконати замовлення на свою продукцію згідно з таблицею:

Тип продукції	1-й тип	2-й тип	3-й тип	4-й тип
Кількість продукції (од.)	150	200	80	120

Знайти: а) загальну потребу в кожному виді ресурсів для виконання даного замовлення; б) повну вартість усіх потрібних для цього ресурсів.

□ Запишемо матриці

$$A=\begin{pmatrix} 12 & 20 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 16 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

В яких відобразимо зміст поданих таблиць у вигляді записаних прямокутних матриць, кожна з яких: матриця A - об’єм виробництва, матриця P - вартість кожного виду ресурсів, матриця X - кількість одиниць продукції.

Тут a_{ij} - норма витрати (в умовних одиницях) i-го виду ресурсу на виробництво одиниці j-го типу продукції; p_i - вартість умовної одиниці i-го виду ресурсу; x_j - кількість одиниць j-го типу продукції в замовленні.

а) Загальну потребу в кожному виді ресурсів для виконання даного замовлення знайдемо як добуток матриці A - об'єм виробництва та матриці X - кількість одиниць продукції:

$$S = AX = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 16 \\ 4 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 \cdot 150 + 20 \cdot 200 + 10 \cdot 80 + 8 \cdot 120 \\ 6 \cdot 150 + 5 \cdot 200 + 4 \cdot 80 + 16 \cdot 120 \\ 4 \cdot 150 + 2 \cdot 200 + 6 \cdot 80 + 5 \cdot 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7560 \\ 4140 \\ 2080 \end{pmatrix}.$$

б) Повна вартість усіх потрібних для виконання даного замовлення ресурсів знайдемо як добуток матриці P - вартість кожного виду ресурсів та матриці S - загальної потреби в кожному виді ресурсів для виконання даного замовлення:

$$C = PS = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7560 \\ 4140 \\ 2080 \end{pmatrix} =$$

$$= 0{,}5 \cdot 7560 + 0{,}2 \cdot 4140 + 0{,}4 \cdot 2080 = 5440. \quad ■$$

<u>Приклад 3</u>. На підприємстві є шість робочих місць, на яких виробляється два типи продукції. Витрати робочого часу в годинах на кожному робочому місці і на кожну одиницю продукції розподілені згідно з таблицею:

Тип продукції	Норми витрати робочого часу на одиницю продукції (год.)					
	1-ше роб. місце	2-ге роб. місце	3-тє роб. місце	4-те роб. місце	5-те роб. місце	6-те роб. місце
1-й тип	2	1	3	1	0	1
2-й тип	3	2	0	3	2	2

Погодинна заробітна плата (грош. од.) на кожному робочому місці задається таблицею:

Робоче місце	1-ше	2-ге	3-тє	4-те	5-те	6-те
Погод. зарплата (грош. од.)	15	16	10	12	15	18

Нехай підприємство повинно виконати три замовлення на свою продукцію згідно з таблицею:

Кількість продукції (од.)	Замовлення		
	1-ше	2-ге	3-тє
1-й тип	60	50	0
2-й тип	30	0	80

Обчислити розмір заробітної плати, яка припадає на кожне замовлення.

□ Зміст поданих таблиць можна відобразити у вигляді наступних прямокутних матриць:

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad Z^T = \begin{pmatrix} 60 & 50 & 0 \\ 30 & 0 & 80 \end{pmatrix};$$

$$P^T = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 10 & 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Тут матриця P задає залежність між розміром зарплати і витратами робочого часу на кожному робочому місці; матриця V визначає залежність між витратами часу на кожному робочому місці і кількістю випущеної продукції різних типів; матриця Z задає кількість і асортимент продукції у кожному замовленні.

Тоді добуток $S = VP$ задає залежність між випуском різних типів продукції і розміром зарплати:

$$S = VP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times\begin{pmatrix}15 & 16 & 10 & 12 & 15 & 18\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}106\\179\end{pmatrix}.$$

Добуток $X = Z\,S$ визначає шуканий розподіл розміру зарплати, що припадає на виконання кожного замовлення:

$$X = Z\,S = \begin{pmatrix}60 & 30\\50 & 0\\0 & 80\end{pmatrix}\begin{pmatrix}106\\179\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}60\cdot 106 + 30\cdot 179\\50\cdot 106 + 0\cdot 179\\0\cdot 106 + 80\cdot 179\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11730\\5300\\14320\end{pmatrix}. \blacksquare$$

2.6. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь і методи їх розв’язування

2.6.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття

Система** m **лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з** n **невідомими x_j $(j=\overline{1,\,n})$ має вигляд

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\end{cases},$$

де a_{ij} $(i=\overline{1,m}\,;\;\; j=\overline{1,\,n})$ і b_i $(i=\overline{1,\,m})$ – задані числа:

a_{ij} $(i=\overline{1,m}\,;\;\; j=\overline{1,\,n})$ – ***коефіцієнти*** при невідомих;

b_i $(i=\overline{1,\,m})$ – ***вільні члени*** (***праві частини***).

Система, у якій число рівнянь дорівнює числу невідомих n, називається ***квадратною*** n***-го порядку***.

Система називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв’язок, і ***несумісною*** (***суперечливою***), якщо вона не має жодного розв’язку.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо її розв’язок єдиний, і ***невизначеною*** – в протилежному випадку.

Введемо матричні позначення

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$C=(A \mid B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ {}_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

де X – ***матриця-стовпець невідомих*** розміру $n\times 1$; A – ***основна матриця*** системи, складена з коефіцієнтів при невідомих розміру $m\times n$; B – ***матриця-стовпець вільних членів*** (***правих частин***) розміру $m\times 1$; C – ***розширена матриця*** системи розміру $m\times(n+1)$;

Тоді СЛАР можна подати в матричній формі $\boxed{AX=B}$.

Для квадратної системи визначник Δ_n, складений з коефіцієнтів при невідомих, називається ***визначником системи***

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для квадратної системи n-го порядку $\Delta_n=\det A$.

Система називається ***однорідною,*** якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $b_i=0 \quad (i=\overline{1,m})$, і – ***неоднорідною,*** якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля.

Однорідна СЛАР $\boxed{AX=0}$ завжди сумісна, бо має тривіальний (очевидний) нульовий розв'язок $X=0$.

<u>Теорема Кронекера – Капеллі</u>. *Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $AX=B$ сумісна тоді і тільки*

тоді, коли ранг розширеної матриці $C=\left(A \,\vdots\, B\right)$ *дорівнює рангу основної матриці* A: $rank\,C = rank\,A = r$. *У випадку сумісності:* 1) *якщо ранг цих матриць дорівнює числу невідомих* $r=n$ *, то система має єдиний розв'язок (є визначеною);* 2) *якщо цей спільний ранг менше числа невідомих* $r<n$*, то система є невизначеною і має безліч розв'язків, які залежать від* $n-r$ *довільних сталих (параметрів)* (рис. 83). (Без доведення).

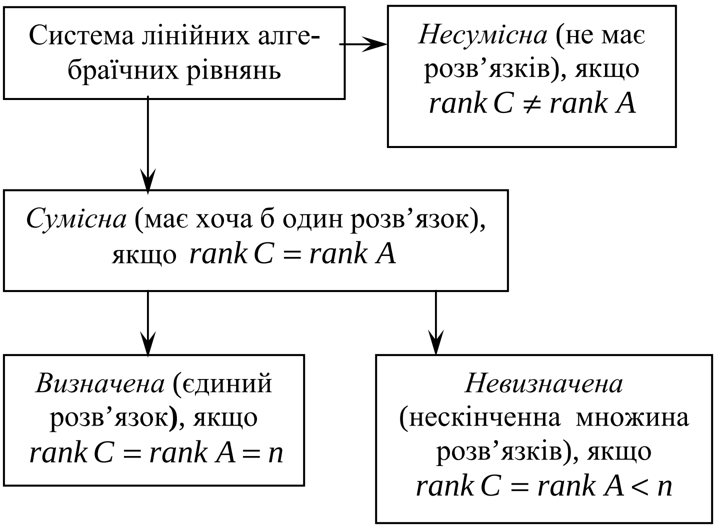

Рис. 83

Оскільки розширена матриця C включає в себе основну матрицю A, то $rank\,A \le rank\,C$. Розширена матриця C одержана з основної матриці A доданням тільки одного стовпця, тому $rank\,C \le rank\,A + 1$.

Нехай система сумісна $rank\,C = rank\,A = r$ і M_r – деякий (довільно вибраний) базисний мінор її основної матриці A. *Якщо залишити в системі тільки всі ті рівняння, частина коефіцієнтів яких входить в базисний мінор, то одержана система буде рівносильна початковій.*

Якщо сумісна система є невизначеною

$rank\,C = rank\,A = r < n$, то ті r невідомі x_j, коефіцієнти при яких входять у вибраний базисний мінор M_r, називаються ***базисними***, а решта $n - r$ невідомі x_j називаються ***вільними***.

Залишимо в системі тільки всі ті рівняння, частина коефіцієнтів яких увійшла в базисний мінор, і перенесемо вправо всі члени з вільними невідомими. Розглядаючи вільні невідомі як довільні сталі (параметри), одержуємо квадратну систему r-го порядку відносно базисних невідомих, визначником якої служить базисний мінор M_r. Оскільки $M_r \neq 0$, то базисні невідомі знаходяться однозначно. Таким чином, отримуємо ***загальний розв'язок*** початкової системи. При довільно вибраних фіксованих значеннях вільних невідомих (параметрів) одержуємо ***частинний розв'язок***. Частинний розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних невідомих, називається ***опорним розв'язком***.

