МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

А. І. Колосов, Ю. Є. Печеніжський,
С. О. Станішевський, А. В. Якунін

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ і МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 2 курсу заочної форми навчання
за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка
підприємства" і 6.030509 "Облік і аудит")

Харків ХНАМГ 2011

Теорія ймовірностей і математична статистика: Конспект лекцій (для студентів 2 курсу заочної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”) / А. І. Колосов, Ю. Є. Печеніжський, С. О. Станішевський, А. В. Якунін; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. − Х.: ХНАМГ, 2011. − 128 с.

Автори: А. І. Колосов,
Ю. Є. Печеніжський,
С. О. Станішевський,
А. В. Якунін

Рецензент: *к. ф.-м. н., доц.. М. П. Данилевський*

Подано конспект лекцій, доповнений матеріалом для самостійного опрацювання, зразками розв’язання типових задач і запитаннями для самоконтролю.

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 4 від 23.11.2011 р.

Передмова

Теорія ймовірностей – це математична наука, що вивчає закономірності масових однорідних випадкових (стохастичних) явищ.

Випадкові відхилення завжди супроводжують будь-яке явище. Елемент невизначеності, складності, багатопричинності, що притаманний випадковим явищам, обумовлює створення спеціальних методів для їх вивчення.

На практиці спостереження за масовою сукупністю однорідних випадкових об’єктів відкривають у них цілком певні, властиві саме їм закономірності, свого роду стійкості. Мета ймовірнісних (статистичних) методів полягає в тому, щоб, обминаючи надто складне і часто практично неможливе дослідження окремих випадкових явищ, звернутися безпосередньо до законів, що керують їх масовими проявами. Вивчення цих законів дозволяє здійснювати прогноз середнього масового результату, цілеспрямовано впливати на хід явищ, контролювати їх, обмежувати сферу дії випадковості, звужувати її вплив.

Теорія ймовірностей служить фундаментом, на якому будуються важливі для практичних застосувань її органічні доповнення – математична статистика та теорія випадкових процесів.

Математична статистика – це розділ математики, в якому вивчаються методи збору, обробки й аналізу великих масивів стохастичних дослідних даних з метою виявлення закономірностей. Користуючись апаратом теорії ймовірностей, математична статистика дозволяє оцінювати ступінь точності та надійності висновків, що одержуються при обробці дослідних даних. Вона застосовується при плануванні й організації виробництва, аналізі технологічних процесів, контролі якості продукції, вивченні закономірностей еволюції систем прикладного характеру, що розвиваються в умовах стохастичної невизначеності, та в багатьох інших сферах.

Практично немає галузі науки, техніки чи суспільного життя, де б не використовувалися статистичні методи. Ознайомлення з ними необхідне сьогодні кожному освіченому фахівцю, оскільки його не можна вважати професійно грамотним, якщо він не може дати кількісної оцінки правильності вибору дій в умовах стохастичної невизначеності, здатних привести до виграшу чи втрат, статистично обґрунтувати вибір прийнятого рішення з оперативного керування виробництвом.

Змістовий модуль 1.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Випадкові події

1.1.1. Емпіричні та логічні основи теорії ймовірностей. Основні означення

Масовим явищем називається таке, що властиве великій кількості рівноправних об'єктів. Під ***рівноправними об'єктами*** розуміють результати досліджень у різних галузях, що повторюються при однакових основних умовах.

Дослідом (***експериментом***, ***спостереженням***) називається відтворення якого-небудь певного комплексу основних умов, що може бути повторений скільки завгодно разів.

Випадковим (***стохастичним***) називається дослід, результат якого передбачити завчасно неможливо внаслідок наявності значної кількості неврахованих сторонніх факторів (перешкод, збурень, шумів).

Кожна реалізація випадкового експерименту при одних і тих же врахованих основних умовах називається ***випробуванням***.

Основні умови, що зберігаються незмінними, в загальних рисах визначають результат довільного випробування в межах даного експерименту, а другорядні – змінюються від випробування до випробування і вносять випадкові відмінності в конкретний результат.

Подією називається довільне явище, про яке можна сказати, що воно здійснюється чи не здійснюється в результаті випробування. Події позначаються великими буквами латинського алфавіту: A, B, C, ….

Приклад 1. Зі скриньки, в якій знаходяться ретельно перемішані кульки різного кольору, навмання виймається одна кулька – це випадковий експеримент. Окрема його реалізація – це випробування. Поява (чи не поява) білої (чорної, жовтої, …) кульки – це подія.

Усі події діляться на достовірні, неможливі і власне випадкові.

Достовірною називається подія, що у результаті випробування неодмінно повинна відбутися (позначається U).

Неможливою називається подія, що у результаті випробування нізащо не може відбутися (позначається $\varnothing$).

Випадковою (***стохастичною***) називається подія, що при багаторазовому повторенні експерименту в одних випробуваннях відбувається, а в інших – ні.

Приклад 2. Розглянемо експеримент – однократне кидання симетричного грального кубика з шести гранями, які відмічені цифрами від одиниці до шести, і фіксація числа, що випадає на його верхній грані. Результатом такого експерименту буде випадіння однієї з цифр (очок) 1, 2, 3, 4, 5 або 6. Тоді достовірна подія – випадіння числа в межах від 1 до 6. Неможлива подія – випадіння числа 12. Випадкова подія – випадіння непарного числа, тобто 1, 3, 5.

Декілька подій називаються ***сумісними***, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших у тому ж випробуванні.

Декілька подій називаються ***несумісними***, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно в одному випробуванні.

Приклад 3. В експерименті – однократне кидання грального кубика – сумісними подіями є випадіння цифри 3 і випадіння непарного числа очок, а несумісними подіями є випадіння цифри 3 і випадіння парного числа очок.

Декілька попарно несумісних подій утворюють ***повну групу*** (***сукупність єдино можливих подій***), якщо в результаті випробування одна і тільки одна з них неодмінно повинна відбутися.

Приклад 4. Розглянемо експеримент – однократне кидання грального кубика. Повну групу $\{A, B, C\}$ складають такі події: A={випадіння цифри 1 чи 2}, B={випадіння цифри 3 чи 4}, C={випадіння цифри 5 чи 6}. Повною групою також є $\{D, E\}$, де D={випадіння парного числа}, E={випадіння непарного числа}.

Декілька подій в експерименті називаються ***рівноможливими***, якщо об’єктивно поява будь-якої з них у результаті випробування не більш можлива, ніж поява іншої. Рівноможливі події мають рівний ступінь об'єктивної можливості (рівні “шанси”) відбутися в результаті випробування.

Приклад 5. Розглянемо експеримент – однократне кидання грального кубика. Шість подій – випадіння цифри відповідно 1, 2, 3, 4, 5, 6 – є рівноможливими. Рівноможливими також є дві події – випадіння парного числа і випадіння непарного числа. Випадіння цифри 3 і випадіння парного числа є нерівноможливими подіями.

