А. І. Колосов
А. В. Якунін
Ю. В. Ситникова

ВИЩА МАТЕМАТИКА
для економістів
у двох модулях
МОДУЛЬ 1

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА ІМЕНІ О. М. БЕКЕТОВА

А. І. Колосов,
А. В. Якунін,
Ю. В. Ситникова

ВИЩА МАТЕМАТИКА
для економістів
у двох модулях

МОДУЛЬ 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”)

Харків ХНУМГ 2014

Колосов А. І. Вища математика для економістів: у 2-х модулях. Модуль 1: конспект лекцій (для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”) / А. І. Колосов, А. В. Якунін, Ю. В. Ситникова; Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Х.: ХНУМГ, 2014. − 237 с.

Автори: А. І. Колосов,
А. В. Якунін,
Ю. В. Ситникова

Рецензент: *к. ф.-м. н., доц. М. П. Данилевський*

Подано конспект лекцій, доповнений матеріалом для самостійного опрацювання, зразками розв’язання типових задач і запитаннями для самоконтролю. Відображено розділи: аналітична геометрія на площині; вступ до математичного аналізу; диференціальне числення функцій однієї змінної; лінійна та векторна алгебра.

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 8 від 26.03.2014 р.

Жодна наука не може
бути пізнана без
математики.
Бекон Р.

Розквіт і довершеність
математики тісно пов'язані
з добробутом держави.
Наполеон Б.

Передмова

У конспекті лекцій викладено розділи, що відповідають першому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів економічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю сутності понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю на застосування до задач економічного змісту. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Частина викладеного матеріалу розрахована на самостійне опрацювання. До всіх розділів додаються контрольні запитання.

Економіка, як наука про об'єктивні закони функціонування і розвитку виробництва, характеризується кількісними співвідношеннями певних показників. Вона використовує широкий математичний апарат для дослідження зв'язків між економічними величинами. Вивчення основ вищої математики та ознайомлення з її застосуваннями в сучасній економічній науці дозволить майбутнім фахівцям оволодіти математичною культурою і вдосконалити своє логічне та абстрактне мислення, що відкриє доступ до досягнень світової науки і дасть можливість творчо переосмислити базові підходи в економіці, сформувати особисте бачення задач зі сфери своєї професійної діяльності та виробити інноваційні підходи до їх вирішення.

Основою даного посібника є цикл лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті економіки і підприємництва Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Конспект лекцій призначений для студентів економічних спеціальностей і може бути корисний для аспірантів, викладачів, економістів-практиків.

Змістовий модуль 1. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Аналітичною геометрією називається розділ вищої математики, в якому вивчаються геометричні об'єкти засобами алгебри на основі методу координат.

Математичний аналіз – це сукупність розділів вищої математики, в яких вивчаються властивості змінних величин на основі понять функції, граничного переходу та неперервності.

1.1. Пряма лінія на площині

Для визначення положення довільної точки використовується деяка система координат. Її вибір залежить від характеру поставленої задачі. Найбільш поширеною на практиці є декартова прямокутна система координат.

1.1.1. Координатна пряма. Числові проміжки. Модуль дійсного числа

Напрямлена пряма, на якій задано початок відліку точку O і масштаб $OE = 1$, називається ***координатною прямою*** (***віссю***) (рис. 1).

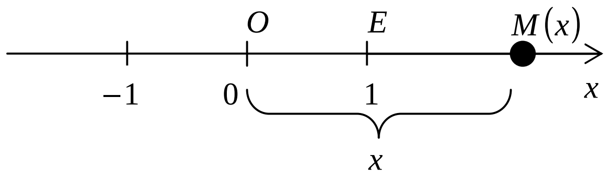

Рис. 1

Довільній точці M координатної прямої Ox відповідає певне дійсне число x – її ***координата***. Навпаки, довільному дійсному числу x відповідає певна точка M координатної прямої Ox. Враховуючи таку взаємно однозначну відповідність, координатну пряму називають ***числовою прямою*** і ототожнюють з множиною дійсних чисел R: $R = (-\infty; +\infty)$.

Основні ***числові проміжки*** показані на рис. 2:

$[a;\,b]$ – ***відрізок*** (***закритий інтервал*** або ***сегмент***); $[a;\,b)$, $(a;\,b]$, $(-\infty;\,a]$, $[a;\,+\infty)$ – ***півінтервали***, зокрема $(-\infty;\,a]$ і $[a;\,+\infty)$ – ***закриті півпрямі***; $(a;\,b)$, $(-\infty;\,a)$, $(a;\,+\infty)$, $(-\infty;\,+\infty)$ – ***інтервали***, зокрема $(-\infty;\,a)$ і $(a;\,+\infty)$ – ***відкриті півпрямі***, $a<b$.

Проміжки $[a;\,b]$; $[a;\,b)$, $(a;\,b]$, $(a;\,b)$ називаються ***скінченними***, а всі інші – ***нескінченними***. Числа a і b – їхні ***кінці***, $d=b-a$ – ***довжина***.

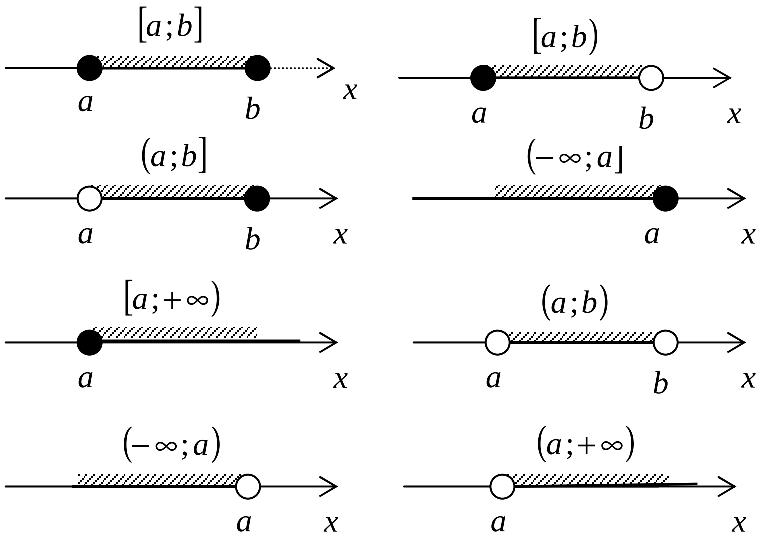

Рис. 2

Модулем (***абсолютною величиною***) дійсного числа x називається невід'ємне число, яке позначається $|x|$ і визначається формулою

$$\boxed{|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}}$$

Модуль дійсного числа x дорівнює відстані відповідної точки $M(x)$ від початку відліку O (***геометричний зміст*** модуля).

Відстань між довільними двома точками $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ визначається формулою

$$\boxed{M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|}.$$

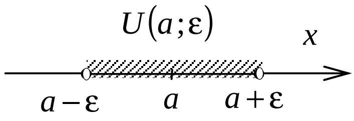

Рис. 3

Інтервал $(a-\varepsilon;\, a+\varepsilon)$ називається ε***-околом числа*** a і позначається $U(a;\varepsilon)$, де ε – довільне додатне число, $\varepsilon > 0$ (рис. 3).

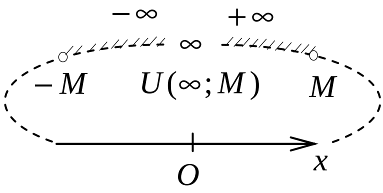

Рис. 4

<u>Зауваження</u>. Координатну пряму Ox умовно можна вважати замкненою в нескінченно віддаленій точці ∞. Тому для довільного додатного числа M, $M > 0$, розглядають сукупність інтервалів $U(\infty;M) = \{x \mid |x| > M\}$, яку називають M ***-околом символу нескінченності*** ∞ (рис. 4).

1.1.2. Декартова прямокутна система координат на площині. Відстань між двома точками. Ділення відрізка у заданому відношенні

Дві взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox і Oy зі спільним ***початком*** O утворюють ***декартову прямокутну систему координат на площині*** (рис. 5). Ox називається ***віссю абсцис***, а Oy – ***віссю ординат***. Сукупність прямих, що перпендикулярні координатним осям, утворює ***координатну сітку*** на координатній площині Oxy. Положення довільної точки M однозначно визначається впоря-

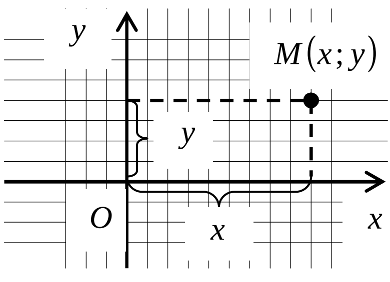

Рис. 5

дкованою парою чисел $(x;y)$ – її ***координатами*** (x – ***абсциса***, y – ***ордината***).

З прямокутного ΔM_1NM_2 (рис. 6) за теоремою Піфагора можна зробити висновок, що ***відстань між*** довільними ***двома точками*** $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ визначається формулою

$$\boxed{M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

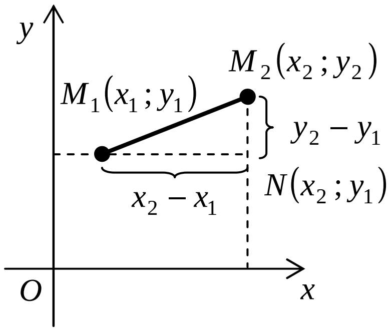

Рис. 6

Нехай задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і відношення $\lambda = M_1M/MM_2$, у якому точка $M(x, y)$ ділить відрізок M_1M_2, починаючи від точки M_1 (рис. 7). З подібності прямокутних трикутників $\Delta M_1NM \sim \Delta MPM_2$ випливає, що

$$\frac{NM}{PM_2} = \frac{M_1N}{MP} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda \ ; \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda \ .$$

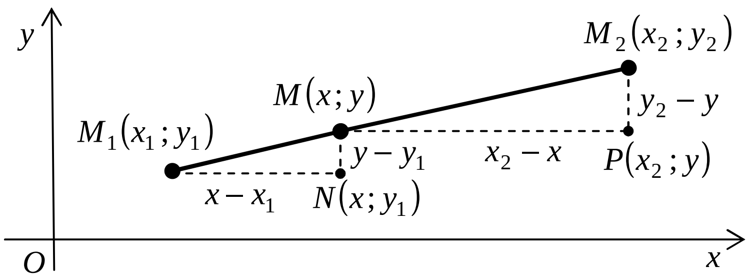

Рис. 7

Звідси ***координати точки*** $M(x, y)$***, яка ділить заданий відрізок у заданому відношенні***, обчислюються за формулами

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}}; \quad \boxed{y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}}.$$

Зауваження 1. Якщо точка M лежить між точками M_1 і M_2, то $\lambda > 0$ (***ділення внутрішнім способом***); якщо точка M не належить відрізку M_1M_2, то $\lambda < 0$ (***ділення зовнішнім способом***).

Зауваження 2. Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 попопалам, то $\lambda = 1$. Тоді ***координати середини відрізка*** визначаються за формулами

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}}; \quad \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}.$$

Приклад. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(-2;4)$, $B(5;-2)$, $C(7;6)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти: а) довжину медіани AM; б) точку E перетину медіан.

□ M – середина сторони BC:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7+5}{2} = 6; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2; \quad M(6;\,2).$$

$$AM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-(-2))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{68}.$$

За властивістю точки перетину медіан трикутника

$$\lambda = AE/EM = 2/1 = 2.$$

Тоді E: $\quad x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{-2+2\cdot 6}{1+2} = \dfrac{10}{3}$;

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{4+2\cdot 2}{1+2} = \frac{8}{3}; \quad E\left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

(Рисунок ΔABC на координатній площині Oxy зробіть самостійно). ■

1.1.3. Рівняння з двома змінними як рівняння лінії

Геометричним відображенням залежностей між двома економічними величинами служать різні лінії – графіки відповідних функцій. Ось деякі з них:

- крива байдужості – показує різноманітні комбінації двох продуктів, які мають однакове споживче значення чи корисність для споживачів;
- крива споживчого бюджету – показує різні комбінації кількостей двох товарів, які споживач може купити при даному рівні його грошового доходу;
- крива виробничих можливостей – показує різні комбінації двох товарів або послуг, які можуть бути вироблені в умовах повної зайнятості і повного обсягу виробництва в економіці з постійними запасами ресурсів і незмінною технологією;
- крива інвестиційного попиту – показує динаміку процентної ставки та обсяг інвестицій при різних процентних ставках;
- крива Філіпса –показує існування стійкого зв'язку між рівнем безробіття і рівнем інфляції;
- Крива Лаффера – показує зв'язок між ставками податків і податковими надходженнями, що виявляє таку податкову ставку, при якій податкові надходження досягають максимуму.

Під час розв’язування широкого кола оптимізаційних задач (наприклад, знайти найкращий план виробництва при обмежених ресурсах) потрібно виділяти певну плоску область – частину площини, обмежену деякими кривими.

Наведені приклади вказують на важливість для економістів уміння будувати графіки і аналізувати властивості відповідних ліній, знайомство з якими починається з найпростіших випадків – прямої лінії і кривих другого порядку.

Співвідношення $\boxed{F_1(x,y)=F_2(x,y)}$ називається ***рівнянням з двома змінними***. Його можна подати у ***стандартному вигляді***

$$\boxed{F(x,y)=0}.$$

Тут $F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$ і $F(x,y)$– деякі вирази.

Зображення множини розв’язків даного рівняння на координатній площині Oxy називається ***графіком*** цього рівняння.

Звичайно графіком рівняння служить деяка лінія. Наприклад, а) графіком рівняння $x^2 + y^2 = 1$ є коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом $R = 1$ (***дійсна лінія***); б) графіком рівняння $x^2 + y^2 = 0$ є одна точка – початок координат $O(0;0)$ (***вироджена лінія***); в) рівняння $x^2 + y^2 = -1$ ніякого графіка не має (***уявна лінія***).

Зауваження 1. Вигляд рівняння лінії залежить як від самої лінії, так і від вибору системи координат.

Зауваження 2. Говорять, що лінія ***задана неявно***, якщо її рівняння має вигляд $F(x, y) = 0$ або $F_1(x, y) = F_2(x, y)$. Якщо рівняння лінії розв'язане відносно змінної y, то говорять, що лінія ***задана явно*** рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$ – деякий вираз. Лінія може задаватись системою рівнянь $x = x(t)$ і $y = y(t)$, де t – допоміжна змінна (параметр), $x(t)$ і $y(t)$ – деякі вирази. Тоді говорять, що лінія ***задана параметрично***. Наприклад, траєкторія руху матеріальної точки в механіці часто задається в параметричній формі, при цьому роль параметра t відіграє час.

Правило 1. *Щоб встановити, чи лежить указана точка* $M_0(x_0, y_0)$ *на даній лінії* l: $F(x, y) = 0$, *треба перевірити, чи задовольняють координати точки рівняння лінії*:

$$F(x_0, y_0) = 0 \iff M_0 \in l \ ; \quad F(x_0, y_0) \neq 0 \iff M_0 \notin l .$$

Правило 2. *Щоб встановити, чи перетинаються дві дані лінії* l_1: $F_1(x, y) = 0$, l_2: $F_2(x, y) = 0$ *і знайти точки перетину (спільні точки), треба скласти систему рівнянь*

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

і розв'язати її.

Правило 3. *Щоб скласти рівняння даної лінії треба:*

1) *ввести систему координат;*

2) *знайти співвідношення між координатами довільної (по-*

точної, бігучої) точки $M(x, y)$ *цієї лінії та відомими сталими величинами, що визначають саме цю лінію, на основі характеристичної властивості даної лінії;*

3) *за допомогою рівносильних перетворень звести одержане рівняння до найбільш простого вигляду.*

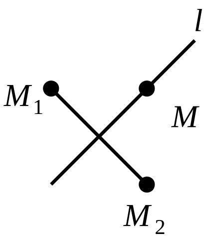

Рис. 8

Зауваження 3. Тип лінії визначають, зводячи її рівняння до відповідного стандартного вигляду.

Приклад. Скласти рівняння серединного перпендикуляра l до відрізка M_1M_2, де $M_1(-4;5)$, $M_2(4;-1)$ (рис. 8).

□ Довільна точка $M(x, y)$ шуканої лінії рівновіддалена від кінців відрізка M_1M_2: $M_1M = M_2M$;

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} \;;$$

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2} \quad \Big| \uparrow 2\,;$$

$$x^2+8x+16+y^2-10y+25 = x^2-8x+16+y^2+2y+1 \;;$$

$$l: \quad 4x-3y+6=0$$ – пряма лінія. ■

1.1.4. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай ***похила пряма*** l утворює кут α з віссю Ox і перетинає вісь Oy у точці $B(0;\, b)$ (рис. 9). Тангенс кута нахилу α називають ***кутовим коефіцієнтом*** k прямої l: $k = tg\,\alpha$. Число b називають ***початковою ординатою*** прямої l.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка прямої l. У прямокутному ΔBNM $\angle MBN = \alpha$. Тоді

$$\frac{NM}{BN} = tg\,\angle MBN \;; \quad \frac{y-b}{x} = tg\,\alpha = k \;; \quad y-b = kx \;.$$

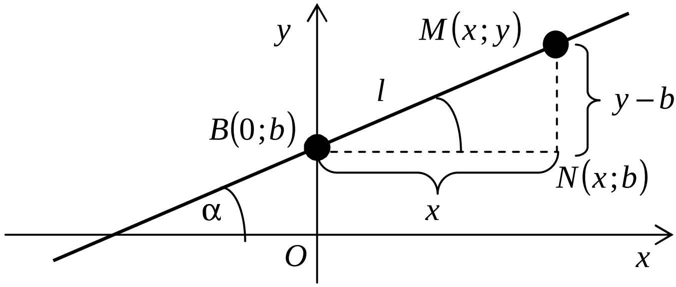

Рис. 9

Звідси маємо ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом***

$$\boxed{y = kx + b}\ .$$

Зауваження 1. Якщо $b = 0$, то пряма $y = kx$ проходить через початок координат $O(0;0)$. Якщо $k = 0$, то пряма $y = b$ паралельна осі Ox (***горизонтальна***).