<u>Приклад</u>. Перевірити дану систему на сумісність

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$$

□ Для знаходження рангу використовуємо метод елементарних перетворень. За допомогою елементарних перетворень рядків розширеної матриці $C = \left(A \mid B\right)$ та переставлення стовпців тільки основної матриці A зводимо розширену матрицю C до східчастої форми з верхнє трапецієвидною основною матрицею A. Ранг основної матриці A дорівнює числу рядків трапеції. Якщо в розширеній матриці C нижче рядків трапеції всі елементи нульові, то її ранг дорівнює рангу основної матриці $rank\,C = rank\,A$. У протилежному випадку ранг розширеної матриці на одиницю більший: $rank\,C = rank\,A + 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 8 & -7 \end{pmatrix}; \quad C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 8 & -7 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\begin{vmatrix} R_2 := R_2 - R_1 \\ R_3 := R_3 - 5R_1 \end{vmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left|R_3 := R_3 - 3R_2\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \sim \left|R_3 := -R_3/5\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left|S_2 \leftrightarrow S_4\right| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Звідси $rank\, A = 2$; $rank\, C = 3$.

Оскільки $rank\, C \neq rank\, A$, то система несумісна. ■

Зауваження 1. Загальний розв'язок СЛАР може мати різний вигляд, що, зокрема, залежить від вибору складу базисних і вільних невідомих і від способу введення довільних сталих.

Зауваження 2. Загальний розв'язок X сумісної неоднорідної СЛАР $AX = B$ можна подати у вигляді суми $X = X_0 + X_*$ загального розв'язку X_0 відповідної однорідної СЛАР $AX = 0$ і будь-якого частинного розв'язку X_* вихідної неоднорідної СЛАР

Разом з тим, загальний розв'язок X_0 відповідної однорідної СЛАР можна подати у вигляді лінійної комбінації

$$X_0 = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_{n-r} X_{n-r}$$

$n - r$ лінійно незалежних частинних розв'язків X_j $(j = \overline{1, n-r})$ цієї однорідної СЛАР, що утворюють так звану ***фундаментальну систему розв'язків***. Тут C_j $(j = \overline{1, n-r})$ – довільні сталі (параметри).

Частинний розв'язок неоднорідної СЛАР, що відповідає нульовим значенням довільних сталих , називається її ***опорним розв'язком***.

2.6.2. Розв'язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Теорема. *Якщо основна матриця* A *квадратної системи* $\boxed{AX = B}$ *невироджена (тобто,* $\det A \neq 0$*), то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою*

$$\boxed{X = A^{-1}B}\,.$$

□ Оскільки матриця A – невироджена, то існує обернена матриця A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B\,; \qquad \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B\,;$$

$$EX = A^{-1}B\,; \qquad X = A^{-1}B\,. \quad ■$$

Приклад. Розв'язати квадратну систему

$$\text{а)}\ \begin{cases} 3x - 2y - 5z = -7 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - 3z = -4 \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 3x - 4y + 5z = 6 \\ -x + y - 4z = 1 \\ 2x - 3y + 7z = 1 \end{cases}$$

за допомогою оберненої матриці (***матричним методом***).

□ а) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$;

$$AX = B\ ; \quad \det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Оскільки визначник матриці ($\det A$) не дорівнює 0, то матриця A не вироджена і обернена матриця A^{-1} існує. Знайдемо всі алгебраїчні доповнення та запишемо обернену матрицу A^{-1}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -1\ ; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 10\ ;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-4\ ;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & -5\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-1\ ;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & -3\end{vmatrix}=1\ ;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1\ ;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\ ;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-16\ ;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=7\ ;\quad A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & -16\\ -4 & -1 & 7\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}B\ ;\quad X=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & -16\\ -4 & -1 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\ 0\\ -4\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}7+0-4\\ -70+0+64\\ 28+0-28\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}\ ;\quad \begin{matrix}x=-1\\ y=2\\ z=0\end{matrix}$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

2.6.3. Розв’язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

Розв’язання квадратної системи з невиродженою основною матрицею можна подати безпосередньо через визначники.

Теорема (правило Крамера). *Якщо визначник квадратної системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв’язок, який обчислюється за формулою*

$$\boxed{x_j=\Delta_n^{(j)}/\Delta_n\ ,\quad j=\overline{1,n}}\ ,$$

де $\Delta_n^{(j)}$ *– допоміжний визначник, одержаний з основного визначника* Δ_n *заміною* j *-го стовпця стовпцем вільних членів*

$$\Delta_n^{(j)} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

<u>Приклад 1</u>. Перевірити, що визначник квадратної системи відмінний від нуля і розв'язати її методом Крамера:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = -3 \\ 2x - y + 3z = -4 \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 4x - 2y + z = -3 \\ 3x + y - 7z = 8 \\ 2x - 2y + 3z = -5 \end{cases}$$

□ а) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$; $\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -4$;

$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$; $\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 8$; $x = \dfrac{\Delta^{(1)}}{\Delta} = 1$;

$y = \dfrac{\Delta^{(2)}}{\Delta} = 0$; $z = \dfrac{\Delta^{(3)}}{\Delta} = -2$. б) (Розв'язати самостійно). ■

2.6.4. Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

Розглянемо довільну прямокутну систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими x_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Нехай A – основна матриця, складена з коефіцієнтів рівнянь системи при невідомих, а C – розширена матриця цієї системи, яку отримують з основної матриці системи, дописуючи стовпець вільних доданків. Мета методу Гаусса: привести розширену матрицю системи до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень матриці. Елементарним перетворенням рядків розширеної матриці C і переставленню стовпців тільки основної матриці A відповідають наступні рівносильні перетворення лінійної системи:

1) переставлення місцями будь-яких двох рівнянь (перенумеровування рівнянь);

2) множення обох частин будь-якого рівняння на довільне ненульове число;

3) додавання до обох частин будь-якого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;

4) перенумеровування невідомих.

Метод Гаусса дослідження і розв'язування СЛАР складається з двох основних етапів.

На першому етапі (***прямий хід*** методу Гаусса – зверху вниз) здійснюють послідовне виключення невідомих за допомогою вказаних рівносильних перетворень системи. Тому часто метод Гаусса ***називають методом послідовного вилучення невідомих***. Спочатку виділяють перше рівняння і відповідно перше невідоме. Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то переставляють рівняння і/або перенумеровують невідомі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Ділять перше рівняння на $a_{11} \neq 0$ і за допомогою одержаного рівняння виключають послідовно перше невідоме з другого рівняння, потім з третього рівняння і т.д. до останнього найнижчого. Виділяють друге рівняння і відповідно друге невідоме. Припустимо, що $a_{22} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то переставляють рівняння і/або перенумеровують невідомі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Ділять друге рівняння на $a_{22} \neq 0$ і за допомогою одержаного рівняння виключають послідовно друге невідоме з третього рівняння, потім з четвертого рівняння і т.д. до останнього найнижчого. Цей процес продовжують до тих пір, доки не дійдуть до останнього найнижчого рівняння або ситуації, коли виділене рівняння і всі рівняння, що лежать нижче нього, мають тільки нульові коефіцієнти при невідомих.

В результаті система зводиться до наступної східчастої форми

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{1r}\tilde{x}_r + \tilde{a}_{1(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_1 \\ \qquad \tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{2r}\tilde{x}_r + \tilde{a}_{2(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_2 \\ . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \tilde{x}_r + \tilde{a}_{r(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{rn}\tilde{x}_n = \tilde{b}_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_m \end{cases}$$

Якщо хоча б один з вільних членів $\tilde{b}_j \quad (j = \overline{r+1,\, m})$ відмінний від нуля, то система несумісна, тобто не має розв’язків.

<u>Зауваження 1</u>. Прямий хід методу Гаусса зручно виконувати в матричній формі, зводячи розширену матрицю до східчастого вигляду з верхнє трапецієвидною основною матрицею. При цьому застосовуються елементарні перетворення рядків розширеної матриці і переставлення стовпців тільки основної матриці (перенумеровування невідомих).

Якщо всі вільні члени, які відповідають рядком розширеної матриці, що стоять нижче трапеції, дорівнюють нулю $\tilde{b}_j = 0$ $(j = \overline{r+1,\, m})$, то $rank\, A = rank\, C = r$ і система сумісна. Перші r невідомі $\tilde{x}_j \quad (j = \overline{1,\, r})$ є базисними, а решта $n - r$ невідомі $\tilde{x}_j$ $(j = \overline{r+1,\, m})$ – вільні. Тоді здійснюють перехід до другого етапу.

На другому етапі (***зворотний хід*** методу Гаусса – знизу вгору) вільні невідомі приймають за довільні сталі (параметри) $\tilde{x}_j = C_{j-r} \quad (j = \overline{r+1,\, m})$. Відкидають нульові рівняння (тотожності $0 = 0$). Переносять в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержують систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих. Цю систему розв'язують, підіймаючись знизу вгору. Спочатку з останнього рівняння знаходять останнє базисне невідоме $\tilde{x}_r$. Потім одержане значення $\tilde{x}_r$ підставляють у передостаннє рівняння і визначають з нього $\tilde{x}_{r-1}$ і т.д., доки не знайдуть $\tilde{x}_1$.

Приклад 1. Розв'язати систему методом Гаусса

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

□ а) Прямий хід:
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 3R_1 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 10 & -10 \\ 0 & 4 & -7 & 10 & -1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2/4 \\ R_3 := R_3 - R_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -7/4 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \end{array}.$$

Оскільки останньому рядку (поза трапецією) відповідає рівняння з нульовими коефіцієнтами і відмінним від нуля вільним членом, то система несумісна (не має розв'язків).