Протилежними називаються дві несумісні події, що утворюють повну групу (є єдино можливими). Їх позначають через A і $\overline{A}$. Протилежна до A подія $\overline{A}$ полягає в тому, що подія A не відбувається. Протилежною для достовірної U є неможлива подія $\varnothing$ і навпаки: $\overline{U} = \varnothing$ і $\overline{\varnothing} = U$.

Приклад 6. В експерименті – однократне кидання грального кубика – протилежними подіями є A={випадіння цифри, що не більша 4} і $\overline{A}$={випадіння цифри 5 чи 6}.

Появу випадкової події у конкретному випробуванні не можна завчасно спрогнозувати, оскільки випробування протікають по-різному і передбачити точний хід кожного з них неможливо. Проте зрозуміло, що достатньо великі серії однорідних випробувань підкоряються цілком певним закономірностям, оскільки в цьому випадку невраховані сторонні фактори зрівноважують (гасять) один одного.

Для характеристики, як часто подія може відбутися чи не відбутися в результаті випробувань, вводиться поняття ***ймовірність*** випадкової події – числова міра ступеню об'єктивної можливості появи даної події в результаті випробувань. Імовірність події A позначається $P(A)$.

За одиницю виміру ймовірності прийнято ймовірність достовірної події U: $\boxed{P(U) = 1}$. Імовірність неможливої події $\varnothing$ прийнята за нуль: $\boxed{P(\varnothing) = 0}$. Відповідно ймовірність будь-якої випадкової події A лежить між нулем і одиницею: $\boxed{0 \le P(A) \le 1}$. Це співвідношення задає ***шкалу ймовірностей***.

1.1.2. Класичний і статистичний методи визначення ймовірності випадкової події

Імовірність випадкової події можна визначити класичним методом тільки тоді, коли результати експерименту утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій. Такі події традиційно називають ***випадками***, а відповідний експеримент – класичною теоретико–ймовірнісною ***схемою випадків***. У рамках цієї схеми можна точно підрахувати ймовірність події, не проводячи фактично випробувань.

Випадок називається ***сприятливим*** до події A, якщо його поява тягне за собою появу цієї події.

Якщо дослід зводиться до схеми випадків, то *ймовірність події* A *дорівнює відношенню числа сприятливих випадків* m *до їх загального числа* n: $\boxed{P(A)=m/n}$ (***класичне визначення ймовірності***).

<u>Зауваження 1</u>. Імовірність події A можна знайти різними способами у залежності від того, яку повну групу <u>рівноможливих</u> подій відповідного експерименту вважати випадками.

<u>Приклад 1</u>. В експерименті – однократне кидання грального кубика – визначити ймовірність $P(A)$ події A={випадіння парного числа очок}.

□ Розв'яжемо задачу двома способами.

<u>Перший спосіб</u>. За випадки приймемо повну групу подій: випадіння 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок. Тоді загальна кількість випадків $n=6$, а число сприятливих випадків до події A $m=3$ (випадіння 2, 4 чи 6 очок). Шукана ймовірність $P(A)=m/n=3/6=0{,}5$.

<u>Другий спосіб</u>. За випадки приймемо повну групу з двох протилежних подій: A={випадіння парного числа очок} і B={випадіння непарного числа очок}. Тоді загальна кількість випадків $n=2$, а число сприятливих випадків до події A $m=1$ (випадіння парного числа очок). Шукана ймовірність $P(A)=m/n=1/2=0{,}5$. ■

<u>Приклад 2</u>. Зі скриньки, в якій знаходяться ретельно перемішані 8 зелених, 5 жовтих і 7 червоних кульок, навмання виймається одна кулька. Знайти ймовірність $P(A)$ події A={вийнята кулька зеленого кольору}.

□ Загальна кількість кульок $n=8+5+7=20$. Число сприятливих випадків $m=8$. Тоді шукана ймовірність

$$P(A)=m/n=8/20=0{,}4. \quad ■$$

Імовірність достовірної події дорівнює 1, оскільки такій події сприяють всі можливі випадки. Імовірність неможливої події дорівнює 0, оскільки їй не сприяє ні один з можливих випадків.

Імовірність протилежної події $\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$. Дійсно, якщо події A зі всіх n випадків сприяють m, то їй не сприяють $n-m$ випадків (вони сприяють протилежній події $\overline{A}$). Тому

$$P(\overline{A})=(n-m)/n=1-m/n=1-P(A).$$

Звідси *сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці*.

Якщо події в досліді не зводяться до схеми випадків, то оцінку ймовірності події A можна зробити тільки статистично, проводячи відповідні випробування.

Нехай у межах деякого експерименту проведена серія з n випробувань, у кожному з яких могла з'явитися чи не з'явитися подія A. ***Відносною частотою*** $W_n(A)$ події A називають відношення числа випробувань m, де ця подія відбулася, до загального числа проведених випробувань n: $\boxed{W_n(A)=m/n}$.

Очевидно, що

$$0\le W_n(A)\le 1,\ \ W_n(U)=1,\ \ W_n(\varnothing)=0.$$

При незначній кількості випробувань n відносна частота $W_n(A)$ носить випадковий характер. Дослідження показують, що зі збільшенням числа випробувань відносна частота $W_n(A)$ появи події A проявляє ***властивість статистичної стійкості***: вона все менше відхиляється від деякого сталого числа, що й приймається за значення ймовірності $P(A)$: $\boxed{P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}W_n(A)}$ (***статистичне визначення ймовірності***). Відповідно за наближене значення ймовірності $P(A)$ беруть відносну частоту $W_n(A)$ при достатньо великій кількості випробувань n: $\boxed{P(A)\approx W_n(A)}$.

Зазначена властивість є одним з проявів ***закону великих чисел*** і більш строго буде сформульована далі.

Наприклад, при багатократному киданні симетричної монети відносна частота появи герба мало відрізняється від числа 0,5 – ймовірності цієї події.

Зауваження 2. З того, що ймовірність деякої події A дорівнює одиниці, ще не випливає достовірність цієї події A. Аналогічно, якщо ймовірність деякої події A дорівнює нулю, це ще не означає що подія A – неможлива.

1.1.3. Елементи комбінаторики

Для підрахунку кількості всіх можливих випадків n і числа сприятливих випадків m часто використовують різні комбінаторні співвідношення.

Комбінаторика – це розділ математики, що займається підрахунком числа різного типу комбінацій (вибірок), складених з елементів скінченної множини за певними правилами.

При розв'язуванні комбінаторних задач використовують наступні два аксіоматичні правила.

