жена, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. ■

Спираючись на властивості границь, можна встановити наступне:

1) Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні у точці x_0, то функції $g(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, $h(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ і $q(x) = f_1(x) / f_2(x)$ $\left(f_2(x) \neq 0 \right)$, також неперервні у точці x_0.

2) Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна у точці x_0, а функція $f(u)$ неперервна у точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то й складена функція $f(\varphi(x))$ неперервна у точці x_0.

3) Якщо функція $f(x)$ неперервна у точці x_0 і має обернену функцію $x = f^{-1}(y)$ в деякому околі точки x_0, то обернена функція $x = f^{-1}(y)$ неперервна в точці $y_0 = f(x_0)$.

4) Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і відмінна від нуля $f(x_0) \neq 0$, то існує такий окіл цієї точки x_0, що для всіх x з указаного околу функція $f(x)$ не обертається в нуль і має знак, який збігається зі знаком $f(x_0)$.

Неперервність функцій використовується при обчисленні границь. З наведених властивостей випливають такі важливі наслідки:

1) ***Заміна змінної***

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \left| \begin{array}{c} u = \varphi(x) \\ u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \end{array} \right| = \lim_{u \to u_0} f(u).$$

2) Границя ***показниково-степеневої функції***

$$\lim_{x \to x_0} \left(u(x)\right)^{v(x)} = \left(\lim_{x \to x_0} u(x) \right)^{\lim\limits_{x \to x_0} v(x)}.$$

3) *Усі елементарні функції є неперервними у кожній точці своєї природної області визначення.*

1.4.5. Односторонні границі. Одностороння неперервність. Властивості функцій, неперервних на відрізку

Границя функції $f(x)$ в точці x_0 при додатковій умові, що x залишається меншим x_0, називається ***лівою границею*** функції $f(x)$ в точці x_0 і позначається

$$\lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x) \quad \text{або} \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

Аналогічно визначається ***права границя*** функції $f(x)$ в точці x_0:

$$\lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x) \quad \text{або} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Ліва і права границі називаються ***односторонніми границями***.

<u>Теорема 1</u>. *Для того, щоб функція $f(x)$ в точці x_0 мала границю, яка дорівнює A, необхідно і достатньо, щоб існували обидві односторонні границі в цій точці, кожна з яких також дорівнює A*:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

(Без доведення).

Нехай функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $(a; x_0]$, $a < x_0$. Функція $f(x)$ ***неперервна у точці*** x_0 ***зліва***, якщо

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Аналогічно, функція $f(x)$, визначена на півінтервалі $[x_0; b)$, $x_0 < b$, ***неперервна у точці*** x_0 ***справа***, якщо

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Загальна назва для функції, неперервної зліва чи справа, – ***односторонньо неперервна***.

Якщо функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і точка $x_0 \in (a;b)$, то *для неперервності функції у точці* x_0 *необхідно і достатньо, щоб функція* $f(x)$ *була неперервна зліва і справа у точці* x_0. Іншими словами, *функція* $f(x)$, *яка визначена в деякому околі точки* x_0, *неперервна в точці* x_0, *якщо обидві її односторонні границі дорівнюють значенню функції в цій точці*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній внутрішній точці відрізка $[a;b]$ і відповідно односторонньо неперервна на його кінцях, то вона називається ***неперервною на відрізку*** $[a;b]$.

Властивості функцій неперервних на відрізку сформулюємо у вигляді теорем (без доведення).

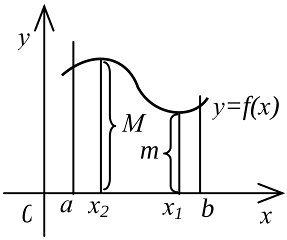


Рис. 50

Теорема 2 (про обмеженість функції та існування найменшого та найбільшого значень). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *то вона обмежена на цьому відрізку і серед її значень існує найменше* $m = f(x_1)$ *та найбільше* $M = f(x_2)$, *де* $x_1 \in [a;b]$ *і* $x_2 \in [a;b]$ (рис. 50). (Без доведення).

Зауваження. Твердження теореми може бути невірним, якщо розглядати $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$.

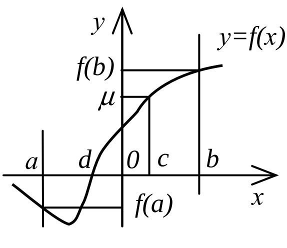


Рис. 51

Теорема 3 (про перетворення функції на нуль). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і на його кінцях має значення різних знаків* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Тоді на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться хоча б одна точка* $x = d$ *така, що* $f(d) = 0$ (рис. 51).

(Без доведення).

Теорема 4 (про проміжне значення). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і на його кінцях приймає різні значення* $f(a)\neq f(b)$. *Тоді для будь-якого числа* μ, *що міститься між числами* $f(a)$ *і* $f(b)$, *на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться хоча б одна точка* $x=c$ *така, що* $f(c)=\mu$ (рис. 51).

(Без доведення).

1.4.6. Точки розриву та їх класифікація

Неперервна в точці x_0 функція $f(x)$ повинна задовольняти наступні умови: 1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і деякому її околі. 2) існує скінченна ліва границя функції $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$. 3) існує скінченна права границя функції $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$. 4) односторонні границі рівні. 5) спільне значення односторонніх границь дорівнює значенню функції $f(x_0)$ в цій точці x_0.

Якщо хоча б одна з перелічених умов порушується, то функція $f(x)$ називається ***розривною*** в точці x_0, а сама точка x_0 називається ***точкою розриву*** цієї функції.

Якщо в точці розриву x_0 існують обидві скінченні односторонні границі, то це – ***точка розриву першого роду***. Якщо у точці розриву x_0 хоча б одна з односторонніх границь нескінченна або взагалі не існує, то це – ***точка розриву другого роду***.

Якщо в точці розриву першого роду x_0 односторонні границі рівні $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$, то маємо ***усувний розрив***, оскільки, поклавши $f(x_0)=A$, дістанемо неперервну функцію.

Якщо в точці розриву першого роду x_0 односторонні границі різні $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1\neq\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2$, то маємо ***скінченний стрибок*** висотою $|A_2-A_1|$.

Якщо в точці розриву другого роду x_0 існують одна нескінченна одностороння границя, а інша – скінченна чи нескінченна, то маємо ***нескінченний стрибок***.

<u>Правило</u>. *Для знаходження точок розриву функції $f(x)$ і визначення їх характеру треба:*

1) знайти можливі точки розриву (скінченні кінці інтервалів області визначення; точки, в яких змінюється характер задання функції, і т.п.);

2) у кожній «підозрілій» точці x_0 обчислити , якщо існують, значення функції $f(x_0)$ та обидві односторонні границі $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2$;

3) з аналізу отриманих значень зробити висновок про наявність і характер розриву.

<u>Приклад</u>. Визначити точки розриву заданої функції та з'ясувати їх характер:

а) $y = arctg\left(1/(x-3)\right)$;

б) $y = 7^{-3/x^2}$;

в) $y=\sin\left(\pi/x\right)$;

г) $y=\begin{cases} 2^{2/(x+1)}-3, & x<1; \\ \log_2 x, & x\ge 1 \end{cases}$

□ а) Функція $y = arctg\left(1/(x-3)\right)$ невизначена у точці $x=3$. Розглянемо

$$\lim_{x\to 3-0} arctg\left(1/(x-3)\right)=-\pi/2 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to 3+0} arctg\left(1/(x-3)\right)=\pi/2 .$$

Функція у точці $x=3$ має скінченний стрибок висотою π (рис. 52).

б) Функція $y=7^{-3/x^2}$ невизначена у точці $x=0$. Розглянемо

$$\lim_{x\to -0} 7^{-3/x^2}=0 \quad \text{і} \quad \lim_{x\to +0} 7^{-3/x^2}=0 .$$

Якщо довизначимо функцію рівністю $f(0)=0$, то дістанемо неперервну у точці $x=0$ функцію. Отже, маємо усувний розрив (рис. 53).

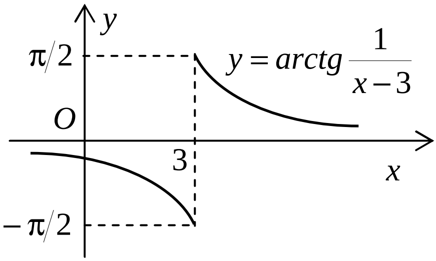


Рис. 52

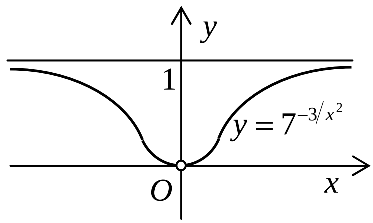


Рис. 53

в) Функція $y = \sin(\pi/x)$ невизначена у точці $x = 0$. Обидві односторонні границі $\lim\limits_{x\to -0} \sin(\pi/x)$ і $\lim\limits_{x\to +0} \sin(\pi/x)$ не існують. Отже, маємо точку розриву другого роду (рис. 54).

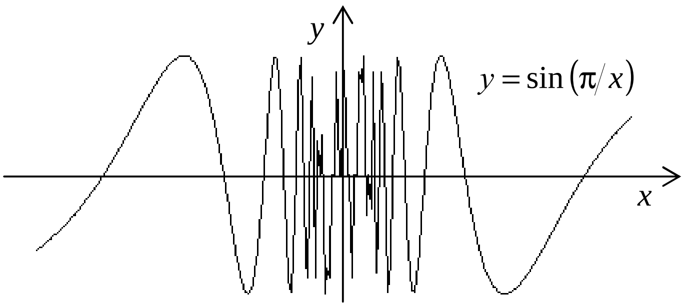


Рис. 54

г) Функція $y = f(x) = \begin{cases} 2^{2/(x+1)} - 3, & x < 1; \\ \log_2 x, & x \ge 1 \end{cases}$ визначена на всій числовій прямій, окрім точки $x = -1$, а в точці $x = 1$ змінюється її аналітичний вираз. Тому маємо дві точки, що «підозрілі» на розрив.

У точці $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \left(2^{2/(x+1)} - 3\right) = -3;$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0}\left(2^{2/(x+1)} - 3\right) = -3;$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0}\left(2^{2/(x+1)} - 3\right) = +\infty .$$

Отже, у точці $x = -1$ функція має нескінченний стрибок (рис. 55).

У точці $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}\left(2^{2/(x+1)} - 3\right) = -1;$$

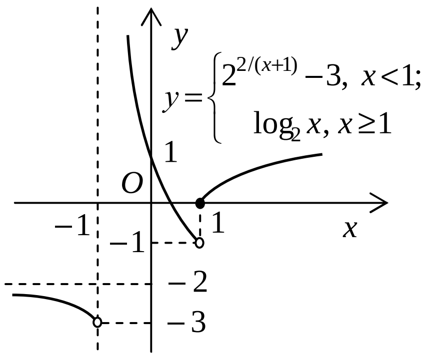


Рис. 55

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to 1+0} \log_2 x = 0;$$

$$f(1) = \log_2 1 = 0.$$

Отже, у точці $x = 1$ функція має скінченний стрибок висотою 1 (рис. 55). ■

1.4.7. Застосування функцій в економіці

Наявність функціональних залежностей між економічними показниками дозволяє використовувати для опису і дослідження економічних задач поняття функції та інші засоби математичного аналізу. Наведемо деякі приклади:

1. ***Функція попиту від ціни*** $q = f(p)$ – залежність попиту q на товар від його ціни p. Функції попиту можуть бути найрізноманітнішими, зокрема,

$$q = 600/(p+3) + 10; \quad q = ae^{-3p}, \text{ де } a = const.$$

2. Оберненою до попередньої є ***функція ціни від попиту***

$p=\varphi(q)$. Це можуть бути, зокрема, залежності

$$p=3-0{,}5\ln aq;\ p=aq^{-0{,}6},\text{ де } a=const.$$

3. Нехай u – сумарний виторг при реалізації q одиниць товару за ціною p, що залежить від попиту $p=\varphi(q)$. Тоді ***функція сумарного виторгу*** $u=f(q)$ визначається як добуток кількості одиниць товару q на його ціну p: $u=f(q)=q\varphi(q)$. Наприклад, якщо залежність ціни від попиту $p=3-0{,}5\ln aq$, то функція сумарного виторгу: $u=q(3-0{,}5\ln aq)$.

4. ***Функція пропозиції*** $S=f(p)$ – залежність пропозиції S товару від його ціни p. Обернена функція $p=\varphi(S)$ є ***функцією ціни від пропозиції***.

5. ***Функція сумарних витрат*** $K=F(x)$ – залежність сумарних витрат K на виробництво x одиниць товару від їх кількості x. Якщо розділити сумарні витрати K на кількість виробленого товару x, то одержимо ***функцію середніх*** (***питомих***) ***витрат*** (***собівартість*** одиниці товару) $П=f(x)$:

$$П=f(x)=K/x=F(x)/x.$$

6. ***Функція корисності*** (***функція переваг***) $y=f(x)$ – залежність ступеня корисності y (результату, ефекту) дії певного економічного фактору від рівня x (кількості, інтенсивності) цього фактору.

<u>Приклад 1</u>. Дослідження показують, що залежності попиту y на товари першої необхідності і попиту z на предмети розкоші від рівня доходу x покупців описуються функціями Л. Торнквіста:

$$y=\frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1},\ x>a_1>c_1;\ \ z=\frac{b_2x(x-a_2)}{x-c_2},\ x>a_2>c_2;$$

$$a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2=const.$$

Тут a_1 і a_2 – рівні доходу, при яких починається придбання відповідного товару, $a_2>a_1$. Знайти граничний попит при

$x \to \infty$.

$$\square \quad \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = b_1 \lim_{x\to\infty} \frac{1-a_1/x}{1-c_1/x} = b_1;$$

$$\lim_{x\to\infty} z = \lim_{x\to\infty} \frac{b_2 x(x-a_2)}{x-c_2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = b_2 \lim_{x\to\infty} \frac{1-a_2/x^2}{1/x-c_2/x^2} = \infty.$$

Таким чином, при необмеженому зростанні рівня доходів попит на товари першої необхідності наближається до стану насичення $y = b_1$, а попит на предмети розкоші необмежено зростає. ■

Приклад 2. Підприємство після корінної модернізації за перший рік роботи отримає 2 млн. 800 тис. грн. прибутку, витративши за цей час на нове обладнання і перебудову технологічних процесів 6 млн. 400 тис. грн. У кожному наступному році прибуток зростатиме на 500 тис. грн., а витрати зменшуватимуться на 400 тис. грн. Через скільки років з моменту модернізації підприємства сума всіх витрат дорівнюватиме сумі прибутку?

(Розв’язати самостійно).

Приклад 3. Витрати на перевезення двома видами транспорту задаються функціями: $y = 50x + 100$ і $y = 25x + 300$, де x – відстань перевезень, км; y – транспортні витрати, грош. од. При яких відстанях вигідніше користуватися першим видом транспорту? (Розв’язати самостійно).

1.5. Контрольні запитання

1) Що служить координатною сіткою декартової системи координат на площині?
2) Як обчислюється відстань між двома точками на площині?
3) Як обчислюються координати точки, що ділить даний відрізок у вказаному відношенні?
4) Як знаходяться координати середини відрізка?
5) Який вигляд має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом? Чи кожну пряму можна подати рівнянням такого вигляду?
6) Який вигляд має рівняння прямої, що паралельна осі ординат Oy?

7) Наведіть приклад рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку.
8) Як записується рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
9) Який вигляд має рівняння прямої у відрізках на осях?
10) Запишіть загальне рівняння прямої. У чому полягає неоднозначність загального рівняння прямої?
11) Як знайти гострий кут між двома похилими прямими?
12) Яка умова паралельності двох похилих прямих?
13) Яка умова перпендикулярності двох похилих прямих?
14) За якою формулою обчислюється відстань від точки до прямої?
15) Який вигляд має загальне рівняння лінії другого порядку? Наведіть всі типи ліній другого порядку.
16) Що називається колом? Запишіть канонічне рівняння кола та рівняння кола із заданим центром і радіусом.
17) Що називається еліпсом? Який вигляд має канонічне рівняння еліпса.
18) Яке співвідношення пов'язує велику a і малу b півосі еліпса та половину c міжфокусної відстані?
19) Яка лінія називається гіперболою? Запишіть канонічне рівняння гіперболи.
20) Яким співвідношенням зв'язані дійсна a і уявна b півосі гіперболи та половина c міжфокусної відстані?
21) Що таке асимптота кривої?
22) Які рівняння асимптот гіперболи?
23) Яка лінія називається параболою? Наведіть приклад канонічного рівняння параболи.
24) Що таке ексцентриситет еліпса, гіперболи, параболи?
25) Як залежить форма еліпса (гіперболи) від значення ексцентриситету?
26) Які рівняння директрис еліпса, гіперболи, параболи?
27) У чому полягає властивість директрис еліпса, гіперболи, параболи?
28) Наведіть приклади параметричних рівнянь прямої та кола.
29) Наведіть приклади використання прямої лінії (лінійної залежності) та кривих другого порядку в економічних задачах.

30) Які величини називають сталим та змінними? Наведіть приклади.
31) Що таке обмежена змінна величина? Необмежена змінна величина?
32) Наведіть приклади обмежених та необмежених величин.
33) Яка змінна величина називається зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?
34) Які змінні величини називають нескінченно малими? Нескінченно великими?
35) У чому полягає геометричний зміст нескінченно малої величини?
36) Які властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин. Як ці величини зв'язані?
37) Як порівнюють між собою нескінченно малі величини? Що таке еквівалентні нескінченно малі?
38) Що таке границя змінної величини?
39) Перелічіть основні властивості границь, які ґрунтуються на властивостях нескінченно малих величин.
40) Сформулюйте ознаки існування границі змінної величини.
41) Що можна сказати про границю обмеженої монотонної величини?
42) Що називається першою стандартною границею? Другою стандартною границею? Які їх наслідки.
43) Дайте економічну інтерпретацію числа Ейлера e.
44) Як здійснюється порівняння нескінченно малих величин? Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих.
45) Як розкривається невизначеність виду ∞/∞ для многочленів?
46) Як розкривається невизначеність виду $0/0$ для многочленів?
47) Як розкривається невизначеність виду $0/0$ для ірраціональних та тригонометричних виразів?
48) Дайте означення функції. Що називається областю визначення, областю значень і законом відповідності функції?
49) Що таке природна область визначення аналітично заданої функції? Як вона знаходиться?
50) Що таке графік функції? Які основні способи задання функції Ви знаєте?