б) (Розв'язати самостійно). ■

Приклад 2. Розв'язати систему методом Гаусса

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 \qquad - x_4 + 5x_5 = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

□ а) Прямий хід:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc:c} 3 & 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| S_1 \leftrightarrow S_2 \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 3R_1 \\ R_4 := R_4 - 5R_1 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| R_2 := -R_2/4 \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| \begin{array}{l} R_3 := R_3 + 4R_2 \\ R_4 := R_4 + 8R_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7 \end{array}\right) \end{array} \sim \left|R_3 \leftrightarrow R_4\right| \sim$$

$$\sim\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left|S_3 \leftrightarrow S_5\right| \sim$$

$$\sim\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_5 & x_4 & x_3 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3/4 & -3/2 & 5/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Система сумісна, але невизначена, оскільки

$$rank\, C = rank\, A = r = 3 < n = 5.$$

Покладемо x_2, x_1, x_5 – базисні невідомі; x_4, x_3 – вільні невідомі.

Зворотний хід: Вільні невідомі приймаємо за довільні сталі (параметри) $x_4 = C_1$; $x_3 = C_2$. Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_2, x_1, x_5:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_1 + 2x_5 = 4 + C_1 - 2C_2 \\ x_1 + \dfrac{3}{4}x_5 = \dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{2}C_1 - \dfrac{5}{4}C_2 \\ x_5 = -7 + 8C_1 \end{cases}.$$

Цю систему розв'язуємо, підіймаючись знизу вгору, починаючи з останнього рівняння.

$$x_4 = C_1\ ;\ \ x_3 = C_2\ ;\ \ x_5 = -7 + 8C_1\ ;\ \ x_1 = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2 -$$

$$-\frac{3}{4}x_5 = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2 - \frac{3}{4}(-7 + 8C_1) = 7 - \frac{9}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2\ ;$$

$$x_2 = 4 + C_1 - 2C_2 - 3x_1 - 2x_5 = 4 + C_1 - 2C_2 -$$

$$-3\left(7 - \frac{9}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2\right) - 2(-7 + 8C_1) = -3 - \frac{3}{2}C_1 + \frac{7}{4}C_2\ .$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$x_1 = 7 - (9/2)C_1 - (5/4)C_2;\ \ x_2 = -3 - (3/2)C_1 + (7/4)C_2;$$

$x_3 = C_2$; $x_4 = C_1$; $x_5 = -7 + 8C_1$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Поклавши $x_3 = C_2 = 0$ і $x_4 = C_1 = 0$, отримуємо опорний розв'язок $x_1 = 7$; $x_2 = -3$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = -7$.

б) (Розв'язати самостійно). ■

Зауваження 2. Для спрощення вигляду загального розв'язку останнього Прикладу 2а можна покласти $x_3 = 4C_2$ і $x_4 = 2C_1$, тоді $x_1 = 7 - 9C_1 - 5C_2$ і $x_2 = -3 - 3C_1 + 7C_2$, де $C_1, C_2 \in R$.

2.6.5. Однорідна квадратна система лінійних алгебраїчних рівнянь

Згідно з теоремою Кронекера – Капеллі однорідна прямокутна СЛАР $AX = 0$ завжди сумісна і має тривіальний (нульовий) розв'язок $X = 0$, бо ранг розширеної матриці $C = (A \mid 0)$ дорівнює рангу основної матриці A. Нульовий розв'язок $X = 0$ єдиний, якщо цей спільний ранг дорівнює числу невідомих. У противному разі СЛАР має безліч розв'язків.

З наведених міркувань для квадратної СЛАР випливає така

теорема. *Однорідна квадратна система $AX = 0$ має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорі-*

внює нулю $\det A = 0$. *Якщо цей визначник відмінний від нуля, то система має лише нульовий розв'язок.*

Приклад 1. Знайти значення параметра α, при яких однорідна квадратна СЛАР

$$\text{а)}\ \begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ \alpha x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + \alpha x_3 = 0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок (має безліч розв'язків).

$$\square\ \text{а)}\ \Delta = \det A = 0\ ;\quad \begin{vmatrix} 1 & -\alpha & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0\ ;$$

$$\alpha^2 + 8\alpha - 33 = 0\ ;\quad \alpha_1 = 3;\quad \alpha_2 = -11.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

Приклад 2. Переконатись, що дана однорідна квадратна СЛАР має безліч розв'язків. Знайти її загальний розв'язок і будь-який ненульовий частинний розв'язок.

$$\text{а)}\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\square\ \text{а)}\ \Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Отже, система має безліч розв'язків. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень матриць зведемо її до східчастого вигляду, тобто розв'яжемо систему методом Гаусса, після чого за теоремою Кронекера-Капеллі зробимо висновок про кількість розв'язків заданої однорідної системи.

Прямий хід: $C=\left(A \mid 0\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 4R_1 \end{array}\right| \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left| R_3 := R_3 - R_2 \right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left| R_2 := R_2/6 \right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $rank\, C = rank\, A = r = 2 < n = 3$,

Тут x_1, x_2 – базисні невідомі; x_3 – вільне невідоме.

Зворотний хід:

Відкидаємо тотожність $0=0$, яка відповідає останньому рядку. Вільне невідоме приймаємо за довільну сталу (параметр)

$$x_3 = C.$$

Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільне невідоме. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -2x_3 \\ \quad\; x_2 = (5/6)x_3 \end{cases}.$$

Розв’язуємо систему, починаючи з останнього рівняння.

$$x_3 = C;\;\; x_2 = (5/6)\,C;\;\; x_1 = 2x_2 - 2C = 2\cdot(5/6)\,C - 2C = -(1/3)\,C.$$

Отже, загальний розв’язок

$$x_1 = -(1/3)\,C;\quad x_2 = (5/6)\,C;\quad x_3 = C,\quad C \in R.$$

Покладемо $C=6$. Тоді маємо ненульовий частинний розв’язок $x_1 = -2$; $x_2 = 5$; $x_3 = 6$.

б) (Розв’язати самостійно). ■

2.6.6. Модель Леонтьєва міжгалузевого балансу

У ряді задач макроекономіки ставиться питання про ефективне збалансування діяльності багатогалузевого господарства. При цьому кожна галузь виступає як виробником, так і споживачем продукції (як своєї, так і продукції інших галузей). Міжгалузевий баланс можна розглядати в натуральному виразі. Проте з економічної точки зору баланс у вартісному виразі має важливіше значення, оскільки дозволяє об'єднувати окремі галузі у групи, що полегшує складання балансів продукції.

Введемо наступні позначення:

n − кількість галузей у господарстві; x_i − загальна вартість продукції, виробленої в i-й галузі (***валовий продукт***) $(i = 1, 2, ..., n)$; y_i − вартість продукції i-ї галузі, призначеної для реалізації (***кінцевий продукт*** або ***чистий продукт***, призначений для невиробничих потреб); x_{ij} − вартість продукції i-ї галузі, що споживається в j-й галузі (***прямі витрати***) $(j = 1, 2, ..., n)$.

Міжгалузевий розподіл прямих витрат і кінцевого продукту задано таблицею:

Галузь	Валовий продукт	Прямі витрати по галузям				Разом на виробничі потреби	Кінцевий продукт
		1	2	…	n		
1	x_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$	y_1
2	x_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	x_i
…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	y_n

Зв'язок між величинами в рядках цієї таблиці виражається системою рівнянь

$$\boxed{x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i\,, \quad i = 1, 2, ..., n},$$

що називаються ***балансовими співвідношеннями***.

Їх можна подати у вигляді

$$\boxed{x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \,, \quad i = 1,\, 2,\, ...,\, n}, \text{ де } \boxed{a_{ij} = x_{ij} \big/ x_j \,,\ i, j = 1,\, 2,\, ...,\, n}$$

- ***коефіцієнти прямих витрат***, що задають витрати продукції i-ї галузі на виробництво одиниці продукції j-ї галузі. Вони утворюють ***матрицю прямих витрат*** або ***технологічну матрицю***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриці-стовпці X і Y, де

$$X^T = (x_1\, x_2 \ldots x_n) \quad \text{і} \quad Y^T = (y_1\, y_2 \ldots y_n),$$

називають відповідно ***вектором-планом*** (***вектором валового випуску***) і ***вектором кінцевих продуктів***.

Враховуючи введені матричні позначення, систему балансових співвідношень можна подати у вигляді матричного рівняння

$$\boxed{X = AX + Y} \text{ або } \boxed{(E - A)X = Y}.$$

Головна задача міжгалузевого балансу полягає у знаходженні такого вектора-плану X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевих продуктів Y.

Користуючись поняттям оберненої матриці, вектор-план X знаходять за формулою:

$$\boxed{X = (E - A)^{-1} Y}.$$

Обернену матрицю $\boxed{S = (E - A)^{-1}}$ називають ***матрицею повних витрат***, оскільки її елемент s_{ij} визначає вартість продукції i-ї галузі, що споживається при виробництві вартісної одиниці кінцевої продукції j-ї галузі.

<u>Зауваження</u>. З економічних міркувань усі величини в балансових співвідношеннях є невід'ємними, тобто $A \geq 0$, $X \geq 0$ і

$Y \geq 0$. Крім того, матриця прямих витрат A повинна забезпечувати існування невід'ємного розв'язку $X \geq 0$ системи балансових рівнянь при будь-якій невід'ємній правій частині $Y \geq 0$. Таку матрицю A називають ***продуктивною***. Матриця $A \geq 0$ є продуктивною, якщо $\max\limits_{j=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ та існує номер j, при якому справджується строга нерівність $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Приклад. Нехай економічна система складається з трьох галузей виробництва. Відомі матриця прямих витрат і вектор кінцевих продуктів:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Знайти відповідний вектор-план $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$.