<u>Правило суми</u>. *Якщо об'єкт a можна вибрати k способами, а об'єкт b – іншими m способами (незалежно від вибору a), то вибір об'єкта "a або b" може бути здійснений $k+m$ способами.*

Тут зв'язка *або* вживається в розділовому сенсі.

<u>Приклад 1</u>. У місті N знаходяться $k=7$ технічних ВНЗ, $m=2$ медичних і $n=3$ гуманітарних. Скількома способами S можна отримати вищу освіту за державним набором у цьому місті?

□ Оскільки державний набір передбачає безоплатну освіту тільки в одному ВНЗ, то можна застосувати правило суми. Згідно з цим правилом число способів $S=k+m+n=7+2+3=12$. ■

<u>Правило добутку</u>. *Якщо об'єкт a можна вибрати k способами, а після кожного з цих виборів об'єкт b – іншими m способами (незалежно від вибору a), то вибір упорядкованої пари (a,b) може бути здійснений $k\times m$ способами.*

<u>Приклад 2</u>. На групу з $k=24$ студентів видається $m=30$ тем рефератів і $n=25$ тем курсових робіт по одному завданню кожного виду на одного студента. Скількома способами S це можна зробити?

□ Оскільки кожний студент повинен підготувати тільки один реферат і виконати тільки одну курсову роботу, то можна застосувати правило добутку. За цим правилом

$$S=k\times m\times n=24\times 30\times 25=18000\ . \quad ■$$

Нехай $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – деяка скінченна множина з n елементів. Розглянемо основні типи комбінацій – перестановки, розміщення та сполучення.

Комбінації з n елементів, які відрізняються одна від одної тільки порядком елементів, називаються ***перестановками***.

Кількість таких перестановок позначають символом P_n, де n – число елементів, що входять у кожну перестановку.

Приклад 3. Нехай множина M містить три букви A, B і C. Скласти всі можливі упорядковані комбінації з цих букв по три в кожній без повторення.

□ Одержимо: $A\ B\ C$, $C\ A\ B$, $B\ A\ C$, $B\ C\ A$, $C\ B\ A$, $A\ C\ B$ (6 комбінацій). Видно, що вони відрізняються одна від одної тільки порядком розташування букв. Дійсно, на перше місце в комбінації (перестановці) можна поставити три букви. На друге місце вже можна поставити тільки дві букви із трьох (одна посіла перше місце), а на третьому виявиться тільки одна (та, що залишилася). Виходить, $P_3 = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$, але $3\cdot 2\cdot 1 = 3!$. Прийшли до поняття факторіала. ■

Добуток усіх натуральних чисел від 1 до n включно називають n***-факторіалом*** і пишуть: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$.

Вважають, що $0! = 1$ і $1! = 1$. Основна властивість факторіала: $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$.

Число перестановок обчислюють за формулою $\boxed{P_n = n!}$.

Комбінації з n елементів по m елементів, які відрізняються одна від одної самими елементами або порядком елементів, називаються ***розміщеннями***. Тут зв’язка *або* вживається в об’єднуючому сенсі.

Кількість таких розміщень позначаються символом A_n^m, де n – число всіх наявних елементів, m – число елементів у кожній комбінації. ***Число розміщень*** обчислюють за формулою

$$\boxed{A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)},$$

де $n \ge m \ge 0$; $m, n \in N \cup \{0\}$. Вважають, що $A_n^0 = 1$.

Приклад 4. Нехай множина M містить п’ять букв A, B, C, D і E. Скласти всі комбінації тільки з двох букв без повторення і з врахуванням порядку.

□ Одержимо: $A\ B$, $A\ C$, $A\ D$, $A\ E$, $B\ A$, $B\ C$, $B\ D$,

$B\ E$, $C\ A$, $C\ B$, $C\ D$, $C\ E$, $D\ A$, $D\ B$, $D\ C$, $D\ E$, $E\ A$, $E\ B$, $E\ C$, $E\ D$. Видно, що всі отримані комбінації (їх 20) відрізняються або буквами, або їхнім порядком (комбінації $A\ B$ і $B\ A$ вважають різними).

За наведеною формулою $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$, що збігається з одержаним результатом. При утворенні розміщень перший елемент може бути обраний $n = 5$ способами, оскільки існує можливість незалежного вибору з усіх наявних $n = 5$ елементів; а другий – $n - 1 = 4$ способами, оскільки тепер вибір проводиться з решти $n - 1 = 4$ елементів, що залишилися. За правилом добутку маємо всього $5 \cdot 4 = 20$ різних комбінацій. ■

Формулу для числа розміщень A_n^m можна подати у факторіальному вигляді $\boxed{A_n^m = n!/(n-m)!}$. Основні властивості розміщень: $A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n-m)$; $A_n^n = P_n = n!$.

Розміщення й перестановки обов'язково враховують порядок елементів.

Сполученнями називаються комбінації з n елементів по m, які відрізняються одна від одної принаймні одним елементом ($n \geq m \geq 0$ і $m, n \in N \cup \{0\}$), при цьому порядок елементів не враховується.

З кожного сполучення з m елементами можна утворити P_m упорядкованих розміщень. Тому ***кількість сполучень*** із n елементів по m C_n^m дорівнює числу розміщень з n елементів по m, поділеному на число перестановок з m елементів: $\boxed{C_n^m = A_n^m / P_m}$. Вважають, що $C_n^0 = 1$.

Використовуючи для кількості розміщень і перестановок факторіальні співвідношення $A_n^m = n!/(n-m)!$ і $P_n = n!$, дістанемо формулу числа сполучень у вигляді $\boxed{C_n^m = n!/\left(m!(n-m)!\right)}$.

Основна властивість сполучень:

$$C_n^{n-m} = P_n / \left(P_{n-m} \cdot P_m\right) = n!/\left((n-m)!m!\right); \quad \boxed{C_n^m = C_n^{n-m}}.$$

Приклад 5. Множина M утворена з п’яти букв A, B, C, D і E. Скласти невпорядковані комбінації з двох букв без повторення, що відрізняються одна від одної хоча б одним елементом.

□ Маємо: $A\,B$, $A\,C$, $A\,D$, $A\,E$, $B\,C$, $B\,D$, $B\,E$, $C\,D$, $C\,E$, $D\,E$. Виходить, що число сполучень з $n=5$ елементів по $m=2$ дорівнює 10. Це число можна обчислити так:

$$C_5^2 = 5!/\bigl(2!(5-2)!\bigr) = 10\,. \quad ■$$

Приклад 6. Зі скриньки, в якій знаходяться ретельно перемішані $n_1=8$ білих і $n_2=4$ чорних кульок, навмання виймаються $m_e=2$ кульки. Знайти ймовірності наступних подій:

а) A={вийняті кульки білі}; б) B={вийняті кульки чорні};
в) C={вийняті кульки різнокольорові}; г) D={обидві кульки білі або обидві чорні}.