51) Розкрийте сутність таких понять, як: обмежена та необмежена функція; функція парна та непарна; функція загального вигляду?
52) Яка функція називається сталою? Зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?
53) Яка функція називається періодичною? Наведіть приклади періодичних функцій.
54) Яку функцію називають складеною? Наведіть приклади.
55) Яка функція називається оберненою до даної? Що можна сказати щодо розміщені графіків взаємно обернених функцій?
56) Яка функція називається елементарною? Наведіть приклади алгебраїчних та трансцендентних функцій.
57) Наведіть приклади границь, що відображають властивості основних елементарних функцій.
58) Що таке приріст аргументу і відповідний приріст функції? Дайте означення неперервності функції в точці «мовою приростів».
59) Що таке ліва та права границі функції в точці? Дайте означення неперервності функції в точці через односторонні границі.
60) Які основні властивості мають функції неперервні в точці?
61) Які основні властивості функцій, неперервних на відрізку? Сформулюйте теореми про обмеженість функції та існування найменшого та найбільшого значень, про перетворення функції на нуль, про проміжне значення.
62) Яка функція називається розривною?
63) Що таке точка розриву першого роду? Другого роду?
64) Поясніть відмінність між точками розриву першого та другого роду?
65) Наведіть приклади точок усувного розриву, скінченного та нескінченного стрибка.
66) Наведіть приклади точок нескінченного стрибка.
67) Наведіть приклади точок розриву другого роду,що не є точками нескінченного стрибка.
68) Як знаходять точки розриву аналітично заданої функції? Які точки є «підозрілими» на розрив?
69) Наведіть приклади застосування функцій в економіці. Залежність між якими змінними відображена в цих функціях?

Змістовий модуль 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

2.1. Диференціальне числення функції однієї змінної

При дослідженні різних економічних величин (попиту, витрат виробництва, національного прибутку і т.п.) доводиться визначати швидкість їх зміни.

2.1.1. Похідна. Її механічний та геометричний зміст

Поняття похідної. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і $x_0 \in (a;b)$. Надамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x_0 + \Delta x \in (a;b)$. Оскільки точка x_0 фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\Delta y / \Delta x$, яке також буде функцією приросту аргументу Δx.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається швидкість змінювання функції y в цій точці відносно змінювання аргументу x. *Похідна дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля* $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Еквівалентні позначення похідної y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 записується так: $f'(x_0)$, або $y = f'(x)\big|_{x=x_0}$, або $df(x_0)/dx$.

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням*** функції. Функція, що має похідну у точці x_0, називається ***диференційованою*** у цій точці.

Коли функція $y = f(x)$ диференційована у кожній точці проміжку $(a;b)$, то кажуть, що вона ***диференційована на промі-***

жку $(a;b)$. Похідна функції $y=f(x)$, диференційованої у проміжку $(a;b)$, сама є функцією x.

Теорема (зв’язок між поняттями диференційованості та неперервності). *Якщо функція $y=f(x)$ диференційована в деякій точці x_0, то вона неперервна в цій точці.*

$$\square\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=y'\cdot 0=0\,.\ \blacksquare$$

Зауваження. З цієї теореми випливає, що неперервність функції є необхідною умовою диференційованості функції. Це означає, що в точках розриву функція не диференційована. Проте ця умова не є достатньою. Якщо функція $y=f(x)$ неперервна в деякій точці x_0, то вона може бути як диференційованою, так і недиференційованою в цій точці. Наприклад, $y=|x|$ – недиференційована в точці $x=0$, хоч у цій точці неперервна.

Приклад 1. Дано функцію $y=x^2$. Знайти її похідну y':

а) у довільній точці x; б) коли $x=-3$.

$\square$ а) Для будь-якого x маємо $y=x^2$. Якщо аргумент дорівнює $x+\Delta x$, то $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$. Звідси

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Тоді $\Delta y/\Delta x=(2x\Delta x+(\Delta x)^2)/\Delta x=2x+\Delta x$. Обчислимо похідну $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$. б) $y'\big|_{x=-3}=2\cdot(-3)=-6$. $\blacksquare$

Механічний зміст похідної. Нехай матеріальна точка рухається під дією деяких сил. Візьмемо який-небудь момент часу t_0 і розглянемо проміжок часу Δt від моменту t_0 до моменту $t=t_0+\Delta t$. За цей проміжок часу точка пройде певний шлях, який позначимо через $\Delta S(t_0)$. Цей шлях – функція Δt. За відомим з фізики означенням, відношення $\Delta S(t_0)/\Delta t$ є середня швидкість руху точки за час Δt. Розглядатимемо дедалі коротші проміжки Δt, що прямують до нуля. Границя

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta S(t_0)/\Delta t = S'(t_0) = V(t_0)$$

є миттєвою швидкістю точки у момент часу t_0.

Геометричний сенс похідної. Дотична і нормаль. Нехай дано деяку лінію *L* і на ній точку *M* (рис. 56). Візьмемо на лінії *L* деяку точку *N*, яка не збігається з точкою *M*. Пряма *MN* є січною для лінії *L*. Нехай тепер точка *N* наближається до точки *M*, залишаючись на лінії *L*. Тоді кожному положенню точки *N* відповідатиме своя січна і усі ці січні проходитимуть через точку *M*.

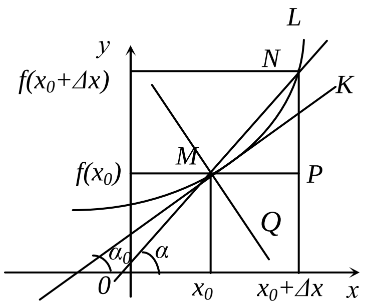


Рис. 56

Дотичною до лінії *L* у точці *M* називається граничне положення *MK* січної *MN*, якщо точка *N* прямує до точки *M*. Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, графіком якої є лінія *L*, диференційована у точці x_0. У декартовій прямокутній системі координат точка *M*, яка лежить на графіку функції $y = f(x)$ має координати $(x_0;\ f(x_0))$. Нехай точка *N* належить графіку функції (рис. 56) і має координати $((x_0 + \Delta x);\ f(x_0 + \Delta x))$. Проведемо через точку *M* пряму, паралельну Ox, і позначимо точку її перетину з прямою $x = x_0 + \Delta x$ через *P*. Розглянемо прямокутний трикутник *MNP*.

Відношення $(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x = tg\,\alpha$ дорівнює тангенсу кута нахилу січної *MN* до додатного напряму осі Ox.

Якщо приріст $\Delta x \to 0$, то геометрично це означає, що точка $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ рухатиметься по лінії *L*, наближаючись до точки *M*, а кут α прямуватиме до кута α_0 – кута нахилу дотичної до додатного напряму осі Ox. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x\right] = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\alpha .$$

Оскільки границя лівої частини рівності дорівнює $y'_0 = f'(x_0)$, а границя правої частини дорівнює $tg\,\alpha_0$, тому

$tg\,\alpha_0 = y'_0$. тобто *значення похідної функції* $f'(x)$, *у точці* x_0, *дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної*.

Тоді рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку M з координатами $(x_0; y_0)$, можна записати у вигляді

$$\boxed{y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0)}.$$

Пряма *MQ*, яка проходить через точку дотику *M* і перпендикулярна до дотичної *MK*, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***). Її рівняння

$$\boxed{y - y_0 = \left(-1/y'_0\right) \cdot (x - x_0)}.$$

Приклад 2. Знайти кут нахилу дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці $M(1/2; 1/4)$. Скласти рівняння дотичної.

□ Візьмемо похідну від функції $y = x^2$: $y' = 2x$. Тоді:

$tg\,\alpha = y'(x_0) = 2 \cdot (1/2) = 1$; $\alpha = arctg 1 = 45^\circ$ – кут нахилу дотичної; $y - 1/4 = 1 \cdot (x - 1/2)$; $y = x - 1/4$ – дотична. ■

Економічний зміст похідної. Нехай витрати виробництва V деякої продукції є функцією її кількості x, тобто $V = V(x)$. Припустимо, що кількість продукції збільшується на Δx і досягає значення $x + \Delta x$, якому відповідають витрати виробництва $V(x + \Delta x)$. При цьому приріст витрат виробництва становить $\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x)$. Середній приріст витрат на одиницю приросту продукції $\Delta V / \Delta x$.

Маргінальними (***граничними***) ***витратами*** називають гранично можливі витрати в умовах хоча би простого відтворення виробництва (при $\Delta x \to 0$), тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\Delta V / \Delta x\right)$. Але за означенням похідної $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\Delta V / \Delta x\right) = V'(x)$, тобто *похідна* $V'(x)$ *є маргінальними витратами виробництва*.

Позначимо через $D(x)$ та $P(x)$ відповідно дохід і прибуток при виробництві та реалізації x одиниць продукції. Тоді, аналогічно, визначаються:

маргінальний дохід $D'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\Delta D / \Delta x \right)$;

маргінальний прибуток $P'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\Delta P / \Delta x \right)$.

2.1.2. Правила диференціювання. Похідна складеної та оберненої функцій

Правила диференціювання. Нехай маємо деякі функції $u = u(x)$, $v = v(x)$, які диференційовані у проміжку $(a; b)$. Тоді:

1) Якщо $y = cu$, то $\boxed{y' = (cu)' = cu'}$, де $c = const$,

тобто *сталий множник можна виносити з-під знаку похідної*;

2) Якщо $y = u \pm v$, то $y' = (u \pm v)' = u' \pm v'$,

тобто *похідна суми або різниці функцій дорівнює відповідно сумі або різниці їх похідних*;

3) Якщо $y = uv$, то $\boxed{y' = (uv)' = u'v + v'u}$,

тобто *похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію*;

4) Якщо $y = \frac{u}{v}$, де $v \neq 0$, то $\boxed{y' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$,

тобто *похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадрат знаменника, а чисельник є різниця між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник*.

Кожне з цих правил можна розглядати як теорему.

Доведемо, наприклад, правило для дробу $y = u / v$. Якщо Δy, Δu і Δv є прирости функцій $y(x)$), $u(x)$, $v(x)$, відповідні приросту Δx аргументу x, то $y + \Delta y = (u + \Delta u) / (v + \Delta v)$,

$$\Delta y = (u + \Delta u) / (v + \Delta v) - u / v = (v \Delta u - u \Delta v) / (v(v + \Delta v)).$$

Останню рівність розділимо на Δx:

$$\Delta y / \Delta x = (v \Delta u - u \Delta v) / (\Delta x \cdot v(v + \Delta v)) =$$

$$=(v\Delta u/\Delta x-u\Delta v/\Delta x)/(v(v+\Delta v)).$$

Знайдемо границю цього співвідношення. Маємо:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}(v\Delta u/\Delta x-u\Delta v/\Delta x)/\lim_{\Delta x\to 0}(v(v+\Delta v))=$$

$$=(v\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u/\Delta x-u\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v/\Delta x)/(v^2+v\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v).$$

Так як $v(x)$ – диференційована і, отже, неперервна функція, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$. Маємо $y'=(vu'-uv')/v^2$, де $v\neq 0$.

Теорема 1 (похідна складеної функції). *Якщо функція* $u=u(x)$ *має похідну у деякій точці* $x\in(a;b)$, *а функція* $y=f(u)$ *має похідну у відповідній точці* $u=u(x)$, *то й складена функція* $y=f(u(x))$ *має похідну у точці* x, *причому*

$$\boxed{y'_x=(f(u(x))'=y'_u(u)\cdot u'_x(x)},$$

де індекси y і x біля похідних вказують, за якою змінною обчислюють похідні. Тобто *похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну внутрішньої функції.*

$$\square\quad y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\begin{vmatrix}\Delta x\to 0\\ \Delta u\to 0\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}(\Delta y/\Delta u)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta u/\Delta x)=y'_u\cdot u'_x.\quad\blacksquare$$

Зауваження. Якщо складена функція є результатом цілого ряду суперпозицій, то для знаходження її похідної за проміжний аргумент треба взяти результат всіх цих суперпозицій, крім останньої.

Теорема 2 (похідна оберненої функції). *Нехай функція* $y=f(x)$ *задовольняє умові існування оберненої функції і у точці* $x\in(a;b)$ *має скінчену і відмінну від нуля похідну. Тоді обернена функція* $x=f^{-1}(y)$ *у відповідній точці* $y=f(x)$ *також має похідну. Похідні цих взаємно обернених функцій зв'язані рівністю*

$$\boxed{(f^{-1}(y))'_y = 1/f'_x(x)}.$$

$$\square \quad x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \left| \begin{matrix} \Delta y \to 0 \\ \Delta x \to 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= 1 \Big/ \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y / \Delta x) = 1 / y'_x . \quad \blacksquare$$

2.1.3. Основні формули диференціювання

Похідні основних елементарних функцій подамо всі разом (табл. 2, де $u = u(x)$), а потім вибірково доведемо деякі з них.

Таблиця 2

Формули похідних		
1. Основні формули		
№ п/п	Функція	Похідна
1	Стала функція	$C' = 0$
2	Степенева функція	$\left(u^a\right)' = a u^{a-1} \cdot u'$
2а	x	$x' = 1$
2б	$\sqrt{u}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
2в	$\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
3	Показникова функція	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
3а	Експонента	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

Продовж. табл. 2

4	Логарифмічна функція	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
4а	Натуральний логарифм	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5	Синус	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
6	Косинус	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
7	Тангенс	$(tg\ u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
8	Котангенс	$(ctg\ u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
9	Арксинус	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10	Арккосинус	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
1	Арктангенс	$(arctg\ u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
2	Арккотангенс	$(arcctg\ u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Доведемо деякі наведені формули диференціювання.

Теорема 1. *Похідна від* $\sin x$ *є* $\cos x$.

□ Дамо аргументу x приріст Δx. Тоді

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),\ \text{де}\ y = \sin x;$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin((x + \Delta x - x)/2) \times$$

$$\times\cos((x+\Delta x+x)/2)=2\sin x(\Delta x/2)\cdot\cos(x+\Delta x/2).$$

Розділимо на Δx:

$$\Delta y/\Delta x=(2\sin x(\Delta x/2)\cdot\cos(x+\Delta x/2))/\Delta x.$$

Знайдемо границю

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}(\sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2)\times$$

$\times\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)$. Але $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2))=1$,

тому $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x$. Остання рівність випливає з неперервності функції $\cos x$. ■

Теорема 2. *Похідна від* $tg\,x$ *є* $1/\cos^2 x$.

□ Похідну функції $y=tg\,x=\sin x/\cos x$ можна знайти за правилом диференціювання дробу

$$y'=\left((\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x\right)/\cos^2 x=$$

$$=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)/\cos^2 x=1/\cos^2 x. \ ■$$

Теорема 3. *Похідна від функції* $\log_a x$ *є* $1/(x\cdot\ln a)$.

□ Якщо Δy є приріст функції $y=\log_a x$, який відповідає приросту Δx аргументу x, то

$$y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x);\quad \Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x;$$

$$\Delta y=\log_a(1+\Delta x/x);\quad \Delta y/\Delta x=(1/\Delta x)\log_a(1+\Delta x/x).$$

Помножимо і поділимо на x вираз, який стоїть праворуч у останній рівності: $\Delta y/\Delta x=(1/x)(x/\Delta x)\log_a(1+\Delta x/x)=$

$=(1/x)\log_a(1+\Delta x/x)^{x/\Delta x}$. Тоді

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}(1/x)\log_a(1+\Delta x/x)^{x/\Delta x}=$$

$$=(1/x)\log_a\lim_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x/x)^{x/\Delta x}=(1/x)\log_a e=1/(x\cdot\ln a). \ ■$$

Теорема 4. *Похідна від* $y=\arcsin x$ *є* $1/\sqrt{1-x^2}$.

□ Оберненою функцією до функції $y = \arcsin x$ є функція $x = \sin y$. За теоремою про похідну оберненої функції маємо $(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = 1/(\cos(\arcsin x))$.

Оскільки $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, то $y' = 1/\sqrt{1-x^2}$. ■

<u>Приклад</u>. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y = x^3 \cos 7x$; б) $y = 3^{arcctg\, 2x} - \sqrt{\ln(1+3x^2)}$;

в) $y = x^2 / \sin 5x$; г) $y = 6^{\cos x} + \cos^6 x - \cos x^6 + e^{\pi}$.

□ а) $y' = (x^3 \cos 7x)' = (x^3)' \cos 7x + x^3 (\cos 7x)' =$

$$= 3x^2 \cos 7x - 7x^3 \sin 7x;$$

б) $$y' = \left(3^{arcctg 2x} - \sqrt{\ln(1+3x^2)}\right)' = \left(3^{arcctg 2x}\right)' - \left(\sqrt{\ln(1+3x^2)}\right)' =$$

$$= 3^{arcctg\, 2x} \cdot \ln 3 \cdot (arcctg\, 2x)' - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+3x^2)}} \left(\ln(1+3x^2)\right)' =$$

$$= -3^{arcctg\, 2x} \cdot \frac{\ln 3}{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+3x^2)}} \cdot \frac{1}{1+3x^2} \left(1+3x^2\right)' =$$

$$= -3^{arcctg\, 2x} \cdot \frac{\ln 3}{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+3x^2)}} \cdot \frac{1}{1+3x^2} \cdot 6x;$$

в) $$y' = (x^2 / \sin 5x)' = \left((x^2)' \sin 5x - (\sin 5x)' x^2\right):$$

$$: \sin^2 5x = \left(2x \sin 5x - 5\cos 5x \cdot x^2\right) / \sin^2 5x = .$$

$$= x\left(2\sin 5x - 5x\cos 5x\right) / \sin^2 5x;$$

г) $$y' = \left(6^{\cos x} + \cos^6 x - \cos x^6 + e^{\pi}\right)' = \left(6^{\cos x}\right)' + \left(\cos^6 x\right)' -$$

$$- \left(\cos x^6\right)' + \left(e^{\pi}\right)' = 6^{\cos x} \ln 6 \cdot (\cos x)' + 6\cos^5 x \cdot (\cos x)' - \left(-\sin x^6\right) \times$$

$$\times \left(x^6\right)' + 0 = 6^{\cos x} \ln 6 \cdot (-\sin x) + 6\cos^5 x \cdot (-\sin x) + \sin x^6 \cdot 6x^5.$$ ■

2.1.4. Диференціювання неявно заданої функції. Правило логарифмічного диференціювання

Правило диференціювання функції $y = y(x)$, що задана неявно рівнянням $F_1(x, y) = F_2(x, y)$:

1) продиференціювати ліву і праву частини рівняння, що задає функцію, розглядаючи y *як функцію від* x, *тобто застосовуючи правило диференціювання складеної функції*;

2) з одержаної рівності знайти y'.