□ Спочатку знайдемо матрицю $E - A$ як різницю одиничної та заданої матриць:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}1 & 0{,}0 \\ -0{,}1 & 0{,}5 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Потім обчислимо матрицю повних витрат за відомою схемою знаходження оберненої матриці (зробіть це самостійно):

$$S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}75 & 0{,}375 & 0{,}125 \\ 0{,}5 & 2{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}375 & 0{,}4375 & 1{,}8125 \end{pmatrix}.$$

Помноживши матрицю повних витрат S на вектор кінцевих продуктів Y, дістанемо шуканий вектор-план:

$$X = SY = \begin{pmatrix} 1{,}75 & 0{,}375 & 0{,}125 \\ 0{,}5 & 2{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}375 & 0{,}4375 & 1{,}8125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 4000 \\ 3000 \end{pmatrix}. \ ■$$

2.7. Вектори й операції над ними

2.7.1. Скалярні та векторні величини. Основні поняття

Три взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox, Oy і Oz зі спільним початком O утворюють ***декартову прямокутну систему координат*** у просторі (рис. 84). Ox називається ***віссю абсцис***, Oy – ***віссю ординат***, а Oz – ***віссю аплікат***. Три взаємно перпендикулярні координатні площини Oxy, Oxz і Oyz ділять весь простір на вісім частин (***октантів***). Сукупність площин, які перпендикулярні координатним осям, утворює просторову ***координатну сітку***.

Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою трійкою чисел $(x;y;z)$ – її ***координатами*** (x – ***абсциса***, y – ***ордината***, z – ***апліката***). Для знаходження цих координат через точку $M(x;y;z)$ проведемо три площини, які перпендикулярні координатним осям. Вони перетинають відповідні осі у точках $M_x(x;0;0)$, $M_y(0;y;0)$ і $M_z(0;0;z)$.

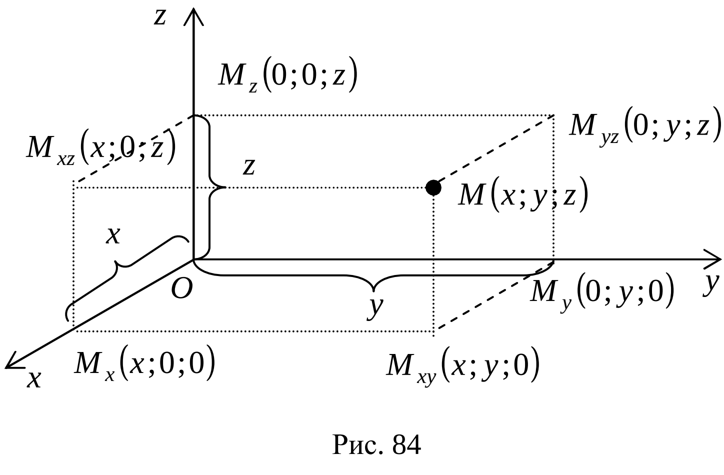

Рис. 84

Величина, яка цілком характеризується своїм числовим значенням, називається ***скалярною величиною*** (***скаляром***).

Приклади скалярів: площа фігури, густина речовини, температура, ціна товару і т. п.

Величина, яка характеризується не тільки числовим значенням, а й напрямком, називається ***векторною величиною*** (***вектором***).

Приклади векторів: швидкість, сила і т. п.

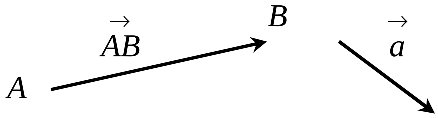

Рис. 85

Вектор зображується напрямленим прямолінійним відрізком, в якому вказано його ***початок*** A і ***кінець*** B. Позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\overrightarrow{a}$ (рис. 85).

Модулем (***абсолютною величиною, довжиною***) вектора називається довжина відрізка, який зображає цей вектор. Позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $\left|\overrightarrow{a}\right|$.

Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називається ***нульовим вектором*** і позначається $\overrightarrow{0}$. Його модуль дорівнює нулю, а напрям довільний (невизначений).

Вектор одиничної довжини називається ***одиничним вектором*** (***ортом***).

Зауваження 1. Надалі будемо розглядати тільки ***вільні вектори***, для яких вибір положення початку не має значення. Вільний вектор цілком характеризується модулем і напрямком.

Вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називаються ***колінеарними*** (***паралельними***). Позначається $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$

Зауваження 2. Нульовий вектор колінеарний будь-якому вектору.

Вектори, які лежать у паралельних площинах або в одній площині, називаються ***компланарними***.

Зауваження 3. Два вектори завжди компланарні.

Два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називаються ***рівними***, якщо: 1) модулі векторів рівні $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; 2) вектори колінеарні $\vec{a} \parallel \vec{b}$ і напрямлені в один бік. Позначається $\vec{a} = \vec{b}$.

2.7.2. Лінійні операції над векторами

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який визначається за правилом трикутника (рис. 86) або за правилом паралелограма (рис. 87).

Добутком вектора $\vec{a}$ ***на число*** λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який задовольняє наступні умови: 1) $\boxed{|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|}$; 2) $\boxed{\lambda\vec{a} \parallel \vec{a}}$; 3) якщо $\lambda > 0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в один бік $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$; якщо $\lambda < 0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в протилежні боки $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$; якщо $\lambda = 0$, то $0\vec{a} = \vec{0}$.

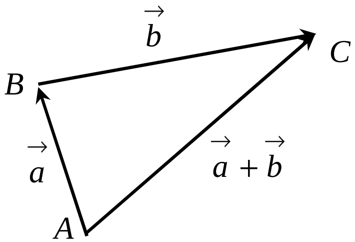

Рис. 86

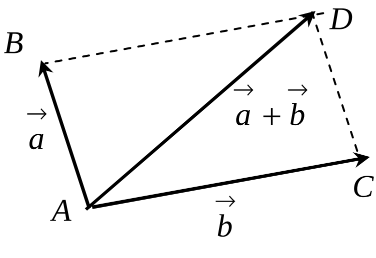

Рис. 87

Вектор $(-1)\vec{a}$ називається ***протилежним*** вектору $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$. При цьому $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Різницею $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. Різниця $\vec{a}-\vec{b}$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})}\,.$$

Розглянуті операції називаються лінійними, оскільки мають відповідні властивості (аналогічні властивостям операцій над дійсними числами):

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\ ;\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\ ;$$

$$\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda\ ;\quad (\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})\ ;\quad \lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}\ ;$$

$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}\ ;\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}\ ;\quad 1\vec{a}=\vec{a}\ .$$

2.7.3. Проекція вектора. Координати вектора. Рівність векторів у координатній формі

Проекцією вектора $\vec{a}$ на ненульовий вектор $\vec{b}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, називається число, яке позначається $np_{\vec{b}}\,\vec{a}$ і обчислюється за формулою

$$\boxed{np_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\,\vec{a}\,|\cos\varphi}\,,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $0\le\varphi\le\pi$ (рис. 88).

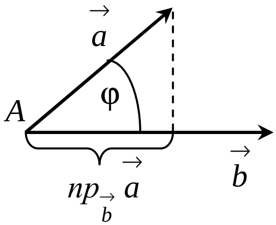

Рис. 88

Нехай у просторі задана декартова прямокутна система координат (рис. 89). Упорядкована трійка одиничних векторів (ортів) $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ зі спільним початком O, спрямованих вздовж додатного напрямку відповідно осей Ox, Oy і Oz, утворює ***координатний базис*** $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$.

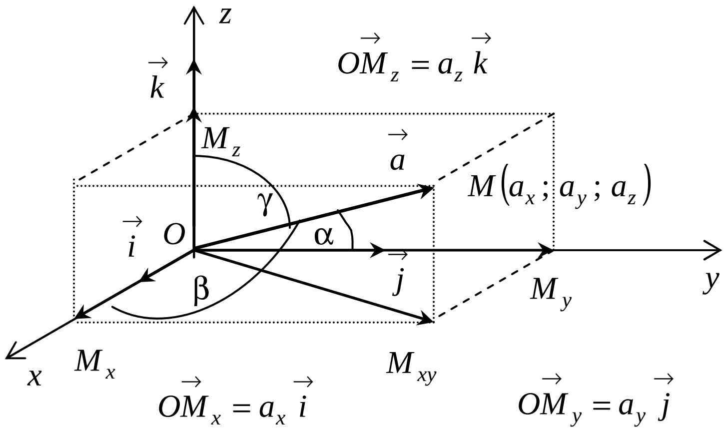

Рис. 89

Нехай у координатному просторі $Oxyz$ заданий деякий вектор $\vec{a}$ (рис. 89). Проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат

$$a_x = np_{Ox}\vec{a}\ ; \quad a_y = np_{Oy}\vec{a}\ ; \quad a_z = np_{Oz}\vec{a}$$

називаються ***координатами*** (***компонентами***) вектора $\vec{a} = \vec{a}(a_x; a_y; a_z)$.

Координатні орти мають вигляд:

$$\vec{i}(1;0;0), \quad \vec{j}(0;1;0), \quad \vec{k}(0;0;1)\ .$$

Оскільки вектор $\vec{a}$ – вільний, то його можна відкладати від довільної точки, зокрема, від початку координат O. Тоді вектор $\vec{OM} = \vec{a}$ служить ***радіусом-вектором*** точки $M(a_x; a_y; a_z)$.