□ За класичною формулою ймовірності $P(A)=m/n$, де n – загальна кількість випадків у досліді, m – число сприятливих випадків, яке для кожної з подій A, B, C і D позначимо відповідно $m(A)$, $m(B)$, $m(C)$ і $m(D)$. Загальна кількість випадків у досліді – це число сполучень з $n_e=n_1+n_2=8+4=12$ кульок по $m_e=2$, тобто $n=C_{n_e}^{m_e}=C_{12}^2=12!/\bigl(2!(12-2)!\bigr)=66$.

а) Для події A кількість сприятливих випадків $m(A)$ – це число сполучень з $n_1=8$ білих куль по $m_e=2$, тобто

$$m(A)=C_{n_1}^{m_e}=C_8^2=8!/\bigl(2!(8-2)!\bigr)=28.$$

Таким чином, $P(A)=m(A)/n=28/66=14/33$.

б) Для події B кількість сприятливих випадків $m(B)$ – це кількість сполучень з $n_2=4$ чорних куль по $m_e=2$, тобто

$$m(B)=C_{n_2}^{m_e}=C_4^2=4!/\bigl(2!(4-2)!\bigr)=6\,.$$

Отже, $P(B)=m(B)/n=6/66=1/11$.

в) Для події C кількість сприятливих випадків $m(C)$ визначається за правилом множення $m(C) = n_1 n_2 = 8 \cdot 4 = 32$.

Таким чином, $P(C) = m(C)/n = 32/66 = 16/33$.

г) За результатами пунктів а) і б) даного прикладу дві білі кулі можна одержати $m(A) = 28$ способами, а дві чорні – $m(B) = 6$ способами. Тоді за правилом додавання

$$m(D) = m(A) + m(B) = 28 + 6 = 34.$$

Отже, $P(D) = m(D)/n = 34/66 = 17/33$. ■

Приклад 7. У туристичній групі, в яку входять Андрій, Борис, Сергій, Денис, Едуард, Федір і Геннадій, навмання вибирають командира, його заступника і замикаючого. Знайти ймовірність події A ={Андрій – командир, Борис – його заступник}.

□ Загальна кількість випадків у досліді – це число розміщень з $n_e = 7$ туристів по $m_e = 3$, тобто $n = A_{n_e}^{m_e} = A_7^3 = 7!/(7-3)! = 210$.

Якщо командира і його заступника вибрано (Андрія і Бориса), то вибрати замикаючого можна $m(A) = n_e - 2 = 7 - 2 = 5$ способами (число сприятливих випадків для події A).

Тоді за класичною формулою ймовірності

$$P(A) = m(A)/n = 5/210 = 1/42.$$ ■

1.1.4. Простір подій. Операції над подіями

Подія, якій відповідає один і тільки один результат експерименту, називається ***елементарною подією***.

Множина U всіх елементарних подій, що складають повну групу несумісних подій, називається ***простором подій***.

Приклад 1. В експерименті – однократне кидання грального кубика – за простір подій можна взяти $U_1 = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$, де елементарна подія ω_k означає випадіння k очок. Також можна покласти $U_2 = \{\omega_p, \omega_n\}$, де елементарна подія ω_p означає випадіння парної цифри, а ω_n – випадіння непарної цифри.

Зауваження 1. Вибір того чи іншого простору елементарних подій визначається метою досліду.

Приклад 2. Кидається симетрична монета. Звичайно вважають, що простір подій складається з двох елементів $U=\{\omega_1,\omega_2\}$, де елементарна подія ω_1 означає випадіння герба, а ω_2 – випадіння цифри. Якщо в реальному експерименті монета стане на ребро, то треба або вважати, що відповідне випробування не здійснилося, або розглядати простір подій з трьох елементів $U=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, де ω_3 означає падіння на ребро.

Довільна підмножина A простору подій U називається ***випадковою подією в просторі*** U.

Вважатимемо, що подія $A\subset U$ відбувається тоді і тільки тоді, коли випробування, якому відповідає простір U, супроводжується появою однієї з елементарних подій, що складають подію A.

Приклад 3. В експерименті – однократне кидання грального кубика – за простір подій візьмемо $U=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_6\}$, де елементарна подія ω_k означає випадіння k очок. Тоді $A=\{\omega_5\}\subset U$ – подія, що полягає у випадінні п'яти очок; $B=\{\omega_3,\omega_6\}$ – подія "випадіння числа очок, кратного трьом"; $C=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$ – подія "випадіння парного числа очок"; $D=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$ – подія "випадіння непарного числа очок".

Подія $A=U$ (події A відповідають всі елементи з простору U) є ***достовірною***, а подія $A=\varnothing$ (події A не відповідає жодний елемент з простору U) – ***неможливою***.

Якщо A – довільна подія, то подія $\overline{A}$, складена з елементарних подій, що не входять у A, є ***протилежною*** до A.

Очевидно, $\overline{U}=\varnothing$ і $\overline{\varnothing}=U$.

Зауваження 2. Надалі у цьому пункті слово "подія" означає "подія в просторі U".

Елементарні події, що відповідають елементам з підмножини випадкової події A, є ***сприятливими*** до цієї події.

Нехай всі елементарні події, що складають подію A, також входять і в подію B, тобто $A\subset B$. Тоді кажуть, що ***подія*** A ***тягне за собою подію*** B.

Так, у просторі U з прикладу 3 маємо $A \subset D$, тобто випадіння п'яти очок тягне за собою випадіння їх непарного числа.

З випадкових подій можна утворювати більш складні події за допомогою різних операцій. Розглянемо основні з них.

Сумою двох подій A і B називають подію (A *або* B), що полягає у появі хоча б однієї з них в одному випробуванні. Позначають $A+B$.

У прикладі 3 подія $E=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_6\}$, що полягає у випадінні непарного числа очок або числа очок, кратного трьом, є сумою подій B і D: $E=B+D$.

Добутком двох подій A і B називають подію (A *і* B), що полягає в їх спільній появі в одному випробуванні. Позначають $A \cdot B$ чи AB.

У прикладі 3 подія $F=\{\omega_6\}$, що полягає у випадінні шести очок, є добутком подій B і C: $F=BC$.

Суму і добуток більше двох подій визначають за математичною індукцією.

Сумою декількох подій є подія, що полягає в появі в одному випробуванні принаймні однієї з подій-доданків.

Добутком декількох подій є подія, що полягає в спільній появі в одному випробуванні всіх подій-співмножників.