Зауваження 1. Похідна неявної функції $y = y(x)$, в загальному випадку, виражається не тільки через значення аргументу x, а й через значення функції y при даному значенні x.

Приклад 1. Знайти похідну y' неявної функції $y = y(x)$, що задана рівнянням $tg\,(2x - y) + 2x^3 = 1 + x^2 y$ у точці $M(2;4)$. Скласти рівняння нормалі.

□ $\left(tg\,(2x-y)+2x^3\right)' = \left(1+x^2y\right)'$; $\dfrac{1}{\cos^2(2x-y)}(2x-y)'+$

$$+\,3\cdot 2x^2 = 0 + \left(x^2\right)' y + x^2 (y)';$$

$$\left(1/\cos^2(2x+y)\right)(2-y') + 6x^2 = 2xy + x^2\cdot y';$$

$$2 - y' + 6x^2\cos^2(2x-y) = 2xy\cos^2(2x-y) + x^2y'\cos^2(2x-y);$$

$$y' = \left(2 - 2xy\cos^2(2x-y) + 6x^2\cos^2(2x-y)\right)/\left(1+\right.$$

$$\left.+\,x^2\cos^2(2x-y)\right);$$

$$y'\big|_{M(2;4)} = \left(2 - 2\cdot 2\cdot 4\cos^2(2\cdot 2-4) + 6\cdot 2^2\cos^2(2\cdot 2-4)\right):$$

$$:\left(1 + 2^2\cdot\cos^2(2\cdot 2-4)\right) = 2\,.$$

Рівняння нормалі $y - y_0 = \left(-1/y'_0\right)\cdot(x - x_0)$;

$$y - 4 = \left(-1/2\right)\cdot\left(x-2\right);\quad y = (-1/2)\,x + 5\,. \ \blacksquare$$

Зауваження 2. У деяких випадках при диференціюванні навіть явної функції зручно попередньо перейти до її неявного задання.

Правило логарифмічного диференціювання явно заданої функції $y = f(x)$:

1) прологарифмувати ліву і праву частини відповідного рівняння $y = f(x)$*;*

2) до результату логарифмування застосувати правило диференціювання неявної функції;

3) виразити y' *та у співвідношенні для похідної* y' *замість* y *підставити вираз* $f(x)$.

Теорема 2. *Похідна від* $y = x^{\alpha}$*, де* $\alpha \in R$*, є* $\alpha x^{\alpha-1}$.

□ Нехай $x > 0$. Логарифмуємо дану функцію, маємо $\ln y = \alpha \ln x$. Візьмемо похідну від обох частин рівності

$y'/y = \alpha/x$. Звідси $y' = y(\alpha/x) = x^{\alpha}(\alpha/x) = \alpha x^{\alpha-1}$. ■

Теорема 3. *Похідна від показниково-степеневої функції* $y = u(x)^{v(x)}$ *є* $\left(u^{v}\right)' = u^{v}(v'\ln u + vu'/u)$.

□ Логарифмуємо дану функцію $\ln y = v \ln u$. Візьмемо похідну від обох частин рівності $y'/y = v'\ln u + v \cdot u'/u$. Звідси $y' = u^{v}(v'\ln u + vu'/u)$. ■

Зауваження 3. Логарифмічне диференціювання зручно застосовувати, коли функція $y = f(x)$ є багатократним добутком (часткою) степеневих, показникових і показниково-степеневих функцій.

Приклад 2. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y = x^{\sin x}$;   б) $y = (3x+1)^{7}\sqrt[3]{(4-x)^{5}}\Big/\left(7^{4\sin x}(2x+5)\right)$.

□ а) $\ln y = \sin x \ln x$; $y'/y = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot (1/x)$;

$$y' = \left[\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right] \cdot y = \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x}\sin x\right] x^{\sin x};$$

б) $\ln y = \ln(3x+1)^{7} + \ln\sqrt[3]{(4-x)^{5}} - \ln 7^{4\sin x} - \ln(2x+5)$;

$$\ln y = 7\ln(3x+1) + (5/3)\ln(4-x) - 4\sin x \cdot \ln 7 - \ln(2x+5).$$

Візьмемо похідну від обох частин одержаної рівності

$$\frac{y'}{y}=\frac{7}{3x+1}\cdot 3+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4-x}\cdot(-1)-4\ln 7\cdot\cos x-\frac{2}{2x+5}.$$

Звідси

$$y'=\bigl(21/(3x+1)-5/(12-4x)-4\ln 7\cdot\cos x-2/(2x+5)\bigr)\times$$

$$\times(3x+1)^7\sqrt[3]{(4-x)^5}\Big/\bigl(7^{4\sin x}(2x+5)\bigr). \quad\blacksquare$$

2.1.5. Похідна параметрично заданої функції

Теорема (похідна параметрично заданої функції). *Нехай функцію* $y=f(x)$ *задано у параметричному вигляді:* $y=\psi(t)$, $x=\varphi(t)$, *де* t *– параметр. Якщо функції* $\psi(t)$ *і* $\varphi(t)$ *диференційовані на інтервалі* $(\alpha;\beta)$ *і функція* $\varphi(t)$ *має обернену, причому* $\varphi'_t(t)\neq 0$, *то похідна функції* $y=f(x)$ *знаходиться як відношення* $\boxed{y'_x=\psi'(t)/\varphi'(t)=y'_t/x'_t}$.

□ Функція $\varphi(t)$ має обернену функцію $t=t(x)$, їх похідні зв'язані рівністю $x'_t=1/t'_x$. Звідки $t'_x=1/x'_t$.

Підставивши $t=t(x)$ у друге параметричне рівняння, дістанемо явну форму задання функції $y=f(x)$: $y=\psi(t(x))$.

Обчислимо її похідну як похідну складеної функції $y'_x=\psi'_t\cdot t'_x$. Тоді $y'_x=\psi'(t)\cdot\left(1/x'_t\right)=\psi'(t)/\varphi'(t)=y'_t/x'_t$. ■

Зауваження. Похідна параметрично заданої функції також є параметрично заданою функцією: $y'_x=y'_t/x'_t$; $x=x(t)$.

Приклад 1. Знайти кут нахилу α дотичної до графіка функції $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, де $0\le t\le\pi$, у точці, яка відповідає значенню параметра $t_0=\pi/4$. Скласти рівняння дотичної.

□ $y'_x=(a\sin t)'_t/(a\cos t)'_t=(a\cos t)/(a\sin t)=-ctg\,t$;

$tg\,\alpha=y'_{x0}=-ctg\,(\pi/4)=-1$. Звідси $\alpha=135^0=3\pi/4$.

Знайдемо координати точки дотику $M_0(x_0;\,y_0)$:

$$x_0 = a\cos t_0 = \sqrt{2}\,a/2\,;\quad y_0 = a\sin t_0 = \sqrt{2}\,a/2\,;$$

Тоді рівняння дотичної $y - y_0 = y'_{x0}\cdot(x - x_0)$;

$$y - \sqrt{2}\,a/2 = -1\cdot\left(x - \sqrt{2}\,a/2\right);\quad y = -x + \sqrt{2}\,a\,. \ \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Нехай з бігом часу t (років) валовий продукт P (млрд. дол.) деякої держави змінюється за формулою $P = 1000 + 5\ln(1+t)$, а кількість населення N (млн.) зростає за законом $N = 2000 + 2\sqrt{t}$. Знайти швидкість зміни валового продукту держави відносно кількості населення. Обчислити значення цієї швидкості в момент часу $t_0 = 4$.

□ Використовуючи механічний зміст похідної та правило диференціювання параметрично заданої функції $P = P(N)$, знайдемо шукану швидкість P'_N:

$$P'_t = \frac{5}{1+t};\quad N'_t = \frac{1}{\sqrt{t}};\quad P'_N = \frac{P'_t}{N'_t} = \frac{5}{1+t} : \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{5\sqrt{t}}{1+t}.$$

Обчислимо значення цієї швидкості в момент часу $t_0 = 4$:

$$P'_N\Big|_{t=4} = 5\sqrt{4}\big/(1+4) = 2\,. \quad \blacksquare$$

2.1.6. Приклади застосування похідної в економічних дослідженнях: темп зростання та еластичність функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Швидкість її змінювання визначається, як відомо, похідною $y' = f(x)$.

В економічних дослідженнях прирости тих чи інших показників, що характеризують економічні процеси, найчастіше виражають у відносних величинах, зокрема, у відсотках до базових значень. Тому і характер взаємного змінювання кількісних економічних характеристик, зв’язаних функціональною залежністю, також подають у відносних величинах, зокрема, у відсотках. Для цього використовують поняття ***темпу змінювання*** і ***еластичності*** функції, що виражаються через похідну.

Якщо аргумент x одержав приріст Δx, а при цьому функція y одержала приріст Δy, то відношення $\Delta x / x$ називають відносним приростом аргументу, а відношення $\Delta y / y$ – відносним приростом функції.

Границю відношення відносного приросту функції $\Delta y / y$ до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля, при умові, що границя існує, називають ***темпом*** (***відносною швидкістю***) ***змінювання функції*** $y = f(x)$ і позначають $T_x(y)$:

$$T_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \Delta x\right) = \frac{1}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'}{y}. \text{ Отже } \boxed{T_x(y) = y'/y}.$$

<u>Зауваження 1</u>. Оскільки $(\ln y)' = y'/y$, то *темп змінювання функції дорівнює її логарифмічній похідній*: $\boxed{T_x(y) = (\ln y)'}$.

<u>Зауваження 2</u>. Темп зростання звичайно виражають в процентах.

Границю відношення відносного приросту функції до відносного приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, при умові, що границя існує, називають ***еластичністю функції*** і позначають $E_x(y)$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{x}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Отже, якщо в точці x функція має похідну, то еластичність обчислюється за формулою

$$\boxed{E_x(y) = x\,y'/y} \quad \text{або} \quad \boxed{E_x(y) = xT_x(y)}.$$

<u>Зауваження 3</u>. За означенням границі маємо

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} - E_x(y) = \alpha \to 0. \text{ Звідки } \boxed{\frac{\Delta y}{y} \approx E_x(y)\frac{\Delta x}{x}}.$$

Тобто, *еластичність виражає наближений відсоток приросту функції, який відповідає 1% приросту аргументу*.

Якщо $|E_x(y)| < 1$, то функцію $y = f(x)$ називають ***неелас-***

тичною (відносний її приріст за модулем спадає).

Якщо $\left|E_x(y)\right| > 1$, то функцію $y = f(x)$ називають ***еластичною*** (відносний її приріст за модулем зростає).

Якщо $E_x(y) = 0$, то функцію $y = f(x)$ називають ***нейтральною за еластичністю***.

Приклад 1. Продуктивність праці y бригади робітників на протязі робочої зміни може бути описана функцією $y = -24t\sqrt{t+2} + 69t + 100$, де t – робочий час в годинах, $0 \le t \le 8$. Обчислити швидкість і темп змінювання продуктивності праці при $t = 2$ і $t = 7$.

□ $$y' = -24\sqrt{t+2} - \frac{24t}{2\sqrt{t+2}} + 69 = \frac{69\sqrt{t+2} - 36t - 48}{\sqrt{t+2}};$$

$$T_t(y) = \frac{y'}{y} = \frac{69\sqrt{t+2} - 36t - 48}{\sqrt{t+2}\left(-24t\sqrt{t+2} + 69t + 100\right)}.$$

Тоді $y'(2) = \dfrac{69\sqrt{2+2} - 36\cdot 2 - 48}{\sqrt{2+2}} = 9$; $\quad T_t(y)\big|_{t=2} =$

$$= \frac{69\sqrt{2+2} - 36\cdot 2 - 48}{\sqrt{2+2}\left(-24\cdot 2\sqrt{2+2} + 69\cdot 2 + 100\right)} = \frac{9}{142} \approx 6{,}3\,\%;$$

$$y'(7) = \frac{69\sqrt{7+2} - 36\cdot 7 - 48}{\sqrt{7+2}} = -31;\ \ T_t(y)\big|_{t=7} =$$

$$= \frac{69\sqrt{7+2} - 36\cdot 7 - 48}{\sqrt{7+2}\left(-24\cdot 7\sqrt{7+2} + 69\cdot 7 + 100\right)} = -\frac{31}{79} \approx -39{,}2\,\%.$$

Знаки плюс і мінус показують, що на початку зміни (при $t = 2$) спостерігається зростання продуктивності праці, а в кінці зміни (при $t = 7$) – її зниження. ■

Приклад 2. Знайти еластичність функції $y = x^2 - 4x + 5$ і обчислити її при $x = 1$, $x = 2$, $x = 5$.

□ $E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'=\frac{x}{x^2-4x+5}(2x-4)=\frac{x(2x-4)}{x^2-4x+5}$;

$$E_x(y)\big|_{x=1}=\frac{1\cdot(2-4)}{1-4+5}=-1;\quad E_x(y)\big|_{x=2}=\frac{2\cdot(2\cdot 2-4)}{4-8+5}=0;$$

$$E_x(y)\big|_{x=5}=\frac{5\cdot(10-4)}{25-20+5}=3.$$

Отже, якщо x зросте на 1% з 1 до 1,01, то y спаде приблизно на 1%. Якщо x зросте на 1% з 2 до 2,02, то значення змінної y практично не зміниться. Якщо x зросте на 1% з 5 до 5,05, то y зросте приблизно на 3%. ■

Розглянемо <u>властивості еластичності</u> функції.

<u>Теорема 1</u>. *Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі еластичностей співмножників:* $\boxed{E_x(uv)=E_x(u)+E_x(v)}$.

□ За означенням еластичності

$$E_x(uv)=\frac{x}{uv}(uv)'=\frac{x}{uv}(u'v+v'u)=\frac{xu'v}{uv}+\frac{xv'u}{uv}=$$

$$=xu'/u+xv'/v=E_x(u)+E_x(u). \ ■$$

<u>Теорема 2</u>. *Еластичність частки двох функцій дорівнює різниці еластичностей діленого і дільника:*

$$\boxed{E_x(u/v)=E_x(u)-E_x(v)}.$$

(Довести самостійно).

<u>Теорема 3</u>. *Еластичність алгебраїчної суми* $u\pm v$ *двох функцій визначається за формулою*:

$$\boxed{E_x(u\pm v)=\frac{uE_x(u)\pm vE_x(v)}{u\pm v}}$$

(Довести самостійно).

Під час економічного аналізу і прогнозування цінової політики часто застосовуються поняття еластичності попиту і пропозиції.

Нехай p – ціна одного виробу, а Q – кількість виробів, вироблених і проданих за деякий час, що визначає попит. Величина попиту Q залежить від ціни p: $Q = f(p)$.

Нехай приріст ціни Δp викликає приріст попиту ΔQ. Відношення $\dfrac{\Delta p}{p} : \dfrac{\Delta Q}{Q}$ показує відносну зміну попиту, якщо ціна виробу зростає на 1%. ***Еластичність попиту відносно ціни*** позначається η і визначається рівністю $\boxed{\eta = E_p(Q) = \dfrac{p}{Q} \cdot \dfrac{dQ}{dp}}$.

Еластичність попиту відносно ціни наближено визначає, як змінюється попит на даний виріб, якщо його ціна зростає на 1%. Наприклад, якщо зростання ціни на 5% викликає спадання попиту на 9%, то еластичність буде $\eta \approx \dfrac{-9}{5} = -1{,}8$. Якщо еластичність попиту $\eta = -0{,}7$, то 10% зростання вартості товару викликає спадання попиту на $(-0{,}7) \cdot 10\% = -7\%$.

Якщо за абсолютною величиною відсоток зміни попиту більше відсотка зміни ціни $(\eta < -1)$, то попит називають ***еластичним***, якщо відсоток зміни попиту менше відсотка зміни ціни $(-1 < \eta < 0)$, то попит називають ***не еластичним***, а якщо відсоток зміни попиту рівний відсотку зміни ціни $(\eta = -1)$, то попит називають ***нейтральним***.

<u>Приклад 3</u>. Встановлено, що кількість вироблених і проданих виробів Q за ціною p визначається за формулою $Q = 1440 - 6p - p^2$, $0 < p < 35$. Визначити, при якій ціні p попит Q еластичний, нейтральний, не еластичний.

□ Еластичність попиту відносно ціни:

$$\eta = \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp} = \frac{p \cdot (-6 - 2p)}{1440 - 6p - p^2} = -\frac{6p + 2p^2}{1440 - 6p - p^2}.$$

Попит буде нейтральним, якщо $\eta = -1$. Розв'яжемо відповідне рівняння, враховуючи, що $Q = 1440 - 6p - p^2 > 0$ і

$0 < p < 35$:

$$-\frac{6p+2p^2}{1440-6p-p^2} = -1; \quad 6p+2p^2 = 1440-6p-p^2;$$

$$3p^2+12p-1440=0; \quad p^2+4p-480=0;$$

$$D = 4^2-4\cdot(-480) = 4^2(1+120) = 4^2\cdot 11^2; \quad \sqrt{D} = 4\cdot 11 = 44;$$

$$p_1 = \frac{-4-44}{2} = -24; \quad p_2 = \frac{-4+44}{2} = 20.$$

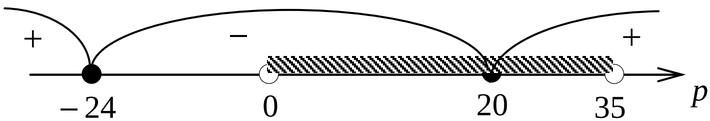
Корінь $p_1 = -24$ не задовольняє умові $0 < p < 35$. Отже, попит нейтральний при ціні $p = p_2 = 20$.