Зауваження 2. Якщо пряма паралельна осі Oy $(\alpha = 90^\circ)$, то її кутовий коефіцієнт не існує $(k = tg\ 90^\circ = \infty)$, отже її рівняння не можна подати у відповідному вигляді. ***Рівняння вертикальної прямої*** має вигляд $\boxed{x = a}$, де a – абсциса точки перетину $A(a;\ 0)$ з віссю Ox.

Зауваження 3. Усі витрати підприємства на виробництво й збут продукції y складаються зі сталих (орендна плата, амортизація та ін.) і змінних (заробітна плата, витрати сировини, енергоресурсів та ін.) величин. Якщо змінні витрати пропорційні обсягу виробництва продукції x, то сума витрат на виробництво продукції y визначається лінійною залежністю $y = kx + b$, де b – сума сталих витрат; k – ставка змінних витрат на одиницю продукції.

Приклад 1. Для ремонту устаткування на деякому підприємстві потрібні запчастини в кількості x одиниць на рік. Якщо виготовляти їх на власних потужностях, то сталі витрати $b = 600$ тис. грн. на рік, а ставка змінних витрат на одиницю продукції $k = 80$ грн. На ринку готові запчастини можна купити за ціною $p = 200$ грн/од. Знайти мінімальну кількість запчастин $x_{\min}$, при якій вигідніше їх виробляти самотужки.

□ Якщо купити x запчастин, то сумарні витрати становлять $Y = px = 200x$. Якщо виготовити x запчастини самотужки, то їх собівартість становить: $y = kx + b = 80x + 600000$. При $y < Y$ підприємству вигідніше виробляти запчастини, ніж купувати. Відповідна мінімальна кількість $x_{\min}$ потрібних запчастин є найменшим цілим розв'язком цієї нерівності:

$$80x + 600000 < 200x;\ 120x > 600000;\ x > 500;\ x_{\min} = 501.\ ■$$

<u>Приклад 2</u>. Побудувати пряму l за її рівнянням:

а) $y = 2x - 3$; б) $y = -2x$; в) $y = 2$; г) $x = -3$.

(Розв'язати самостійно).

1.1.5. Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку. Пучок прямих

Нехай пряма l проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k. Тоді для прямої l маємо

$$y = kx + b \ ; \quad M_0(x_0, y_0) \in l \ \Rightarrow \ y_0 = kx_0 + b \ ;$$

$$b = y_0 - kx_0 \ ; \qquad y = kx + y_0 - kx_0 \ .$$

Звідси отримуємо ***рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку***

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}.$$

<u>Зауваження</u>. ***Пучок прямих*** з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ задається сукупністю рівнянь

$$\boxed{\left[\begin{array}{c} y - y_0 = k(x - x_0),\ k \in (-\infty; +\infty) \\ x = x_0 \ . \end{array}\right.}$$

<u>Приклад</u>. Написати рівняння і побудувати пряму, що на-

лежить пучку з центром у точці $M_1(-3;\,4)$, якщо: а) пряма паралельна осі Ox; б) пряма паралельна осі Oy; в) пряма нахилена до осі Ox під кутом $\alpha = 60^\circ$. (Розв'язати самостійно).

1.1.6. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма l проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Оскільки пряма l проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, то $y - y_1 = k(x - x_1)$. Тоді

$$M_2(x_2, y_2) \in l \;\Rightarrow\; y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)\ ;$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ ; \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\ .$$

Звідси маємо ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}\ .$$

Приклад 1. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(2;4)$, $B(-4;1)$, $C(5;3)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти рівняння бісектриси AL.

□ $$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (1-4)^2} = 3\sqrt{5}\ ;$$

$$AC = \sqrt{(5-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5}\ .$$

За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника

$$\lambda = \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3\ .$$

Тоді

$$L\text{:}\quad x = \frac{-4 + 5\cdot 3}{1+3} = \frac{11}{\ }\ ;\quad y = \frac{1 + 3\cdot 1}{1+3} = 1;\quad L\left(\frac{11}{4};1\right);$$

$$AL: \quad \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\;;\quad \frac{y-4}{1-4}=\frac{x-2}{11/4-2}\;;\quad y-4x+12=0\,. \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти залежність $y = kx + b$ повних витрат y на виробництво продукції від її обсягу x, якщо при максимальному обсязі виробництва $x_{\max} = 60$ од. загальні витрати становлять $y_{\max} = 30$ млн. грн. Мінімальному обсягу виробництва $x_{\min} = 40$ од. відповідають загальні витрати $y_{\min} = 25$ млн. грн. Побудувати одержану пряму $y = kx + b$ на координатній площині Oxy.

□ Застосуємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{y-y_{\min}}{y_{\max}-y_{\min}}=\frac{x-x_{\min}}{x_{\max}-x_{\min}}\;;\quad \frac{y-25}{30-25}=\frac{x-40}{60-40}\;;$$

$y = 0{,}5x + 15$ – шукана залежність.

(Рисунок зробити самостійно). ■

1.1.7. Загальне рівняння прямої та його окремі випадки

Кожна пряма описується деяким рівнянням першого степеня. Навпаки, кожне рівняння першого степеня є рівнянням деякої прямої.

Загальним рівнянням прямої називається рівняння першого степеня вигляду

$$\boxed{Ax + By + C = 0}\,,$$

де A, B і C – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел A, B відмінне від нуля, тобто $\boxed{A^2 + B^2 \neq 0}$.

<u>Зауваження 1</u>. Загальне рівняння прямої записується з точністю до сталого множника. По можливості його зводять до вигляду, де всі коефіцієнти – цілі числа, причому перший ненульовий коефіцієнт додатний.

Зауваження 2. У залежності від значень сталих A, B і C можливі наступні окремі випадки:

$C=0$, тоді пряма $Ax+By=0$ проходить через початок координат;

$A=0$, тоді пряма $By+C=0$ паралельна осі Ox. Її рівняння можна подати у вигляді $y=b$, де $b=-C/B$;

$B=0$, тоді пряма $Ax+C=0$ паралельна осі Oy. Її рівняння можна подати у вигляді $x=a$, де $a=-C/A$;

$A=0$ і $C=0$, тоді пряма $y=0$ співпадає з віссю Ox;

$B=0$ і $C=0$, тоді пряма $x=0$ співпадає з віссю Oy.

Приклад 1. У трикутнику ABC задано рівняння сторін AB: $3x-4y-2=0$ і AC: $2x+5y-9=0$. Знайти координати вершини A. (Розв'язати самостійно).

Приклад 2. Побудувати пряму l за її рівнянням:

а) $3x-4y+12=0$ (знайти точки перетину з осями координат); б) $x=2$ (знайти точку перетину з віссю абсцис); в) $y=-4$ (знайти точку перетину з віссю ординат).

(Розв'язати самостійно).

1.1.8. Рівняння прямої у відрізках на осях

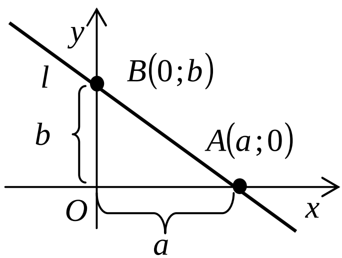

Рис. 10

Нехай похила пряма l відтинає на осях координат Ox і Oy відповідно відрізки a і b, тобто перетинає осі координат у двох заданих точках $A(a;\,0)$ і $B(0;\,b)$ (рис. 10). Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, отримаємо

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}\ ;\quad \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1\ .$$

Звідси маємо ***рівняння прямої у відрізках на осях***

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}\,.$$

<u>Зауваження</u>. У відрізках на осях не можна подати рівняння прямих, які паралельні осям координат.

<u>Приклад</u>. Пряма l задана своїм загальним рівнянням $4x-5y-11=0$. Записати її рівняння: а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях.

□ а) $4x-5y-11=0$; $-5y=-4x+11$;

$$y=\frac{4}{5}x-\frac{11}{5};\quad k=\frac{4}{5}\ ;\quad b=-\frac{11}{5}\ ;$$

б) $4x-5y-11=0$; $4x-5y=11$;

$$\frac{4x}{11}-\frac{5y}{11}=1\ ;\quad \frac{x}{11/4}+\frac{y}{-11/5}=1\ ;\quad a=\frac{11}{4}\ ;\quad b=-\frac{11}{5}\ .\ ■$$

1.1.9. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2, що зображені на рис. 11, мають задані кутові коефіцієнти відповідно k_1 і k_2. Тоді для кута φ між ними маємо

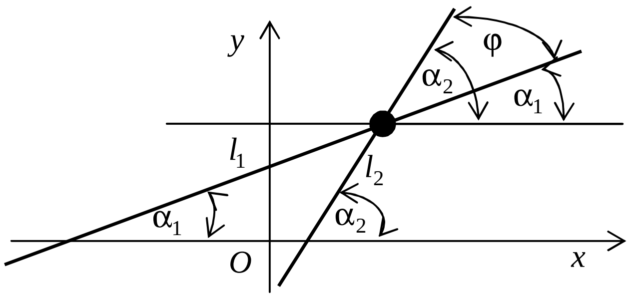

Рис. 11

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \; ; \qquad tg\;\varphi = \frac{tg\;\alpha_2 - tg\;\alpha_1}{1 + tg\;\alpha_1 \cdot tg\;\alpha_2} \; .$$

Оскільки $tg\;\alpha_1 = k_1$; $tg\;\alpha_2 = k_2$, то ***тангенс кута між прямими*** знаходиться за формулою

$$\boxed{tg\;\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}} \; .$$

Для паралельних прямих $\varphi = 0$, $tg\;\varphi = 0$, а для перпендикулярних прямих $\varphi = 90^\circ$, $tg\;\varphi \to \infty$. З одержаної формули випливає, що

1) ***необхідною і достатньою умовою паралельності*** невертикальних прямих l_1 і l_2 є рівність $\boxed{k_1 = k_2}$;

2) ***необхідною і достатньою умовою перпендикулярності*** похилих прямих l_1 і l_2 є рівність $\boxed{k_1 k_2 = -1}$.

<u>Зауваження</u>. Кут між прямими φ розуміється як кут повороту. ***Гострий кут*** між прямими знаходиться за формулою

$$\varphi_г = arctg \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| \; .$$

<u>Приклад</u>. У тупокутному ΔABC ($\angle A$ – тупий) задано рівняння сторін AB: $y = -3x + 5$, AC: $y = 2x - 10$ і координати вершини $C(2;\,3)$. Знайти: а) $\angle A$; б) рівняння висоти CN; в) рівняння середньої лінії ML, що паралельна AB, де M – середина сторони AC.

□ а) Знайдемо гострий кут між прямими AB і AC:

$$k_{AB} = -3\,;\; k_{AC} = 2\,;\; \varphi_г = arctg\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = arctg\left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot (-3)}\right| =$$

$$= arctg\,1 = \pi/4 \text{. Тоді } \angle A = \pi - \varphi_г = \pi - \pi/4 = 3\pi/4 \; .$$

б) $CN \perp AB \;\Leftrightarrow\; k_1 k_2 = -1$; $k_{AB} = -3$;

$$k_{CN}=-1/k_{AB}=1/3;\; C\in CN;\; CN:\quad y-y_0=k\left(x-x_0\right);$$

$$y-3=\frac{1}{3}\left(x-2\right);\quad y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}.$$

в) $A=AB\cap AC:\ \begin{cases} y=-3x+5 \\ y=2x-10 \end{cases};\quad A\left(3;-4\right).$

M – середина сторони AC: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{3+2}{2}=\dfrac{5}{2}$;

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-4+3}{2}=-\frac{1}{2};\; M\left(5/2;-1/2\right).$$

$$ML\parallel AB:\; k_{ML}=k_{AB}=-3;\; M\in ML;\; ML:$$

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right);\; y+1/2=-3\left(x-5/2\right);\; y=-3x+7. \;\blacksquare$$

1.1.10. Відстань від точки до прямої

Нехай задані точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ і пряма l своїм загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ (рис. 12). ***Відстанню*** d ***від точки до прямої*** називається довжина перпендикуляра M_0N, опущеного з даної точки на дану пряму.

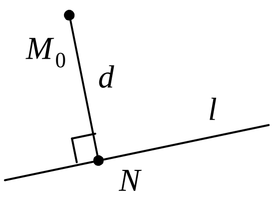

Рис. 12

Скориставшись умовою перпендикулярності, знайдемо рівняння цього перпендикуляра $l_\perp$. Склавши і розв'язавши систему рівнянь прямих l і $l_\perp$, одержимо точку перетину N. Довжину перпендикуляра M_0N знайдемо як відстань між двома точками. В результаті (пророблять указані операції самостійно) одержимо формулу для ***відстані*** d ***від точки до прямої***

$$\boxed{d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}}.$$

Приклад. У трикутнику ABC задано рівняння сторони AB: $x/2 - y/6 = 1$ і координати вершини $C(-1;\,-3)$. Знайти довжину висоти CN.

□ Перетворимо рівняння прямої AB до загального вигляду: $x/2 - y/6 = 1$; $6x - 2y = 12$; $3x - y - 6 = 0$.

Знайдемо довжину висоти CN як відстань від точки C до прямої

$$AB:\ CN = \left|3\cdot(-1) - (-3) - 6\right| \Big/ \sqrt{3^2 + (-1)^2} = 6\big/\sqrt{10}\ .\ ■$$

1.2. Криві другого порядку

1.2.1. Загальне рівняння лінії другого порядку

Лінії другого порядку відповідає рівняння другого степеня, загальний вигляд якого

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$$

де A, B, C, D, E, F – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел A, B і C відмінне від нуля, тобто

$$\boxed{A^2 + B^2 + C^2 \neq 0}.$$

Існують чотири типи ліній другого порядку – ***коло, еліпс, гіпербола і парабола***. Тип лінії визначається знаком дискримінанта $\boxed{\Delta = B^2 - AC}$:

а) якщо дискримінант $\Delta < 0$, то рівняння має ***еліптичний тип*** і визначає або еліпс (зокрема, коло), або точку (наприклад, $x^2 + y^2 = 0$), або уявну криву (наприклад, $x^2 + y^2 = -1$);

б) якщо дискримінант $\Delta > 0$, то рівняння має ***гіперболічний тип*** і визначає або гіперболу, або пару прямих, що перетинаються (наприклад, $x^2 - y^2 = 0$ – пара прямих: $x + y = 0$ і $x - y = 0$);

в) якщо дискримінант $\Delta = 0$, то рівняння має ***параболічний тип*** і визначає або параболу, або пару паралельних прямих (наприклад, $x^2 - 1 = 0$), або уявну лінію (наприклад, $x^2 + 1 = 0$ – пара уявних прямих).

Лінія другого порядку називається ***виродженою***, якщо її загальне рівняння визначає на площині: порожню множину (уявну лінію), точку, пряму, пару прямих.

Зауваження. Надалі будемо розглядати тільки ***суттєво криві дійсні лінії*** другого порядку. Уявні криві та інші випадки виродження вивчати не будемо.

1.2.2. Канонічне рівняння кола

Колом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини C (***центра*** кола) дорівнює заданій сталій величині r (***радіусу*** кола).

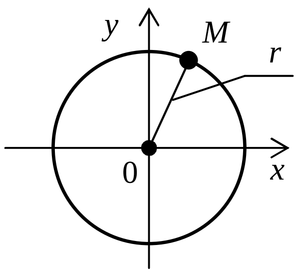

Рис. 13

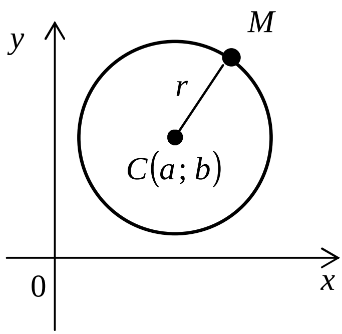

Рис. 14

Розглянемо коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом r (рис. 13). Для довільної точки $M(x;y)$ кола:

$$MO = r\ ; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r\ ; \quad x^2 + y^2 = r^2\ .$$

Одержане співвідношення $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$ називається ***канонічним*** (найпростішим) ***рівнянням кола***.

Зауваження. Якщо центром кола служить точка $C(a;b)$, то маємо ***рівняння кола зі зміщеним центром*** (рис. 14)

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}\ .$$

Приклад 1. Переконатись, що рівняння

$$3x^2+3y^2+6x-5y-9=0$$

є рівнянням кола. Знайти його центр $C(a;\,b)$ і радіус r.

□ $x^2+y^2+2x-(5/3)y-3=0$;

$$x^2+2x+1-1+y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-3=0\ ;$$

$$(x+1)^2+(y-5/6)^2=(13/6)^2\ ;\quad C(-1;\,5/6)\ ;\quad r=13/6\,.\ \blacksquare$$

Приклад 2. Дано дві точки $A(4;\,-3)$ і $B(-8;\,1)$. Скласти рівняння кола l, для якого відрізок AB служить діаметром.