Радіус-вектор $\vec{OM} = \vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з вимірами $|\vec{OM_x}| = |a_x|$, $|\vec{OM_y}| = |a_y|$ і $|\vec{OM_z}| = |a_z|$. Тому $\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$. *Модуль вектора дорів-*

нює квадратному кореню із суми квадратів його координат.

Кути α, β і γ, які утворює вектор $\vec{a}$ відповідно з осями Ox, Oy і Oz, називаються ***напрямними***, а

$$\boxed{\cos\alpha = a_x \big/ |\vec{a}|\,; \quad \cos\beta = a_y \big/ |\vec{a}|\,; \quad \cos\gamma = a_z \big/ |\vec{a}|}$$

називаються ***напрямними косинусами*** вектора.

Зауваження. Напрямні косинуси зв'язані співвідношенням

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}\,.$$

(Перевірити самостійно).

Приклад. Знайти модуль і напрямні косинуси вектора $\vec{a}(-1;2;-2)$. (Розв'язати самостійно).

Із співвідношень

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_{xy} + \overrightarrow{OM}_z = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{OM}_y + \overrightarrow{OM}_z$$

$$\text{і} \quad \overrightarrow{OM}_x = a_x\vec{i}\,; \quad \overrightarrow{OM}_y = a_y\vec{j}\,; \quad \overrightarrow{OM}_z = a_z\vec{k}\,,$$

одержимо $\boxed{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}$ – ***розклад вектора за координатним базисом*** $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

Якщо відомі координати початку $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і кінця $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то зі співвідношення

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1$$

маємо $\boxed{\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1)}$. Тобто, *координати вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *дорівнюють різниці відповідних координат його кінця* $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ *і початку* $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$.

Відстань між двома точками $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ обчислюється за формулою

$$\boxed{M_1M_2 = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\;.$$

Два вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні координати*

$$\boxed{\vec{a} = \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}}$$

2.7.4. Лінійні операції над векторами у координатній формі. Умова колінеарності векторів

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Тоді $\vec{a} + \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$

$$= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}\;;$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) - (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$= (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k}\;;$$

$$\lambda\vec{a} = \lambda(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}\;.$$

Тобто, *лінійні операції над векторами виконуються покомпонентно*:

при додаванні (відніманні) векторів їх відповідні кординати додаються (віднімаються);

при множенні вектора на число кожна координата множиться на це число.

Умова колінеарності (паралельності) двох векторів: *Два ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні*

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}; \quad \vec{a} \neq \vec{0}; \ \vec{b} \neq \vec{0}}.$$

□ $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \exists\lambda, \ \vec{a} = \lambda\,\vec{b} \iff a_x = \lambda b_x$;

$$a_y = \lambda b_y; \ a_z = \lambda b_z \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \qquad ■$$

Приклад. Знайти, при яких значеннях α і β дані вектори колінеарні

а) $\vec{a} = (\alpha - 2;\, 4;\, -3)$; $\quad \vec{b} = (5;\, 3\beta;\, 6)$;

б) $\vec{a} = (3;\, \beta;\, 2\alpha - 1)$; $\quad \vec{b} = (\alpha;\, -2;\, 2)$.

□ а) $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$; $\quad \dfrac{\alpha - 2}{5} = \dfrac{4}{3\beta} = \dfrac{6}{-3}$;

$$\frac{\alpha - 2}{5} = -2; \quad \frac{4}{3\beta} = -2; \quad \alpha = -8; \quad \beta = -\frac{3}{2}.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

2.7.5. Поділ відрізка у заданому відношенні

Координати точки $M(x;\, y;\, z)$, яка ділить відрізок M_1M_2 у заданому відношенні λ, починаючи від точки M_1, визначаються за формулами:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}}.$$

□ $\overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{MM_2} \iff \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda$;

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda\,; \quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda\,; \quad \frac{z-z_1}{z_2-z}=\lambda\,;$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\,; \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\,; \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\,. \quad \blacksquare$$

Зауваження. Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$. Тоді координати середини відрізка визначаються за формулами:

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2}\,; \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\,; \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}}\,.$$

Приклад. Точки $A(1;-4;3)$ і $B(3;0;6)$ служать кінцями діаметра сфери. Знайти координати її центра C і радіус r.

$\square$ $AC = BC$: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$; $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$; $z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$;

$$x=\frac{1+3}{2}=2\,; \quad y=\frac{-4+0}{2}=-2\,; \quad z=\frac{4+6}{2}=5\,; \quad C(2;-2;5);$$

$$r=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,;$$

$$r=\sqrt{(2-1)^2+(-2-(-4))^2+(5-3)^2}=3. \quad \blacksquare$$

2.7.6. Скалярний добуток векторів. Умова перпендикулярності двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi}\,.$$

Позначається скалярний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\vec{a}\,\vec{b}$.

Нагадаємо також, що $\cos 0 = 1$; $\cos 90^\circ = 0$.

Властивості скалярним добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$; 4) $(\vec{a})^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

Безпосередньо з означення маємо $\boxed{\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$.

Тоді $\boxed{пр_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}}$.

<u>Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів</u>: *два ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді , коли їх скалярний добуток дорівнює нулю*

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}}.$$

Оскільки координатні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ взаємно перпендикулярні і мають одиничну довжину, то

$$(\vec{i})^2=1;\ (\vec{j})^2=1;\ (\vec{k})^2=1;\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0;\ \vec{i}\cdot\vec{k}=0;\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0.$$

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$; $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Тоді $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$

$$=a_xb_x(\vec{i})^2+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y(\vec{j})^2+$$

$$+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z(\vec{k})^2=$$

$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ .$$

Таким чином, *скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат*

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}\,.$$

Звідси $\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\;\Leftrightarrow\; a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0;\quad \vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}}$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти, при якому значенні параметра α задані вектори перпендикулярні:

а) $\vec{a}=(2\alpha;-5;-3)$; $\vec{b}=(\alpha;-\alpha;6)$; б) $\vec{a}=(\alpha;3;4)$; $\vec{b}=(2;-\alpha;1)$.

□ а) $\vec{a}\perp\vec{b}\;\Leftrightarrow\; a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$;

$$2\alpha\cdot\alpha+(-5)\cdot(-\alpha)+(-3)\cdot 6=0\ ;$$

$$2\alpha^2+5\alpha-18=0;\quad \alpha_1=2;\quad \alpha_2=-9/2\,.$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

<u>Приклад 2</u>. Сума в 170 000 грош. од. розміщується під проценти в чотири банки: 60 000 – під 14% річних; 20 000 – під 15%; 50 000 – під 12% і 40 000 – під 16%. На скільки зросте вкладена сума за рік?

□ Введемо позначення:

$\vec{S}=(60000;\ 20000;\ 50000;\ 40000)$ – вектор вкладів;

$\vec{p}=(0{,}14;\ 0{,}15;\ 0{,}12;\ 0{,}16)$ – вектор річних ставок.

Тоді сумарний річний приріст усіх вкладів:

$$\Delta S=\vec{S}\cdot\vec{p}=60000\cdot 0{,}14+20000\cdot 0{,}15+$$

$$+50000\cdot 0{,}12+40000\cdot 0{,}16=23800\ \text{(грош. од.)}.$$ ■

<u>Фізичний зміст скалярного добутку</u>: якщо під дією сили $\vec{F}$ матеріальна точка здійснює переміщення $\vec{s}$, то виконана робота дорівнює скалярному добутку сили на переміщення $A=\vec{F}\cdot\vec{s}$.

2.7.7. Векторний добуток векторів. Площа трикутника

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 90) називається вектор (зверніть увагу, бо саме цим векторний добуток відрізняється від скалярного добутку, що є числом), який позначається $\vec{a}\times\vec{b}$ і задовольняє наступним умовам:

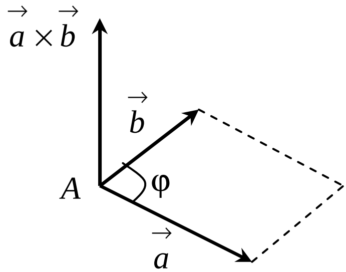

Рис. 90

1) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) модуль вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює добутку модулів співмножників на синус кута φ між ними

$$\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi}.$$

Таким чином, модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (геометричний зміст векторного добутку): $\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}|=S_{пар}}$.

3) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ напрямлений так, що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ здійснюється у додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки), якщо дивитися з кінця вектора $\vec{a}\times\vec{b}$.

Іншими словами, напрям вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ визначається за правилом буравчика. Отже,

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a};\quad \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b};\cdot\quad |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}\|\vec{b}|\sin\varphi=S_{пар}.$$

Нагадаємо, що $\sin 0=0$.

Зауваження 1. Векторний добуток нульовий, якщо вектори колінеарні (зокрема, хоча б один із них нульовий).

<u>Властивості векторного добутку</u>:

1) $\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}}$. *Векторний добуток не комутативний: при зміні порядку співмножників він змінює знак на протилежний, залишаючись таким же за абсолютною величиною*;

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda\vec{a}\times\vec{b}$;

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$. 4) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

Враховуючи взаємну орієнтацію координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ (рис. 91), отримаємо:

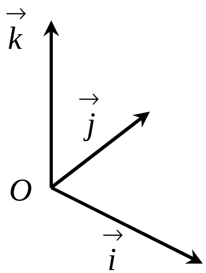

Рис. 91

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0};\quad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0};\quad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0};$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j};\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}.$$

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$

і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Тоді *векторний добуток двох векторів дорівнює визначнику третього порядку, в якому перший рядок складається з координатних ортів* $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$, *другий – з координат першого співмножника, а третій – з координат другого співмножника*

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}}.$$

□ $\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$

$$= a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} +$$

$$+ a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} =$$

$$= \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} . \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. Оскільки діагональ ділить паралелограм на два рівних трикутника, то з геометричного змісту векторного добутку маємо

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|} .$$

Приклад. Обчислити площу трикутника ABC з вершинами:

а) $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ і $C(1;3;-1)$;

б) $A(7;-1;0)$, $B(2;-4;-3)$ і $C(3;5;-2)$.