Попит буде еластичним або не еластичним, якщо, відповідно, $\eta < -1$ або $-1 < \eta < 0$. Спростимо відповідні нерівності, враховуючи, що $Q = 1440-6p-p^2 > 0$ і $0 < p < 35$, а потім застосуємо метод інтервалів при умові $0 < p < 35$:

$$-\frac{6p+2p^2}{1440-6p-p^2} < -1; \quad 6p+2p^2 > 1440-6p-p^2;$$

$$\underline{p^2+4p-480>0}; \text{ аналогічно } -1 < -\frac{6p+2p^2}{1440-6p-p^2} < 0;$$

$$6p+2p^2 < 1440-6p-p^2; \quad \underline{p^2+4p-480<0}.$$



Отже, попит еластичний при ціні $20 < p < 35$ і не еластичний при ціні $0 < p < 20$. ■

Розглянемо поняття еластичності пропозиції S в залежності від ціни товару p. Під пропозицією розуміють кількість деякого товару, який пропонується на продаж за одиницю часу. Пропозиція S є функцією від ціни товару: $S = S(p)$.

Еластичність пропозиції відносно ціни визначається рівністю $\boxed{E_p(S) = \frac{p}{S} \cdot \frac{dS}{dp}}$.

<u>Приклад 4</u>. Функція пропозиції деякого товару $S = \frac{p^2+6}{3p+4}$. Визначити еластичність пропозиції при ціні $p = 2$.

$$\square \; E_p(S) = \frac{p}{S} \cdot \frac{dS}{dp} = \frac{p(3p+4)}{p^2+6} \cdot \frac{2p(3p+4) - 3\left(p^2+6\right)}{(3p+4)^2} =$$

$$= \frac{p(3p^2+8p-18)}{(p^2+6)(3p+4)}; \;\; E_p(S)\Big|_{p=2} = \frac{2(3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 18)}{(2^2+6)(3 \cdot 2 + 4)} = 0{,}2.$$

Отже**,** при ціні $p = 2$ збільшення її на 1% викличе збільшення пропозиції на $0{,}2\%$. ■

2.1.7. Похідні вищих порядків. Механічний зміст другої похідної

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$. Похідна цієї функції $f'(x)$ є функцією аргументу x. Візьмемо деяку точку $x_0 \in (a;b)$. Дамо приріст аргументу $\Delta x = x - x_0$ і матимемо приріст функції $f'(x)$ у точці x_0:

$$\Delta f'(x_0) = f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0).$$

Розглянемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\Delta f'(x_0) / \Delta x\right) = f''(x_0)$.

Якщо ця границя існує, то кажуть, що функція $f(x)$ має ***похідну другого порядку*** (***другу похідну***) у точці x_0. Її позначають $y'' = f''(x_0)$, або $d^2 f(x_0) / dx^2$, або $f''(x)\big|_{x=x_0}$.

Похідну $f'(x)$ називають ***похідною першого порядку*** (***першою похідною***), а саму функцію $f(x)$ вважають ***похідною нульового порядку*** (***нульовою похідною***).

Отже, *друга похідна – це похідна від першої похідної*

$$\boxed{y'' = (y')'}.$$

Аналогічно визначають похідні третього і наступних порядків: $\boxed{y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'}$, $n = 1, 2, \ldots$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти y''', якщо $y = \cos^6 x$.

□ Послідовно знайдемо y', y'', y''':

$$y' = -6\cos^5 x \sin x; \quad y'' = \left(-6\cos^5 x \sin x\right)' = -6 \cdot \left(-5\cos^4 x \sin x \times\right.$$

$$\left.\times \sin x + \cos^5 x \cdot \cos x\right) = 30\cos^4 x \sin^2 x - 6\cos^6 x;$$

$$y''' = \left(30\cos^4 x \sin^2 x - 6\cos^6 x\right)' = 30 \cdot \left(-4\cos^3 x \cdot \sin x \cdot \sin^2 x + \right.$$

$$\left. + \cos^4 x \cdot 2\sin x \cdot \cos x\right) - 6 \cdot 6\cos^5 x\,(-\sin x) =$$

$$= -120\cos^3 x \sin^3 x + 24\cos^5 x \sin x. \quad \blacksquare$$

Знайдемо вираз для другої похідної y''_{xx} параметрично заданої функції $y = \psi(t)$, $x = \varphi(t)$.

За означенням

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (\psi'_t \cdot t'_x)'_x = (\psi'_t)'_x \cdot t'_x + \psi'_t (t'_x)'_x .$$

Обчисливши похідну по x від функції ψ'_t як похідну складеної функції $(\psi'_t)'_x = \psi''_{tt} \cdot t'_x$, дістанемо $y''_{xx} = \psi''_{tt}(t'_x)^2 + \psi'_t \cdot t''_{xx}$.

Оскільки $t'_x = 1/x'_t$, а

$$t''_{xx} = (t'_x)'_x = (1/x'_t)'_x = -(1/(x'_t)^2) \cdot x''_{tt} \cdot t'_x = -x''_{tt}/(x'_t)^3,$$

то остаточно маємо $\boxed{y''_{xx} = (y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt})/(x'_t)^3}$.

<u>Приклад 2</u>. Знайти d^2y/dx^2 для функції, заданої у параметричній формі $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$.

□ Спочатку обчислимо перші та другі похідні від даних функцій по параметру t:

$$x'_t = -2\sin t, \; x''_{tt} = -2\cos t; \quad y'_t = 3\cos t, \; y''_{tt} = -3\sin t.$$

Тоді $d^2y/dx^2=((-2\sin t)(-3\sin t)-(3\cos t)(-2\cos t)):$

$$:(-2\sin t)^3=-3/(4\sin^3 t).\ \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти другу похідну y'' функції, що задана неявно рівнянням $3\cos y = x^3+y$.

□ Спочатку обчислимо першу похідну:

$$(3\cos y)'=(x^3+3y)';\ -3\sin y\cdot y'=3x^2+3y';$$

$$y'=-x^2/(\sin y+1).$$

Далі знаходимо $y''=\left(-x^2/(\sin y+1)\right)'=$

$$=-\left(\left(x^2\right)'(\sin y+1)-x^2(\sin y+1)'\right)/(\sin y+1)^2=(-x^2\sin y-x^2+$$

$$+x\cos y\cdot y'):(\sin y+1)^2=-\left(x^2\sin y+x^2+x\sin y\cdot x^2/(\sin y+1)\right):$$

$$:(\sin y+1)^2=-\left(x^2(\sin y+1)^2+x^3\sin y\right):(\sin y+1)^3.\ \blacksquare$$

Механічний зміст другої похідної. Якщо заданий закон прямолінійного руху тіла $s=s(t)$, то $ds/dt=v(t)$ – швидкість, а $d^2s/dt^2=dv/dt=a(t)$ – прискорення.

Приклад 4. Перевірити, чи задовольняє задана функція вказаній умові:

$$y=x\,ctg\,x;\ y''\sin^2 x=2y-2.$$

□ Обчислимо похідні, що входять у зазначене рівняння:

$$y'=ctgx-x\cdot 1/\sin^2 x;\quad y''=-\frac{1}{\sin^2 x}-$$

$$-\frac{\sin^2 x-x\cdot 2\sin x\cos x}{\sin^4 x}=\frac{-2\sin x+x\cdot 2\cos x}{\sin^3 x}.$$

Підставимо функцію та одержані похідні у рівняння:

$$\frac{-2\sin x+2x\cdot\cos x}{\sin^3 x}\cdot\sin^2 x=2x\cdot ctgx-2;$$

$$2x\cdot ctgx-2=2x\cdot ctgx-2;\quad \text{– вірно.}$$

Отже, задана функція задовольняє вказаній умові. ■

2.1.8. Диференціал функції та його властивості. Диференціали вищих порядків

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, визначена на проміжку $(a;b)$ і неперервна у деякій фіксованій точці x цього проміжку, і нехай приросту аргументу Δx відповідає приріст функції $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$, який є функцією аргументу Δx.

Якщо для приросту функції Δy існує таке число A, що приріст функції можна записати у вигляді $\Delta y = A\cdot\Delta x + \varepsilon\cdot\Delta x$, де множник $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$ задовольняє рівності $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x) = 0$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ ***диференційована у точці*** x. Головна частина $dy = A\Delta x$ приросту функції Δy, яка прямо пропорційна приросту аргументу Δx, називається ***диференціалом функції***.

Теорема 1 (зв'язок між похідною та диференціалом). *Щоб функція* $y = f(x)$ *у точці* x *була диференційована, необхідно і достатньо, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну* $f'(x)$. *Якщо виконується ця умова, то* $dy = f'(x)\Delta x$.

□ а) Необхідність. Нехай $\Delta y = dy + \varepsilon\cdot\Delta x$, де $dy = A\cdot\Delta x$, $A = const \neq 0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x) = 0$. Тоді $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x + \varepsilon\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} A + \lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon = A + 0 = A;\ dy = y'\Delta x.$$

б) Достатність. Нехай $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' \neq 0$. За означенням границі $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$, де $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x) = 0$. Звідси $\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$. Покажемо, що $y'\Delta x$ – головна частина Δy:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon\,\Delta x}{y'\Delta x} = \frac{1}{y'}\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon = \frac{1}{y'}\cdot 0 = 0. \quad ■$$

Тут Δx не обов'язково нескінченно мала; але якщо Δx – нескінченно мала, то й dy – нескінченно мала. Саме у цих випадках

dy (за умови, що $f'(x) \neq 0$) є головною частиною нескінченно малого приросту функції Δy.

Диференціалом незалежної змінної x називають її приріст Δx, тобто $dx = \Delta x$.

З урахуванням цієї рівності, маємо $\boxed{dy = f'(x)dx}$. Тоді $\boxed{f'(x) = dy/dx}$.

Тобто, *похідна дорівнює відношенню диференціалів функції та аргументу*.

Правила обчислення диференціалів і основні диференціали аналогічні відповідним формулам для похідних. Ці співвідношення наведені в табл. 3, де $u = u(x)$.

Приклад 1. Знайти диференціал функції:

а) $y = e^{\sqrt{x}} \ln\sin x$; б) $y = \sqrt[3]{x^2}/\cos x$; в) $\sin(x^2 - y) = xy$;

г) $x = t + \sin t;\ y = t\cos t$; д) $\ln(x - y) = x^2 + y^3$.

□ а) $dy = d\left(e^{\sqrt{x}} \ln\sin x\right) = \ln x \cdot d\left(e^{\sqrt{x}}\right) + e^{\sqrt{x}} d(\ln\sin x) = \ln\sin x \times$
$$\times e^{\sqrt{x}}\left(1/\left(2\sqrt{x}\right)\right)dx + e^{\sqrt{x}} \cdot (\cos x/\sin x)dx = e^{\sqrt{x}}\left(1/\left(2\sqrt{x}\right)\ln\sin x + ctgx\right)dx;$$

б) $d(\sqrt[3]{x^2}/\cos x) = (\cos x \cdot d(\sqrt[3]{x^2}) - \sqrt[3]{x^2} d(\cos x))/\cos^2 x =$
$$= (2/3x^{-1/3}\cos x + \sqrt[3]{x^2}\sin x)\,dx/\cos^2 x;$$

б) $\left(\sin(x^2 - y)\right)' = (xy)'$; $\cos(x^2 - y)(x^2 - y)' = x'y + xy'$;
$$\cos(x^2 - y)(2x - y') = y + xy';\quad 2x\cos(x^2 - y) -$$
$$- y'\cos(x^2 - y) = y + xy';\quad xy' + y'\cos(x^2 - y) =$$
$$= 2x\cos(x^2 - y) - y;\quad y' = \frac{2x\cos(x^2 - y) - y}{x + \cos(x^2 - y)};$$
$$dy = y'dx = \frac{2x\cos(x^2 - y) - y}{x + \cos(x^2 - y)}dx;$$

г) $dy = y'_t dt = (t\cos t)'_t\, dt = (\cos t - t\sin t)\,dt$.

д) (Розв'язати самостійно). ■

Таблиця 3

Правила обчислення диференціалів			
1	$d(u+v)=du+dv$	4	$d(uv)=vdu+udv$
2	$d(u-v)=du-dv$	5	$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$
3	$d(Cu)=Cdu$	6	$dy=y'_u\,du,\quad y=f(u(x))$
Основні диференціали			
1	$dC=0$	5	$d(\sin u)=\cos u\,du$
2	$d(u^\alpha)=\alpha u^{\alpha-1}\,du$	6	$d(\cos u)=-\sin u\,du$
2а	$d(au+b)=a\,du$	7	$d(tg\,u)=\frac{du}{\cos^2 u}$
2б	$d(au^2+bu+c)=$ $=(2au+b)\,du$	8	$d(ctg\,u)=-\frac{du}{\sin^2 u}$
2в	$d(\sqrt{u})=\frac{du}{2\sqrt{u}}$	9	$d(\arcsin u)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
3	$d(\ln u)=\frac{du}{u}$	10	$d(\arccos u)=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
4	$d(a^u)=a^u\ln a\,du$	11	$d(arctg\,u)=\frac{du}{1+u^2}$
4а	$d(e^u)=e^u\,du$	12	$d(arcctg\,u)=-\frac{du}{1+u^2}$

Геометрична інтерпретація диференціала. Нехай $y = f(x)$ – деяка диференційована функція, $M(x_0, y_0)$ – точка, що належить графіку функції, $y_0 = f(x_0)$. Проведемо через точку M (рис. 57) дотичну до графіка функції. Кутовий коефіцієнт нахилу дотичної (тангенс кута нахилу α) дорівнює значенню похідної $f'(x_0)$. Якщо аргументу функції надати приріст Δx, то приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. На рис. 57 приріст функції Δy – довжина відрізка M_1P. При цьому приріст дотичної дорівнюватиме довжині відрізка NP. Обчисливши $|NP$ як катет прямокутного трикутника MNP, маємо

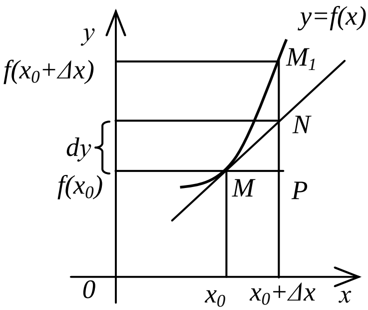


Рис. 57

$$NP = MP \cdot tg\,\alpha = f'(x_0)\Delta x.$$

За означенням диференціала $f'(x_0)\Delta x = dy$. Таким чином, якщо $\Delta y = M_1P$ – приріст ординати графіка функції, то *диференціал* $dy = NP$ *є приростом ординати дотичної*.

Диференціал у наближених обчисленнях. При достатньо малому Δx можна замінити приріст функції її диференціалом, тобто $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$. Тоді наближене шукане значення функції можна знайти за формулою

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Зауваження 1. Нажаль, ця формула не дозволяє оцінити похибку отриманого наближення.

Приклад 2. Обчислити наближено $\sin 46^\circ$.

□ Покладемо $x_0 = \pi/4$, що відповідає 45°; $\Delta x = \pi/180$, що відповідає 1°; $x_0 + \Delta x = \pi/4 + \pi/180$, що відповідає 46°.

Тоді $\sin 46^0 = \sin(\pi/4 + \pi/180) \approx \sin(\pi/4) +$

$$+\cos(\pi/4)\cdot(\pi/180)=\sqrt{2}/2+\left(\sqrt{2}/2\right)\cdot\left(\pi/180\right)\approx$$

$$\approx 0{,}7071+0{,}7071\cdot 0{,}0175\approx 0{,}7191.\quad \blacksquare$$

Теорема 2 (інваріантність форми диференціала). *Нехай $y=f(u)$ і $u=\varphi(x)$ – деякі диференційовані функції зазначених аргументів такі, що з них можна утворити складену функцію $y=f(\varphi(x))$. Диференціал складеної функції визначається рівністю* $\boxed{dy=y'_u\,du}$. Тобто, *форма диференціала функції не залежить від того, є аргумент незалежною змінною чи функцією іншого аргументу*.

□ Якщо розглядати y як функцію незалежної змінної x, то її диференціал визначається рівністю $dy=y'_x\cdot dx$. Підставивши в цю рівність замість похідної складеної функції y'_x її вираз через f'_u і φ'_x, дістанемо $dy=f'_u\cdot\varphi'_x\cdot dx$. Але, з іншого боку, $\varphi'_x\cdot dx=du$. Тоді $dy=f'_u\cdot du$. ■

Зауваження 2. Інваріантна (незмінна) саме форма диференціала, а не його зміст. У формулі $dy=f'_u\cdot du$ множник du – не тільки диференціал, але і приріст Δu аргументу u, якщо u – незалежна змінна. Однак du – диференціал u, але не приріст Δu, якщо аргумент u – у свою чергу функція деякої змінної x.

Диференціали вищих порядків. Нехай маємо функцію $y=f(x)$, де x – незалежна змінна. Диференціал цієї функції $dy=f'(x)\cdot dx$ є деякою функцією x, але від x може залежати тільки перший множник $f'(x)$, другий множник dx є приростом незалежної змінної x і від значення цієї змінної не залежить. Оскільки dy є функція від x, то маємо право говорити про диференціал цієї функції.

Диференціал від диференціала функції називають ***другим диференціалом*** (***диференціалом другого порядку***) цієї функції і позначають через d^2y:

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx=f''(x)(dx)^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і наступних порядків. ***Диференціалом*** n***-го порядку*** називається перший диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = \left(f^{(n-1)}(x)\cdot dx^{n-1}\right)' \cdot dx =$$

$$= \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \cdot dx^{n-1} \cdot dx = f^{(n)}(x)\cdot dx^n .$$

Зауваження 3. Диференціали другого і вищих порядків властивості інваріантності форми не мають.

Користуючись поняттям диференціала, похідну другого і вищих порядків можна подати як відношення диференціалів відповідного порядку $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, ... , $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ при умові, що x – незалежна змінна.

2.1.9. Економічний зміст диференціала: мультиплікатор

Розглянемо найпростішу модель, яка описує динаміку зростання прибутку залежно від інвестицій:

$$Y = C + I ,$$

де Y – прибуток; C – споживання; I – інвестиції.

Нехай, $Y = Y(I), C = C(Y)$. З'ясуємо, як впливає зміна інвестицій dI на прибуток.