□ Центром кола l є середина C діаметра AB, а радіус кола $r=AB/2$. Тоді:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4+(-8)}{2}=-2\,;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-3+1}{2}=-1\,;$$

$$C(-2;\,-1);\quad AB=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$

$$=\sqrt{(4-(-8))^2+(-3-1)^2}=4\sqrt{5}\,;\quad r=2\sqrt{5}\,.$$

Рівняння кола $(x+2)^2+(y+1)^2=20$. $\blacksquare$

Приклад 3. Два підприємства A і B, відстань між якими $AB=100$ км (рис. 15), виробляють деяку продукцію одного виду, причому відпускна ціна одиниці продукції на цих підприємствах однакова. Нехай перевезення продукції до споживача завжди здійснюється по прямій, а транспортні витрати на перевезення одиниці продукції від підприємства A складають $k_1=0{,}03$ грн./км, а від підприємства B – $k_2=0{,}02$ грн./км. Де розміщені споживачі, що несуть однакові витрати на купівлю продукції обох підприємств? Якою є конфігурація ринку збуту продукції цих підприємств?

□ Нехай відпускна ціна одиниці продукції на цих підприємствах дорівнює p грн. Припустимо, що споживач знаходиться в деякій точці $M(x;y)$. З рис. 15 видно, що

$$AM = \sqrt{(x+50)^2 + y^2}\ ; \quad BM = \sqrt{(x-50)^2 + y^2}\ .$$

Витрати споживача на покупку одиниці виробу з підприємства A складають

$$p + k_1 \cdot AM = p + 0{,}03 \cdot \sqrt{(x+50)^2 + y^2}\ ,$$

а з підприємства B відповідно

$$p + k_2 \cdot BM = p + 0{,}02 \cdot \sqrt{(x-50)^2 + y^2}\ .$$

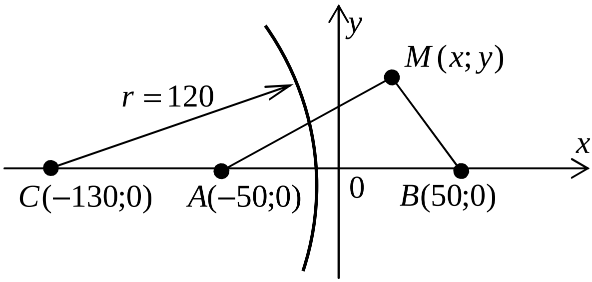

Рис. 15

Якщо витрати споживача однакові, то

$$p + 0{,}03 \cdot \sqrt{(x+50)^2 + y^2} = p + 0{,}02 \cdot \sqrt{(x-50)^2 + y^2}\ ;$$

$$0{,}03 \cdot \sqrt{(x+50)^2 + y^2} = 0{,}02 \cdot \sqrt{(x-50)^2 + y^2}\ ;$$

$$3 \cdot \sqrt{(x+50)^2 + y^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-50)^2 + y^2} \quad \uparrow 2\ ;$$

$$9(x+50)^2 + 9y^2 = 4(x-50)^2 + 4y^2\ ;$$

$$5x^2 + 1300x + 5y^2 + 5 \cdot 2500 = 0\ ; \quad x^2 + 260x + y^2 + 2500 = 0\ ;$$

$$x^2 + 2 \cdot 130x + 130^2 - 130^2 + y^2 + 2500 = 0\ ;$$

$$(x+130)^2 + y^2 = 14400$$

– коло з центром $C(-130;0)$ і радіусом $r=120$ км (рис. 15). Для споживачів, які знаходяться на цьому колі, витрати на покупку продукції підприємств A і B одинакові.

Для споживачів, які знаходяться поза колом, витрати менші на покупку продукції підприємства B. Для споживачів, які знаходяться всередині кола, витрати менші на покупку продукції підприємства A. Отже, конфігурація ринку збуту виглядає так:

- споживачі, які знаходяться всередині кола, купують продукцію підприємства A;
- споживачі, які знаходяться на колі, купують продукцію рівно можливо обох підприємств;
- споживачі, які знаходяться поза колом, купують продукцію підприємства B. ■

1.2.3. Канонічне рівняння еліпса

Еліпсом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** еліпса) дорівнює заданій сталій величині $2a$, більшій за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x;y)$ еліпса (рис. 16) $r_1+r_2=2a$, де $r_1=MF_1$ і $r_2=MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x;y)$; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокуси, $F_1F_2=2c<2a$. Тоді

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a .$$

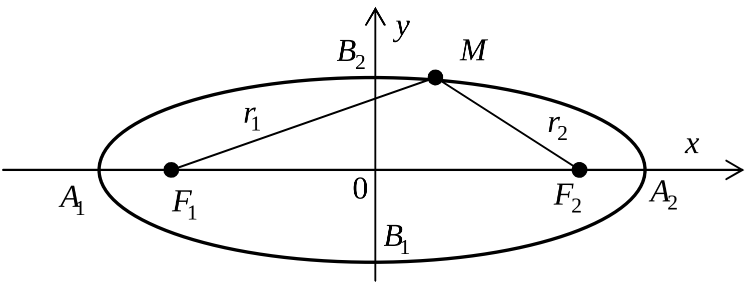

Рис. 16

Підносячи до квадрата і спрощуючи, поклавши $b^2 = a^2 - c^2$ (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння еліпса***

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad \text{де} \quad \boxed{b^2 = a^2 - c^2 > 0}.$$

Еліпс має форму овалу, який симетричний відносно ***великої осі*** $A_1A_2 = 2a$ і ***малої осі*** $B_1B_2 = 2b$, а також центрально симетричний відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** еліпса. Точки перетину з осями координат $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;\,b)$ називаються ***вершинами*** еліпса.

Відношення ***міжфокусної відстані*** $F_1F_2 = 2c$ до великої осі $A_1A_2 = 2a$ називається ***ексцентриситетом*** еліпса і позначається ε: $\boxed{\varepsilon = c/a}$.

Зауваження. Ексцентриситет характеризує форму еліпса, при цьому $0 \le \varepsilon < 1$. Якщо $\varepsilon = 0$, то маємо окремий випадок еліпса – коло, при цьому $a = b = r$. Чим більше значення ε, тим сильніше витягнутий еліпс вздовж великої осі.

Дві прямі, що мають рівняння $\boxed{x = \pm a/\varepsilon}$, називаються ***директрисами*** еліпса. Оскільки для еліпса $\varepsilon < 1$, то права директриса розміщена вертикально правіше від його правої вершини; а ліва директриса –лівіше від його лівої вершини.

Властивість директрис еліпса: *Відношення фокального радіуса* r *довільної точки еліпса до відстані* d *цієї точки до відповідної директриси є стала величина, що дорівнює ексцентриситету еліпса* $\boxed{r/d = \varepsilon}$.

Приклад 1. Переконатись, що рівняння

$$16x^2 + 6y^2 - 96 = 0$$

є рівнянням еліпса. Зобразити ескіз еліпса, знайшовши точки його перетину з осями координат (вершини еліпса).

□ $16x^2 + 6y^2 - 96 = 0$; $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{16} = 1$; $\dfrac{x^2}{\sqrt{6}^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

– еліпс, що перетинає осі координат у вершинах $A_1\left(-\sqrt{6};0\right)$, $A_2\left(\sqrt{6};0\right)$, $B_1(0;-4)$, $B_2(0;4)$.

(Ескіз еліпса зробити самостійно). ■

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння еліпса, мала піввісь якого $b=2\sqrt{3}$, а лівий фокус знаходиться у точці $F(-2;0)$. Знайти його ексцентриситет і написати рівняння директрис.

□ За умовою задачі $b=2\sqrt{3}$, а половина міжфокусної відстані $c=2$. Тоді

$$c^2=a^2-b^2;\;\; a^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2=16;\;\; a=4.$$

Звідси

$x^2/16+y^2/12=1$ – канонічне рівняння; $\varepsilon=2/4=1/2$ – ексцентриситет; $x=\pm 4/(1/2)$; $x=\pm 8$ – директриси. ■

Приклад 3. Написати рівняння еліпса, симетричного відносно осей координат, який проходить через точки $M_1(-2;-3)$ і $M_2(2\sqrt{3};-\sqrt{3})$. Знайти велику й малу півосі та ексцентриситет. Для точки M_1 обчислити її фокальні радіуси та відстані від неї до кожної з директрис.

□ Еліпс симетричний відносно осей координат, тому його рівняння буде канонічним: $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

Оскільки точки M_1 і M_2 належать еліпсу, то одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (-2)^2/a^2+(-3)^2/b^2=1 \\ (2\sqrt{3})^2/a^2+(-\sqrt{3})^2/b^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4/a^2+9/b^2=1 \\ 12/a^2+3/b^2=1 \end{cases}$$

Для розв'язування системи застосуємо метод заміни змінної:

$$\begin{matrix} 1/a^2=u; \\ 1/b^2=v; \end{matrix} \quad \begin{cases} 4u+9v=1 \\ 12u+3v=1 \end{cases} \quad \begin{cases} u=(1-9v)/4 \\ 12(1-9v)/4+3v=1 \end{cases}$$

$$-24v=-2;\; v=1/12;\; u=(1-9/12)/4=1/16;\; a^2=16;\; b^2=12.$$

Дістанемо рівняння еліпса

$$x^2/16 + y^2/12 = 1, \quad a = 4 \text{ і } b = 2\sqrt{3}.$$

Оскільки $b^2 = a^2 - c^2$, то $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-12} = 2$.

Фокуси еліпса $F_1(-2;0)$ і $F_2(2;0)$. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = c/a = 2/4 = 1/2$.

Фокальні радіуси точки M_1 (відстані точки до фокусів):

$$r_1 = MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(-2+2)^2 + (-3)^2} = 3;$$

$$r_2 = MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3)^2} = 5.$$

Рівняння директрис еліпса

$$x = \pm a/\varepsilon \;\Rightarrow\; x = \pm 4/(1.2) \;\Rightarrow x = \pm 8.$$

Відстані точки M_1 до директрис еліпса дорівнюють:

$$d_1 = |x + a/\varepsilon|; \;\; d_1 = |-2+8| = 6;$$

$$d_2 = |x - a/\varepsilon|; \;\; d_2 = |-2-8| = 10. \quad ■$$

1.2.4. Канонічне рівняння гіперболи

Гіперболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** гіперболи) дорівнює заданій сталій величині $2a$, меншій за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x;y)$ гіперболи (рис. 17)

$$|r_1 - r_2| = 2a \;,$$

де $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x;y)$; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокуси, $F_1F_2 = 2c > 2a$. Тоді

$$\left|\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a \;.$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи, поклавши $b^2 = c^2 - a^2$ (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння гіпербо-***

ли $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$, де $\boxed{b^2=c^2-a^2>0}$.

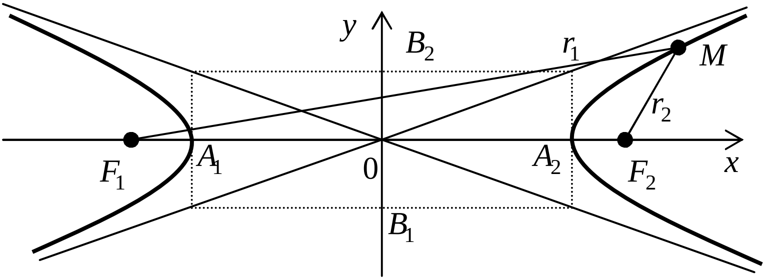

Рис. 17

Гіпербола складається з двох нескінченних гілок, які симетричні відносно ***дійсної осі*** $A_1A_2=2a$ і ***уявної осі*** $B_1B_2=2b$, а також центрально симетричні відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** гіперболи. Дійсні вершини $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ є точками перетину гіперболи з віссю Ox. Через уявні вершини $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ гіпербола не проходить. Прямі

$$\boxed{y=\frac{b}{a}x};\quad \boxed{y=-\frac{b}{a}x}$$

є ***асимптотами*** гіперболи.

Асимптотою називається пряма, що необмежено зближається з гілкою кривої на нескінченності.

Відношення ***міжфокусної відстані*** $F_1F_2=2c$ до дійсної осі $A_1A_2=2a$ називається ***ексцентриситетом*** гіперболи і позначається ε: $\boxed{\varepsilon=c/a}$.

Зауваження. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи, при цьому $\varepsilon>1$. Чим менше значення ε, тим сильніше витягнута гіпербола вздовж дійсної осі.

Дві прямі, що мають рівняння $\boxed{x=\pm a/\varepsilon}$, називаються ***директрисами*** гіперболи. Оскільки для гіперболи $\varepsilon>1$, то права директриса розмішена вертикально між центром і правою вершиною, а ліва директриса – між центром і лівою вершиною.

Властивість директрис гіперболи аналогічна відповідній властивості для еліпса: $\boxed{r/d=\varepsilon}$.

Приклад 1. Переконатись, що рівняння

$$5x^2-15y^2-225=0$$

є рівнянням гіперболи. Знайти вершини гіперболи та її асимптоти. Зобразити ескіз гіперболи. (Розв'язати самостійно).

Приклад 2. Знайти рівняння гіперболи l_g, якщо її ексцентриситет $\varepsilon_g=2$, а фокуси збігаються з фокусами еліпса $l_e:\ x^2/100+y^2/36=1$.

□ $l_e:\ x^2/100+y^2/36=1;\ a_e^2=100;\ b_e^2=36;\ c_e^2=a_e^2-b_e^2;$

$$c_e^2=100-36=64;\ c_g=c_e=8;\ \varepsilon_g=c_g/a_g;\ a_g=c_g/\varepsilon_g;$$

$$a_g=8/2=4;\ a_g^2=16;\ b_g^2=c_g^2-a_g^2;\ b_g^2=8^2-4^2=48;$$

$$l_g:\ x^2/16-y^2/48=1.\quad\blacksquare$$

Приклад 3. Точка $M\left(-4;3\sqrt{3}\right)$ належить гіперболі $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, а її асимптоти $y=\pm(3/2)x$. Знайти канонічне рівняння, ексцентриситет і директриси гіперболи.

□ Оскільки точка M належать гіперболі, то

$$(-4)^2/a^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2/b^2=1.$$

З рівнянь асимптот маємо $b/a=3/2$. Розв'язуючи одержану систему двох рівнянь з двома невідомими a і b (зробіть це самостійно), знаходимо $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ і $b=3\sqrt{3}$.

Звідси $x^2/12-y^2/27=1$ – канонічне рівняння;

$$c^2=a^2+b^2;\ c^2=12+27=39;\ c=\sqrt{39};\ \varepsilon=c/a;$$

$$\varepsilon=\left(\sqrt{39}\right)/\sqrt{12}=\sqrt{39}/2\sqrt{3}$$ – ексцентриситет;

$$x = \pm 2\sqrt{3}/\left(\sqrt{39}/2\sqrt{3}\right); \quad x = \pm 12\sqrt{39}/39$$ – директриси. ■

Приклад 4. Нехай x – чисельність робітників фірми. Вони повинні згідно угоди виконати певне завдання, за що одержать загалом $S = 100$ тис. грн. заробітної плати. Відомо, що зарплата в усіх однакова і відрахування становлять $\Delta = 500$ грн. з належної кожному суми. Знайти залежність $y = y(x)$ заробітної плати кожного робітника y від їх чисельності x. Обчислити величину зарплати при чисельності $x = 20$.

□ Маємо рівняння $y = 100000/x - 500$. .Воно визначає гіперболу, для якої пряма $y = -500$ є горизонтальною асимптотою, а пряма $x = 0$ служить вертикальною асимптотою. Оскільки за економічним змістом $x > 0$ і $y > 0$, то розглядається гілка цієї гіперболи, що лежить у першій чверті. При цьому

$$y = 100000/x - 500 > 0; 100000/x > 500; \ x < 200.$$

При чисельності $x = 20$ одержимо

$$y(20) = 100000/20 - 500 = 4500 \text{ (грн.).}$$ ■

1.2.5. Канонічне рівняння параболи

Параболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань від заданої точки площини F (***фокуса*** параболи) дорівнює відстані до заданої прямої l_d (***директриси*** параболи), що не проходить через фокус.

Для довільної точки $M(x;y)$ параболи (рис. 18)

$$r = d,$$

де $r = MF$ – ***фокальний радіус*** точки $M(x;y)$; d – відстань точки $M(x;y)$ до директриси l_d: $x = -p/2$; $F(p/2;0)$ – фокус; p – ***параметр*** параболи (відстань від фокуса до директриси), $p > 0$. Тоді

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + (y - 0)^2} = x - (-p/2).$$

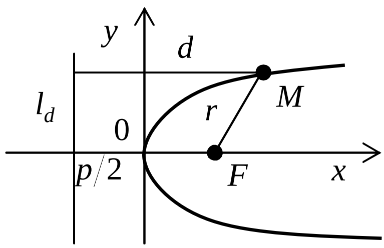

Рис. 18

Підносячи до квадрата і спрощуючи (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння параболи***

$$\boxed{y^2 = 2px}.$$

Очевидно, що $x \geq 0$.

Парабола має форму нескінченної гілки, яка симетрична відносно ***осі*** параболи OF . Точка $O(0;0)$ на осі симетрії (початок координат) називається ***вершиною*** параболи. Асимптот парабола не має.

Зауваження 1. Згідно з означенням параболи і властивостями директрис еліпса і гіперболи, прийнято, що ***ексцентриситет*** параболи дорівнює одиниці $\boxed{\varepsilon = 1}$.