□ а) $\vec{AB} = (5-1; -6-(-1); 2-2) = (4; -5; 0)$;

$$\vec{AC} = (1-1; 3-(-1); -1-2) = (0; 4; -3) ;$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k} ; \quad |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 25 ;$$

$$S_{\Delta ABC} = (1/2) \cdot 25 = 12{,}5 .$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

2.7.8. Мішаний добуток трьох векторів. Об'єм піраміди. Умова компланарності трьох векторів. Розклад вектора за довільним базисом

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Позначається $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ або $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Геометричний зміст: *модуль мішаного добутку* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ *чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ (рис. 92): $\boxed{V_{пар-да}=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|}$.

$$\square\ V_{пар-да}=S_{пар-ма}\cdot H;\ \ S_{пар-ма}=|\vec{a}\times\vec{b}\,|;$$

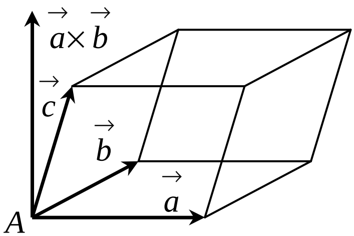

Рис. 92

$$H=\left|np_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c}\right|=\frac{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|}{|\vec{a}\times\vec{b}\,|};$$

$$V_{пар-да}=|\vec{a}\times\vec{b}\,|\cdot\frac{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|}{|\vec{a}\times\vec{b}\,|}=$$

$$=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|.\ \blacksquare$$

Зауваження 1. Об'єм трикутної піраміди $SABC$ обчислюється за формулою $\boxed{V_{SABC}=\frac{1}{6}\,|(\vec{SA}\times\vec{SB})\cdot\vec{SC}\,|}$.

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$; $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$;

$$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}.$$

Тоді *мішаний добуток трьох векторів дорівнює визначнику третього порядку, в якому кожний рядок складається з координат відповідного співмножника, тобто координат векторів* $\vec{a}$,

$\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}.$$

$$\square\ (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}) = \Big((a_y b_z - a_z \times$$

$$\times b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}\Big)(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,c_x - (a_x b_z - a_z b_x)\,c_y + (a_x b_y - a_y b_x)\,c_z =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad ■$$

Приклад 1. Задані координати вершин трикутної піраміди $S(4;-1;2)$, $A(5;1;4)$, $B(3;2;-1)$, $C(0;0;3)$. Знайти її об’єм.

$$\square\quad \vec{SA} = (5-4;\,1-(-1);\,4-2) = (1;\,2;\,2)\ ;$$

$$\vec{SB} = (3-4;\,2-(-1);-1-2) = (1;\,3;\,-3)\ ;$$

$$\vec{SC} = (0-4;\,0-(-1);\,3-2) = (-4;\,1;\,1);\quad (\vec{SA}\times\vec{SB})\cdot\vec{SC} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 54\ ;\quad V_{SABC} = \frac{1}{6}\,|(\vec{SA}\times\vec{SB})\cdot\vec{SC}| =$$

$$= (1/6)\cdot|54| = 9\,. \quad ■$$

Зауваження 2. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, то відповідний паралелепіпед вироджується і його об'єм дорівнює нулю. Звідси маємо умову компланарності трьох векторів: *три вектора компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю*:

$$\boxed{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ \text{– компланарні} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0}\ .$$

Приклад 2. Задані три точки $A(1;\,0;\,-1)$, $B(4;\,-1;\,2)$ $C(0;\,1;\,-3)$. Знайти значення параметра α, при якому точка $M(2;\,\alpha;\,-1)$ лежить в площині (ABC).

□ Указані чотири точки лежать в одній площині, якщо три вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{CM}$ компланарні, тобто

$$(\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{BM})\cdot\overrightarrow{CM}=0\ .$$

$$\overrightarrow{AM}=\big(2-1;\,\alpha-0;\,-1-(-1)\big)=\big(1;\,\alpha;\,0\big)\ ;$$

$$\overrightarrow{BM}=\big(2-4;\,\alpha-(-1);\,-1-2\big)=\big(-2;\,\alpha+1;\,-3\big)\ ;$$

$$\overrightarrow{CM}=\big(2-0;\,\alpha-1;\,-1-(-3)\big)=\big(2;\,\alpha-1;\,2\big)\ ;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -2 & \alpha+1 & -3 \\ 2 & \alpha-1 & 2 \end{vmatrix}=0\ ; \quad \alpha=\frac{1}{3}\ . \quad ■$$

Зауваження 3. Довільна трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є ***лінійно незалежною*** (рівність $\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}+\gamma\,\vec{c}=0$ виконується лише за умови, коли всі коефіцієнти α,β,γ одночасно дорівнюють нулю) і утворює ***базис*** у тому розумінні, що будь-який вектор $\vec{d}$ єдиним способом може бути поданий у вигляді

$$\boxed{\vec{d}=d_a\,\vec{a}+d_b\,\vec{b}+d_c\,\vec{c}}\,.$$

Цю рівність називають ***розкладом вектора*** $\vec{d}$ ***за базисом*** $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$. Числа d_a, d_b, d_c служать ***координатами*** вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

Якщо відомі координати векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ у координатному базисі, то, записавши розклад вектора $\vec{d}$ за новим базисом $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ у скалярній формі, отримаємо систему

$$\begin{cases} a_x d_a + b_x d_b + c_x d_c = d_x \\ a_y d_a + b_y d_b + c_y d_c = d_y \\ a_z d_a + b_z d_b + c_z d_c = d_z \end{cases}$$

для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$.

<u>Приклад 3</u>. Перевірити, що задані три вектори

$$\vec{a} = (2; -1; 4);\ \vec{b} = (1; 0; -3);\ \vec{c} = (-2; 1; -1);\ \vec{d} = (0; -1; 10)$$

утворюють базис. Знайти координати d_a, d_b, d_c заданого вектора $\vec{d}$ у цьому базисі $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$:

□ $$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 4 - 0 - 1 + 6 = 3 \neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні і утворюють базис, а вектор $\vec{d}$ може бути поданий у вигляді $\vec{d} = d_a \vec{a} + d_b \vec{b} + d_c \vec{c}$ єдиним способом. Складемо і розв'яжемо систему рівнянь для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$:

$$\begin{cases} 2d_a + d_b - 2d_c = 0 \\ -d_a \qquad\quad + d_c = -1 \\ 4d_a - 3d_b - d_c = 10 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \; ; \quad \Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \; ;$$

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -6 \; ; \quad \Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 0 \; ;$$

$$d_a = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1; \; d_b = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2; \; d_c = \frac{\Delta^{(3)}}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0 . \; \blacksquare$$

2.8. Власні вектори і власні числа квадратної матриці. Матричні многочлени. Лінійна модель торгівлі

2.8.1. Власні вектори і власні числа квадратної матриці

Нехай A – довільна квадратна матриця n-го порядку. Якщо існують n-вимірний ненульовий вектор X (матриця-стовпець) і число λ такі, що виконується рівність

$$\boxed{AX = \lambda X},$$

то говорять, що λ – ***власне число*** (***власне значення***) матриці A, а X – її ***власний вектор***, який відповідає власному числу λ.

Отже, множення матриці на власний вектор рівносильне множенню власного числа на цей вектор.

Вказане матричне рівняння $AX = \lambda X$ можна подати у вигляді

$$AX = \lambda EX \; ; \quad (A - \lambda E)X = 0 .$$

Ця однорідна квадратна система лінійних рівнянь має ненульовий розв’язок X тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю: $\boxed{\det(A-\lambda E)=0}$. Одержане рівняння називається ***характеристичним рівнянням*** матриці A.

Характеристичне рівняння можна подати в розгорнутій формі

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Відповідний многочлен $\boxed{f(\lambda)=\det(A-\lambda E)}$ називається ***характеристичним многочленом*** матриці A.

Власні числа λ_j $(j=\overline{1,n})$ *є коренями характеристичного рівняння.*

Власні числа можуть бути дійсними чи комплексними, простими чи кратними. Множину всіх власних чисел λ_j $(j=\overline{1,n})$ даної матриці називають її ***спектром***.

Якщо відоме деяке власне число λ, то з однорідної системи

$$\boxed{(A-\lambda E)X=0}$$

можна знайти відповідні власні вектори.

Найбільший модуль власного числа матриці називають її ***спектральним радіусом*** і позначають $\rho(A)$: $\rho(A)=\max\limits_j|\lambda_j|$.

<u>Властивості власних векторів і власних чисел</u>:

1) *Кожному власному вектору відповідає одне власне число.*

2) *Якщо* X *– власний вектор з власним числом* λ, *то довільний вектор* αX $(\alpha \neq 0)$, *колінеарний вектору* X, *також є власним вектором з тим же власним числом* λ. Тобто, *власний вектор визначається з точністю до довільного ненульового множника*. Звичайно виділяють одиничні власні вектори.

3) *Якщо* X_1 *і* X_2 *– власні вектори матриці* A *з одним і тим же власним числом* λ, *то їх сума* X_1+X_2 *також є власним вектором матриці* A *з тим же самим власним числом* λ.