Диференціюючи рівняння $Y = C(Y(I)) + I$, знайдемо залежність між інвестиціями і швидкістю зростання прибутку:

$$Y'(I) = \frac{dC}{dY}Y'(I) + 1. \quad \text{Звідки}$$

$$Y'(I) = \frac{1}{1 - dC/dY} \text{ або у диференціалах } dY = \frac{1}{1 - dC/dY}\cdot dI .$$

Будемо вважати, згідно з Кейнсом, що маргінальне споживання dC/dY дорівнює його досягнутому рівню C:

$$dC/dY = C(Y) .$$

Тоді $dY = \dfrac{1}{1-C} \cdot dI = \mu dI$, де множник $\mu = 1/(1-C)$ називається ***мультиплікатором***.

Мультиплікатор – це числовий коефіцієнт, який показує, у скільки разів сума приросту або скорочення прибутку перевищує початкову суму інвестицій.

Термін набув розвитку в кейнсіанській моделі визначення рівня рівноваги прибутку. У рамках цієї моделі маємо

$$O < dC/dY = C(Y) < 1. \text{ Звідки } \mu > 1.$$

Отже, додаткові інвестиції посилюють прибуток.

2.1.10. Теореми Ролля і Лагранжа

Теорема 1 (теорема Ролля про корені похідної). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *диференційована в усіх внутрішніх точках цього відрізка і на його кінцях приймає рівні значення* $f(a) = f(b)$, *то на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться хоча б одна точка* c, *в якій похідна дорівнює нулю* $f'(c) = 0$.

□ Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на ньому свого найбільшого M і найменшого m значень.

Якщо $M = m$, то функція стала. Похідна від сталої величини дорівнює нулю і теорема доведена.

Нехай $f(c) = M$, де $c \in (a;b)$. Через те, що $f(c) = M$ – найбільше значення функції, то $f(c+\Delta x) - f(c) \le 0$ як при $\Delta x > 0$, так і при $\Delta x < 0$. Отже, $(f(c+\Delta x) - f(c))/\Delta x \le 0$, коли $\Delta x > 0$, і $(f(c+\Delta x) - f(c))/\Delta x \ge 0$, коли $\Delta x < 0$.

За умовою теореми похідна $f'(c)$ існує, тобто, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(c+\Delta x) - f(c))/\Delta x = f'(c)$. Але тут $f'(c) \le 0$ при $\Delta x > 0$ і $f'(c) \ge 0$ при $\Delta x < 0$. Ці нерівності сумісні лише тоді, коли $f'(c) = 0$. Отже, між a і b є точка c, де похідна дорівнює нулю. ■

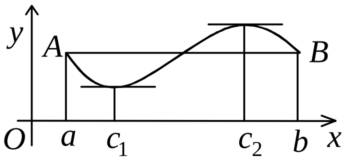


Рис. 58

<u>Геометричний зміст</u>. За умов, які вказані в теоремі Ролля, на дузі AB існує хоча б одна дотична, що паралельна осі Ox (рис. 58).

<u>Теорема 2 (теорема Лагранжа про скінченні прирости)</u>. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована в усіх його внутрішніх точках, то на інтервалі $(a;b)$ знайдеться хоча б одна точка c, в якій виконується рівність* $\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)}$ – ***формула Лагранжа скінченних приростів***.

□ Визначимо число Q рівністю $(f(b)-f(a))/(b-a)=Q$. Складемо допоміжну функцію $F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\cdot Q$. Очевидно, що $F(a)=0$ і $F(b)=0$.

Функція $F(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована у кожній внутрішній точці. Отже, вона відповідає теоремі Ролля, за якою усередині відрізка є точка c така, що $F'(c)=0$. Але $F'(x)=f'(x)-Q$. Тому $F'(c)=f'(c)-Q=0$. Звідси $f'(c)=Q$, тобто $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. ■

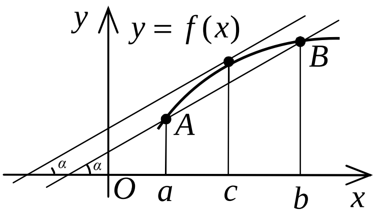


Рис. 59

<u>Геометричний зміст</u>. За умов, що вказані в теоремі Лагранжа, на дузі AB (рис. 59) існує хоча б одна точка, в якій дотична паралельна хорді AB.

Теорема Ролля випливає з теореми Лагранжа як окремий випадок при $f(a)=f(b)$, тобто коли хорда AB паралельна осі Ox.

<u>Зауваження</u>. Застосовуючи формулу Лагранжа до відрізка $[x_0;x_0+\Delta x]$, для приросту функції $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ на цьому відрізку отримаємо

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x\text{, де } c=x_0+\theta\Delta x,\ 0<\theta<1}.$$

Одержане співвідношення є точним на відміну від наближеної формули $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$. Проте в останньому виразі похідна обчислюється в заданій точці x_0, а формула Лагранжа вимагає обчислення похідної у зміщеній точці c, точне положення якої невідоме.

2.1.11. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

Теорема (правило Лопіталя розкриття невизначеності виду $0/0$). *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *диференційовані в деякому околі точки* a *(*a *– число або символ* ∞, $-\infty$, $+\infty$*), крім, можливо, самої точки* a. *Нехай також* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ *і* $\varphi'(x)\neq 0$ *в кожній точці* x *з вище вказаного околу* a, $x\neq a$. *Тоді, якщо існує границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних* $f'(x)/\varphi'(x)$ *при* $x\to a$, *то існує і границя відношення самих функцій* $f(x)/\varphi(x)$ *при* $x\to a$, *причому*

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f(x)/\varphi(x))=\left|0/0\right|=\lim_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))}.$$

(Без доведення).

Зауваження 1. Якщо границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних не існує, то правило Лопіталя застосовувати не можна. Але це не свідчить про те, що границя відношення самих функцій не існує. Наприклад,

$$f(x)=x^2\sin(1/x);\quad f'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x);\ \varphi(x)=x;$$

$$\varphi'(x)=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(1/x)-\cos(1/x)}{1}\ \text{– не існує,}$$

але $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}x\sin(1/x)=0.$$

Зауваження 2. Правило Лопіталя можна застосовувати повторно, але потрібно кожного разу перевіряти, чи не розкрилася невизначеність.

Зауваження 3. Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ використовується теорема, аналогічна правилу Лопіталя для невизначеності виду $0/0$:

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f(x)/\varphi(x)) = \left|\infty/\infty\right| = \lim_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))}.$$

Зауваження 4. Для спрощення обчислень треба правило Лопіталя суміщати з іншими методами знаходження границь.

Приклад 1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi-4arctg\,x}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{\cos x-\cos 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(1+x^2)}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cos(\pi x)\ln(x-5)}{\ln\left(e^x-e^5\right)}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi-4arctg\,x}{\ln x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\pi-4arctg\,x)'}{(\ln x)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-4\cdot 1/(1+x^2)}{1/x}=-2$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{\cos x-\cos 3x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1-\sin x)'}{(\cos x-\cos 3x)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{-\sin x+\sin 3x\cdot 3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-\cos x)'}{(-\sin x+3\sin 3x)'}=$$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x}{-\cos x+3\cos 3x\cdot 3}=\dfrac{1}{8}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(1+x^2)}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{\left(\ln(1+x^2)\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\left(1/(1+x^2)\right)\cdot 2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2} =$$

$$= \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x^2+1}{1} = \frac{1}{2};$$ д) $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{tg\,3x}{tg\,5x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{(tg\,3x)'}{(tg\,5x)'} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{(1/\cos^2 3x)\cdot 3}{(1/\cos^2 5x)\cdot 5} = \frac{3}{5}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x} =$$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\cos 5x)'}{(\cos 3x)'}\right)^2 = \frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin 5x\cdot 5}{-\sin 3x\cdot 3}\right)^2 =$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2 = \frac{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^2 = \frac{5}{3};$$

е) $$\lim_{x\to5}\frac{\cos(\pi x)\ln(x-5)}{\ln\left(e^x-e^5\right)} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to5}\cos(\pi x)\times$$

$$\times\lim_{x\to5}\frac{(\ln(x-5))'}{\left(\ln\left(e^x-e^5\right)\right)'} = (-1)\cdot\lim_{x\to5}\frac{1/(x-5)}{\left(1/(e^x-e^5)\right)\cdot e^x} =$$

$$= -\lim_{x\to5}\frac{e^x-e^5}{(x-5)e^x} = \left|\frac{0}{0}\right| = -\lim_{x\to5}\frac{\left(e^x-e^5\right)'}{(x-5)'} : \lim_{x\to5}e^x =$$

$$= -\lim_{x\to5}\left(e^x/1\right) : e^5 = -e^5 : e^5 = -1. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження 5</u>. Для розкриття невизначеностей виду $0\cdot\infty$ і $\infty-\infty$ спочатку їх за допомогою тотожних перетворень зводять до виду $0/0$ або ∞/∞, а потім застосовують правило Лопіталя.

Формальний запис:

$$\boxed{f\cdot\varphi = |0\cdot\infty| = f/(1/\varphi) = |0/0|}$$

або $$\boxed{f\cdot\varphi = |0\cdot\infty| = \varphi/(1/f) = |\infty/\infty|};$$

$$\boxed{f-\varphi=\left|\infty-\infty\right|=\frac{1/\varphi-1/f}{(1/f)\cdot(1/\varphi)}=\left|0/0\right|}.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(2x-\pi)tg\,5x$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\ln(1+2x)\ln x$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(1/x^2-ctg\,x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+e^x)-2x\right)$;

д). $\lim\limits_{x\to1-0}\left(1/\left(\sin\pi x\cdot\ln(1-x)\right)\right)$

□ а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(2x-\pi)tg\,5x=\left|0\cdot\infty\right|=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2x-\pi}{ctg\,5x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(2x-\pi)'}{(ctg\,5x)'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2}{\left(-1/\sin^2 5x\right)\cdot5}=-\frac{2}{5};$$

б) $\lim\limits_{x\to+0}\ln(1+2x)\ln x=\left|0\cdot\infty\right|=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\ln^{-1}x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln(1+2x)\right)'}{\left(\ln^{-1}x\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{2/(1+2x)}{-\ln^{-2}x\cdot(1/x)}=-2\lim_{x\to+0}x\ln^2 x:$$

$$:\lim_{x\to+0}(1+2x)=\left|0\cdot\infty\right|=-2\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{x^{-1}}:1=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=-2\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{(x^{-1})'}=$$

$$=-2\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot1/x}{-x^{-2}}=4\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-1}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=4\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'}=$$

$$=4\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-x^{-2}}=-4\lim_{x\to+0}x=0;$$

в) $\lim\limits_{x\to0}\left(1/x^2-ctg\,x\right)=\left|\infty-\infty\right|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x^2\cos x}{x^2\sin x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x-x^2\cos x)'}{(x^2\sin x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-2x\cos x+x^2\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}=$$

$$=\left|1/0\right|=\infty;$$

$$\text{г) } \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+e^x)-2x\right)=\left|\infty-\infty\right|=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+e^x)-\ln e^{2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{3x+2e^x}{e^x}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2e^x}{e^x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2e^x)'}{(e^x)'}=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{3+e^x}{e^{2x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{(3+e^x)'}{(e^{2x})'}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2e^{2x}}=\ln 2;$$

$$\text{д) } \lim_{x\to1-0}\left(1/\left(\sin\pi x\cdot\ln(1-x)\right)\right)=$$

$$=\left|\frac{1}{0\cdot\infty}\right|=\lim_{x\to1-0}\frac{\sin^{-1}\pi x}{\ln(1-x)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to1-0}\frac{\left(\sin^{-1}\pi x\right)'}{\left(\ln(1-x)\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{-\sin^{-2}\pi x\cdot\cos\pi x\cdot\pi}{\left(1/(1-x)\right)\cdot(-1)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\pi\lim_{x\to1-0}\cos\pi x\times$$

$$\times\lim_{x\to1-0}\frac{1-x}{\sin^2\pi x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\pi\cdot(-1)\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{(1-x)'}{(\sin^2\pi x)'}=$$

$$=-\pi\lim_{x\to1-0}\frac{-1}{2\sin\pi x\cdot\cos\pi x\cdot\pi}=\left|-\pi\cdot\frac{-1}{2\cdot(+0)\cdot(-1)\cdot\pi}\right|=-\infty.\ \blacksquare$$

Зауваження 6. Для розкриття невизначеностей виду 0^0, 1^∞ і ∞^0 спочатку показниково-степеневий вираз f^{φ} (за основною логарифмічною тотожністю, припускаючи $f>0$) записують у вигляді $\boxed{f^{\varphi}=e^{\varphi\ln f}}$. У показнику маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$, яка зводиться (як показано вище) до невизначеності $0/0$ або ∞/∞.

Приклад 3. Знайти границі:

$$\text{а) } \lim_{x\to0}(x)^{\sin 2x};\qquad \text{б) } \lim_{x\to\pi/2}(tg\,x)^{2x-\pi};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to+\infty}\left(x+5^x\right)^{1/x};\qquad \text{г) } \lim_{x\to0}(\cos 7x)^{4/(7x^2)}.$$

□ а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin 2x} = \left|0^0\right| = A$; $\ln A = \lim\limits_{x\to +0} \ln x^{\sin 2x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \ln x \cdot \sin 2x = \left|\infty \cdot 0\right| = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{\left(1/\sin 2x\right)'} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{\left(-1/\sin^2 2x\right)\cdot \cos 2x \cdot 2} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{x \cdot \cos 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0; \quad A = e^0 = 1;$$

б) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (tg\, x)^{2x-\pi} = \left|\infty^0\right| = A$;

$$\ln A = \lim_{x\to \pi/2} \ln (tg\, x)^{2x-\pi} = \lim_{x\to \pi/2} \left((2x-\pi)\cdot \ln tg\, x\right) =$$

$$= \left|0\cdot\infty\right| = \lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln tg\, x}{(2x-\pi)^{-1}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to \pi/2} \frac{\left(\ln tg\, x\right)'}{\left((2x-\pi)^{-1}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to \pi/2} \frac{\left(1/tg\, x\right)\cdot\left(1/\cos^2 x\right)}{-(2x-\pi)^{-2}\cdot 2} = -\lim_{x\to \pi/2} \frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x \cdot \cos x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to \pi/2} \frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = -\lim_{x\to \pi/2} \frac{\left((2x-\pi)^2\right)'}{(\sin 2x)'} =$$

$$= -\lim_{x\to \pi/2} \frac{2\cdot(2x-\pi)\cdot 2}{\cos 2x \cdot 2} = 0; \quad A = e^0 = 1;$$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x+5^x\right)^{1/x} = \left|\infty^0\right| = A$; $\ln A = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(x+5^x\right)^{1/x} =$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(x+5^x\right)}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\ln(x+5^x)\right)'}{x'} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1/(x+5^x)\right)\cdot(1+5^x \ln 5)}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+5^x \ln 5}{x+5^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+5^x \ln 5)'}{(x+5^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 5 \cdot 5^x \ln 5}{1+5^x \ln 5} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ln^2 5 \times$$

$$\times \lim_{x\to+\infty} \frac{(5^x)'}{(1+5^x \ln 5)'} = \ln^2 5 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x \ln 5}{\ln 5 \cdot 5^x \ln 5} = \ln 5;$$

$$A = e^{\ln 5} = 5;$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 7x)^{4/(7x^2)} = \left|1^\infty\right| = A$; $\ln A = \lim\limits_{x\to 0} \ln(\cos 7x)^{4/(7x^2)} =$

$$= \frac{4}{7} \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 7x}{x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \frac{4}{7} \lim_{x\to 0} \frac{(\ln\cos 7x)'}{(x^2)'} =$$

$$= \frac{4}{7} \lim_{x\to 0} \frac{(1/\cos 7x)\cdot(-\sin 7x)\cdot 7}{2x} = -2 \lim_{x\to 0} \frac{tg\, 7x}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= -2 \lim_{x\to 0} \frac{(tg\, 7x)'}{x'} = -2 \lim_{x\to 0} \frac{(1/\cos^2 7x)\cdot 7}{1} = -14;\ A = e^{-14}.\ ■$$

2.1.12. Формули Тейлора і Маклорена

Нехай функція $f(x)$ n раз диференційована в деякому околі точки $x = x_0$. Знайдемо многочлен

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n$$

такий, що його значення та значення його похідних до n-го порядку включно в точці x_0 співпадають зі значеннями самої функції та її відповідних похідних у цій точці. Тобто,

$$T_n(x_0) = f(x_0);\ T_n'(x_0) = f'(x_0);\ ...;\ T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Природно очікувати, що такий многочлен у деякому сенсі буде «близьким» до функції $f(x)$ в околі точки x_0.

Виражаючи з наведених умов коефіцієнти $a_0, a_1, ..., a_n$ через значення функції та її похідних у точці x_0, отримаємо

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

– ***многочлен Тейлора*** n***-го порядку*** для функції $f(x)$. Тут $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ – n***-факторіал***; $0!=1$; $1!=1$.

Тоді для функції $f(x)$ в околі точки x_0 справедлива ***формула Тейлора*** n***-го порядку***

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)},$$

де $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ – ***залишковий член*** формули Тейлора.

Теорема. *Якщо функція* $f(x)$ *в деякому околі точки* x_0 *має похідні до* $(n+1)$*-го порядку включно, то залишковий член формули Тейлора можна подати в* ***формі Лагранжа***

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}},$$

де $\boxed{c=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1}$.

Зауваження 1. Формула Тейлора є узагальненням формули Лагранжа про скінченні прирости.

Зауваження 2. Якщо в формулі Тейлора замінити x_0 на x, x на $x+\Delta x$ і перенести $f(x)$ вліво, а потім врахувати, що $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta f(x)$ і $f^{(k)}(x)\cdot\Delta x^k=d^k f(x)$, то її можна подати в ***диференціальній формі***

$$\boxed{\Delta f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{d^k f(x)}{k!}+\frac{d^{n+1}f(c)}{(n+1)!}}$$

Зауваження 3. При $x_0=0$ маємо окремий випадок формули Тейлора – ***формулу Маклорена***

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)},$$

де $\boxed{R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1}$.

Наведемо приклади розкладання деяких функцій за формулою Маклорена.

1. Експонента $\boxed{e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}}$.