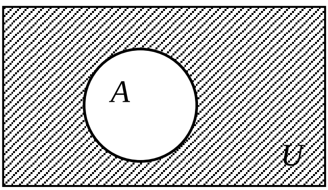


Рис. 1. $\overline{A}$

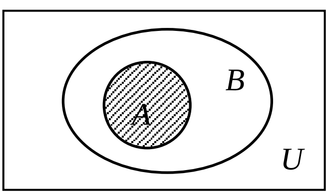


Рис. 2. $A \subset B$

Події та дії над ними можна наочно ілюструвати за допомогою ***діаграм Ейлера – Венна***, на яких достовірна подія U зображується прямокутником, елементарні події – його точками, а довільна подія – деякою областю в межах прямокутника (рис. 1 – 4).

Операції додавання і множення мають наступні властивості:

1. $A+B=B+A$,
   $AB=BA$ (комутативність);
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$,
   $(AB)C=A(BC)$ (асоціативність);
3. $(A+B)C=AC+BC$ (дистрибутив-

ність);

4. $A+A=A$, $AA=A$, $A+U=U$, $AU=A$, $A+\varnothing=A$, $A\varnothing=\varnothing$;

5. $A+\overline{A}=U$, $A\overline{A}=\varnothing$, $\overline{U}=\varnothing$, $\overline{\varnothing}=U$, $\overline{\overline{A}}=A$;

6. $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$ (закони де Моргана).

У справедливості цих властивостей легко переконатися за допомогою діаграм Ейлера – Венна.

Приклад 4. Довести рівність, користуючись діаграмами Ейлера – Венна: $A+B=A+\overline{A}B$.

□ Маємо (рис. 5). ■

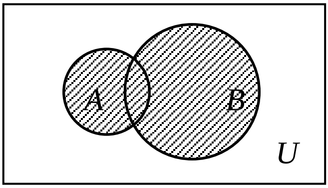


Рис. 3. $A+B$

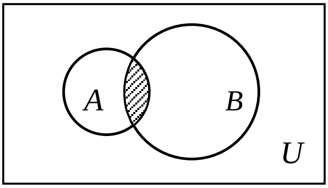
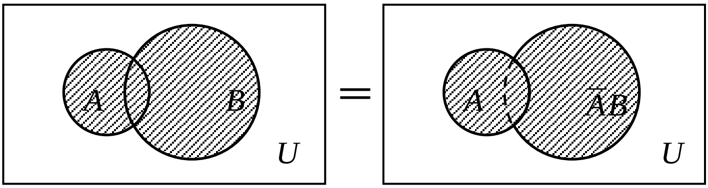


Рис. 4. AB



$A+B$ $A+\overline{A}B$

Рис. 5. $A+B=A+\overline{A}B$

1.2. Основні теореми теорії ймовірностей

Оскільки на практиці багаторазове відтворення досліду досить затратне, то для визначення ймовірностей складних подій використовують співвідношення, що зв’язують їх з імовірностями відповідних компонент. Основні теореми теорії ймовірностей дозволяють за відомими ймовірностями простих подій визначати ймовірності більш складних подій.

1.2.1. Імовірність суми подій

<u>Теорема</u>. *Імовірність суми двох подій* A *і* B *дорівнює сумі їх імовірностей без імовірності їх добутку*:

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}.$$

□ Нехай результати досліду утворюють повну групу n несумісних рівноможливих подій (рис. 6). При цьому m з них сприятливі події A; k з них сприятливі події B; l з них сприятливі добутку AB подій A і B. Події $A+B$ сприяють $m+k-l$ випадків.

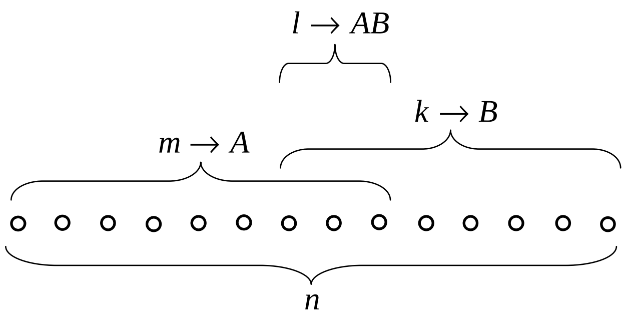


Рис. 6

Тоді за класичною формулою визначення ймовірності дістанемо:

$$P(A)=m/n; \quad P(B)=k/n; \quad P(AB)=l/n;$$
$$P(A+B)=(m+k-l)/n.$$

В останній рівності чисельник почленно розділимо на знаменник і одержимо:

$$P(A+B)=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{l}{n}=P(A)+P(B)-P(AB). \quad \blacksquare$$

<u>Наслідок 1</u>. *Імовірність суми двох несумісних подій* A *і* B *дорівнює сумі їх імовірностей*: $\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)}$.

Це очевидно, оскільки добуток несумісних подій є неможливою подією, а ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $AB=\varnothing$ і $P(\varnothing)=0$.

Наслідок 2. *Імовірність суми* n *попарно несумісних подій* A_1, A_2, ..., A_n *дорівнює сумі їх імовірностей*:

$$\boxed{P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}.$$

Наслідок 3. *Сума ймовірностей* n *несумісних подій* A_1, A_2, ..., A_n, *що складають повну групу, дорівнює одиниці*:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1}.$$

Наслідок 4. *Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці*: $\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$.

Приклад 1. У скриньці знаходяться $n = 24$ ретельно перемішаних кульок: $n_1 = 8$ білих, $n_2 = 6$ зелених і $n_3 = 10$ червоних. Зі скриньки навмання виймається одна кулька. Знайти ймовірності того, що вийнята кулька – не біла.

□ Нехай подія A={вийнята зелена кулька}; B={вийнята червона кулька}. Тоді подія $C = A + B$={вийнята не біла кулька}.

Перший спосіб. За класичною формулою ймовірності

$$P(A) = 6/24 = 1/4; \quad P(B) = 10/24 = 5/12.$$

Оскільки події A і B несумісні, то

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 1/4 + 5/12 = 8/12 = 2/3.$$

Другий спосіб. Нехай подія D={вийнята біла кулька}. За класичною формулою ймовірності $P(D) = 8/24 = 1/3$.

Оскільки $C = \overline{D}$, то

$$P(C) = P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 1/3 = 2/3. \ ■$$

Приклад 2. Імовірність того, що піде сніг (подія A), дорівнює 0,7, а ймовірність того, що піде дощ (подія B), дорівнює 0,4. Знайти ймовірність поганої погоди (подія $C = A + B$), якщо ймовірність дощу зі снігом (подія AB) дорівнює 0,2.

□ Події A і B сумісні, тому

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}9. \ ■$$

1.2.2. Імовірність добутку подій

Дві події A і B називаються ***незалежними***, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від того, відбулася чи не відбулася інша.

Для подій A і B ймовірність події A, обчислена за умови, що подія B вже відбулася, називається ***умовною ймовірністю*** і позначається $P_B(A)$ або $P(A/B)$.