4) *Визначник матриці* A *дорівнює добутку всіх її власних чисел* $\boxed{\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}$.

Приклад 1. Знайти власні числа λ_1, λ_2 та одиничні власні вектори $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Перевірити, що визначник матриці A дорівнює добутку всіх її власних чисел $\det A = \lambda_1 \lambda_2$.

□ Власні числа знаходимо як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0 \ ; \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 32 = 0 \ ; \quad \lambda_1 = -4 \ ; \quad \lambda_2 = 8 \ .$$

Обчислимо $\det A$ за правилом «хреста»:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = -32 \, .$$

Але $\lambda_1 \lambda_2 = -4 \cdot 8 = -32$. Отже, $\det A = \lambda_1 \lambda_2$.

З однорідної системи

$$(A - \lambda E)X = 0; \quad \begin{cases} (-2-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{де} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

знаходимо відповідні власні вектори. Обчисливши їх модулі, виділяємо одиничні власні вектори. При $\lambda_1 = -4$ маємо

$$\begin{cases} (-2-(-4))x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (6-(-4))x_2 = 0 \end{cases}; \quad x_1 = -2t; \quad x_2 = t; \quad X_1 = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix},$$

де t – параметр, $t \in R$. Тоді

$$|X_1| = \sqrt{(-2t)^2 + t^2} = \sqrt{5}\,t \ ; \qquad \vec{e_1} = \frac{X_1}{|X_1|} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 8$ маємо

$$\begin{cases}(-2-8)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (6-8)x_2 = 0\end{cases}; \quad x_1 = 2t; \quad x_2 = 5t; \quad t \in R; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ 5t \end{pmatrix};$$

$$|X_2| = \sqrt{(2t)^2 + (5t)^2} = \sqrt{29}\,t; \quad \vec{e}_2 = \frac{X_2}{|X_2|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} \\ 5/\sqrt{29} \end{pmatrix}. \quad ■$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти власні числа λ_1, λ_2, λ_3 та одиничні власні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ матриці $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Перевірити, що визначник матриці A дорівнює добутку всіх її власних чисел $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

□ Власні числа знаходимо як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0; \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$-\lambda^3 + \lambda = 0; \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = -1.$$

З однорідної системи

$$(A - \lambda E)X = 0; \quad \begin{cases}(-3-\lambda)x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (1-\lambda)x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0\end{cases}, \text{ де } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

відкидаючи одне з рівнянь (наприклад, перше), знаходимо відповідні власні вектори. Обчисливши їх модулі, виділяємо одиничні власні вектори. При $\lambda_1 = 0$ маємо

$$\begin{cases}2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\end{cases}; \quad \begin{cases}2x_1 + x_2 = -2x_3 \\ x_1 + x_2 = -2x_3\end{cases}; \quad X_1 = (0 \ \ -2t \ \ t)^T;$$

$$|\vec{x_1}| = \sqrt{0^2 + (-2t)^2 + t^2} = \sqrt{5}\,t\,; \quad \vec{e_1} = \frac{X_1}{|X_1|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

(Перевірку рівності $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ і знаходження власних векторів $\vec{e_2}$ і $\vec{e_3}$ здійсніть самостійно). ■

Зауваження. У математичній економіці велику роль відіграють так звані продуктивні матриці. Встановлено, що матриця A є продуктивною тоді і тільки тоді, коли всі її власні числа за модулем менші одиниці.

Приклад 3. Знайти власні числа λ_1, λ_2 заданої матриці A і перевірити, чи є вона продуктивною:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0{,}025 & 0{,}025 \\ 0{,}225 & 0{,}025 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

(Розв'язати самостійно).

2.8.2. Матричні многочлени

Нехай A – довільна квадратна матриця n-го порядку. Якщо у довільний многочлен

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

замість змінної x підставити матрицю A, то отримаємо матрицю

$$\boxed{f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \ldots + a_{m-1} A + a_m E},$$

яка називається ***многочленом від матриці*** A (***матричним многочленом***).

Зауваження. Над многочленами від однієї і тієї ж матриці A можна здійснювати алгебраїчні дії як над звичайними многочленами.

Теорема Келі – Гамільтона. *Довільна квадратна матриця є коренем свого характеристичного многочлена*. (Без доведення).

Приклад. Перевірити, що задана матриця є коренем свого характеристичного многочлена:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix};\quad \text{б) } A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

□ а) Знаходимо характеристичний многочлен матриці A:

$$f(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-10.$$

Обчислимо

$$f(A)=A^2-3A-10E=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 9 & 16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 12\\ 9 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

2.8.3. Лінійна модель торгівлі

До поняття власного числа і власного вектора матриці приводить ***лінійна модель обміну*** (***торгівлі***), що описує процес взаємних закупок товарів країнами (***лінійна модель міжнародної торгівлі***).

Розглянемо n держав $S_1, S_2, ..., S_n$ з національними доходами відповідно $x_1, x_2, ..., x_n$, що утворюють вектор (матрицю-стовпчик) $X=(x_1\ \ x_2\ \ ...\ \ x_n)^T$. Нехай a_{ij} – коефіцієнт, що визначає долю національного доходу, яку j-а держава витрачає на закупку товарів у i-ї держави ($i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,n}$). Припускаємо, що весь національний дохід кожної держави витрачається на закупку товарів або всередині країни, або на імпорт із інших перелічених держав. Тобто $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1$, $j=\overline{1,n}$. Усі коефіцієнти a_{ij} утворюють невід’ємну ***структурну матрицю торгівлі***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

в якої сума елементів довільного стовпчика дорівнює 1.

Для будь-якої i-ї держави ($i = \overline{1,n}$) загальна виручка від зовнішньої і внутрішньої торгівлі складає

$$p_i = \sum\nolimits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n, \quad i = \overline{1,n}.$$

З міркувань збалансованості товарообміну випливає умова бездефіцитності торгівлі кожної держави. Тобто для будь-якої i-ї держави ($i = \overline{1,n}$) виручка від торгівлі не повинна бути меншою від її національного доходу:

$$p_i \ge x_i \quad \text{або} \quad a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \ge x_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Проте в цій умові треба вилучити знак нерівності. Дійсно, якщо допустити знак строгої нерівності, то додавши почленно всі ці нерівності, коли індекс i змінюється від 1 до n, а потім перегрупувавши доданки ліворуч, одержимо

$$x_1(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2}) +$$
$$+ \dots + x_n(a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn}) > x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Оскільки в дужках стоять суми елементів матриці A по стовпчиках, які дорівнюють 1, то отримана нерівність

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n > x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

суперечлива. Отже, в умові бездефіцитності можливий тільки знак рівності, що приводить до системи

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = x_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = x_n \end{cases}$$

У матричній формі: $AX = X$ або $(A - E)X = 0$.

Таким чином, задача зводиться до знаходження власного вектора матриці A, який відповідає власному числу $\lambda = 1$.

Приклад. Задана структурна матриця торгівлі трьох держав:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Знайти співвідношення між національними доходами країн, при якому торгівля буде збалансована.

□ а) Позначимо національні доходи відповідно x_1, x_2 і x_3. Знайдемо власний вектор $X = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$, розв'язуючи систему рівнянь

$$(A - E)X = 0 \ \text{ або } \begin{cases} -0{,}5x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}4x_3 = 0 \\ 0{,}1x_1 - 0{,}7x_2 + 0{,}2x_3 = 0 \\ 0{,}4x_1 \qquad\qquad - 0{,}6x_3 = 0 \end{cases} \ \text{ методом Гаусса.}$$

Прямий хід:

$$C = (A \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}7 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & -0{,}6 & 0 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{c} R_1 := -2R_1 \\ R_2 := R_2 + 0{,}2R_1 \\ R_3 := R_3 - 4R_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1{,}4 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & -0{,}56 & 0{,}28 & 0 \\ 0 & 2{,}8 & -1{,}4 & 0 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{c} R_2 := R_2 + R_2/(-0{,}56) \\ R_3 := R_3 + 5R_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1{,}4 & -0{,}8 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $rank\, C = rank\, A = r = 2 < n = 3$.

Нехай x_1, x_2 – базисні невідомі; x_3 – вільне невідоме.

Зворотний хід:

Відкидаємо тотожність $0=0$, яка відповідає останньому рядку. Вільне невідоме приймаємо за довільну сталу: $x_3 = C$. Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільне невідоме. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 1{,}4x_2 = 0{,}8C \\ \qquad x_2 = 0{,}5C \end{cases}.$$

Розв'язуємо систему, починаючи з останнього рівняння.

$$x_2 = 0{,}5\,C\,; \quad x_1 = 1{,}4x_2 + 0{,}8C = 1{,}4\cdot 0{,}5\,C + 0{,}8C = 1{,}5\,C\,.$$

Отже, загальний розв'язок

$$x_1 = 1{,}5\,C\ ; \quad x_2 = 0{,}5\,C\,; \quad x_3 = C\,, \quad C \in R\,.$$

Одержаний результат означає, що збалансованість торгівлі трьох країн досягається при співвідношенні доходів:

$$1{,}5 : 0{,}5 : 1 \text{ (при } C = 1) \quad \text{або} \quad 3 : 1 : 2 \text{ (при } C = 2).$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

2.9. Контрольні запитання

1) Що називається похідною функції?
2) У чому полягає механічний зміст похідної?
3) У чому полягає геометричний зміст похідної? Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
4) У чому полягає економічний зміст похідної?
5) Розкрийте сутність понять: темп зростання функції; еластичність функції? Який зв'язок між ними?
6) Який зв'язок між диференційованістю та неперервністю?
7) Запишіть правила обчислення похідної суми, різниці, добутку та частки двох функцій?
8) Сформулюйте правила диференціювання похідної складеної функції? Оберненої функції? Параметрично заданої функції?