2. Синус

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\frac{\sin\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}}.$$

3. Косинус

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{\sin\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}}.$$

4. Логарифмічна функція

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,(1+\theta x)^{n+1}}}.$$

5. Біном Ньютона $(1+x)^{\mu}$, де μ — довільне число:

$$\boxed{(1+x)^{\mu}=1+\frac{\mu}{1!}x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3+}$$

$$\boxed{+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)}{(n+1)!\,(1+\theta x)^{n+1-\mu}}x^{n+1}}.$$

Тут $0<\theta<1$.

Зауваження 4. Формула Тейлора широко застосовується в наближених обчисленнях. При цьому за наближення до функції приймається її многочлен Тейлора: $\boxed{f(x)\approx T_n(x)}$, а допущена абсолютна похибка дорівнює модулю залишкового члена: $\boxed{\Delta=|R_n(x)|}$.

Приклад. Застосовуючи формулу Маклорена шостого порядку для експоненти $y=e^x$, обчислити наближене значення числа

Ейлера e і оцінити допущену абсолютну похибку.

□ $n = 6$; $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}e^{\theta x}$; $x = 1$;

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \ldots + \frac{1^6}{6!} + \frac{e^{\theta \cdot 1}}{7!}1^7 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + ;$$

$$+ \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{e^{\theta}}{5040} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$$

$$= 2\frac{517}{720} \approx 2{,}718; \quad \Delta = \left| \frac{e^{\theta}}{5040} \right| < \frac{e^1}{5040} < \frac{3}{5040} < 0{,}001. \ ■$$

2.2. Граничний (маргінальний) аналіз

Вивчення кількісної сторони різних об’єктів приводить до встановлення та дослідження функціональних залежностей між змінними величинами, які відображають відповідні процеси.

Очевидно, не можливо здійснити повне дослідження функції, лише обчислюючи її значення в окремих точках. У даному розділі будуть встановлені загальні правила дослідження поведінки функції, які дозволяють, зокрема, зробити ескіз її графіка.

2.2.1. Умови сталості, зростання та спадання функції

Теорема 1 (достатні умови монотонності та сталості). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і диференційована в усіх його внутрішніх точках. Якщо для всіх* $x \in (a;b)$ *похідна* $f'(x)$:

1) *додатна, то функція на цьому відрізку зростає*;
2) *від’ємна, то функція на цьому відрізку спадає*;
3) *дорівнює нулю, то функція на цьому відрізку – стала*.

□ Нехай $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a;b)$. Розглянемо довільні значення $x_1, x_2 \in [a;b]$ такі, що $x_1 < x_2$. За теоремою Лагранжа про скінченні прирости маємо: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, де $x_1 < c < x_2$.

За умовою теореми $f'(c) > 0$. Звідси $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Це означає, що $f(x)$ – зростаюча функція.

Аналогічно доводяться інші два випадки. ■

Зауваження. Розглядаємо монотонність у строгому смислі.

Приклад 1. Визначити інтервали зростання і спадання функції: а) $y = x^2/2$; б) $y = arctg\, x$.

□ а) Похідна цієї функції $y' = x$. Коли $x > 0$, то $y' > 0$ – функція зростає; коли $x < 0$, то $y' < 0$ – функція спадає.

б) Похідна цієї функції $y' = 1/(x^2 + 1)$ додатна при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Отже, функція $y = arctg\, x$ всюди зростає. ■

Приклад 2. З'ясуємо, як залежить дохід підприємства D від ціни p на його продукцію при різних значеннях еластичності η попиту Q.

□ Дохід D визначається як добуток вартості кожного виробу p на кількість вироблених і проданих виробів Q: $D = p \cdot Q$. Знайдемо маргінальний дохід, врахувавши, що попит Q є функцією від p:

$$\frac{dD}{dp} = Q + p \cdot \frac{dQ}{dp} = Q\left(1 + \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}\right) = Q(1 + \eta).$$

Звідси при $\eta < -1$ маємо, що $\eta + 1 < 0$ і $dD/dp < 0$. Тобто, дохід спадає при зростанні ціни p, коли попит еластичний.

Якщо ж $-1 < \eta < 0$, то $\eta + 1 > 0$ і $dD/dp > 0$. Тобто, функція доходу зростає зі зростанням ціни p, коли попит не еластичний. ■

Приклад 3. Залежність фінансових зборів K від обсягу продукції Q виражається формулою $K(Q) = 0{,}05x^2 - 6x + 100$. При яких значеннях обсягу Q фінансові збори зростають?

□ Похідна $K'(Q) = 0{,}1x - 6 > 0$. Звідси $Q > 60$. Це означає, що коли обсяг продукції перевищує 60 грош. од., фінансові збори зростають. ■

2.2.2. Максимум і мінімум функції. Необхідні умови екстремуму

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = x_0$, тобто, x_0 – внутрішня точка області визначення $D(f)$.

Точка x_0 називається ***точкою мінімуму*** (відповідно ***точкою максимуму***), якщо для всіх $x \neq x_0$ з деякого околу цієї точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (відповідно $f(x_0) > f(x)$). Точки обох типів – мінімуму $x_{\min}$ та максимуму $x_{\max}$ – називають ***точками екстремуму***, а значення функції $y = f(x)$ в точках екстремуму – ***екстремальними значеннями*** (***екстремумами***) ***функції*** відповідного типу:

$$y_{\min} = f(x_{\min}); \quad y_{\max} = f(x_{\max}).$$

<u>Зауваження 1</u>. Розглядаємо лише точки внутрішнього локального (відносно всіх близьких сусідніх точок) строгого екстремуму.

<u>Зауваження 2</u>. Розрізняють точки ***гладкого екстремуму*** (див. рис. 60), в околі яких функція неперервно диференційована (графік гладкий) і похідна $f'(x) = 0$ (дотична паралельна осі Ox), і точки ***гострого екстремуму*** (див. рис. 61), в яких функція недиференційована (графік зазнає зламу) – похідна $f'(x)$ має розрив (нескінченна чи взагалі не існує).

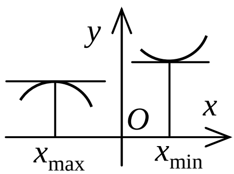


Рис. 60

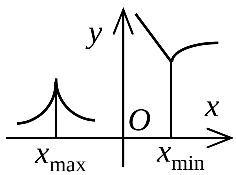


Рис. 61

<u>Зауваження 3</u>. В економічних дисциплінах екстремум функції називають її ***оптимумом***, а процес його знаходження – ***оптимізацією***. Будемо розглядати оптимізацію як процес знаходження екстремуму економічних функцій, тобто вибір найкращого варіанта з

множини можливих.

Теорема 1 (теорема Ферма – необхідна умова гладкого екстремуму). *Якщо диференційована функція* $f(x)$ *має в точці* x_0 *екстремум, то її похідна у цій точці дорівнює нулю* $f'(x_0)=0$.

(Доведення спирається на теорему Ролля).

Приклад. Функції $y=x^2$ і $y=x^3$ всюди диференційовані. При $x=0$ вони мають рівну нулю похідну $y'=0$. У цій точці функція $y=x^2$ досягає мінімуму, а функція $y=x^3$ екстремуму не має.

У цьому прикладі досліджено неперервно диференційовані функції. Розглянемо приклади функцій, що мають розриви похідної.

а) Функція $y=|x|$ – неперервна, але у точці $x=0$ не має похідної. З графіка (рис. 62) видно, що у точці $x=0$ функція має мінімум $y_{\min}=y(0)=0$.

б) Функція $y=\left(1-x^{2/3}\right)^{3/2}$ не має похідної у точці $x=0$: $y'\to\infty$, коли $x\to 0$ (перевірте самостійно). З графіка (рис. 63) видно, що у точці $x=0$ функція має максимум $y_{\max}=y(0)=1$.

в) Функція $y=x^{1/3}$ не має похідної у точці $x=0$: $y'\to\infty$, коли $x\to 0$. У цій точці функція екстремуму не має (рис. 64).

Таким чином, узагальненням попередньої теореми про гладкий екстремум є

Теорема 2 (необхідна умова екстремуму). *Якщо неперервна функція* $f(x)$ *має в точці* x_0 *екстремум, то її похідна у цій точці або існує і дорівнює нулю* $f'(x_0)=0$, *або не існує.*

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці перша похідна або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою першої похідної***.

Критична точка, в якій перша похідна дорівнює нулю, називається ***стаціонарною точкою*** функції.

Зауваження 4. Стаціонарні точки – це точки, що «підозрілі» на гладкий екстремум. Критичні точки, в яких перша похідна має розрив, – це точки, що «підозрілі» на гострий екстремум.

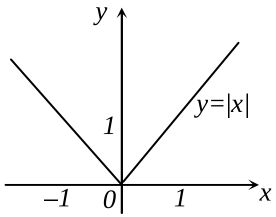


Рис. 62

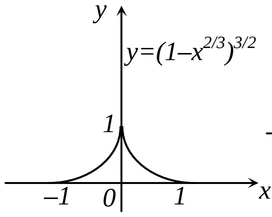


Рис. 63

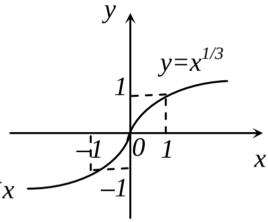


Рис. 64

2.2.3. Достатні умови екстремуму функції

Дослідження функції у критичних точках спирається на достатні умови екстремуму.

Теорема 1 (достатня умова екстремуму за першою похідною). *Нехай* x_0 *– критична точка похідної функції* $f(x)$*, яка диференційована в деякому околі цієї точки* x_0*, крім, можливо, самої точки* x_0*. Якщо при переході зліва направо через цю точку*:

1) *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з плюса на мінус, то при* $x = x_0$ *функція має максимум*;

2) *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з мінуса на плюс, то при* $x = x_0$ *функція має мінімум*;

3) *похідна* $f'(x)$ *не змінює знака, то при* $x = x_0$ *функція не має екстремуму*.

□ Нехай $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус; тобто для всіх x достатньо близьких до точки x_0, маємо: $f'(x) > 0$, коли $x < x_0$, $f'(x) < 0$, коли $x > x_0$.

За теоремою Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, де $c \in (x_0;\, x)$.

Якщо $x < x_0$, тоді $c < x_0$, $f'(c) > 0$, $f'(c)(x - x_0) < 0$ і отже, $f(x)-f(x_0)<0$ або $f(x)<f(x_0)$.

Якщо $x>x_0$, тоді $c>x_0$, $f'(c)<0$, $f'(c)(x-x_0)<0$ і отже, $f(x)-f(x_0)<0$ або $f(x)<f(x_0)$.

Таким чином, для всіх значень x, досить близьких x_0, значення функції менше, ніж значення функції у точці x_0. Це означає, що в точці x_0 функція $f(x)$ має максимум.

Аналогічно доводяться інші два випадки. ■

Правило дослідження функції $f(x)$ на монотонність і екстремум:

1) *Знайти область визначення функції* $D(f)$.

2) *Продиференціювати функцію* $y=f(x)$.

3) *Знайти критичні точки першої похідної*:

а) *Стаціонарні точки. Для цього розв'язати рівняння* $f'(x)=0$ *і з одержаних розв'язків вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції.*

б) *Точки розриву похідної* $f'(x)$. *Для цього знайти точки, в яких похідна не існує, і з них вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції.*

4) *На координатній прямій* Ox *відмітити (штриховкою) область визначення* $D(f)$ *функції, вказавши її межові точки, і нанести критичні точки першої похідної. У результаті область визначення буде розбита на інтервали між сусідніми точками.*

5) *На кожному інтервалі довільно вибрати одну пробну внутрішню точку* x *і визначити знак похідної* $f'(x)$ *у цій точці, а значить, і на даному інтервалі.*

6) *Виходячи зі знака похідної* $f'(x)$, *зробити висновок про поведінку функції на кожному інтервалі*:

якщо «+», то $f(x)$ *зростає; якщо «-», то* $f(x)$ *спадає.*

7) *Проаналізувати зміну знака похідної* $f'(x)$ *при переході через кожну критичну точку і зробити висновок про наявність і характер екстремуму*:

якщо «+,-», то $f(x)$ *має максимум; якщо «-,+», то* $f(x)$

має мінімум; якщо «+,+» або «-,-», то $f(x)$ *екстремуму не має.*

8) *Обчислити екстремуми функції* $f(x)$ *у знайдених точках екстремуму, якщо такі існують*:

$$y_{\min} = f(x_{\min}); \quad y_{\max} = f(x_{\max}) .$$

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \sqrt[3]{x^2}\big/(x-4)$ на монотонність і екстремум.

□ Область визначення функції:

$$D(y): \ x-4 \neq 0; \ x \neq 4; \ x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty) .$$

Похідна цієї функції

$$y' = \frac{(2/3)\cdot x^{-1/3}(x-4) - \sqrt[3]{x^2}}{(x-4)^2} = -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2} .$$

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$y' = 0; \ -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2} = 0; \ x+8=0; \ x=-8 \in D(y);$$

б) точки розриву y': $3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0$;

$$\sqrt[3]{x} = 0 \text{ або } \sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0; \ x = 0 \in D(y); \ x = 4 \notin D(y) .$$

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 65). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значеню аргументу $x_1 = -9$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$, і визначаємо в них знак похідної:

$$y'(-9) = -\frac{-1}{3\sqrt[3]{-9}\cdot(-13)^2} < 0; \ y'(-1) = -\frac{7}{3\sqrt[3]{-1}\cdot(-5)^2} > 0;$$

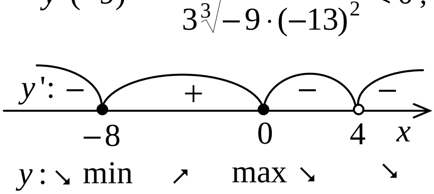


Рис. 65

$$y'(1) = -\frac{9}{3\sqrt[3]{1}\cdot(-3)^2} < 0;$$

$$y'(5) = -\frac{13}{3\sqrt[3]{5}\cdot 1^2} < 0 .$$

Функція зростає при $x \in (-8; 0)$; функція спадає при $x \in (-\infty; -8) \cup (0;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$.

Точка мінімуму $x_{\min} = -8$; точка максимуму $x_{\max} = 0$. Відповідні екстремальні значення функції

$$y_{\min} = y(-8) = \sqrt[3]{(-8)^2} \big/ (-8-4) = -1/3;\quad y_{\max} = y(0) = 0. \ \blacksquare$$

<u>Теорема 2 (достатня умова гладкого екстремуму за другою похідною)</u>. *Нехай* x_0 *– стаціонарна точка функції* $f(x)$*, яка двічі диференційована в деякому околі цієї точки* x_0*. Якщо друга похідна* $f''(x)$ *у цій точці* x_0:

1) *від'ємна, то при* $x = x_0$ *функція має максимум*;

2) *додатна, то при* $x = x_0$ *функція має мінімум*;

3) *дорівнює нулю, то питання про наявність і характер екстремуму залишається відкритим і потрібні додаткові дослідження*. (Наприклад, з використанням похідних більш високого порядку).

<u>Приклад 2</u>. Дослідити функцію $y = x\ln^2 x$ на екстремум.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ x > 0;\ x \in (0; +\infty).$$

Похідна цієї функції $y' = \ln^2 x + 2\ln x$.

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$y' = 0;\ \ln^2 x + 2\ln x = 0;\ \ln x \cdot (\ln x + 2) = 0;$$

$$\ln x = 0 \text{ або } \ln x + 2 = 0;\ x = 1 \in D(y);\ x = e^{-2} \in D(y);$$

б) точки розриву y': немає.

Усі критичні точки є стаціонарними, де можливий гладкий екстремум. Застосовуємо другу похідну:

$$y'' = 2\ln x \cdot (1/x) + 2 \cdot (1/x) = 2(\ln x + 1)/x;$$

$$y''(1) = 2(\ln 1 + 1)/1 = 2 > 0 \ \Rightarrow\ x = 1 - \min;$$

$$y''\left(e^{-2}\right) = 2\left(\ln e^{-2} + 1\right)\big/ e^{-2} = -2e^2 < 0 \ \Rightarrow\ x = e^{-2} - \max.$$

Відповідні екстремальні значення функції

$$y_{\min} = y(1) = 1 \cdot \ln^2 1 = 0; \; y_{\max} = y\left(e^{-2}\right) = e^{-2} \cdot \ln^2 e^{-2} = 4e^{-2}. \; \blacksquare$$

2.2.4. Найменше та найбільше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді за відповідною властивістю на цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень, які відповідно називають ***глобальним*** (***абсолютним***) ***максимумом*** і ***мінімумом*** даної функції $f(x)$ на вказаному відрізку $[a;b]$. Ці значення функція може приймати на кінцях відрізка або у внутрішніх точках, що є точками її локального екстремуму. Звідси випливає

Правило знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

1) *знайти всі критичні точки першої похідної* $f'(x)$, *що лежать усередині відрізка* $[a;b]$;

2) *обчислити значення функції* $f(x)$ *в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка*;

3) *з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше і найменше*.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^3/3 - 4x^2$ на відрізку $[-3;3]$..

□ Похідна цієї функції $y' = x^2 - 8x$.

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$y' = 0; \quad x^2 - 8x = 0; \quad x(x-8) = 0;$$

$$x = 0 \in [-3;3] \text{ або } x - 8 = 0; \quad x = 8 \notin [-3;3];$$

б) точки розриву y': немає.

Обчислимо значення функції: $y(0) = 0$;

$$y(-3) = (-3)^3/3 - 4\cdot(-3)^2 = -45; \quad y(3) = 3^3/3 - 4\cdot 3^2 = -27.$$

Таким чином, найбільше значення $\max\limits_{x\in[-3;3]} y = y(0) = 0$ і найменше значення $\min\limits_{x\in[-3;3]} y = y(-3) = -45$. ■

2.2.5. Застосування теорії екстремуму до розв'язування прикладних задач

Застосовуючи поняття екстремуму, розв'язується багато задач геометричного, фізичного, економічного та іншого прикладного змісту. Розглядається функція, що служить моделлю відповідного процесу на деякому інтервалі (що може бути необмеженим) зміни аргументу, а потім знаходиться найбільше чи найменше значення цієї функції в даному інтервалі. При цьому зі змісту задачі наявність і характер екстремуму часто відомі, що полегшує її розв'язування.

Приклад 1. Нехай у результаті незалежно проведених експериментів дістали n різних значень величини x: x_1, x_2, ..., x_n. Найти таке значення цієї величини x, при якому сума квадратів похибок найменша.