Приклад 1. Визначити координати фокуса $F(p/2;\, 0)$ і рівняння директриси l_d параболи $y^2 = 12x$. Знайти кінці $M_1(p/2;\, -p)$ і $M_2(p/2;\, p)$ хорди $M_1M_2 = 2p$, яка проходить через фокус параболи і перпендикулярна до її осі. Зобразити ескіз параболи, провівши плавну лінію через її вершину O і точки $M_1(p/2;\, -p)$, $M_2(p/2;\, p)$.

□ $y^2 = 2px$; $y^2 = 12x$; $2p = 12$; $p = 6$; $F(p/2;\, 0)$;

$F(3;\, 0)$; l_d: $x = -\,p/2$; l_d: $x = -3$; $M_1(3; -6)$; $M_2(3;\, 6)$.

(Ескіз параболи зробити самостійно). ■

Приклад 2. Скласти рівняння параболи l_p: $y^2 = 2px$, якщо її фокус збігається з правою дійсною вершиною гіперболи l_g: $x^2/4 - y^2/6 = 1$. Знайти точки перетину цих ліній.

□ l_g: $x^2/4 - y^2/6 = 1.$; $a_g^2 = 4$; $F(p/2;0) = A_2(a_g\,;0)$;

$p/2 = a_g = 2$; $p = 4$; l_p: $y^2 = 2px$; $y^2 = 8x$;

$$\begin{cases} x^2/4 - y^2/6 = 1 \\ y^2 = 8x \ ; \end{cases} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{8x}{6} = 1 \ ; \ \ 3x^2 - 16x - 12 = 0 \ ;$$

$x_1 = 6$; $x_2 = -2/3$ – не задовольняє умову $x \geq 0$;

$$y^2 = 8 \cdot 6\,;\ y_1 = 4\sqrt{3}\,;\ y_2 = -4\sqrt{3}\,;\ M_1\left(3; -4\sqrt{3}\right);\ M_2\left(3;\ 4\sqrt{3}\right). \ ■$$

<u>Приклад 3</u>. Фірма планує випускати газові котли. Дослідження ринку показало, що залежність попиту Q (кількість реалізованих котлів) від ціни p одного котла задається рівнянням $Q = 60000 - 2{,}5p$. Функція вартості $V = V(Q)$ (затрати V фірми на випуск Q котлів) визначається рівнянням $V = 1180000 + 18000Q + 0{,}1Q^2$. Скласти залежність $\Pi = \Pi(Q)$ прибутку Π від кількості Q котлів. Визначити його оптимальне значення $\Pi_{\max}$ і відповідний обсяг реалізації $Q_{\max}$.

□ Виразимо ціну p котла як функцію від обсягу продаж Q: $2{,}5p = 60000 - Q$; $p = 24000 - 0{,}4Q$. Дохід R від продажу Q котлів дорівнює $R = pQ$. Тоді

$$R = pQ = 24000Q - 0{,}4Q^2 .$$

Прибуток $\Pi = R - V$ також виразимо як функцію від Q:

$$\Pi = R - V = 24000Q - 0{,}4Q^2 - (1180000 + 18000Q + 0{,}1Q^2) =$$

$$= 6000Q - 0{,}5Q^2 - 1180000 .$$

Графіком цієї функції є вертикальна парабола з напрямленими вниз гілками і вершиною в точці $M_0(Q_0; \Pi_0)$, де

$$Q_0 = 6000/(2 \cdot 0{,}5) = 6000\,; \quad \Pi_0 = \Pi(Q_0) = 6000 \cdot 6000 -$$

$$- 0{,}5 \cdot 6000^2 - 1180000 = 16820000 .$$

Оскільки $Q > 0$ і виробництво повинно бути прибутковим $\Pi > 0$, то треба розглядати тільки дугу параболи, що лежить у першій чверті. Розв’яжемо нерівність $\Pi(Q) > 0$. Для цього знайдемо точки, в яких парабола перетинає вісь абсцис Q:

$$\Pi(Q) = 0; \quad 6000Q - 0{,}5Q^2 - 1180000 = 0;$$

$$0{,}5Q^2 - 6000Q + 1180000 = 0; \;\; Q^2 - 12000Q + 2360000 = 0;$$

$$D/4 = 6000^2 - 2360000 = 33640000 = 5800^2;$$

$$Q_1 = 6000 - 5800 = 200; \;\; Q_2 = 6000 + 5800 = 11800.$$

Отже, фірма повинна виробляти газових котлів більше, ніж 200, і менше, ніж 11800.

Оскільки дана парабола найбільшого значення досягає у своїй вершині, то прибуток буде найбільшим, коли фірма буде виробляти $Q_{\max} = Q_0 = 6000$ котлів. При цьому її оптимальний прибуток буде становити $\Pi_{\max} = \Pi_0 = 16820000$ (грош. од). ■

Зауваження 2. На практиці часто зустрічаються параболи з іншим розміщенням відносно системи координат. На рис. 19 – 22 наведені основні випадки і відповідні канонічні рівняння.

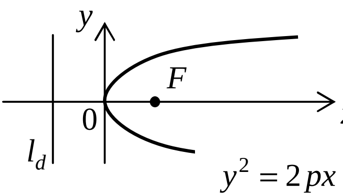

Рис. 19

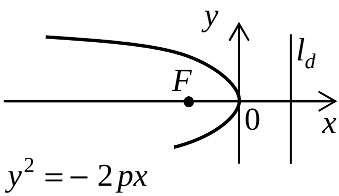

Рис. 20

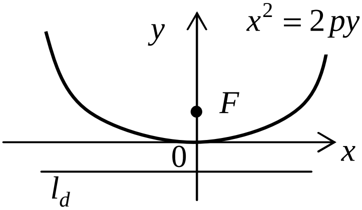

Рис. 21

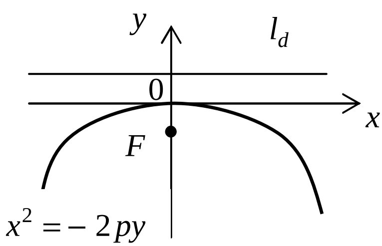

Рис. 22

1.2.6. Рівняння деяких ліній у параметричній формі

Нехай плоска лінія задана у декартовій прямокутній системі координат ***параметричними рівняннями***

$$\boxed{x = x(t); \quad y = y(t)},$$

де t – допоміжна змінна (***параметр***), $x(t)$ і $y(t)$ – деякі вирази.

Якщо з цих рівнянь вдається вилучити параметр t, то одержується рівняння лінії у неявній $F(x, y) = 0$ чи навіть у явній $y = f(x)$ формах.

Зауваження 1. Якщо лінія задана явно рівнянням $y = f(x)$, то її завжди можна подати в параметричній формі

$$\boxed{x = t; \quad y = f(t)}.$$

Приклад 1. Показати, що система параметричних рівнянь $\boxed{x = a\cos t;\ y = b\sin t}$, де $a, b = const$, причому $a > 0$; $b > 0$, визначає еліпс з центром у початку координат і півосями a і b.

□ $$\cos t = x/a; \quad \sin t = y/b,$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = (x/a)^2 + (y/b)^2; \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1. \quad ■$$

Зауваження 2. Якщо $a = b = r$, то маємо параметричні рівняння кола $\boxed{x = r\cos t;\ y = r\sin t}$, $r > 0$.

Приклад 2. Показати, що система параметричних рівнянь

$$\boxed{x = mt + a; \quad y = nt + b}, \text{ де } a, b, m, n = const,$$

визначає пряму.

□ Знайдемо параметр t з обох рівнянь і прирівняємо одержані вирази між собою:

$$t = (x - a)/m; \quad t = (y - b)/n; \quad (y - b)/n = (x - a)/m.$$

Звідси $y = \dfrac{n}{m}x + \dfrac{bm - an}{m}$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом n/m і початковою ординатою $(bm - an)/m$. ■

Приклад 3. Нехай з бігом часу t (років) валовий продукт P (млрд. дол.) деякої держави змінюється за формулою $P = 2000 + \lg 5t$, а кількість населення N (млн.) зростає за законом $N = 700 + \sqrt{2t}$. Обчислити значення цих величин у момент часу $t_0 = 2$. Подати у явному вигляді $P = f(N)$ залежність валового продукту P від кількості населення N.

□ Обчислимо значення валового продукту P_0 і кількості населення N у момент часу $t_0 = 2$:

$$P_0 = 2000 + \lg(5 \cdot 2) = 2001; \quad N_0 = 700 + \sqrt{2 \cdot 2} = 702.$$

З рівняння $N = 700 + \sqrt{2t}$ виразимо параметр t. Потім одержане співвідношення підставимо у вираз $P = 2000 + \lg 5t$ для валового продукту і спростимо:

$$\sqrt{2t} = N - 700; \quad t = (1/2)(N - 700)^2 :$$

$$P = 2000 + \lg\left(5 \cdot (1/2)(N - 700)^2\right);$$

$$P = 2000 + \lg\left(5 \cdot (1/2) \times\times (N - 700)^2\right)$$

$P = 2000 + \lg 2{,}5 + 2\lg(N - 700)$ – шукана залежність. ■

Приклад 4. Побудувати ескіз дуги ***циклоїди***, що задана в параметричній формі

$$\boxed{\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}} \quad t \in [0; 4\pi]; \quad a > 0 .$$

(***Циклоїда*** – лінія, яку описує точка кола радіуса $r = a$ під час його кочення без ковзання уздовж осі Ox. Параметр t – кут повороту колеса).

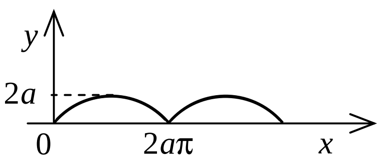

Рис. 23

□ Побудуємо точки за їх координатами з табл. 1, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо (рис. 23) задану дугу циклоїди. ■

Таблиця 1

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	
x	0	$a(\pi/2-1)$	$a\pi$	$a(3\pi/2+1)$	
y	0	a	$2a$	a	
t	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π
x	$2a\pi$	$a(5\pi/2-1)$	$3a\pi$	$a(7\pi/2+1)$	$4a\pi$
y	0	a	$2a$	a	0

Приклад 5. Побудувати ескіз ***астроїди***, що задана в параметричній формі

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}} \quad t \in [0;\, 2\pi]\ ; \quad a > 0\ .$$

(***Астроїда*** – лінія, яку описує точка кола радіуса $r = a/4$ під час його кочення без ковзання по внутрішній стороні кола радіуса $R = a$).

(Розв’язати самостійно. Значення параметра t взяти з кроком $\pi/8$, починаючи з $t = 0$).

1.3. Теорія границь

1.3.1. Сталі та змінні величини

У результаті вимірювання різних фізичних, економічних чи інших величин (часу, довжини, об'єму, маси, витрат, доходу, прибутку та ін.) визначаються їх числові значення. Математика займається величинами, відвертаючись від їх конкретного змісту. Далі, розглядаючи величини, матимемо на увазі їх числові значення.

Сталою величиною або ***константою*** (від латинського слова «constans» – «сталий») називається величина, яка не змінює свого значення в умовах задачі, що розглядається. Звичайно сталі величини позначаються малими (інколи великими) літерами з початку латинського алфавіту $a, b, c, d, \ldots$.

Змінною величиною називається величина, яка може набувати різних значень в умовах задачі, що розглядається. Звичайно змінні величини позначаються малими (інколи великими) буквами з кінця латинського алфавіту $\ldots, w, x, y, z$.

Сукупність всіх числових значень змінної величини утворює її ***область значень***.

<u>Зауваження 1</u>. Сталу величину часто зручно розглядати як окремий випадок змінної величини, всі значення якої рівні між собою.

<u>Зауваження 2</u>. Характер процесу змінювання може бути різним. Зокрема, розрізняють ***неперервні*** та ***дискретні*** змінні величини. Множина значень неперервної величини складається лише з числових проміжків. Множина значень дискретної величини включає в себе окремі ізольовані точки.

Наприклад:

а) Змінна величина $y = |x|$ визначена для всіх $x \in R$ і є неперервною. Її множиною значень є закрита півпряма $[0; +\infty)$.

б) Змінна величина $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \ x < 0; \\ 0, \ x = 0; \\ 1, \ x > 0 \end{cases}$ також визначена для всіх $x \in R$ і є дискретною. Її множиною значень є сукупність трьох ізольованих точок $\{-1; 0; 1\}$.

1.3.2. Класифікація змінних величин

Змінна x є ***упорядкована величина***, якщо про кожне з двох будь-яких її значень можна сказати, яке з них попереднє та яке наступне.

Тут ці поняття не пов'язані з часом, а є способом упорядкування значень змінної величини.

Окремим випадком упорядкованої змінної величини є ***числова послідовність*** $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$. Тут при $i < k$ значення x_i попереднє, а x_k – наступне незалежно від того, яке з цих значень більше.

Змінна величина x називається ***обмеженою***, якщо всі її значення за модулем не перевищують деякого додатного числа M протягом всього процесу змінювання:

$$\exists M > 0, \forall x: |x| \le M .$$

У противному випадку змінна величина називається ***необмеженою***. Точніше, змінна величина x називається ***необмеженою,*** якщо для довільного додатного числа M знайдеться хоча б одне значення x, яке за модулем перевищує це число M:

$$\forall M > 0, \exists x: |x| > M .$$

Наприклад:

а) Змінна величина $x_n = 1000/n$, $n \in N$ є обмеженою, оскільки існує таке число $M > 0$, що для всіх значень x_n виконується нерівність $|x_n| \le M$, $n \in N$. Зокрема, можна взяти $M = 2000$, оскільки

$$|x_n| = |1000/n| = 1000/n \le 2000 , \quad n \in N .$$

б) Змінна величина $y_n = (-1)^n n^2$, $n \in N$ є необмеженою, оскільки для будь-якого числа $M > 0$ можна знайти хоча б одне значення y_n, для якого виконується нерівність $|y_n| > M$. Зокрема, якщо взяти $M = 1000$, то

$$|y_{100}| = \left|(-1)^{100} \cdot 100^2\right| = 10000 > 1000 .$$

Змінна величина x називається ***зростаючою,*** якщо в процесі змінювання її значення не зменшуються, тобто кожне наступне значення неменше попереднього. Позначається $x \nearrow$.

Змінна величина x називається ***спадною***, якщо в процесі змінювання її значення не збільшуються, тобто кожне наступне значення не більше попереднього. Позначається $x \searrow$.

Зростаючі та спадні змінні величини називаються ***монотонними***.

Монотонна величина називається ***строго монотонною***, якщо її значення задовольняють відповідну строгу нерівність.

Наприклад:

а) Змінна величина $x_n = 2^n$, $n \in N$ є строго зростаючою

$x_n = 2^n \nearrow$, оскільки $x_{n+1} = 2^{n+1} > x_n = 2^n$, $n \in N$.

б) Змінна величина $y_n = (1/2)^n$, $n \in N$ є строго спадною $y_n = (1/2)^n \searrow$, оскільки $y_{n+1} = (1/2)^{n+1} < y_n = (1/2)^n$, $n \in N$.

в) Змінна величина $z_n = (-2)^n$, $n \in N$ є немонотонною, оскільки, зокрема,

$$z_3 = (-2)^3 \le z_2 = (-2)^2 \;;\; z_4 = (-2)^4 \ge z_3 = (-2)^3 .$$

г) Змінна величина $u_n = \operatorname{sgn}(n-10)$, $n \in N$ є зростаючою (не строго), оскільки $u_{n+1} = \operatorname{sgn}(n-9) \ge u_n = \operatorname{sgn}(n-10)$, $n \in N$. Зокрема, $u_8 = \operatorname{sgn}(-2) = -1 = u_7 = \operatorname{sgn}(-3) = -1$ і $u_{11} = \operatorname{sgn}(1) = 1 > u_{10} = \operatorname{sgn}(0) = 0$.

д) Площа S правильного вписаного в коло многокутника при подвоєнні його сторін є монотонно зростаючою величиною.

Підкреслимо, що величини з пунктів б), г) і д) є обмеженими, а величини з пунктів а) і в) – необмежені.

1.3.3. Нескінченно малі величини

Змінна величина x називається ***нескінченно малою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються меншими будь-якого фіксованого додатного числа ε.

Іншими словами, змінна величина x називається ***нескінченно малою***, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий момент t_ε процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t > t_\varepsilon$ значення змінної величини x за модулем менші цього числа ε:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon, \forall t > t_\varepsilon : |x| < \varepsilon .$$

Нескінченно малі величини позначаються звичайно малими буквами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \ldots$.

Те, що змінна величина α є нескінченно малою, позначається так: $\alpha \to 0$ (читається «α прямує до 0») або $\lim \alpha = 0$ (від латинського слова «limes» – «границя», читається «границя α

дорівнює 0 »).

Наприклад:

а) $\alpha = 10000/n^2 \to 0$ і $\beta = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} \to 0$. Зокрема, якщо $\varepsilon = 0{,}01$, то нерівність $|\alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow |10000/n^2| < 0{,}01$ виконується для всіх $n > n_\varepsilon = 1000$.

б) Змінні величини $x_n = 1 + (-1)^n$ і $y_n = n^{\cos \pi n}$ не є нескінченно малими.

<u>Зауваження</u>. Нуль 0 – це єдина стала величина, що є нескінченно малою.

<u>Геометричний зміст</u>: змінна величина α є нескінченно малою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ її значення в процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в ε-околі точки нуль:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists t_\varepsilon,\ \forall t > t_\varepsilon:\ \alpha \in U(0;\varepsilon).$$

Доведення основних властивостей нескінченно малих величин ґрунтується на їх означенні та властивостях модуля.