9) Наведіть формули похідних основних елементарних функцій.
10) Як здійснюється диференціювання неявно заданої функції?
11) У чому полягає правило логарифмічного диференціювання?
12) Дайте означення похідної n-го порядку. Розкрийте механічний зміст другої похідної?
13) Що таке диференціал функції?
14) У чому полягає геометричний зміст диференціала?
15) У чому полягає економічний зміст диференціала? Що таке мультиплікатор?
16) Який зв'язок між похідною та диференціалом функції?
17) Які правила обчислення диференціалу суми, різниці, добутку та частки двох функцій?
18) Наведіть формули диференціалів основних елементарних функцій.
19) Як застосовується диференціал у наближених обчисленнях?
20) Що називається диференціалом n-го порядку?
21) У чому полягає інваріантність форми першого диференціала? Чи поширюється властивість інваріантності на диференціали вищих порядків?
22) Сформулюйте теорему Ролля про корені похідної. Який її геометричний зміст?
23) Сформулюйте теорему Лагранжа про скінченні прирости. Який її геометричний зміст?
24) У чому полягає правило Лопіталя? Для розкриття невизначеностей яких видів воно застосовується безпосередньо?
25) Як зводяться невизначеності $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ і ∞^0 до одного з основних видів $0/0$ чи ∞/∞?
26) Запишіть формулу Тейлора n-го порядку із залишковим членом у формі Лагранжа.
27) Наведіть приклади розкладання функцій за формулою Маклорена для елементарних функцій.
28) Як формула Тейлора застосовується в наближених обчисленнях?
29) У чому полягають достатні умови монотонності та сталості функції?
30) Що таке точка мінімуму та максимуму функції?
31) Сформулюйте необхідну умову екстремуму?

32) Що таке критичні точки першої похідної? Стаціонарні точки функції?
33) У чому полягає достатня умова екстремуму за першою похідною?
34) Сформулюйте правило дослідження функції на монотонність і екстремум за першою похідною.
35) У чому полягає достатня умова гладкого екстремуму за другою похідною?
36) Як знаходяться найменше та найбільше значення функції в замкненій області?
37) Яка функція називається опуклою (вгнутою) в точці та на інтервалі?
38) Що таке точка перегину?
39) У чому полягають достатні умови опуклості та вгнутості?
40) У чому полягає необхідна умова точки перегину?
41) Що таке критичні точки другої похідної?
42) Сформулюйте правило дослідження функції на опуклість, угнутість та перегин за другою похідною.
43) Що називається асимптотою графіка функції? На які види діляться асимптоти?
44) Який вигляд має рівняння вертикальної асимптоти? Похилої асимптоти?
45) Опишіть загальну схему повного дослідження функції та побудови ескізу графіка.
46) Наведіть приклади задач на екстремум економічного змісту: максимізація прибутку, оптимізація оподаткування підприємств та ін.
47) Що таке визначник? Мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника?
48) За яким правилом обчислюється значення визначника n-го порядку?
49) Сформулюйте правила «хреста» і «трикутників» для обчислення відповідно визначників другого і третього порядку.
50) Сформулюйте основні властивості визначника.
51) Як знаходиться значення визначника трикутного вигляду?
52) Що таке матриця?
53) Яка матриця називається невиродженою?

54) Як здійснюються операції додавання (віднімання) матриць і множення матриці на число?
55) Як здійснюється операція множення матриць? Які властивості цієї операції? Чи завжди існує добуток матриць?
56) Що таке обернена матриця та як вона обчислюється?
57) Що називається рангом матриці? Базисним мінором?
58) Які операції називаються елементарними перетвореннями матриці?
59) Які матриці називаються еквівалентними?
60) Як знаходиться ранг матриці методом елементарних перетворень?
61) Наведіть приклади застосування матриць в економіці.
62) Який вигляд має система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими?
63) Яка система називається сумісною? Несумісною? Визначеною? Невизначеною?
64) Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі для лінійних систем.
65) Як знаходиться розв'язок квадратної СЛАР за допомогою оберненої матриці? Чи завжди можна безпосередньо розв'язати довільну квадратну СЛАР цим методом?
66) Як розв'язується квадратна СЛАР методом Крамера? Чи можна безпосередньо розв'язати довільну квадратну СЛАР цим методом?
67) Як розв'язується довільна СЛАР методом Гаусса? Опишіть прямий хід і зворотній хід цього методу.
68) Сформулюйте умову наявності в однорідної квадратної СЛАР ненульових розв'язків.
69) Опишіть модель Леонтьєва міжгалузевого балансу.
70) Що таке валовий продукт? Кінцевий або чистий продукт? Прямі витрати?
71) Як записуються балансові співвідношення?)
72) Що називають матрицею прямих витрат або технологічною матрицею?
73) Що таке вектор-план (вектор валового випуску) і вектор кінцевих продуктів?
74) Що називають матрицею повних витрат?

75) Яку матрицю називають продуктивною? При якій умові матриця є продуктивною?
76) Опишіть декартову прямокутну систему координат у просторі. Як утворюється координатна сітка цієї системи координат?
77) Що таке скалярні та векторні величини?
78) Які вектори називаються колінеарними? Компланарними? Рівними?
79) Як знаходяться сума, різниця двох векторів і добуток вектора на число?
80) Які властивості мають лінійні операції над векторами?
81) Як знаходяться проекція вектора на ненульовий вектор?
82) Що таке координати вектора? Як здійснюються лінійні операції над векторами в координатній формі?
83) Як знаходяться модуль і напрямні косинуси вектора, заданого в координатній формі?
84) Як формулюється умова колінеарності двох векторів?
85) Як знаходяться координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні?
86) Що називається скалярним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
87) У чому полягає умова ортогональності двох векторів?
88) Що називається векторним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
89) Що можна сказати про координати колінеарних векторів?
90) Якщо у скалярному добутку поміняти місцями множники, чи зміниться знак добутку? а у векторному добутку? Поясніть відповідь.
91) У чому полягає геометричний зміст векторного добутку?
92) Що називається мішаним добутком трьох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
93) У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?
94) У чому полягає умова компланарності трьох векторів?
95) Яка трійка векторів утворює базис? Як знайти координати вектора в даному базисі?
96) Наведіть приклади застосування векторів у економіці.
97) Що таке власні числа і власні вектори квадратної матриці?
98) Як знаходяться власні числа і власні вектори?
99) Сформулюйте властивості власних чисел і власних векторів.

100) Що таке матричний многочлен?
101) Сформулюйте теорему Келі – Гамільтона про характеристичний многочлен.
102) Опишіть лінійну модель обміну ((лінійну модель міжнародної торгівлі).
103) Що називають структурною матрицею торгівлі?
104) Як записується умова бездефіцитності торгівлі?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

2. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів. – К.: ЦУЛ, 2010. – 448 с.

3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 383 с.

4. Бугір М. К. Математика для економістів. – К.: Академія, 2003. – 520 с.

5. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: У 2 ч. Ч.1. – К.: КНЕУ, 2001. – 546 с.

6. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Математичний практикум. – К.: КНЕУ, 2004. – 682 с.

7. Васильченко І. П. Вища математика для економістів. – К.: Знання-Прес, 2002. – 454с.

8. Грисенко М. В. Математика для економістів: методи й моделі, приклади й задачі. – К.: Либідь. 2007. – 720 с.

9. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1. – М.: Наука, 1997. –304 с.

10. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Приклади і задачі. – К.: Академія, 2003. – 624с.

11. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.

12. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / В. І. Діскант, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. – К.: Вища школа, 2001. – 303 с.

13. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов. – СПб.: Питер, 2005. – 464 с.

14. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 471 с.

15. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика. Практикум. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.

16. Крушевский А. В. Справочник по экономико-математическим моделям и методам. – К.: Техника, 1982. – 208 с.

17. Липовик В. В. Вища математика для економістів. – Кривий Ріг: Видавничий дім, 2003. – 263с.

18. Лопатников Л. И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. – М.: Дело, 2003. – 520 с.

19. Міхайленко В. М., Федоренко Н. Д. Збірник прикладних задач з вищої математики. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.

20. Пастушенко С. М., Підченко Ю. П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.

21. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В. Математика в экономике: В 2-х ч. Ч. 1. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 224 с.

22. Солодовников А. С., Бабайцев В. А., Браилов А. В., Шандра И. Г. Математика в экономике: В 2-х ч. Ч. 2. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 376 с.

23. Справочник по математике для экономистов / Под ред. В. И. Ермакова. – М.: Высш. шк., 1987. – 336 с.

24. Станішевський С. О. Вища математика.– Х.: ХНАМГ, 2005.–270 с.

25. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.

26. Экономико-математический энциклопедический словарь / Глав. ред. В. И. Данилов-Данильян. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 688 с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Колосов Анатолій Іванович,
Якунін Анатолій Вікторович,
Ситникова Юлія Валеріївна

В И Щ А   М А Т Е М А Т И К А

д л я   е к о н о м і с т і в
у   двох   модулях

М О Д У Л Ь 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства" і 6.030509 "Облік і аудит")

В авторській редакції
Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *З. І. Зайцева*
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*
Дизайн обкладинки *Ю. В. Ситникова*

План 2013, поз. 36Л
Підп. до друку 4.04.2014 Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 13,0
Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства ім. О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014