Для незалежних подій A і B умовні ймовірності збігаються з безумовними: $P(A/B) = P(A)$ і $P(B/A) = P(B)$.

Для залежних подій A і B умовні ймовірності відрізняються від безумовних: $P(A/B) \neq P(A)$ і $P(B/A) \neq P(B)$.

Приклад 1. Симетричну монету кидають двічі. Розглянемо події: A={першого разу випав герб}, B={другого разу випав герб} і C={за два рази випав принаймні один герб}. Треба визначити, які з пар подій A і B, A і C, B і C є незалежними.

□ За простір подій візьмемо $U = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$, де $Г$ означає випадіння герба, а $Ц$ – випадіння цифри. Тоді $A = \{ГГ, ГЦ\}$; $B = \{ГГ, ЦГ\}$ і $C = \{ГГ, ГЦ, ЦГ\}$.

Користуючись класичною формулою, обчислимо безумовні та умовні ймовірності:

$$P(A) = 2/4 = 1/2; \quad P(B) = 2/4 = 1/2; \quad P(C) = 3/4;$$

$$P(B/A) = 1/2; \quad P(C/A) = 2/2 = 1; \quad P(B/C) = 2/3.$$

Таким чином, події A і B незалежні, оскільки $P(B/A) = 1/2 = P(B)$; події A і C залежні, тому що $P(C/A) = 1 \neq 3/4 = P(C)$; B і C залежні, оскільки $P(B/C) = 2/3 \neq 1/2 = P(B)$. ■

Теорема. *Імовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша вже відбулася*:

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)} \text{ і } \boxed{P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)}.$$

□ Нехай результати досліду утворюють повну групу n несумісних рівноможливих подій (рис. 6). З цих випадків m сприятливі події A; k – події B; l – добутку AB. Тоді за класичною формулою:

$$P(A)=m/n; \quad P(B/A)=l/m; \quad P(AB)=l/n.$$

Останню рівність можна перетворити так:

$$P(AB)=\frac{l}{n}\cdot\frac{m}{m}=\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{m}=P(A)\cdot P(B/A). \quad ■$$

Ця теорема узагальнюється на добуток будь-якої кількості подій:

$$P(A_1A_2A_3...A_n)=$$

$$=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot ...\cdot P(A_n/A_1A_2...A_{n-1}).$$

<u>Наслідок 1</u>. *Імовірність добутку двох незалежних подій* A *і* B *дорівнює добутку їх імовірностей*: $\boxed{P(AB)=P(A)\cdot P(B)}$.

Це пояснюється тим, що для незалежних подій умовні ймовірності збігаються з безумовними.

Події A_1, A_2, ..., A_n $(n\ge 2)$ називаються ***взаємно незалежними*** (***незалежними у сукупності***), якщо при $n=2$ вони незалежні, а при $n\ge 3$ кожна з них не залежить від добутку будь-яких з решти подій.

<u>Наслідок 2</u>. *Імовірність добутку* n *взаємно незалежних подій* A_1, A_2, ..., A_n *дорівнює добутку їх імовірностей*:

$$\boxed{P\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i)}.$$

<u>Зауваження 1</u>. З попарної незалежності подій A_1, A_2, ..., A_n ($n\ge 3$) не випливає їх незалежність у сукупності.

<u>Приклад 2</u>. Нехай всі чотири грані тетраедра пофарбовані так: перша – у зелений колір, друга – у синій, третя – у червоний, четверта – у всі ці три кольори. При киданні тетраедр падає на одну з граней, на якій є зелений (подія A), синій (подія B), червоний (подія C) чи всі три кольори (подія $D=ABC$). Чи є взаємно незалежними події A, B і C?

□ Обчислимо відповідні ймовірності:

$$P(A)=P(B)=P(C)=2/4=1/2\,;\;\; P(A/B)=P(A/C)=$$
$$=P(B/A)=P(B/C)=P(C/A)=P(C/B)=1/2\,.$$

Оскільки значення знайдених умовних та безумовних ймовірностей співпадають, то події A, B і C попарно незалежні. Але, наприклад, $P(A/BC)=1$, тому $P(A/BC)\neq P(A)$. Це означає, що події A, B і C не є взаємно незалежними. ■

<u>Зауваження 2</u>. Якщо події A_1, A_2, ..., A_n $(n\geq 2)$ взаємно незалежні, то протилежні їм. події $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_n$ також взаємно незалежні.

<u>Приклад 3</u>. У комп'ютерну тестову систему введено 40 запитань. Студенту випадковим чином пропонується 5 запитань і виставляється за тест оцінка "відмінно", якщо на всі запитання він дає правильну відповідь. Знайти ймовірність одержати таку оцінку, якщо з усіх введених в систему запитань студент підготував тільки 30.

□ Розглянемо події A={одержана оцінка "відмінно"} та A_i={дана правильна відповідь на i-е запитання}, $i=\overline{1,5}$. Тоді $A=A_1A_2A_3A_4A_5$. Події A_i, $i=\overline{1,5}$ залежні, тому

$$P(A)=P(A_1A_2A_3A_4A_5)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\times$$
$$\times P(A_4/A_1A_2A_3)\cdot P(A_5/A_1A_2A_3A_4)=\frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\cdot\frac{28}{38}\cdot\frac{27}{37}\cdot\frac{26}{36}\approx 0{,}22\,.\ ■$$

<u>Приклад 4</u>. Два мисливця роблять по одному пострілу в ціль. Імовірність влучення в ціль для першого мисливця дорівнює 0,75, а для другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що:

а) обидва мисливця влучили в ціль;

б) принаймні один мисливець влучив у ціль.

□ Розглянемо події A={перший мисливець влучив у ціль}; B={другий мисливець влучив у ціль}; $C=AB$={обидва мисливця влучили в ціль} і $D=A+B$={принаймні один мисливець влучив у ціль}. За умовою $P(A)=0{,}75$ і $P(B)=0{,}9$.