<u>Теорема 1</u>. *Нескінченно мала величина є обмеженою*:

$$\alpha \to 0 \Rightarrow \exists M > 0:\ |\alpha| \le M \ . \text{ (Без доведення).}$$

<u>Теорема 2</u>. *Сума (різниця) двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \to 0\\ \beta \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \pm \beta \to 0. \text{ Символічний запис } 0 \pm 0 = 0.$$

□ $\forall \varepsilon > 0$; $\exists t_{\varepsilon/2}$: $|\alpha| < \varepsilon/2$; $|\beta| < \varepsilon/2$;

$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow \alpha \pm \beta \to 0$. ■

<u>Теорема 3</u>. *Добуток нескінченно малої величини на обмежену є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{array}{r}|x| \le M\\ \alpha \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x \to 0 \ .$$

□ $\exists M>0: |x|\le M$; $\forall\varepsilon>0$; $\exists t_{\varepsilon/M}: |\alpha|<\varepsilon/M$;

$$|\alpha x| = |\alpha|\cdot|x| < \varepsilon/M \cdot M = \varepsilon \;\Rightarrow\; \alpha x \to 0 . \quad ■$$

Наслідок. *Добуток сталої величини на нескінченно малу є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha\to 0\\ C=const\end{array}\right\} \Rightarrow C\alpha\to 0 .$$ Символічний запис $C\cdot 0=0$.

Теорема 4. *Добуток двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha\to 0\\ \beta\to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\beta\to 0 .$$ Символічний запис $0\cdot 0=0$.

□ $\forall\varepsilon>0$; $\exists t_{\sqrt{\varepsilon}}: |\alpha|<\sqrt{\varepsilon}$; $|\beta|<\sqrt{\varepsilon}$;

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\cdot|\beta| < \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon \;\Rightarrow\; \alpha\beta\to 0 . \quad ■$$

Зауваження 1. Відношення двох нескінченно малих величин може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** $0/0$. Символічний запис $0/0=?$

Зауваження 2. Нескінченна алгебраїчна сума нескінченно малих величин може бути будь-якою величиною. Символічний запис $0\pm 0\pm 0\pm\ldots=?$

1.3.4. Нескінченно великі величини. Зв'язок нескінченно малих і нескінченно великих величин

Змінна величина x називається ***нескінченно великою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються більшими будь-якого фіксованого додатного числа M.

Іншими словами, змінна величина x називається ***нескінченно великою***, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно великого) додатного числа $M>0$ знайдеться такий момент t_M процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t>t_M$ значення змінної величини x за модулем більші цього числа M:

$$\forall M > 0, \exists t_M, \forall t > t_M : |x| > M \ .$$

Те, що змінна величина x є нескінченно великою, позначається так: $x \to \infty$ (читається «x прямує до ∞») або $\lim x = \infty$ (читається «границя x дорівнює ∞»).

Зауваження 1. Якщо в процесі змінювання значення нескінченно великої величини x стають і надалі залишаються додатними, то більш точно пишуть $x \to +\infty$ або $\lim x = +\infty$. Аналогічно, якщо в процесі змінювання значення нескінченно великої величини x стають і надалі залишаються від'ємними, то більш точно пишуть $x \to -\infty$ або $\lim x = -\infty$.

Наприклад:

а) $x_n = (-1)^n n^2 \to \infty$. Зокрема, якщо $M = 100$, то нерівність $|x_n| > M \Leftrightarrow \left|(-1)^n n^2\right| > 100$ виконується для всіх $n > n_M = 10$.

б) $y_n = 2^n - 100 \to +\infty$; $z_n = -n^3 + 1000/n \to -\infty$.

в) Змінні величини $x_n = 2^n + (-2)^n$ і $y_n = n^2 \sin\frac{\pi n}{2}$ не є нескінченно великими (хоча є необмеженими).

Зауваження 2. Не існує сталої величини, яка є нескінченно великою.

Геометричний зміст: змінна величина x є нескінченно великою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно великого) додатного числа $M > 0$ її значення в процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в M - околі символу нескінченності:

$$\forall M > 0, \exists t_M, \forall t > t_M : \ x \in U(\infty; M) \, .$$

Зауваження 3. Добуток сталої відмінної від нуля величини C на нескінченно велику x є нескінченно великою величиною:

$$\left. \begin{array}{r} x \to \infty \\ C = const \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ Cx \to \infty \ .$$

Зауваження 4. Добуток двох нескінченно великих величин є нескінченно великою величиною:

$$\left.\begin{matrix} x\to\infty \\ y\to\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \; xy\to\infty \; .$$

Зауваження 5. Різниця двох нескінченно великих величин може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** $\infty-\infty$. Символічний запис $\infty-\infty=?$ Аналогічне твердження справедливе для алгебраїчної суми будь-якого скінченного числа нескінченно великих величин.

Зауваження 6. Відношення двох нескінченно великих величин може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** ∞/∞. Символічний запис $\infty/\infty=?$

Теорема 1. *Величина, обернена до нескінченно великої величини, є нескінченно малою*:

$$x\to\infty \;\Rightarrow\; \alpha=1/x\to 0 .$$ Символічний запис $1/\infty=0$.

□ $\forall\varepsilon>0, \exists t_{1/\varepsilon}, \forall t>t_{1/\varepsilon} : |x|>1/\varepsilon$;

$$|\alpha|=1/|x|<\varepsilon \;\Rightarrow\; \alpha\to 0 . \quad ■$$

Наприклад, $x_n=2^n\to\infty \;\Rightarrow\; \alpha=1/x_n=2^{-n}\to 0$.

Теорема 2. *Величина, обернена до нескінченно малої відмінної від нуля величини, є нескінченно великою*:

$$\left.\begin{matrix} \alpha\to 0 \\ \alpha\neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \; x=\frac{1}{\alpha}\to\infty .$$ Символічний запис $1/0=\infty$.

□ $\forall M>0, \exists t_{1/M}, \forall t>t_{1/M} : |\alpha|<1/M$;

$$|x|=1/|\alpha|>M \;\Rightarrow\; x\to\infty . \quad ■$$

Наприклад,

$$\alpha=\lg(1+1/n)\to 0 \;\Rightarrow\; x_n=1/\alpha=\lg^{-1}(1+1/n)\to\infty .$$

Зауваження 7. Добуток нескінченно малої величини на нескінченно велику може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** $0\cdot\infty$. Символічний запис $0\cdot\infty=?$

1.3.5. Границя змінної величини та її властивості

Поняття границі характеризує напрям процесу змінювання.

Стала величина a називається ***границею*** змінної величини x, якщо їх різниця $x-a$ є нескінченно малою величиною:

$$x-a=\alpha\to 0 \ .$$

Записується так: $x\to a$ (читається «x прямує до a») або $\lim x=a$ (читається «границя x дорівнює a»).

Наприклад $\lim\frac{n+1}{n}=1$, оскільки $\alpha=\frac{n+1}{n}-1=\frac{1}{n}\to 0$.

Зауваження 1. Означення границі дано через поняття нескінченно малої величини («***мовою нескінченно малих***»). Існують інші еквівалентні означення границі.

Геометричний зміст: стала величина a є границею змінної величини x, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon>0$ значення змінної величини x у процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в ε-околі точки a:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists t_\varepsilon,\ \forall t>t_\varepsilon:\ x\in U(a;\varepsilon)\ .$$

Зауваження 2. Якщо з контексту задачі не зрозуміло, в яких умовах відбувається процес змінювання, то додаткову інформацію подають під знаком границі або після нього. Наприклад: $x_n\to a$ *при* $n\to\infty$ (читається «x_n прямує до a при n, що прямує до ∞») або $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ (читається «границя x_n при n, що прямує до ∞, дорівнює a»).

Доведення основних властивостей границь ґрунтується на означенні границі та властивостях нескінченно малих.

Теорема 1. *Змінна величина в фіксованому процесі змінювання має не більше однієї границі.*

□ Доведення методом від супротивного.

$$\left.\begin{array}{r} x \to a \\ x \to b \\ a \ne b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-a=\alpha \to 0 \\ x-b=\beta \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -a+b=\alpha-\beta \to 0 \ ;$$

$$\left.\begin{array}{r} b-a=\alpha-\beta \to 0 \\ b-a=const \end{array}\right\} \Rightarrow b-a=0 \Rightarrow b=a \ ,$$

що суперечить припущенню $a \ne b$. ■

<u>Зауваження 3</u>. Змінна величина може не мати границі в даному процесі змінювання. Змінна величина може вести себе порізному в різних процесах змінювання.

<u>Теорема 2</u>. *Змінна величина, що має скінченну границю, є обмеженою у відповідному процесі змінювання.*

$$\lim x = a \Rightarrow \exists M > 0,\ \forall x: |x| \le M \ .$$

(Без доведення).

<u>Теорема 3</u>. *Границя сталої величини дорівнює самій цій величині*:

$$\boxed{C = const \Rightarrow \lim C = C} \ .$$

□ $C = const \Rightarrow C - C = 0 \to 0 \Rightarrow C \to C$. ■

<u>Теорема 4</u>. *Границя скінченної алгебраїчної суми змінних величин дорівнює такій же сумі їх границь, якщо останні існують*:

$$\boxed{\lim(x+y-z) = \lim x + \lim y - \lim z} \ .$$

□ $$\left.\begin{array}{r} \lim x = a \\ \lim y = b \\ \lim z = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = a+\alpha,\ \alpha \to 0 \\ y = b+\beta,\ \beta \to 0 \\ z = c+\gamma,\ \gamma \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x+y-z=$$

$$=(a+\alpha)+(b+\beta)-(c+\gamma)=(a+b-c)+(\alpha+\beta-\gamma) \ ;$$

$$\alpha+\beta-\gamma \to 0 \Rightarrow \lim(x+y-z)=a+b-c \ . \quad ■$$

<u>Теорема 5</u>. *Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку їх границь, якщо останні існують*:

$$\boxed{\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y} \ .$$

□ $$\left.\begin{array}{l}\lim x = a\\ \lim y = b\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x = a+\alpha,\ \alpha\to 0\\ y = b+\beta,\ \beta\to 0\end{array}\right\} \Rightarrow xy = (a+\alpha)\times$$

$$\times(b+\beta) = ab + (\alpha b + \beta a + \alpha\beta)\ ;$$

$$\alpha b + \beta a + \alpha\beta \to 0 \Rightarrow \lim(xy) = ab\ . \qquad \blacksquare$$

Наслідок 1. *Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити за знак границі*:

$$\boxed{\lim(Cx) = C\cdot\lim x\ ,\ \ C = const}\ .$$

Наслідок 2. *Границя степеня з натуральним показником змінної величини дорівнює відповідному степеню її границі, якщо остання існує*:

$$\boxed{\lim x^n = (\lim x)^n\ ,\ \ n\in N}\ .$$

Теорема 6. *Границя відношення двох змінних величин дорівнює такому ж відношенню їх границь, якщо останні існують, причому границя знаменника відмінна від нуля*:

$$\boxed{\lim\frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}}\ .$$

□ $$\left.\begin{array}{l}\lim x = a\\ \lim y = b,\ b\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x = a+\alpha,\ \alpha\to 0\\ y = b+\beta,\ \beta\to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y} - \frac{a}{b} =$$

$$= \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha b - \beta a}{b(b+\beta)} \to 0 \Rightarrow \lim\frac{x}{y} = \frac{a}{b}\ . \qquad \blacksquare$$

Теорема 7. *Границя невід'ємної змінної величини також невід'ємна*. Аналогічно, *границя недодатної змінної величини також недодатна*:

$$\boxed{x\ge 0 \Rightarrow \lim x \ge 0}\ ; \quad \boxed{x\le 0 \Rightarrow \lim x \le 0}\ .$$

□ Доведемо першу частину теореми методом від супротивного.

$$\lim x = a < 0;\quad \left.\begin{array}{l}x\ge 0\\ a<0\end{array}\right\} \Rightarrow x - a > -a = const > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim(x-a)\neq 0$, що суперечить припущенню $\lim x = a$.

Доведення другої частини аналогічно. ■

Зауваження 4. Якщо змінна величина x додатна $x > 0$, то гарантувати строгу нерівність для границі $\lim x > 0$ у загальному випадку не можна. Те саме справедливе і для від'ємної змінної величини. Наприклад:

$$x_n = 1/n > 0 \; ; \quad \lim x_n = \lim(1/n) = 0 \; .$$

Теорема 8 (про стабілізацію знака нерівності). *Якщо границя змінної величини додатна, то починаючи з деякого моменту процесу змінювання всі її наступні значення також додатні*:

$$\boxed{\lim x > 0 \Rightarrow \exists t_0, \forall t > t_0 : x > 0}.$$

Аналогічно, *якщо границя змінної величини від'ємна, то починаючи з деякого моменту процесу змінювання всі її наступні значення також від'ємні*:

$$\boxed{\lim x < 0 \Rightarrow \exists t_0, \forall t > t_0 : x < 0}. \qquad \text{(Без доведення).}$$

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 - 5x^2 + x + 7}{3x^2 - 2}$.

□ $$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 5x^2 + x + 7}{3x^2 - 2} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3 - 5x^2 + x + 7\right)}{\lim\limits_{x\to -2}\left(3x^2 - 2\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -2} x^3 - \lim\limits_{x\to -2} 5x^2 + \lim\limits_{x\to -2} x + \lim\limits_{x\to -2} 7}{\lim\limits_{x\to -2} 3x^2 - \lim\limits_{x\to -2} 2} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{x\to -2} x\right)^3 - 5\left(\lim\limits_{x\to -2} x\right)^2 + \lim\limits_{x\to -2} x + 7}{3\left(\lim\limits_{x\to -2} x\right)^2 - 2} = \frac{(-2)^3 - 5(-2)^2 - 2 + 7}{3(-2)^2 - 2} = -\frac{7}{10} \; . \blacksquare$$

Спираючись на розв'язаний приклад, сформулюємо наступне правило:

Границю раціонального дробу $P(x)/Q(x)$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени, можна обчислити шляхом прямої підстановки замість x його граничного значення, якщо при цьому не порушуються умови, вказані у властивостях границь.

Зауваження 5. Якщо вказані умови порушуються, то треба скористатися, зокрема, властивостями нескінченно малих і нескінченно великих величин.

Приклад 2. Знайти границю

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-5}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{-1/x^2}$. в) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-5}{x^2-1}=\left|\dfrac{(-1)^3-2\cdot(-1)-5}{(-1)^2-1}=\dfrac{-4}{0}\right|=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{-1/x^2}=\left|2^{-1/0^2}=2^{-1/0}=2^{-\infty}\right|=0$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}=\left|\sin\dfrac{1}{1-1}=\sin\dfrac{1}{0}=\sin(\infty)\right|$ – *не існує*. ■

1.3.6. Розкриття невизначеності виду $0/0$ для многочленів

Правило: *Для розкриття невизначеності виду* $0/0$ *для многочленів* $P(x)/Q(x)$ *треба чисельник* $P(x)$ *і знаменник* $Q(x)$ *розкласти на множники та скоротити дріб, а потім перейти до границі.*

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^3+27}$; д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{x^4-16}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^3-1}=\left|\dfrac{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}{1^3-1}=\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\left|\begin{array}{l}3x^2-5x+2=0\\ x_1=1;\ x_2=2/3\end{array}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-2/3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=3\lim_{x\to 1}\frac{x-2/3}{x^2+x+1}=$$

$$=3\cdot\frac{1-2/3}{1^2+1+1}=\frac{1}{3};\qquad \text{б)}\ \lim_{x\to 2}\frac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{l|l} \underline{}\,3x^4-5x^3-5x+2 & x-2 \\ \underline{3x^4-6x^3} & 3x^3+x^2+2x-1 \\ \qquad\underline{}\,x^3-5x+2 & \\ \qquad\underline{x^3-2x^2} & \\ \qquad\quad\underline{}\,2x^2-5x+2 & \\ \qquad\quad\underline{2x^2-4x} & \\ \qquad\qquad\underline{}-x+2 & \\ \qquad\qquad\underline{-x+2} & \\ \qquad\qquad\quad 0 & \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x^3+x^2+2x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^3+x^2+2x-1}{x+2}=$$

$$=\frac{3\cdot 2^3+2^2+2\cdot 2-1}{2+2}=7\frac{3}{4};$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}=\left|\frac{4}{0}\right|=\infty\ ;$$

$$\text{г)}\ \lim_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x^3+27}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x^2-3x+9)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-3x+9}=\frac{-3+3}{(-3)^2-3\cdot(-3)+9}=\frac{0}{27}=0\,;$$

$$\text{д)}\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^4-16}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x-2)(x^2+4)}=$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x-4}{(x-2)(x^2+4)} = \frac{3}{16}. \quad \blacksquare$$

1.3.7. Розкриття невизначеності виду ∞/∞ для многочленів

При розкритті невизначеності виду ∞/∞ для нескінченно великих величин, зручно спочатку перейти до розгляду нескінченно малих величин, використовуючи наступне правило:

Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ для многочленів $P(x)/Q(x)$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ поділити на найвищий степінь x, а потім перейти до границі.

Зауваження 1. Указане правило справедливе для всіх випадків нескінченно великих величин ∞, $+\infty$ чи $-\infty$, тобто знак символу ∞ можна не уточнювати.