□ Сума квадратів похибок є функцією

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \ldots + (x - x_n)^2,$$

яка всюди визначена. Шукане значення величини x знаходиться з умови найменшого значення цієї функції. Маємо:

$$f'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \ldots + 2(x - x_n); \quad f''(x) = 2n.$$

З рівняння $f'(x) = 0$ знаходимо єдину критичну точку $x = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$. Оскільки в цій точці $f''(x) = 2n > 0$, то в ній функція досягає найменшого значення.

Отже, шуканим значенням величини x є середнє арифметичне її наближених значень. ■

Максимізація прибутку. Поняття «прибуток» характеризує ефективність діяльності підприємства. Кожного разу перед підприємством виникає питання, як організувати діяльність, щоб прибуток був максимальним.

Нехай Q – кількість товару, що реалізується, $R = R(Q)$ – функції доходу, $C = C(Q)$ – функції витрат на виробництво товару. Вигляд цих функцій залежить від засобів, форм організації виробництва і т.п.

Прибуток P від реалізації виробленого товару

$$P = P(Q) = R(Q) - C(Q).$$

У мікроекономіці відомо твердження: для максимізації прибутку необхідна рівність граничного доходу і граничних витрат: $\boxed{R'(Q) = C'(Q)}$. Дійсно, з необхідної умови екстремуму випливає, що $P'(Q) = 0$, тобто $R'(Q) - C'(Q) = 0$.Звідси $R'(Q) = C'(Q)$.

За теоремою про достатні умови гладкого и екстремуму за другою похідною прибуток буде максимальним, якщо

$$P'(Q) = 0 \quad \text{і} \quad P''(Q) < 0.$$

З умови $P''(Q) < 0$ випливає, що $R''(Q) - C''(Q) < 0$, тобто $R''(Q) < C''(Q)$. Поділимо останню нерівність почленно на рівність $R'\left(Q\right) = C'\left(Q\right)$ і одержимо

$$\frac{R''(Q)}{R'(Q)} < \frac{C''(Q)}{C'(Q)} \quad \text{або} \quad \frac{d}{dQ}\left(\ln R'(Q)\right) < \frac{d}{dQ}\left(\ln C'(Q)\right),$$

тобто $\boxed{T_Q(R') < T_Q(C')}$. Це означає що підприємство отримує максимальний прибуток, коли темп зростання граничного доходу менший, ніж темп зростання граничних витрат.

Візьмемо для залежності ціни p одиниці продукції від об'єму її реалізації Q лінійне наближення: $p = aQ + b$, де $a < 0$ і $b > 0$. Тоді сумарний дохід $R = pQ$ буде визначатися рівністю $R = aQ^2 + bQ$, при цьому $Q > 0$ і $R > 0$.

Витрати підприємства на випуск деякої продукції можна подати як суму постійної і змінної складових. Якщо вважати, що змінна складова витрат пропорційна кількості продукції, то можна покласти $C = C_f + c_v Q$, де C_f – постійні витрати; c_v – змінні витрати на одиницю продукції, $C_f > 0$ і $c_v > 0$.

Тоді функція прибутку набирає вигляду

$$P = aQ^2 + bQ - C_f - c_v Q = aQ^2 + (b - c_v)Q - C_f.$$

Знайдемо критичні точки функції прибутку:

$$P' = 2aQ + (b - c_v) = 0; \quad Q = -(b - c_v)/(2a)$$

– єдина стаціонарна точка. Оскільки $Q > 0$ і $a < 0$, то звідси маємо $c_v < b$.

Друга похідна $P'' = 2a < 0$, тому за достатньою умовою екстремуму функція прибутку при $Q_{\max} = -(b - c_v)/(2a)$ має максимум при обмежені $c_v < b$. При цьому максимальний прибуток дорівнює

$$P_{\max} = P(Q_{\max}) = a\left(-\frac{b - c_v}{2a}\right)^2 + (b - c_v)\left(-\frac{b - c_v}{2a}\right) - C_f =$$

$$= -(b - c_v)^2/(4a) - C_f$$

за умови, що $-(b - c_v)^2/(4a) > C_f$ (оскільки $P > 0$).

<u>Приклад 2</u>. Фірма виготовляє деяку продукцію об'ємом Q за ціною p грош. од. за од. товару. Функція попиту має вигляд $Q = 150 - p$, а функція витрат $C = Q^3 - 34Q^2 + 270Q + 500$. Знайти максимальний прибуток фірми.

□ Функція доходу від продажу продукції в об'ємі Q за ціною p задається формулою $R = pQ$. З умови прикладу маємо $p = 150 - Q$. Тоді $R = 150Q - Q^2$.

З необхідної умови $R'(Q) = C'(Q)$ максимальності прибутку одержимо:

$$150 - 2Q = 3Q^2 - 34 \cdot 2Q + 270; \quad 3Q^2 - 66Q + 120 = 0;$$

$Q^2 - 22Q + 40 = 0$. Стаціонарні точки: $Q_1 = 2$; $Q_2 = 20$.

Функція прибутку має вигляд

$$P = R(Q) - C(Q) = 150Q - Q^2 - (Q^3 - 34Q^2 + 270Q + 500) =$$

$$= -Q^3 + 33Q^2 - 120Q - 500.$$

Звідси $P' = -3Q^2 + 66Q - 120$; $P'' = -6Q + 66$.

Оскільки $P''(2) = -6 \cdot 2 + 66 > 0$, то при $Q_1 = 2$ прибуток буде мінімальним. Більш того, $P(2) = -616 < 0$, тобто фірма несе максимальні збитки.

Оскільки $P''(20) = -6 \cdot 20 + 66 < 0$, то при $Q_2 = 20$ прибуток буде максимальним. Його значення

$$P_{\max} = P(20) = 2300 \text{ (грош. од.).} \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Сумарні витрати на виробництво Q одиниць продукції становлять $C = C(Q) = 0{,}02Q^2 + 20Q + 480$, а залежність між ціною p і кількістю Q продукції, яку можна продати за цією ціною, задається формулою: $p = p(Q) = 34 - 0{,}07Q$. При якому об'ємі Q прибуток підприємства буде максимальний і який розмір цього прибутку?

(Розв'язати самостійно).

<u>Оптимізація оподаткування підприємств</u>.

<u>Задача 1</u>. Нехай t – податок на одиницю реалізованої продукції (ставка оподаткування). Тоді загальний податок T на всю продукцію об'ємом Q становить: $T = tQ$. При цьому функція прибутку має вигляд

$$P(Q) = R(Q) - C(Q) - T(Q) = R(Q) - C(Q) - tQ,$$

де функції доходу $R = R(Q)$ і витрат $C = C(Q)$ відомі.

Визначимо розмір ставки оподаткування t, за якого величина сумарного податку T з усієї продукції буде найбільшою.

Спочатку при фіксованому значенні t розв'язуємо задачу максимізації прибутку як функції від Q: знаходимо критичні точки похідної функції прибутку як корені рівняння

$$P'(Q) = R'(Q) - C'(Q) - t = 0$$

і перевіряємо, яка з отриманих точок задовольняє умові

$$P''(Q) = R''(Q) - C''(Q) < 0.$$

Потім знайдену точку, яку позначимо $Q_{opt} = Q_{opt}(t)$, підставимо в формулу $T = tQ$ загального податку і для одержаної функції розв'язуємо задачу максимізації сумарного податку $T = t\,Q_{opt}(t)$ як функції від t: знаходимо критичні точки похідної функції сумарного податку як корені рівняння

$$T' = Q_{opt}(t) + t\,Q_{opt}^{/}(t) = 0$$

і перевіряємо, яка з отриманих точок задовольняє умові

$$T'' = Q_{opt}^{/}(t) + Q_{opt}^{/}(t) + tQ_{opt}^{//}(t) = 2Q_{opt}^{/}(t) + tQ_{opt}^{//}(t) < 0\,.$$

Позначимо знайдену точку як t_0. Обчислимо

$$Q_0 = Q_{opt}(t_0)\,; \quad T_{\max} = t_0\,Q_{opt}(t_0)\,; \quad P_{\max} = P(Q_0)\,;$$

Отже, при значенні $Q_0 = Q_{opt}(t_0)$ величина максимального прибутку складає $P_{\max} = P(Q_0)$, а оптимальний (з точки зору податкової служби) збір податків становить $T_{\max} = t_0\,Q_{opt}(t_0)$.

Задача 2. Приймемо за вихідну величину ціну p одиниці продукції та припустимо, що для деякого товару функції попиту і пропозиції мають відповідно вигляд $p = f(Q_d)$ і $p = g(Q_s)$, де Q_d – кількість товару, який належить до попиту, а Q_s – до пропозиції. Кожна одиниця товару оподатковується податком t (ставка оподаткування). Визначити, яку ставку оподаткування t треба встановити, щоб надходження в казну були максимальні.

(Із загальних міркувань зрозуміло, що дуже великий податок може «задушити» діяльність будь-якого підприємства, а дуже малий не дозволить покрити бюджетні витрати).

Щоб урахувати податки, треба у функції пропозиції ціну p замінити на різницю $p - t$, оскільки саме вона реально надходить виробнику: $p - t = g(Q_s)$. Звідси $p = g(Q_s) + t$. Урахувавши, що в точці ринкової рівноваги $Q_s = Q_d = Q$, тобто попит дорівнює пропозиції, одержимо систему рівнянь

$$p = f(Q) \quad \text{і} \quad p = g(Q) + t\,.$$

Звідси $f(Q) = g(Q) + t$. Нехай $Q_0 = Q_0(t)$ – розв’язок цього рівняння при фіксованому значенні t. Тоді загальний податок T на всю продукцію об’ємом Q становить: $T = t\,Q_0(t)$.

Точки максимуму цієї функції визначають оптимальну ставку оподаткування, а значення максимуму – максимальний сумарний податок.

Задача 3. Нехай виробнича функція, що описує функціонування деякого підприємства, зв’язує випуск продукції Q з чисельністю персоналу L: $Q = f(L)$. Тоді середня продуктивність праці: $P_L = Q/L = f(L)/L$. З’ясувати, при якому значенні L середня продуктивність праці стає максимальною.

Для цього треба знайти критичні точки похідної функції середньої продуктивності праці як корені рівняння: $dP_L/dL = 0$.

Оскільки

$$\frac{dP_L}{dL} = \frac{f'(L)L - f(L)}{L^2} = \frac{1}{L}\left(f'(L) - \frac{f(L)}{L} \right) = 0,$$

то одержуємо рівняння $f'(L) - f(L)/L = 0$, де перший доданок $Q' = f'(L)$ є граничною продуктивністю праці, а другий – середньою продуктивністю праці $P_L = f(L)/L$.

Враховуючи це, маємо рівність $Q' = P_L$. тобто в критичних точках гранична продуктивність праці дорівнює середній продуктивності праці.

Для знаходження максимальної продуктивності праці треба знайти знак другої похідної в точках, які задовольняють цю рівність, і вибрати ті точки, де друга похідна від’ємна.

Приклад 4. Фірма виготовляє товар в об’ємі Q за ціною p грош. од. за одиницю товару. Функція попиту має вигляд $Q = 22 - p$, а функція витрат $C = -0{,}5Q^2 + 10Q + 4$, $0 < Q < 15$. Кожна одиниця продукції оподатковується за ставкою t. При якому значенні ставки оподаткування t величина сумарного податку $T = t\,Q$ з усієї продукції буде найбільшою?

□ Функція доходу від продажу товару об′ємом Q за ціною p визначається рівністю $R = pQ$. З умови прикладу маємо $p = 22 - Q$. Тоді $R = 22Q - Q^2$. Функція сумарного прибутку $P(Q)$ має вигляд

$$P(Q) = R(Q) - C(Q) - tQ = 22Q - Q^2 - (-0{,}5Q^2 + 10Q + 4) -$$

$$- tQ = -0{,}5Q^2 + (12 - t)Q - 4 .$$

При фіксованому значенні t знайдемо критичні точки похідної функції прибутку за змінною Q:

$$P'(Q) = -Q + (12 - t) = 0 ; \quad Q = 12 - t .$$

Оскільки друга похідна $P''(Q) = -1 < 0$, то в знайденій точці $Q_{opt} = 12 - t$ прибуток досягає максимуму. Підставимо це значення об′єму продукції у формулу сумарного податку:

$$T = t(12 - t) = 12t - t^2 .$$

Розв'язуємо задачу максимізації сумарного податку T як функції від t: знаходимо критичні точки похідної функції $T = 12t - t^2$ сумарного податку як корені рівняння

$$T' = 12 - 2t = 0 ; \quad t = 6 .$$

Оскільки $T'' = -2 < 0$, то при $t = 6$ функція сумарного податку має максимум. Тоді $Q_{opt} = 12 - 6 = 6$. При цьому максимальна величина прибутку становить

$$P_{\max} = -0{,}5 \cdot 6^2 + (12 - 6) \cdot 6 - 4 = 14 ,$$

а оптимальний (с точки зору податкової служби) збір податку $T_{opt} = 6 \cdot 6 = 36$. Обчислимо оптимальну ціну:

$$p_{opt} = 22 - Q_{opt} = 22 - 6 = 16 .$$

Порівняємо ці цифри з результатами максимізації прибутку за відсутності оподаткування. При $t = 0$ розв'язування задачі на максимум прибутку дає: $Q_{opt} = 12$, $P_{\max} = 68$, $p_{opt} = 10$. Отже, зменшення ставки оподаткування стимулює ріст випуску продукції, сприяє збільшенню прибутку від її реалізації та зниженню ціни. ■

Приклад 5. Для деякого товару крива попиту та крива пропозиції мають відповідно вигляд: $p = -2Q_d + 54$ і $p = 3Q_s + 14$, де Q_d – кількість товару, який належить до попиту, Q_s – до пропозиції, p – ціна за одиницю товару. Кожна одиниця товару оподатковується податком t (ставка оподаткування). Визначити, яку ставку оподаткування t треба встановити, щоб сумарні надходження податку були максимальні, і обчислити оптимальний сумарний податок. Знайти оптимальний попит і оптимальну ціну.

□ Щоб урахувати податки, треба у функції пропозиції ціну p замінити на різницю $p - t$. Оскільки в точці ринкової рівноваги попит дорівнює пропозиції $Q_s = Q_d = Q$, то одержимо рівняння: $3Q + 14 + t = -2Q + 54$. Звідси $Q = 8 - t/5$ – рівноважний попит.

Тоді сумарний податок $T = tQ$ визначається рівністю

$$T = t(8 - t/5) = 8t - 0{,}2t^2 .$$

Знайдемо критичні точки цієї функції:

$$T' = 8 - 0{,}4t = 0; \quad t = 20 .$$

Оскільки $T'' = -0{,}4 < 0$, то при $t_{opt} = 20$ сумарний податок має максимум. Знайдемо його значення:

$$T_{opt} = 8 \cdot 20 - 0{,}2 \cdot 20^2 = 80 . \quad ■$$

Обчислимо оптимальний попит і оптимальну ціну:

$$Q_{opt} = 8 - 20/5 = 4; \quad p_{opt} = 3 \cdot 4 + 14 = 26 .$$

Приклад 6. Для деякої фірми залежність ціни p грош. од. одиниці виготовленого і проданого товару від його об'єму Q задається співвідношенням $p = 7 - (2/3)Q^{1/2}$, а функція витрат C має вигляд $C = -(2/9)Q^{3/2} + Q + 1$, $0 < Q < 100$. Кожна одиниця продукції оподатковується за ставкою t. При якому значенні t_{opt} ставки оподаткування t величина сумарного податку $T = tQ$ з усієї продукції буде найбільшою?

(Розв'язати самостійно. $t_{opt} = 2$).

2.3. Дослідження функцій та побудова графіків

2.3.1. Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $(a;b)$ і в точці $x_0 \in (a;b)$ має скінченну похідну. Тоді до графіка даної функції у точці $M_0(x_0\,;f(x_0))$ можна провести дотичну.

Крива (графік функції) називається ***опуклою*** в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки вона розташована нижче дотичної, проведеної в точці x_0 (рис. 67). Якщо крива розташована вище дотичної, то вона називається ***угнутою*** (рис. 68).

Точка $M_0(x_0\,;f(x_0))$ називається ***точкою перегину***, якщо у досить малому її околі точки кривої з абсцисами $x < x_0$ лежать з одного боку від дотичної, а точки з абсцисами $x > x_0$ – з іншого (рис. 69). Тобто, у точці M_0 крива переходить а одного боку дотичної до іншого.

Крива (графік функції) називається ***опуклою на інтервалі*** $(a;b)$, якщо вона опукла в кожній його точці. Тобто, на цьому інтервалі крива лежить нижче кожної своєї дотичної.

Аналогічно, на ***інтервалі вгнутості*** крива лежить вище кожної своєї дотичної.

Точка перегину – це точка кривої, в якій сполучається ділянка опуклості з ділянкою вгнутості.

<u>Теорема 1 (достатні умови опуклості та вгнутості)</u>. *Нехай на інтервалі* $(a;b)$ *задана двічі диференційована функція* $f(x)$. *Якщо для всіх* $x \in (a;b)$ *друга похідна* $f''(x)$:

1) *від'ємна, то графік функції опуклий;*

2) *додатна, то графік функції вгнутий*;

3) *дорівнює нулю, то графік функції – пряма лінія.*

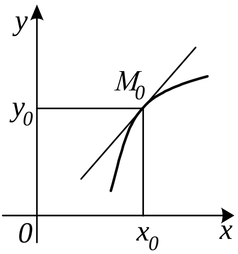


Рис. 67

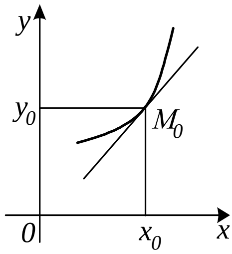


Рис. 68

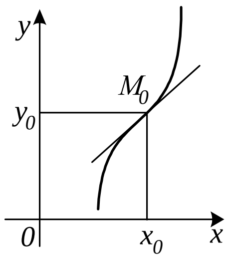


Рис. 69

Теорема 2 (необхідні умови точки перегину). *Якщо $M_0(x_0; y_0)$ – точка перегину графіка функції $f(x)$, то друга похідна $f''(x)$ в точці x_0 або існує і дорівнює нулю $f''(x_0) = 0$, або не існує.*

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці друга похідна $f''(x)$ або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою другої похідної***.