а) Події A і B незалежні, тому

$$P(C)=P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}75\cdot 0{,}9=0{,}675\,.$$

б) Події A і B сумісні. Імовірність їх суми $D=A+B$ знайдемо трьома способами. Попередньо розглянемо протилежні події $\overline{A}$, $\overline{B}$ і знайдемо їх імовірності:

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}75=0{,}25; \quad P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}9=0{,}1.$$

Перший спосіб. Подамо подію $D=A+B$ як суму несумісних подій $D=A\overline{B}+\overline{A}B+AB$. Тоді

$$P(D)=P(A\overline{B}+\overline{A}B+AB)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB)=$$

$$=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P(B)+P(A)\cdot P(B)=$$

$$=0{,}75\cdot 0{,}1+0{,}25\cdot 0{,}9+0{,}75\cdot 0{,}9=0{,}975.$$

Другий спосіб. Розглянемо протилежну подію $\overline{D}$ ={обидва мисливця не влучили в ціль}. Тоді $\overline{D}=\overline{A}\,\overline{B}$, де події $\overline{A}$ і $\overline{B}$ незалежні. Дістанемо:

$$P(\overline{D})=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0{,}25\cdot 0{,}1=0{,}025;$$

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-0{,}25=0{,}975.$$

Третій спосіб. Знайдемо ймовірність події $D=A+B$ безпосередньо як суму сумісних подій:

$$P(D)=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=$$

$$=0{,}75+0{,}9-0{,}75\cdot 0{,}9=0{,}975. \quad ■$$

Приклад 5. Імовірності влучення в ціль при пострілах з трьох гармат відповідно дорівнюють $p_1=0{,}8$, $p_2=0{,}7$ і $p_3=0{,}85$. Знайти ймовірність хоча б одного влучення (подія A) при одному залпі з усіх цих гармат.

□ Імовірність влучення в ціль кожної з гармат не залежить від результатів стрільби з інших гармат. Тому події A_i ={ i-а гармата влучила в ціль}, $i=1,2,3$ незалежні в сукупності.

Імовірності q_i, $i=1,2,3$ протилежних подій $\overline{A_i}$, $i=1,2,3$ (промахів) відповідно дорівнюють:

$$q_1=1-p_1=1-0{,}8=0{,}2; \qquad q_2=1-p_2=1-0{,}7=0{,}3;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15.$$

Тоді ймовірність події $\overline{A} = \overline{A_i}\,\overline{A_i}\,\overline{A_i}$ ={жодна з трьох гармат не влучила в ціль} визначається так:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1})\,P(\overline{A_2})\,P(\overline{A_3}) = q_1 q_2 q_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}15 = 0{,}009.$$

Таким чином, шукана ймовірність

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}009 = 0{,}991. \quad \blacksquare$$

1.2.3. Формули повної ймовірності та Байєса

Нехай передбачається проведення досліду, щодо умов виконання якого можна зробити n взаємовиключних ***припущень*** (***гіпотез***) H_1, H_2, ..., H_n. Гіпотези про умови протікання експерименту утворюють повну групу несумісних подій $U = \{H_1, H_2, ..., H_n\}$, ***апріорні*** (додослідні) ймовірності кожної з яких $P(H_i)$, $i = \overline{1,n}$ відомі. Деяка випадкова подія A може відбутися при будь-якій з наведених умов виконання досліду, що визначаються гіпотезами H_i, $i = \overline{1,n}$, з відомими відповідними умовними ймовірностями $P(A/H_i)$, $i = \overline{1,n}$. Формула повної ймовірності $P(A)$ використовується для визначення повної (середньої) ймовірності події A, що може відбутися тільки з однією з повної групи несумісних подій H_i, $i = \overline{1,n}$.

Події H_i, $i = \overline{1,n}$ прийнято називати ***гіпотезами***, оскільки повна ймовірність $P(A)$ події A визначається в момент, коли невідомо, яка з подій H_i, $i = \overline{1,n}$ відбудеться і спричинить настання події A.

Складну подію A можна подати як суму несумісних подій (рис. 7, де події A відповідають точки, обмежені овалом, а гіпотезам H_i, $i = \overline{1,n}$ – точки відповідних трикутників, $n = 5$):

$$A = H_1 A + H_2 A + ... + H_n A = \sum\nolimits_{i=1}^{n} H_i A.$$

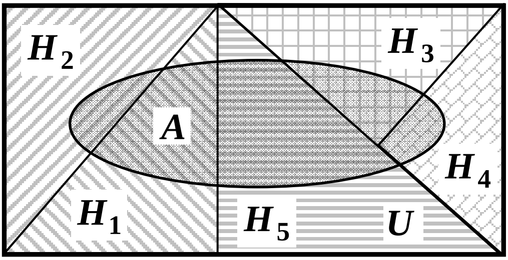


Рис. 7

Застосовуючи теореми додавання й множення, дістанемо:

$$P(A) = P(H_1A + H_2A + ... + H_nA) =$$

$$= P(H_1A) + P(H_2A) + ... + P(H_nA) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) +$$

$$+ P(H_2) \cdot P(A/H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n) .$$

Таким чином, маємо ***формулу повної ймовірності***

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}.$$

Повна безумовна ймовірність події A з урахуванням випадковості умов виконання експерименту дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з гіпотез на умовну ймовірність події A при кожній з гіпотез.

<u>Приклад 1</u>. У продаж надходять телевізори трьох заводів: 30% з першого, 50% з другого і 20% з третього. Продукція першого заводу містить 10% телевізорів з прихованими дефектами, другого – 5% і третього – 4%. Знайти ймовірність придбати справний телевізор.

□ Розглянемо подію A={придбано справний телевізор} і гіпотези H_i={телевізор надійшов у продаж з i-го заводу}, $i = \overline{1,3}$.

З умови задачі маємо:

$$P(H_1) = 30\% = 0,3 ; \; P(H_2) = 50\% = 0,5 ; \; P(H_3) = 20\% = 0,2 ;$$

$$P(A/H_1) = 100\% - 10\% = 90\% = 0,9 ; \; P(A/H_2) = 100\% - 5\% =$$

$$= 95\% = 0{,}95\,; \quad P(A/H_3) = 100\% - 4\% = 96\% = 0{,}96\,.$$

Тоді за формулою повної ймовірності дістаємо:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) +$$

$$+ P(H_3)\cdot P(A/H_3) = 0{,}3\cdot 0{,}9 + 0{,}5\cdot 0{,}96 + 0{,}2\cdot 0{,}95 = 0{,}94\,. \quad \blacksquare$$

Формула Байєса використовується при тих же передумовах, що і формула повної ймовірності, за єдиної відмінності, що подія A вже відбулася. Вона дозволяє визначати ***апостеріорні*** (післядослідні) ймовірності гіпотез $P(H_i/A)$, $i = \overline{1,n}$, тобто умовні ймовірності гіпотез за умови, що подія A відбулася.

За теоремою про ймовірність добутку двох подій для кожного $i = \overline{1,n}$ визначимо у двох формах ймовірність спільної появи подій H_i і A в одному випробуванні:

$$P(H_iA) = P(H_i)\cdot P(A/H_i) \quad \text{або} \quad P(H_iA) = P(A)\cdot P(H_i/A)\,.$$

Звідси дістанемо

$$P(H_i)\cdot P(A/H_i) = P(A)\cdot P(H_i/A)\,;$$

$$P(H_i/A) = P(H_i)\cdot P(A/H_i)\big/P(A)\,.$$

У знаменник останнього співвідношення замість повної ймовірності $P(A)$ підставимо її вираз за формулою повної ймовірності й отримаємо ***формулу Байєса*** (***формулу гіпотез***)

$$\boxed{P(H_i/A) = P(H_i)\cdot P(A/H_i)\Big/\sum\nolimits_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i),\ i = \overline{1,n}}\,.$$

Таким чином, формула Байєса дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез після того, як стає відомим, що в результаті випробування відбулася подія A. Використовуючи інформацію про факт появи події, ця формула забезпечує корекцію апріорних імовірностей гіпотез, що дозволяє більш обґрунтовано судити про умови, що передували цій події.