Приклад. Знайти границю:

$$\text{а)}\ \lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 4x - 1}{5x^2 - 2x + 6}; \quad \text{б)}\ \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2 - 4x - 7}{8x^2 - 3x + 6};$$

$$\text{в)}\ \text{ж}\ \lim_{x \to +\infty} \frac{9x^3 + 4x}{2x^5 + x^3 + 6}; \quad \text{д)}\ \lim_{x \to \infty} \frac{3 - 2x^8 + 4x^2}{x - 10x^6 + 7}.$$

$$\square \quad \text{а)}\ \lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 4x - 1}{5x^2 - 2x + 6} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3 - 5/x + 4/x^3 - 1/x^4}{5/x^2 - 2/x^3 + 6/x^4} = \left| \frac{3 - 0 + 0 - 0}{0 - 0 + 0} \right| = \infty;$$

$$\text{б)}\ \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2 - 4x - 7}{8x^2 - 3x + 6} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \to -\infty} \frac{5 - 4/x - 7/x^2}{8 - 3/x + 6/x^2} =$$

$$= \frac{5 - 0 - 0}{8 - 0 + 0} = \frac{5}{8}; \quad \text{в)}\ \lim_{x \to +\infty} \frac{9x^3 + 4x}{2x^5 + x^3 + 6} =$$

$$= \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \to +\infty} \frac{9/x^2 + 4/x^4}{2 + 1/x^2 + 6/x^5} = \frac{0 + 0}{2 + 0 + 0} = 0;$$

д) (Розв’язати самостійно). ■

Зауваження 2. Очевидно, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\begin{cases}0, & m<n,\\ a_{p0}/a_{q0}, & m=n,\\ \infty, & m>n,\end{cases}$$

де a_{p0} і a_{q0} – коефіцієнти при найвищих степенях відповідних многочленів.

1.3.8. Розкриття невизначеності виду $0/0$ для ірраціональних виразів

Правило: *Для розкриття невизначеності виду* $0/0$ *для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і нарешті перейти до границі.*

Приклад. Знайти границю:

$$\text{а) }\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6};\quad \text{б) }\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}.$$

□ а) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{5x-1}-3\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{\left(4x^2-5x-6\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{5x-1}+3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{5x-1-9}{4x^2-5x-6}=\frac{1}{\sqrt{5\cdot 2-1}+3}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5x-10}{4x^2-5x-6}=\left|\begin{matrix}4x^2-5x-6=0\\ x_1=2;\ x_2=-3/4\end{matrix}\right|=\frac{1}{6}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5(x-2)}{4(x-2)(x+3/4)}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+3/4}=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{2+3/4}=\frac{5}{11};$$

б) $$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{\left(\sqrt[3]{4x+4}+2\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)}{\left(\sqrt{-3x}+x\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{-3x}-x}{\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4} \cdot \lim_{x\to -3} \frac{4x+4+8}{-3x-x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{-3\cdot(-3)}-(-3)}{\sqrt[3]{(4\cdot(-3)+4)^2}-2\sqrt[3]{4\cdot(-3)+4}+4} \cdot \lim_{x\to -3} \frac{4(x+3)}{-x(3+x)} =$$

$$=(6/12)\cdot(-4)\lim_{x\to -3}(1/x) =-2\cdot(-1/3)=2/3. \quad \blacksquare$$

1.3.9. Ознаки існування границі

Питання про границю має дві сторони: 1) Чи існує границя? 2) Як обчислити границю? Друге питання вже частково розглянуте. Звернемо увагу на перше питання.

Теорема 1 (про обмежену монотонну змінну). *Обмежена монотонна величина має границю, причому:*

$$\left.\begin{array}{l} x \le M \\ x \nearrow \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim x \le M \ \text{ і } \ \left.\begin{array}{l} x \ge M \\ x \searrow \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim x \ge M \text{, де } M = const.$$

(Без доведення).

Теорема 2 (про стиснену змінну). *Нехай задано три змінні величини* x, y *і* z, *для яких виконується подвійна нерівність* $x \le y \le z$. *Якщо при цьому крайні змінні* x *і* z *мають однакову границю* $\lim x = \lim z = a$, *то середня змінна* y *також має ту саму границю* $\lim y = \lim x = \lim z = a$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} x \le y \le z \\ \lim x = \lim z = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim y = \lim x = \lim z = a}\,. \quad \text{(Без доведення).}$$

Зауваження. Згідно з означенням границі поведінка змінної величини у початковий період процесу змінювання ніяким чином не впливає на розв’язання питання про границю.

1.3.10. Перша стандартна границя. Розкриття невизначеності виду $0/0$ для тригонометричних виразів

При обчисленні границь конкретних змінних величин часто використовуються вже відомі ***стандартні границі***.

Теорема 1 (***перша стандартна границя***). *Границя відношення синуса нескінченно малої величини до самої цієї величини існує і дорівнює одиниці*:

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1}\ .$$

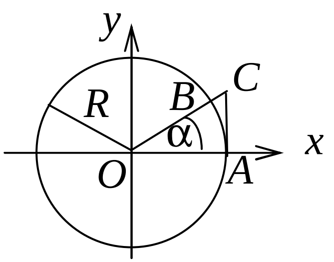

Рис. 24

□ Функція $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ – парна, тому можна обмежитися тільки додатними значеннями α. А оскільки $\alpha\to 0$, то можна розглядати тільки значення α з першої чверті $0<\alpha<\pi/2$.

Розглянемо коло радіуса R з центром у початку координат (рис. 24). Порівнюючи площі трьох вкладених одна в одну фігур, отримаємо:

$$S_{\Delta OAB}<S_{сектораOAB}<S_{\Delta OAC}\ ;$$

$$(1/2)R^2\sin\alpha<(1/2)R^2\alpha<(1/2)R^2 tg\alpha\,;\quad \sin\alpha<\alpha<tg\alpha\quad (*);$$

$$1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}\,;\ \ 1>\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha\,;\quad \cos\alpha<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1\quad (**).$$

З нерівності (*) і умови $0<\sin(\alpha/2)<1$ випливає

$$0<\beta=1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}<$$

$$<2\sin\frac{\alpha}{2}<2\cdot\frac{\alpha}{2}=\alpha\ .$$

Оскільки $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha=0$ і $\lim\limits_{\alpha\to 0}0=0$, то за теоремою про стиснену змінну $\lim\limits_{\alpha\to 0}\beta=\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha=\lim\limits_{\alpha\to 0}0=0$. Звідси

$$\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \lim_{\alpha\to 0}(1-\beta) = 1 - \lim_{\alpha\to 0}\beta = 1 .$$

Якщо врахувати, що $\cos 0 = 1$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \cos 0 = 1$.

Із цього співвідношення і нерівності (**) за теоремою про стиснену змінну нарешті одержимо

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \lim_{\alpha\to 0}1 = 1 . \quad \blacksquare$$

<u>Наслідок 1</u>. $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{tg\,\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = 1}$.

$$\square \quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\,\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha} = 1\cdot 1 = 1 . \quad \blacksquare$$

<u>Наслідок 2</u>. $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = 1}$.

$$\square \quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\begin{array}{l} u = \arcsin\alpha;\ \alpha = \sin u; \\ \alpha\to 0 \ \Rightarrow\ u\to 0 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\sin u/u} = \frac{1}{1} = 1 . \quad \blacksquare$$

<u>Наслідок 3</u>. $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = 1}$.

$$\square \quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\begin{array}{l} u = arctg\,\alpha;\ \alpha = tg u; \\ \alpha\to 0 \ \Rightarrow\ u\to 0 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{u}{tg u} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{tg u/u} = \frac{1}{1} = 1. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Для розкриття невизначеності виду $0/0$ з тригонометричними виразами треба розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу стандартну границю чи її наслідки.

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{ctg(\pi/4-x)}{4x-\pi}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\times$

$\times\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1\cdot 1=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(3x/2)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(3x/2)\cdot(3x/2)^2}{(3x/2)^2\cdot x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot x}=$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x/2)}{3x/2}\right)^2:\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{9}{2}\cdot 1^2:1=\frac{9}{2};$$

в) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{ctg(\pi/4+x)}{4x-\pi}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\left|\begin{array}{l}u=x-\pi/4;\ x=\pi/4+u;\\ x\to\pi/4\ \Rightarrow\ u\to 0\end{array}\right|=$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{ctg(\pi/4+u+\pi/4)}{4(\pi/4+u)-\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{ctg(\pi/2+u)}{4u}=-\frac{1}{4}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{tg\,u}{u}=$$

$$=(-1/4)\cdot 1=-1/4\,.\quad\blacksquare$$

1.3.11. Друга стандартна границя. Розкриття невизначеності виду 1^∞

Теорема 1 (***друга стандартна границя***). *Змінна величина* $(1+1/n)^n$ *має границю при* $n\to\infty$. *Ця границя позначається буквою* e *і називається* ***числом Ейлера***:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left|1^\infty\right|=e}\,.$$

$\square$ $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; $x_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$; $x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$;

$x_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2{,}37$; $x_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} \approx 2{,}44$; ... .

Можна довести, що змінна величина $x_n = (1+1/n)^n$ – зростаюча x_n і обмежена числом $M = 3$. Тому за теоремою про обмежену монотонну змінну існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$. $\blacksquare$

Зауваження 1. Можна показати, що число Ейлера e – ірраціональне і навіть ***трансцендентне*** (воно не може бути коренем жодного алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами). Його значення $e = 2{,}718281828459045... \approx 2{,}72$.

Зауваження 2. При обчисленнях границь використовують також наступні форми запису другої стандартної границі:

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left|1^\infty\right| = e}$,

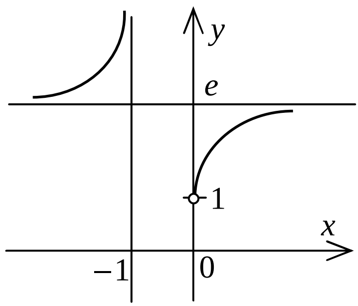

Рис. 25

де змінна x – дійсна неперервна (на відміну від дискретної змінної n). Графік функції $y = (1+1/x)^x$ подано на рис. 25.

2) $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = \left|1^\infty\right| = e}$

Границя виразу – одиниця плюс нескінченно мала в степені, оберненому до цієї нескінченно малої – дорівнює числу Ейлера e.

Зауваження 3. Показникова функція $y = e^x$ з основою e називається ***експонентою*** і часто позначається $y = \exp x$ (рис. 26). Логарифмічна функція $y = \log_e x$ з основою e називається ***натуральним логарифмом*** і позначається $y=\ln x$ (рис. 26). Десятковий і натуральний логарифми зв'язані співвідношеннями

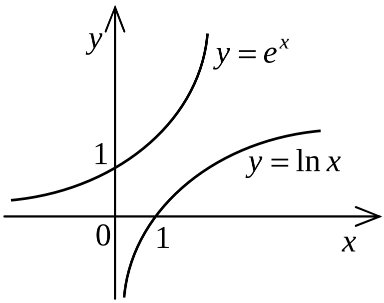

Рис. 26

$$\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=M\ln x;$$

$$\ln x=(1/M)\lg x,$$

де $M=1/\ln 10=0{,}43429...$ – модуль переходу.

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)^{2x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{1/2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)\big(\ln(6x-7)-\ln(6x+1)\big)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(6x+1)}{x^2+3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,\big(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\big)$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^3}$.

□ а) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)^{2x+1}=\left|1^\infty\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{3x-5}{3x+2}-1\right)\right)^{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-5-3x-2}{3x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3x+2}\right)^{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-7}\cdot\frac{-7}{3x+2}(2x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7(2x+1)}{3x+2}}=e^{-7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{3+2/x}}=$$

$$=e^{-7\cdot\frac{2+0}{3+0}}=e^{-14/3};$$ б) $$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{1/2x}=\left|1^\infty\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{(1/\sin 2x)\cdot(\sin 2x/2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x/2x)}=e^1=e;$$

в) $$\lim_{x\to+\infty}(2x-3)\big(\ln(6x-7)-\ln(6x+1)\big)=\left|\infty\cdot(\infty-\infty)\right|=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(2x-3)\ln\frac{6x-7}{6x+1} = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{6x-7}{6x+1}\right)^{2x-3} =$$

$$= \ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+1}\right)^{2x-3} = \left|1^{\infty}\right| = \ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6x-7}{6x+1}-1\right)^{2x-3} =$$

$$= \ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-8}{6x+1}\right)^{2x-3} = \ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-8}{6x+1}\right)^{\frac{6x+1}{-8}\cdot\frac{-8}{6x+1}(2x-3)} =$$

$$= \ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8(2x-3)}{6x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-8(2x-3)}{6x+1}\cdot\ln e = -8\lim_{x\to+\infty}\frac{2-3/x}{6+1/x} =$$

$$= -8\cdot(2-0)/(6+0) = -8/3;$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(6x+1)}{x^2+3x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+3x}\ln(6x+1) =$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(6x+1)^{1/(x^2+3x)} = \ln\lim_{x\to 0}(6x+1)^{1/(x^2+3x)} = \left|1^{\infty}\right| =$$

$$= \ln\lim_{x\to 0}(1+6x)^{(1/6x)\cdot 6x/(x^2+3x)} = \ln\lim_{x\to 0}e^{6/(x+3)} = \ln e^2 = 2\,.$$

(Завдання з д) і е) розв'язати самостійно). ■

Зауваження 4. До знаходження границь треба підходити творчо і обов'язково оцінювати ситуацію, що виникає: чи є невизначеність і якого типу? Шаблонне застосування відомих алгоритмів часто призводить до помилки. Наприклад, границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x-5}{3x+2}\right)^{1-2x}$ за структурою запису нагадує розглянуті вище, але перевірка показує, що невизначеності немає і результат одержується безпосередньо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-5}{3x+2}\right)^{1-2x} = \left|2^{-\infty}\right| = 0\,.$$

Аналогічно

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{12x+5}{4x-1}\right)^{1-6x}=\left|3^{+\infty}\right|=+\infty .$$

1.3.12. Економічна інтерпретація числа Ейлера e

При розрахунках за довгостроковими вкладами, що охоплюють декілька повних років, застосовують *схему складних відсотків*. Вона полягає в тому, що на основний капітал S нараховуються відсотки (проценти) за ставкою p % річних і відсоткові гроші приєднуються до основного капіталу.

Нехай S_0 – початковий вклад, S_t – вклад на кінець t-го року. Якщо нараховувати і приєднувати відсотки один раз на рік, то розмір вкладу щороку зростатиме в $(1+p/100)$ разів:

$$S_1=S_0(1+p/100)\,;\quad S_2=S_1(1+p/100)=S_0(1+p/100)^2\,;$$

$$\ldots\,;\ \boxed{S_t=S_0(1+p/100)^t}.$$

Якщо операцію нарахування і приєднання відсотків здійснювати не один, а n разів на рік через однакові проміжки часу $\Delta t=1/n$, то (за тієї самої річної ставки p %) за міжопераційний термін Δt буде нараховано і приєднано (p/n) %. За t повних років буде виконано nt таких операцій і розмір вкладу на кінець t-го року досягне

$$\boxed{S_t=S_0\big(1+p/(100n)\big)^{nt}}.$$

Зауваження 1. З останньої формули можна одержати співвідношення $\boxed{S_0=S_t\big(1+p/(100n)\big)^{-nt}}$ для знаходження за схемою складних відсотків первісного вкладу S_0 за його поточним значенням S_t (операція *дисконтування*).

Приклад 1. У компанію інвестовано S_0 = 6 млн. грош. од. на t = 5 років за ставкою p = 30% річних. Знайти нарощено за цей час суму S_t та її приріст $\Delta S=S_t-S_0$, якщо нарахування і приєднання відсотків здійснюється: а) щорічно $n=1$; б) по півріччям

$n = 2$; в) щоквартально $n = 4$; г) щомісяця $n = 12$.

(Розв'язати самостійно).

У теоретичному аналізі складних фінансових проблем (зокрема, при обґрунтуванні інвестиційних рішень) часто зустрічається поняття *неперервного нарахування відсотків*. Щоб перейти до нього, треба в одержаному співвідношенні необмежено збільшувати число поділів n, тобто покласти $n \to \infty$ і знайти відповідне граничне значення S_t^* нарощеного вкладу S_t:

$$S_t^* = \lim_{n\to\infty} S_0 \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt} = S_0 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}\cdot\frac{p}{100n}\cdot nt} =$$

$$= S_0 \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{100n/p}\right]^{\frac{pt}{100}} = S_0 e^{pt/100}.$$

Таким чином, при необмеженому скороченні термінів нарахування і приєднання відсотків нарощений капітал S_t не зростає безмежно, а наближається до певного граничного значення

$$\boxed{S_t^* = S_0 e^{pt/100}}.$$

Зауваження 2. З останньої формули можна одержати співвідношення $\boxed{S_0 = S_t^* e^{-pt/100}}$ для знаходження за схемою неперервного нарахування відсотків первісного вкладу S_0 за його поточним значенням S_t^* (операція *дисконтування*).

Приклад 2. Кредитор позичає фірмі гроші за ставкою $p = 20\%$ річних з неперервним нарахуванням відсотків. Знайти сумарний початковий борг $S_0 = S_0^{(1)} + S_0^{(2)}$ позичальника кредитору при умові, що борг повинен повертатися двома частинами: $S_2^{*(1)} = 132$ тис. грош. од. через $t_1 = 2$ роки і $S_{3,5}^{*(2)} = 225$ тис. грош. од. через $t_2 = 3,5$ років.