Зауваження 1. Критичні точки другої похідної – це точки, що «підозрілі» на перегин.

Теорема 3 (достатня умова точки перегину). *Нехай x_0 – критична точка другої похідної функції $f(x)$, яка двічі диференційована в деякому околі цієї точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Якщо при переході через цю точку*:

1) *друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то при $x = x_0$ функція має перегин*;

2) *знак другої похідної $f'(x)$ не змінюється, то при $x = x_0$ функція перегину не має.*

Зауваження 2. Правило дослідження функції на опуклість, угнутість і перегин аналогічне правилу дослідження функції на монотонність і екстремум. Треба тільки замість знака першої похідної аналізувати знак другої похідної.

<u>Приклад 1</u>. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції $y = \ln(x^2+9)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y): \; x^2+9>0; \; x \in (-\infty; +\infty).$$

Знаходимо другу похідну:

$$y' = \frac{2x}{x^2+9}; \quad y'' = 2 \cdot \frac{x^2+9-2x \cdot x}{(x^2+9)^2} = \frac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}.$$

Критичні точки другої похідної:

а) $y''=0$; $\dfrac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}=0$; $9-x^2=0$; $x=\pm 3 \in D(y)$;

б) точки розриву y'': $(x^2+9)^2=0$; $x \in \varnothing$.

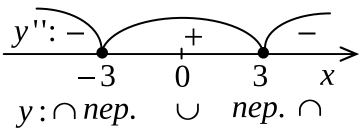


Рис. 70

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 70). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1=-4$, $x_2=0$, $x_3=4$, і визначаємо в них знак другої похідної:

$$y''(-4) = \frac{2(9-(-4)^2)}{((-4)^2+9)^2} = \frac{2\cdot(-7)}{25} < 0;$$

$$y''(0) = \frac{2(9-0^2)}{(0^2+9)^2} = \frac{2}{9} > 0; \quad y''(4) = \frac{2(9-4^2)}{(4^2+9)^2} = \frac{2\cdot(-7)}{25} < 0.$$

Функція опукла при $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; функція вгнута при $x \in (-3; 3)$. Перегин при $x_1=-3$ і $x_2=3$. Тоді

$$y_1 = \ln((-3)^2+9) = \ln 18; \quad y_2 = \ln(3^2+9) = \ln 18.$$

Отже, $M_1(-3; \ln 18)$ і $M_2(3; \ln 18)$ – точки перегину. ■

Приклад 2. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції $y = 2arctg\,x + \ln x$.

(Розв'язати самостійно).

2.3.2. Асимптоти графіка функції

Нехай $y = f(x)$ – функція, графік якої має нескінченну гілку, тобто він має точки, що лежать як завгодно далеко від початку координат.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається гілка графіка, що йде в нескінченність. Тобто, відстань від змінної точки $M\left(x; f(x)\right)$ до цієї прямої прямує до нуля, якщо вказана точка рухається вздовж вітки графіка до нескінченності.

Зауваження 1. Крива може перетинати свою асимптоту, причому неоднаразово.

Асимптоти бувають двох видів: ***вертикальні*** й ***похилі*** (зокрема, ***горизонтальні***) (рис. 71).

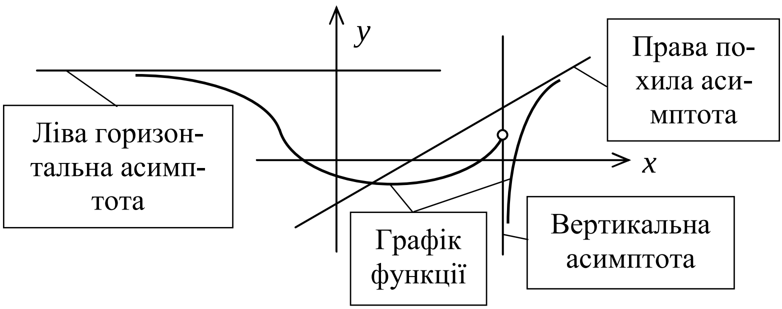


Рис. 71

а) Вертикальна асимптота має рівняння $x = a$, де a – точка, в якій хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ нескінченна.

Зауваження 2. Точки, що «підозрілі» на вертикальні асимптоти, – це скінченні межові точки області визначення $D(f)$ та точки розриву функції $y = f(x)$.

Зауваження 3. Графік функції може мати довільну кількість вертикальних асимптот.

Приклад 1. Знайти вертикальні асимптоти графіка функції $y = \ln(x+3)/(x^2-16)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \begin{cases} x+3>0 \\ x^2-16\neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x>-3 \\ x\neq \pm 4; \end{cases} \quad x\in(-3;4)\cup(4;+\infty).$$

$x_1 = -3$ і $x_2 = 4$ – точки, що «підозрілі» на вертикальні асимптоти.

$$\lim_{x\to -3+0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right) = \left|-\infty/(-7)\right| = +\infty \Rightarrow x=-3$$

– вертикальна асимптота.

$$\lim_{x\to 4-0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right) = \left|\ln 7/(-0)\right| = -\infty \text{ і}$$

$$\lim_{x\to 4+0}\left(\ln(x+3)/(x^2-16)\right) = \left|\ln 7/(+0)\right| = +\infty \Rightarrow x=4$$

– вертикальна асимптота. ■

б) Похила (зокрема, горизонтальна) асимптота. Нехай функція $y = f(x)$ має при $x\to+\infty$ праву похилу асимптоту, рівняння якої $y = kx+b$ (рис. 72). Визначимо числа k і b.

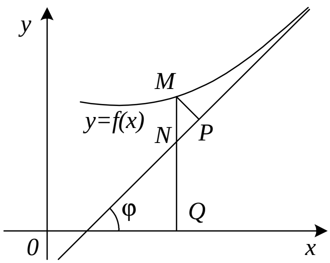


Рис. 72

Нехай $M(x; f(x))$ – змінна точка, що належить графіку функції, і $N(x; y)$ – відповідна точка, що належить асимптоті. Відстань від точки M до асимптоти дорівнює довжині перпендикуляра MP. За умовою $\lim\limits_{x\to+\infty} MP = 0$. Якщо φ – кут нахилу асимптоти до осі Ox, то з ΔNMP маємо $NM = MP/\cos\varphi$. Оскільки φ – стала величина і $\varphi \neq \pi/2$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} NM = 0$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} MP = 0$ одночасно.

Але $NM = |QM - QN| = |f(x) - y| = |f(x) - kx - b|$. Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ або $\lim\limits_{x\to+\infty} x(f(x)/x - k - b/x) = 0$.

Через те, що $x \to +\infty$, має виконуватись рівність

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)/x - k - b/x) = 0.$$

Оскільки k і b – сталі величини, то $\lim\limits_{x\to+\infty} (b/x) = 0$.

Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)/x - k) = 0$ або $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)/x\right)$.

Після знаходження k, маємо $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$.

Отже, якщо пряма $y = kx + b$ є правою похилою асимптотою, то k і b знаходяться як границі

$$\boxed{k = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x)/x\right)}; \quad \boxed{b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx)},$$

де спочатку обчислюється k, а потім b.

Навпаки, якщо існують указані границі для визначення k і b, то має місце рівність $\lim\limits_{x\to+\infty} MP = 0$ і пряма $y = kx + b$ є похила асимптота. Якщо хоча б одна з двох границь для k і b не існує, то відповідної похилої асимптоти крива не має.

<u>Зауваження 4</u>. Права горизонтальна асимптота $(k = 0)$ має рівняння $y = b$, де $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

<u>Зауваження 5</u>. Аналогічно розглядається випадок лівої похилої (зокрема, горизонтальної) асимптоти, коли $x \to -\infty$.

<u>Зауваження 6</u>. Графік функції $y = f(x)$ може мати не більше двох похилих (зокрема, горизонтальних) асимптот. При цьому крива повинна мати відповідну нескінченну гілку при $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$. Асимптоти можуть бути різними при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

Приклад 2. Знайти похилі асимптоти графіка функції $y = \ln(e^{2x} + e^{-3})$.

□ Область визначення функції:

$$D(y): e^{3x} + e^{-3} > 0;\ x \in (-\infty; +\infty).$$

Оскільки крива має ліву при $x \to -\infty$ і праву при $x \to +\infty$ нескінченні гілки, то можуть існувати обидві – ліва і права – похилі асимптоти.

Шукаємо ліву похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^{3x} + e^{-3})}{x} = \left|\frac{-3}{-\infty}\right| = 0;$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(e^{3x} + e^{-3}\right) = -3.$$

Отже, пряма $y = -3$ – ліва горизонтальна асимптота.

Шукаємо праву похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^{3x} + e^{-3})}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(e^{3x} + e^{-3})\right)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x} \cdot 3}{e^{3x} + e^{-3}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= 3 \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^{3x})'}{(e^{3x} + e^{-3})'} = 3 \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x} \cdot 3}{e^{3x} \cdot 3} = 3;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(e^{3x} + e^{-3}) - 3x\right) = |\infty - \infty| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln(e^{3x} + e^{-3}) - \ln e^{3x}\right) = \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x} + e^{-3}}{e^{3x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^{3x} + e^{-3})'}{(e^{3x})'} = \ln \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x} \cdot 3}{e^{3x} \cdot 3} = \ln 1 = 0.$$

Отже, пряма $y = 3x$ – права похила асимптота. ■

Приклад 3. Знайти асимптоти функції

$$y = (x^2 - 5x - 1)/2x\,.$$

□ Область визначення функції:

$$D(y)\colon\ x \neq 0;\ \ x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)\,.$$

$x = 0$ – точка, що «підозріла» на вертикальну асимптоту.

$\lim\limits_{x \to -0} \left((x^2 - 5x - 1)/2x\right) = \left|-1/(-0)\right| = +\infty$ і

$\lim\limits_{x \to +0} \left((x^2 - 5x - 1)/2x\right) = \left|-1/(+0)\right| = -\infty \ \Rightarrow\ x = 0$

– вертикальна асимптота.

Шукаємо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 5x - 1}{2x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2x} - \frac{1}{2x^2}\right) = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left((x^2 - 5x - 1)/2x - x/2\right) =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (-5/2 - 1/2x) = -5/2 \ \ \Rightarrow\ y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$$

– похила (ліва і права одночасно) асимптота. ■

Приклад 4. Знайти асимптоти функції $y = \sqrt{x^2 - 4}$.

(Розв'язати самостійно. Вертикальних асимптот немає. $y = -x$ і $y = x$ – ліва і права похилі асимптоти).

2.3.3. Загальна схема дослідження функції та побудови графіка

Нехай функція задана явно рівнянням $y = f(x)$. Повне дослідження цієї функції та побудову ескізу графіка можна здійснювати за наступною схемою.

1. *Попереднє дослідження.*

1.1. *Знаходження області визначення* $D(f)$ *функції.*

1.2. *Знаходження точок перетину графіка з осями координат.*

1.3. *Знаходження інтервалів знакосталості, де функція зберігає знак (додатна чи від'ємна).*

1.4. *Дослідження функції на парність і непарність.*

1.5. *Дослідження функції на періодичність.*

2. *Дослідження точок розриву функції та її поведінки на кінцях інтервалів області визначення. Знаходження області значень* $E(f)$ *функції. Знаходження асимптот.*

2.1. *Знаходження односторонніх границь функції в точках розриву та на скінченних кінцях інтервалів області визначення. Класифікація точок розриву. Знаходження вертикальних асимптот.*

2.2. *Дослідження поведінки функції «на нескінченності» (при* $x \to -\infty$ *і* $x \to +\infty$*). Знаходження області значень* $E(f)$ *функції. Знаходження похилих асимптот.*

3. *Дослідження функції за допомогою першої похідної.*

3.1. *Знаходження інтервалів зростання та спадання функції.*

3.2. *Знаходження точок екстремуму та відповідних екстремальних значень функції.*

4. *Дослідження функції за допомогою другої похідної.*

4.1. *Знаходження інтервалів опуклості та вгнутості функції.*

4.2. *Знаходження точок перегину.*

5. *Побудова графіка.*

5.1. *Побудова асимптот.*

5.2. *Побудова характерних точок, знайдених на попередніх етапах.*

5.3. *Виділення штриховкою вертикальних смуг (вище чи нижче осі* Ox *відповідно до знака функції), де лежать частини графіка.*

5.4. *При необхідності проведення додаткових обчислень значень функції в пробних точках з тих інтервалів, де потрібно уточнити розміщення графіка.*

5.5. *Побудова ескізу графіка.*

Зауваження. При дослідженні конкретної функції не обов'язково строго додержуватися зазначеної вище схеми. Можна навіть не з'ясовувати тих чи інших властивостей, якщо вони досить очевидні. Так, на періодичність треба досліджувати тригонометричні функції, а раціональні функції – не треба, оскільки відомо, що вони неперіодичні.

Приклад 1. Дослідити функцію $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$ і побудувати ескіз її графіка.

□ Область визначення функції $D(f): x\in R$.

Точки перетину графіка функції:

з віссю Oy: $y(0)=(6\cdot 0-0)^{1/3}=0$;

з віссю Ox: $y=0$; $\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}=0$; $6x^2-x^3=0$;

$x^2(6-x)=0$; $x=0$; $x=6$; маємо дві точки $(0;0)$ і $(6;0)$.

Інтервали знакосталості, де функція додатна чи від'ємна (рис. 73): функція від'ємна при $x\in(6;+\infty)$; функція додатна при $x\in(-\infty;0)\cup(0;6)$.

$y(-x)\neq y(x)$; $y(-x)\neq -y(x)$ – функція не є парною і не є непарною.

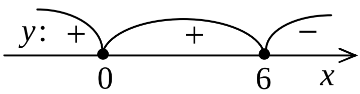


Рис. 73

Функція неперіодична.

Точок розриву і скінченних кінців інтервалів області визначення функція не має, тому вертикальні асимптоти відсутні.

Досліджуємо поведінку функції при $x\to-\infty$ і $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(6x^2-x^3)^{1/3}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}(6x^2-x^3)^{1/3}=-\infty.$$

Область значень функції $E(f): y\in R$.

Похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(6/x-1)^{1/3}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}+x\right)=\left|\infty-\infty\right|=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^2-x^3+x^3}{\left(6x^2-x^3\right)^{2/3}-x\left(6x^2-x^3\right)^{1/3}+x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$= 6 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\left(6/x-1\right)^{2/3} - \left(6/x-1\right)^{1/3} + 1} == 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 .$$

Отже, пряма $y = -x + 2$ є похила (ліва і права) асимптота.

Обчислимо похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y' = (\sqrt[3]{6x^2 - x^3})' = (4-x)\Big/\sqrt[3]{x(6-x)^2} \ ;$$

стаціонарні точки: $y' = 0$; $(4-x)\Big/\sqrt[3]{x(6-x)^2} = 0$; $x = 4$; похідна не існує у точках: $\sqrt[3]{x(6-x)^2} = 0$; $x = 0$ і $x = 6$.

Інтервали монотонності та екстремуми (рис. 74): функція спадає при $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; функція зростає при $x \in (0; 4)$; точка мінімуму $x_{\min} = 0$; точка максимуму $x_{\max} = 4$; відповідні екстремальні значення функції $y_{\min} = y(0) = 0$; $y_{\max} = y(4) = \sqrt[3]{6 \cdot 4^2 - 4^3} = 2\sqrt[3]{4}$.

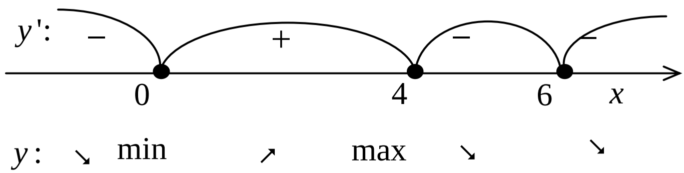


Рис. 74

Обчислимо другу похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y'' = -8\Big/\left(x^{4/3}(6-x)^{5/3}\right);$$

точки, де $y'' = 0$, відсутні; друга похідна не існує у точках: $x^{4/3}(6-x)^{5/3} = 0$; $x = 0$ і $x = 6$.

Інтервали опуклості й угнутості та точки перегину (рис. 75): функція опукла при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$; функція вгнута при $x \in (6; +\infty)$; $x_{пер} = 6$; $y_{пер} = y(6) = \sqrt[3]{6 \cdot 6^2 - 6^3} = 0$. Отже,

$(6;0)$ – точка перегину.

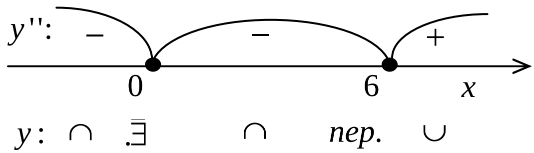


Рис. 75

Ескіз графіка дослідженої функції побудовано на рис. 76. ■

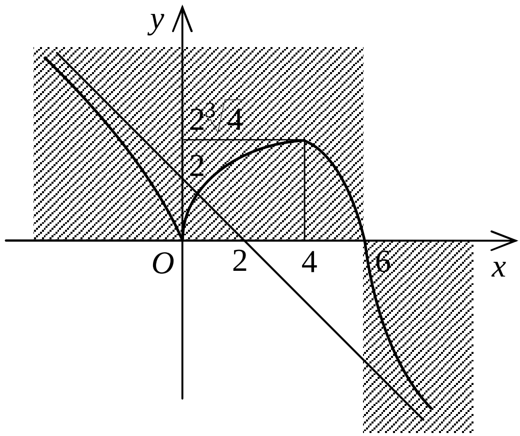


Рис. 76

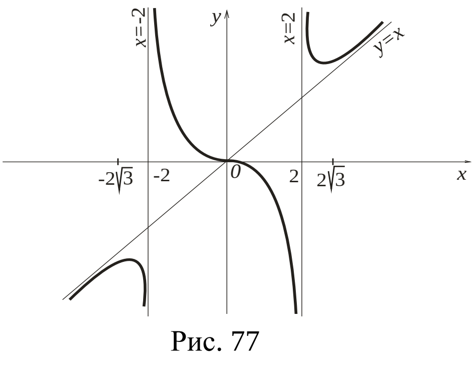


Рис. 77

<u>Приклад 2</u>. Дослідити функцію і побудувати ескіз її графіка:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

(Розв’язати самостійно. Ескіз графіка подано на рис. 77).