□ За формулою дисконтування з неперервним нарахуванням відсотків $S_0 = S_t^* e^{-pt/100}$ маємо:

$$S_0^{(1)} = S_t^{*(1)} e^{-pt_1/100} = 132 e^{-20\cdot 2/100} = 132 e^{-0,4} = 88,48225;$$

$$S_0^{(2)} = S_t^{*(2)} e^{-pt_2/100} = 225 e^{-20\cdot 3,5/100} = 225 e^{-0,7} = 111,73169.$$

Тоді $S_0 = S_0^{(1)} + S_0^{(2)} = 200,21394$. ■

<u>Приклад 3</u>. Початкова вартість нового верстата складає S_0 = 20 тис. грош. од., амортизаційні відрахування здійснюються за ставкою p = 2% річних з неперервним нарахуванням відсотків. Визначити остаточку вартість $\Delta S = S_t^* - S_0$ верстата через t = 10 років. (Розв'язати самостійно).

Нехай початковий капітал S_0 вкладається в банк з нарахуванням і приєднанням відсотків n разів на рік через однакові проміжки часу $\Delta t = 1/n$. Позначимо через p_e % таку *річну ставку, яка еквівалентна річним відсоткам при неперервному нарахуванні*, тобто при якій поточний вклад S_t нарощується до граничної величини S_t^*: $S_t = S_t^*$. Тоді

$$S_0\left(1+\frac{p_e}{100n}\right)^{nt} = S_0 e^{pt/100}; \quad \ln\left(1+\frac{p_e}{100n}\right)^{nt} = \ln e^{pt/100};$$

$$\ln\left(1+\frac{p_e}{100n}\right) = \frac{p}{100n}; \quad 1+\frac{p_e}{100n} = e^{p/(100n)};$$

$$p_e = 100n\left(e^{p/(100n)} - 1\right).$$

<u>Приклад 4</u>. При ставці 15 % в рік знайти первісний борг позичальника кредитору, якщо позичальник повинен сплатити кредитору 10 000 грош. од. через 0,75 року , 25 000 грош. од. через 1,75 року , 30 000 грош. од. через 2,25 року . Нарахування відсотків неперервне .

(Розв'язати самостійно).

1.3.13. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі

Нехай змінні α і β – нескінченно малі в одному процесі змінювання. Розглянемо їх відношення α/β (припускається, що $\beta \neq 0$). Тоді:

1) Якщо $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, то α називається нескінченно малою ***вищого порядку*** мализни порівняно з β і позначається $\alpha = o(\beta)$ (α прямує до нуля швидше, ніж β).

2) Якщо $\lim\frac{\alpha}{\beta^k}=A\neq 0$ і $A\neq\infty$, то α називається ***нескінченно малою*** k ***-го порядку*** мализни порівняно з β.

3) Якщо $\lim\frac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$ і $A\neq\infty$, то α і β називаються ***нескінченно малими одного порядку*** мализни.

3а) Якщо $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$, то α і β називаються ***еквівалентними нескінченно малими***, позначається $\alpha \sim \beta$.

4) Якщо відношення α/β не має ні скінченної, ні нескінченної границі, то α і β називаються ***непорівнянними нескінченно малими***.

Наприклад:

а) $\alpha=\sin 2x$, $\beta = x$, $x\to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta)=\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x/x)=2$. Отже, нескінченно малі α і β одного порядку.

б) $\alpha = x^n$, $\beta = x$, $n>1$, $x\to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^n/x\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}=0$. Отже, $\alpha = o(\beta)$.

в) $\alpha = 4x^3$, $\beta = x$, $x\to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha/\beta^3\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(4x^3/x^3\right)=4$. Отже, величина α є нескінченно малою третього порядку мализни відносно β.

г) $\alpha=(x+1)/x^2$, $\beta=1/x$, $x\to\infty$. Тоді

$\lim\limits_{x\to\infty}(\alpha/\beta)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(((x+1)/x^2)/(1/x)\right)=\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)=1$. Отже, $\alpha\sim\beta$.

д) $\alpha=x\sin(1/x)$, $\beta=x$, $x\to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(x\sin(1/x)\right)/x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ – не існує. Отже, α і β – непорівнянні.

Нехай нескінченно мала α подана у вигляді суми $\alpha=\beta+\gamma$. Перший доданок β називається ***головною частиною*** α, якщо другий доданок γ має вищий порядок порівняно з β.

Теорема 1. *Нескінченно мала* α *еквівалентна своїй головній частині* β: $\alpha\sim\beta$.

□ $\alpha=\beta+\gamma$; $\dfrac{\alpha}{\beta}=1+\dfrac{\gamma}{\beta}$; $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim 1+\lim\dfrac{\gamma}{\beta}=1+0=1$; ■

Наприклад, при $x\to\infty$ величина $\alpha=(x+1)^2\big/x^4$ є нескінченно малою. Її можна подати у вигляді $\alpha=\beta+\gamma$, де перший доданок $\beta=1/x^2$ еквівалентний α (головна частина), а другий доданок $\gamma=(2x+1)/x^4$ має вищий порядок порівняно з β (перевірте це самостійно).

Теорема 2 (принцип заміни нескінченно малих). *При розкритті невизначеності виду* $0/0$ *можна чисельник і знаменник цієї невизначеності заміняти величинами, що їм еквівалентні*:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\sim\alpha_*\\ \beta\sim\beta_*\end{aligned}\right\}\Rightarrow\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha_*}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta_*}=\lim\frac{\alpha_*}{\beta_*}$$

Основні еквівалентності при $x\to 0$, що використовуються при обчисленнях границь, подані в таблиці 4:

Таблиця 2

$\sin x \sim x$	$arctg\, x \sim x$	$a^x - 1 \sim x \ln a$
$tg\, x \sim x$	$1 - \cos x \sim x^2/2$	$\ln(1+x) \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Приклад. Знайти границю:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x};\quad \text{б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-7x^2\right)}{\arcsin 2x};\quad \text{в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{tg^2 x}.$$

$$\square\quad \text{а)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{1/5}-1}{x} =$$

$$= \left|(1+3x)^{1/5} - 1 \sim 3x/5\right| = \lim_{x\to 0}\frac{3x/5}{x} = \frac{3}{5};$$

$$\text{б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-7x^2\right)}{\arcsin 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\ln\left(1-7x^2\right) \sim -7x^2;\right.$$

$$\left.\arcsin 2x \sim 2x\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-7x^2}{2x} = 0;$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{tg^2 x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|e^{6x}-1 \sim 6x;\ \ tgx \sim x\right| = \lim_{x\to 0}\frac{6x}{x^2} = \infty\ .\ \blacksquare$$

Зауваження 1. Якщо в чисельнику чи знаменнику невизначеності $0/0$ стоїть алгебраїчна сума, то в загальному випадку не можна заміняти еквівалентними величинами окремі доданки, а лише весь чисельник чи знаменник в цілому.

Зауваження 2. Нескінченно великі величини порівнюють між собою так само, як і нескінченно малі.

Наприклад, при $x \to \infty$ величини $y = 3x^5 - x^4 + 2$ і $z = 8x^5 + 3x^3 - 2x + 1$ є нескінченно великими. Границя їх відношення $\lim\limits_{x\to\infty}(y/z) = 3/8$. Тому ці величини y і z є нескінченно великими одного порядку.

1.4. Функція. Неперервність функції

1.4.1. Загальне поняття функції. Області визначення та значень. Графік функції. Способи задання функції

Досліджуючи різні економічні явища, розв'язуючи техніко-економічні проблеми доводиться розглядати одночасно декілька змінних величин. Наприклад, при виготовленні u одиниць деякої продукції треба використати x одиниць певної сировини, y одиниць енергоресурсів, видати z одиниць заробітної плати, заплатити s одиниць податків і т.д.

У цьому комплексі змінних величин деякі можуть бути жорстко пов'язані між собою. Їх називають ***функціонально залежними***, при цьому виділяють ***незалежні змінні*** – величини, значення яких можна обирати довільно, та ***залежні змінні*** – величини, значення яких визначаються значеннями незалежних змінних.

Нехай задані непорожні множини X і Y. Якщо вказано правило (***закон відповідності***) f, за яким кожному значенню x з множини X ставиться у відповідність одне певне значення y з множини Y, то кажуть, що задано ***функцію***, визначену на множині X, зі значеннями у множині Y. Функцію позначають одним із способів: $y = f(x)$, $x \in X$, або $f: X \to Y$, або $X \xrightarrow{f} Y$.

При цьому x називається ***незалежною змінною*** (***аргументом***), а y – ***залежною змінною*** (***функцією***).

Множина $D(f) = X$ називається ***областю визначення*** функції. Множина $E(f)$ всіх тих значень $y \in Y$, кожне з яких відповідає принаймні одному $x \in D(f)$, називається ***областю значень*** функції. Область значень $E(f)$ є підмножиною множини Y.

Значення функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають так: $f\left(x_0\right)$ або $f(x)\big|_{x=x_0}$.

Функція $y = C, C = const$, яка на всій області визначення набуває єдиного значення C, називається ***сталою***.

Дві функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ називаються ***рівними***, якщо: 1) вони мають одну й ту саму область визначення

$D(f) = D(g)$; 2) на кожному елементі x з цієї області визначення функції набувають однакових значень $f(x) = g(x)$.

Якщо змінні x і y розглядати як декартові координати точок на площині, то ***графіком*** функції $y = f(x)$ є множина всіх точок координатної площини Oxy з координатами $\left(x, f(x)\right)$, $x \in D(f)$.

<u>Зауваження 1</u>. Кожна пряма, паралельна осі Oy, з графіком функції може мати не більше однієї спільної точки.

Наприклад, на рис. 27 крива m є графіком деякої функції, а крива n – ні.

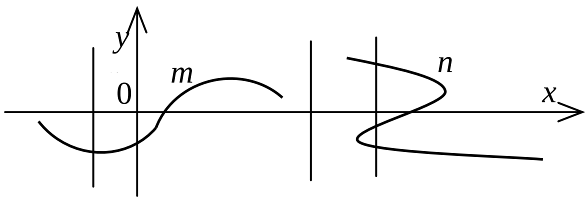

Рис. 27

Функція $y = f(x)$ вважається <u>заданою</u>, якщо: 1) вказана її область визначення $D(f)$: 2) вказаний закон відповідності f.

<u>Основні способи задання функції.</u>

1) <u>Табличний спосіб задання функції.</u> При цьому способі пишуть у визначеному порядку значення аргументу $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ і відповідні значення функції $y_1, y_2, ..., y_i, ...$:

x	x_1	x_2	…	x_i	…
y	y_1	y_2	…	y_i	…

Цей спосіб дуже часто використовується в економіці. Він зручний тим, що для кожного наведеного в таблиці значення аргументу можна відразу знайти відповідне значення функції без додаткових обчислень. Проте неможливо безпосередньо знайти відповідне значення функції для проміжного значення аргументу, і до дослідження функції важко застосувати апарат математичного аналізу.

2) Графічний спосіб задання функції. Якщо у прямокутній системі координат на площині маємо деяку сукупність точок (x, y) і при цьому ніякі дві точки не лежать на одній прямій, що паралельна осі Oy, то ця сукупність точок визначає деяку однозначну функцію $y = f(x)$. Значеннями аргументу є абсциси точок, значеннями функції – відповідні ординати.

Перевагою графічного способу є його наочність і можливість безпосередньо визначити відповідне значення функції для кожного значення аргументу. Проте значення функції знаходиться наближено, і до дослідження функції важко застосувати апарат математичного аналізу.

3) Аналітичний спосіб задання функції:

а) ***Явна форма задання функції***. Функцію задають у вигляді формул, що визначають операції (і послідовності їх виконання), які потрібно здійснити над значенням незалежної змінної x, щоб визначити значення залежної змінної y.

Наприклад, $y = (x^{1/2} - 1)^2$, де $x \geq 0$.

б) ***Неявна форма задання функції***. Під неявним розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв’язаного відносно y, яке визначає функцію тільки тоді, коли всі впорядковані пари (x, y), що є розв'язками даного рівняння, утворюють множину, в якій для будь-якого числа x_0 є не більш як одна пара (x_0, y_0) з першим елементом x_0.

Наприклад, співвідношення $x^2 / 25 + y^2 / 9 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ задають неявно функцію, графіком якої служить дуга еліпса, що лежить у першій чверті.

У деяких випадках функцію $y = y(x)$, задану неявно, можна подати в явній формі, розв’язавши рівняння $F(x, y) = 0$ відносно змінної y. Наприклад: $xy - 4 = 0 \Rightarrow y = 4/x$.

в) ***Параметрична форма задання функції.*** Якщо функцію $y = y(x)$ задано параметрично, то значення змінних x і y, що відповідають одне одному, визначають через третю величину t (***параметр***): $x = x(t)$, $y = y(t)$.

У деяких випадках функцію, задану параметрично, можна записати в неявній (чи навіть явній) формі, виключивши параметр t. Наприклад, функція $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t \in [0,\ \pi/2]$, допускає запис у неявній формі:

$$x^2 + y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t \ \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 1,\ t \in [0,\ \pi/2],$$

звідки можна одержати явне подання: $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0;1]$.

Якщо функція задана аналітично, то легко перейти до табличного чи графічного способу її задання, оскільки аналітичний спосіб дає можливість знайти відповідне значення функції для будь-якого значення аргументу, хоча це часто вимагає складних обчислень. Його безсумнівна перевага полягає у можливості застосування апарату математичного аналізу. Недоліками аналітичного задання є недостатня наочність та необхідність обчислень.

Зауваження 2. Коли функція задається аналітично, то часто область визначення явно не вказується. Тоді розглядається так звана ***природна область визначення*** (***область допустимих значень***). *Щоб знайти природну область визначення треба скласти систему обмежень на всі математичні операції, що фігурують в наведених формулах, і розв'язати її.*

Приклад. Знайти область визначення функції

а) $y = \ln(6 - x) + \sqrt{x^2 - 9}$; б) $y = \arcsin(1/x) - 3\sqrt{8 - x^3}$;

в) $y = \dfrac{2}{\sqrt{16 - x^2}} + \ln x^2$; г) $y = arctg\,\dfrac{1}{x+4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 8}}$.

□ а) $D(f)$: $\begin{cases} 6 - x > 0 \\ x^2 - 9 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 6 \\ |x| \ge 3 \end{cases}$ $x \in (-\infty; -3] \cup [3; 6)$.

(Завдання б), в) і г) розв'язати самостійно). ■

1.4.2. Основні елементарні функції та їх графіки

Основні елементарні функції та їх графіки вивчають у середній школі. Вони відіграють важливу роль в математиці, тому ці функції, їх області визначення та графіки треба добре знати.

<u>Стала функція</u> $y = C$, $C = const$. Функція визначена на всій числовій прямій $-\infty < x < +\infty$. Графіком служить пряма, паралельна осі Oy.

<u>Степенева функція</u> $y = x^{\alpha}$. Її властивості залежать від значення показника α:

а) α – ціле додатне число. Функція визначена на всій числовій прямій $-\infty < x < +\infty$. Графіки функції у цьому випадку при деяких значеннях α мають вигляд, зображений на рис. 28 і 29;

б) α – ціле від'ємне число. Функція визначена для усіх значень x, окрім $x = 0$. Графіки функцій при деяких значеннях α мають вигляд, зображений на рис. 30 і 31;

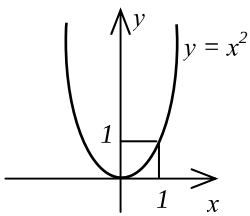

Рис. 28

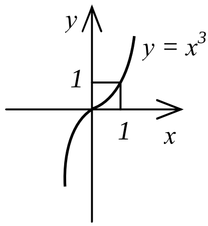

Рис. 29

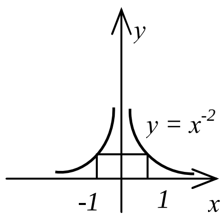

Рис. 30

в) число α – раціональне дробове. На рис. 32, 33 і 34 зображені графіки степеневої функції, коли числа α додатні. При від'ємних числах α матимемо графіки, які схожі з зображеними на рис. 30 і 31, коли знаменник дробу непарний, і їх частиною праворуч від осі Oy, якщо знаменник дробу парний.

<u>Показникова функція</u> $y = a^x$, $a > 0$ і $x \in R$. Графік її має вигляд, зображений на рис. 35. Розглянуті випадки, коли $0 < a < 1$ і $a > 1$.

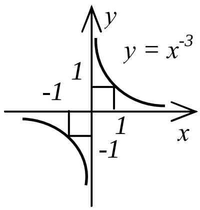

Рис. 31

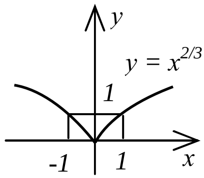

Рис. 32

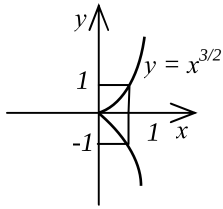

Рис. 33

<u>Логарифмічна функція</u> $y = \log_a x$, $a > 0$ і $x > 0$. Графік її зображено на рис. 36. Розглянуті випадки, коли $0 < a < 1$ і $a > 1$. $\lg x$ – десятковий логарифм, $\ln x$ – натуральний логарифм.

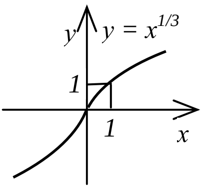

Рис. 34

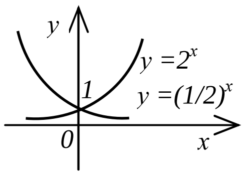

Рис. 35

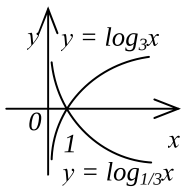

Рис. 36

<u>Тригонометричні функції</u>: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$, $y = \sec x = 1/\cos x$, $y = \cos ec\, x = 1/\sin x$. Усі названі тригонометричні функції періодичні.

Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ мають період 2π. Ці функції визначені при всіх значеннях $x \in R$.

Функції $y = tg\, x$ і $y = \sec x$ мають період відповідно π і 2π. Вони визначені скрізь, крім точок $x = (2k+1)\pi/2$, $k \in Z$.

Функції $y = ctg\, x$ і $y = \cos ec\, x$ мають період відповідно π і 2π. Вони визначені скрізь, крім точок $x = k\pi$, $k \in Z$.

Графіки тригонометричних функцій зображені на рис. 37–39.

<u>Обернені тригонометричні функції</u>:

а) Функція арксинус $y = \arcsin x$. Область її визначення –

відрізок $[-1;1]$, область значень – відрізок $[-\pi/2;\pi/2]$. Графік подано на рис. 40.

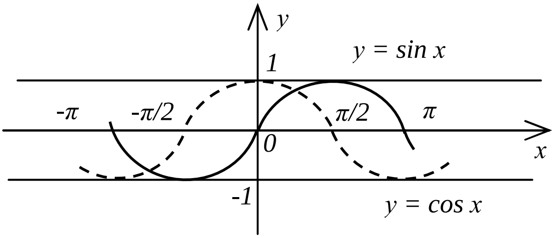

Рис. 37

б) Функція арккосинус $y = \arccos x$. Область її визначення – відрізок $[-1;1]$, область значень – відрізок $[0;\pi]$. Графік подано на рис. 41.

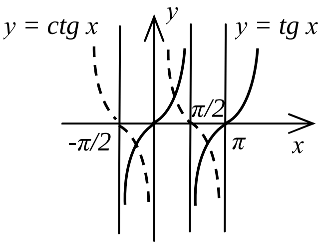

Рис. 38

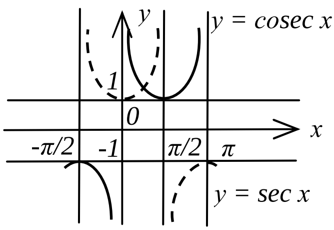

Рис. 39

в) Функція арктангенс $y = arctg\, x$. Область її визначення – вся числова пряма, область значень – інтервал $(-\pi/2;\pi/2)$. Графік подано на рис. 42.

г) Функція арккотангенс $y = arcctg\, x$. Область її визначення – вся числова пряма, область значень – інтервал $(0;\pi)$. Графік подано на рис. 43.

<u>Деякі границі, що відображають властивості основних елементарних функцій</u>:

$$\lim_{x\to-\infty} arctg\, x = -\pi/2; \quad \lim_{x\to+\infty} arctg\, x = \pi/2;$$

$$\lim_{x\to-\infty} arcctg\, x = \pi; \quad \lim_{x\to+\infty} arcctg\, x = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a>1; \\ +\infty, & 0<a<1; \end{cases} \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a>1; \\ 0, & 0<a<1; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a>1; \\ +\infty, & 0<a<1; \end{cases} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a>1; \\ -\infty, & 0<a<1; \end{cases}$$

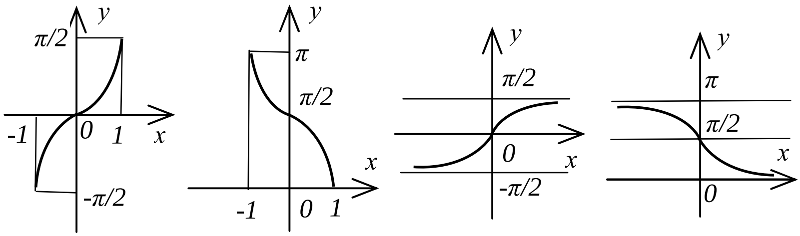

Рис. 40 Рис. 41 Рис. 42 Рис. 43

1.4.3. Класифікація функцій за властивостями та будовою

Функція, як змінна величина, може бути монотонною чи не монотонною, обмеженою чи необмеженою. Крім цих властивостей також зазначають її парність і періодичність.

Значення незалежного аргументу x, при яких функція $y = f(x)$ обертається в нуль, тобто корені рівняння $f(x) = 0$ (спільні точки графіка функції з віссю Ox), називаються ***нулями*** (***коренями***) функції. На рис. 44 x_1 і x_2 – корені.

Інтервали області визначення, де функція $y = f(x)$ зберігає знак, тобто інтервали, де функція додатна $f(x) > 0$ (графік функції розташований над віссю Ox), та інтервали, де функція від'ємна $f(x) < 0$ (графік розміщений під віссю Ox) називаються ***інтервалами знакосталості*** функції (рис. 44).

<u>Парність</u>. Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D(f)$; і ***непарною***, якщо $f(-x) = -f(x)$,

$x \in D(f)$. Інакше функція називається ***функцією загального вигляду*** (***загального положення***).

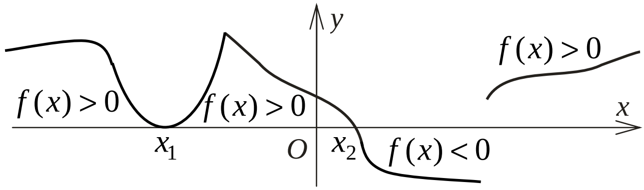

Рис. 44

Наприклад, функції $y = x^2$ і $y = \cos x$ – парні, функції $y = \sin x$ і $y = arctg\, x$ – непарні, а функції $y = 2^x$ і $y = \arccos x$ – загального вигляду.

Зауваження 1. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (рис. 45), а графік непарної функції симетричний відносно початку координат O (рис. 46).

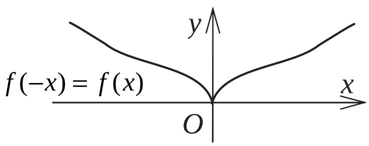

Рис. 45

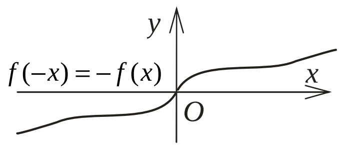

Рис. 46

Періодичність. Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною***, якщо існує додатне число T (***період***) таке, що справджується рівність $f(x+T) = f(x)$, $x \in D(f)$.

Звичайно під ***періодом*** (***основним періодом***) функції розуміють T_0 – найменший з усіх додатних періодів (якщо такий існує) (рис. 47). У цьому разі всі періоди функції йому кратні: $T = kT_0$, $k \in N$.

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$ на періодичність і у випадку періодичності знайти період.

□ Дана функція визначена на всій числовій прямій. Припустимо, що ця функція періодична. Тоді для довільного $x \in R$ повинна виконуватися умова $\sin(ax+b)=\sin(a(x+T)+b)$, де $T = const > 0$. Розв'яжемо це рівняння відносно T:

$$T = (\pi + 2\pi k)/a - 2x - 2b/a, \quad k \in Z; \; T = (2\pi n)/a, \quad n \in Z.$$

Величина T з першої формули не є періодом, тому що залежить від x. Друга формула задає нескінченну множину чисел. Отже, задана функція періодична. Найменшим додатним з цих чисел є $T_0 = 2\pi/|a|$ – основний період. ■

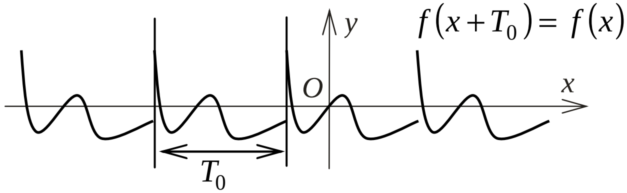

Рис. 47

<u>Обмеженість.</u> Функція $y = f(x)$ є ***обмеженою зверху***, якщо існує таке число M, що для всіх значень аргументу з області визначення функції виконується нерівність $f(x) \le M$, і ***обмеженою знизу***, якщо існує таке число τ, що для всіх значень аргументу з області визначення функції виконується нерівність $f(x) \ge \tau$.

Функція, обмежена зверху і знизу, є ***обмеженою***.

Наприклад, функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ обмежені зверху числом 1, а знизу числом -1. Функція $y = 2^x$ обмежена знизу числом 0, а зверху необмежена. Функції $y = tg\, x$ і $y = ctg\, x$ необмежені.

<u>Монотонність.</u> Функція $y = f(x)$ є ***зростаючою*** на проміжку $(a;b)$, якщо для будь-якої пари значень $x_1 \in (a;b)$ і $x_2 \in (a;b)$ з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \ge f(x_2)$, тобто *більшому значенню аргументу відповідає неменше значення функції*. Якщо з нерівності $x_1 > x_2$ випливає

нерівність $f\left(x_1\right)\le f\left(x_2\right)$, то функція зветься ***спадною***, тобто *більшому значенню аргументу відповідає небільше значення функції*.

Зростаючі і спадні функції називають ***монотонними***.

Якщо в поданих означеннях нестрогі нерівності замінити на строгі, то маємо ***строго монотонні*** функції.

Якщо область визначення можна розбити на деяке число проміжків, які не перетинаються, таких, що на кожному з них функція монотонна, то вони називаються ***проміжками монотонності*** функції.

Наприклад, функція $y=x^2$ визначена на всій числовій осі. Вона має два проміжки строгої монотонності $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$, на першому з яких функція є строго спадною, а на другому – строго зростаючою.

Складена функція. Нехай функція $y=f(u)$ визначена на множині U, а функція $u=\varphi(x)$ визначена на множині X, причому для кожного значення $x\in X$ відповідне значення $u=\varphi(x)$ належить множині U. Тоді на множині X визначена функція $y=f\left(\varphi(x)\right)$, яку називають ***складеною функцією*** від x або ***суперпозицією*** (***композицією***) функцій φ і f. При цьому $y=f(u)$ називають ***зовнішньою функцією***, а $u=\varphi(x)$ – ***внутрішньою функцією*** або ***проміжним аргументом***. Змінну x називають ***незалежною змінною*** або ***внутрішнім аргументом***.

Складена функція – це функція від функції. Більшість функцій, які вивчають у математиці, можна розглядати як складені функції.

Наприклад, функцію $z=\sqrt{x}-1$ можна записати: $y=\sqrt{x}$; $z=y-1$.

Зауваження 2. Суперпозиція може застосовуватися повторно. Наприклад, $y=\sin v$; $v=2^u$; $u=arctg\,x$.

Зауваження 3. Розглядаючи складені функції, слід звертати увагу на області визначення функцій, що їх утворюють.

Приклад 2. Задану функцію подати як складену за допомогою чотирьох основних арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення і ділення) та суперпозиції основних елементарних функцій:

а) $y = \ln^4 3^{\sin^2 x} + 5\cos x^3$; б) $y = tg^6 2^x - 3\sqrt{\arccos(1/x^2)}$.

(Розв'язати самостійно).

<u>Елементарні функції</u>. ***Елементарною функцією*** називається така, що може бути задана за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і суперпозицій над основними елементарними функціями.

Наприклад, $y = (\lg x + 4\sqrt[3]{x} + 2tg\, x)/(10^x - x^2 \arcsin x)$ – елементарна функція, а функції $y = \operatorname{sgn} x$ (знак числа x) та $y = \sin x + \sin x^2 + \sin x^3 + \ldots + \sin x^n + \ldots$ не є елементарними.

На рис. 48 подана схема класифікації елементарних функцій.

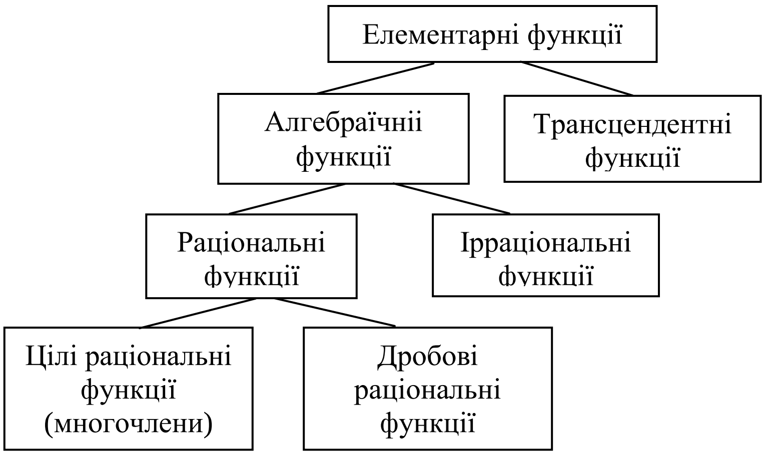

Рис. 48

<u>Алгебраїчні функції</u>. До числа ***алгебраїчних функцій*** належать такі елементарні функції:

1) ***Ціла раціональна функція*** або ***многочлен*** (***поліном***)

$$y = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

де $a_0, a_1, ..., a_n$ – ***коефіцієнти*** (сталі числа); n – ***степінь*** (***порядок***) многочлена (ціле невід’ємне число). Зрозуміло, що ця функція визначена при будь-якому $x \in R$.

2) ***Дробово-раціональна функція*** (***раціональний дріб***) – відношення двох многочленів $y = P_n(x)/Q_m(x)$.

Наприклад, раціональний дріб $y = a/x$, $(a \neq 0, x \neq 0)$ виражає обернено пропорційну залежність.

3) ***Ірраціональна функція*** – це така функція $y = f(x)$, в якій зустрічається піднесення до степеня з раціональним дробовим показником.

Наприклад, функція $y = (2x^2 + \sqrt{x})/(1 + 5x^2)$ є ірраціональною.

Елементарні функції, що не є алгебраїчними, називаються ***трансцендентними***. З основних елементарних функцій до них відносяться показникова, логарифмічна, тригонометричні та обернені тригонометричні функції.

Наприклад, функція $y = \cos x - 5x^3$ є трансцендентною.

Обернена функція. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині X, а Y – множина її значень. Якщо ця функція $y = f(x)$ така, що при кожному фіксованому $y \in Y$ рівняння $y = f(x)$ має єдиний розв’язок $x \in X$, то можна розглядати ***обернену функцію*** $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Обернена функція $x = f^{-1}(y)$ кожному $y \in Y$ ставить у відповідність єдине значення $x \in X$ таке, що $f(x) = y$. Функція $y = f(x)$, $x \in X$ при цьому називається ***прямою функцією***.

Якщо функція f^{-1} обернена до функції f, то й функція f буде оберненою до функції f^{-1}. Функції f і f^{-1} називають ***взаємно оберненими***. Область визначення X функції f є областю значень функції f^{-1}, область значень Y функції f є областю визначення функції f^{-1}.

Графіки функцій $y = f(x)$, $x \in X$ і $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ збігаються (відображають одну залежність з різних позицій).

Зауваження 4. Якщо в оберненій функції $x = f^{-1}(y)$ ввести традиційні позначення для незалежної та залежної змінних (перезначити $x \to y$, $y \to x$), то матимемо ***обернену функцію в традиційних позначеннях змінних*** $y = f^{-1}(x)$. Графіки прямої $y = f(x)$ і оберненої $y = f^{-1}(x)$ функцій симетричні відносно бісектриси $y = x$ першого і третього координатних кутів.

Наприклад, функція $y = f(x) = x^2$ на інтервалі $[0; +\infty)$ має обернену $y = \sqrt{x}$. Графіки цих функцій зображені на рис. 49.

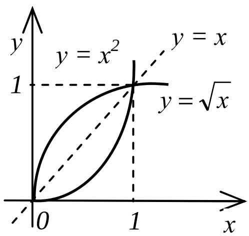

Рис. 49

Теорема. *Нехай функція* $y = f(x)$ *визначена і строго зростаюча (строго спадна) на відрізку* $[a; b]$. *Тоді обернена функція* $y = f^{-1}(x)$ *визначена і строго зростаюча (строго спадна) на відрізку* $[f(a); f(b)]$ $([f(b); f(a)])$.

(Без доведення).

1.4.4. Поняття неперервності функції в точці. Властивості функцій, які неперервні в точці

З поняттям границі тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу – неперервність функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і x – довільна точка з цього околу, відмінна від x_0. Різницю $\Delta x = x - x_0$ називають ***приростом незалежної змінної*** (***приростом аргументу***). Відповідну різницю $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ називають ***приростом функції***.

Тоді $x = x_0 + \Delta x$; $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Зауваження. Приріст функції Δy залежить як від вибору точки x_0, так і від вибору приросту аргументу Δx.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо в цій точці виконується рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Сформульоване означення неперервності накладає на функцію $f(x)$ такі умови: 1) функція визначена в деякому околі точки x_0, включаючи і саму точку x_0, тобто існує число $f(x_0)$; 2) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – границя функції в точці x_0; 3) границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці.

Оскільки $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то для неперервної в точці x_0 функції маємо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, тобто *знак границі* $\lim$ *і знак неперервної функції* f *можна міняти місцями*. Іншими словами, *щоб обчислити границю неперервної функції, треба у її вираз замість аргументу підставити його границю*.

У рівності $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ перенесемо $f(x_0)$ ліворуч та уведемо під знак границі як сталу. Тоді отримаємо $\lim\limits_{x - x_0 \to 0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0$, звідки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, тобто *функція неперервна, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції*.

Якщо функція $f(x)$ неперервна у кожній точці деякого інтервалу $(a; b)$, то вона називається ***неперервною на*** цьому ***інтервалі***.

<u>Приклад</u>. Довести, що функція $y = \sin x$ неперервна у довільній точці x_0 області визначення $D(f) = R$.

□ $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin(\Delta x / 2)\cos(x_0 + \Delta x / 2)$.

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(\Delta x / 2) = 0$, а величина $\cos(x_0 + \Delta x / 2)$ обме-