<u>Приклад 2</u>. Статистика запитів кредитів в деякому банку така: 20% – бюджетні організації, 36% – юридичні особи, а решта – фізичні особи. Імовірності неповернення взятого кредиту відповідно дорівнюють 0,01, 0,05 і 0,2. Знайти ймовірність неповернення

чергового кредиту. Начальнику кредитного відділу надійшло повідомлення факсом про неповернення кредиту, але в ньому ім'я клієнта погано надруковано. Яка ймовірність, що цей кредит не повернула юридична особа?

□ Розглянемо подію A={неповернення кредиту} і гіпотези H_1={запит на кредит від бюджетної організації}, H_2={запит на кредит від юридичної особи}, H_3={запит на кредит від фізичної особи}. З умови задачі маємо:

$$P(H_1) = 20\% = 0{,}2; \qquad P(H_2) = 36\% = 0{,}36;$$

$$P(H_3) = 100\% - 20\% - 36\% = 44\% = 0{,}44;$$

$$P(A/H_1) = 0{,}01; \quad P(A/H_2) = 0{,}05; \quad P(A/H_3) = 0{,}2.$$

Імовірність неповернення кредиту знайдемо за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) +$$

$$+ P(H_3)\cdot P(A/H_3) = 0{,}2\cdot 0{,}01 + 0{,}36\cdot 0{,}05 + 0{,}44\cdot 0{,}2 = 0{,}108.$$

Імовірність, що кредит не повернула юридична особа, обчислимо за формулою Байєса:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}36\cdot 0{,}05}{0{,}108} \approx 0{,}167. \quad \blacksquare$$

1.3. Схема незалежних випробувань

На практиці часто доводиться стикатися з задачами, де потрібно обчислювати ймовірності складних подій при фіксованому числі незалежних випробувань і відомою ймовірністю настання деякої більш простої події A в кожному випробуванні.

Якщо проводиться n випробувань, причому ймовірність появи події A в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називаються ***незалежними*** відносно події A.

Усі задачі, пов'язані з повторенням незалежних експериментів, можуть бути розв'язані безпосередньо за допомогою основних теорем теорії ймовірностей. Проте при великому числі випробувань це призводить до складних і громіздких обчислень. Тому для типових задач –

- визначення ймовірності $P_n(m)$ настання події A рівно m разів у n незалежних випробуваннях;
- визначення ймовірності $P_n(m_1, m_2)$ настання події A не менше m_1 і не більше m_2 разів у n незалежних випробуваннях;
- визначення найімовірнішого числа m_0 настання події A в n незалежних випробуваннях

– розроблені спеціальні співвідношення, що наведені далі.

1.3.1. Біноміальний експеримент. Формула Бернуллі

Біноміальний експеримент є серією незалежних випробувань, у кожному з яких можливий тільки один з двох протилежних результатів – подія A відбулася (***успіх***) чи не відбулася (***невдача***) $\overline{A}$.

Приклад 1. Біноміальними є такі експерименти: 1) постріли в ціль –влучення чи не влучення у ціль; 2) контроль якості деталей – деталь бракована чи стандартна.

Біноміальний експеримент відповідає ***схемі Бернуллі***, якщо виконуються наступні умови: 1) число незалежних випробувань n фіксоване; 2) ймовірність успіху p (невдачі $q = 1 - p$) однакова у кожному випробуванні.

Зауваження 1. Далі обмежимося розглядом біноміального експерименту за схемою Бернуллі.

Нехай складна подія S полягає у тому, що при n випробуваннях у певних m з них подія A відбулася, а в решті $m - n$ – не відбулася. За теоремою множення ймовірностей, враховуючи незалежність настання чи ненастання події A при кожному випробуванні, дістанемо

$$P(S) = \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{m} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-m} = p^m q^{n-m}.$$

Такого роду подій S є стільки, скільки можна скласти сполучень з n елементів по m у кожному. Враховуючи, що всі ці складні події несумісні та мають однакову ймовірність $P(S) = p^m q^{n-m}$, за теоремою додавання ймовірностей одержимо:

ймовірність $P_n(m)$ *події, що при* n *випробуваннях у* m *з них, не враховуючи порядку, подія* A *відбулася, а в решті* $m-n$ *– не відбулася, визначається за формулою*

$$P_n(m) = C_n^m P(S) \quad \textit{або} \quad \boxed{P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}}.$$

Останнє співвідношення називається ***формулою Бернуллі***.

<u>Зауваження 2</u>. Права частина формули Бернуллі служить загальним членом розвинення бінома Ньютона:

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} .$$

<u>Зауваження 3</u>. Імовірності $P_n(m)$ для $m = 0,1,2,...$ можна обчислювати послідовно за рекурентним співвідношенням:

$$\boxed{P_n(m+1) = \frac{(n-m)p}{(m+1)q} P_n(m)}.$$

<u>Приклад 2</u>. На контроль надійшла партія телевізорів. Імовірність непридатності кожного з них $p = 0{,}1$. Скільки телевізорів n треба перевірити, щоб з імовірністю $P = 0{,}95$ виявити принаймні один бракований телевізор?

□ За умовою $p = 0{,}1$. Тоді ймовірність придатності кожного телевізору $q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$, а ймовірність придатності всіх телевізорів $P_n(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0} = q^n = 0{,}9^n$. Звідси ймовірність протилежної події – принаймні один телевізор виявиться бракованим, (серед n перевірених телевізорів не менше $m_1 = 1$ і не більше $m_2 = n$ виявляться непридатними) – визначається рівністю

$$P_n(1,n) = 1 - P_n(0) = 1 - 0{,}9^n .$$

За умовою ця ймовірність $P_n(1,n)$ повинна бути не менше $P = 0{,}95$. Звідси

$$1 - 0{,}9^n \ge 0{,}95; \quad 0{,}9^n \le 0{,}05; \quad n \lg 0{,}9 \le \lg 0{,}05;$$

$$n \geq \lg 0{,}05 / \lg 0{,}9 \approx 28{,}4\,.$$

Оскільки шукане число n – натуральне, то можна покласти $n = 29$. ■

Виходячи з формули Бернуллі, за теоремою додавання ймовірностей дістанемо співвідношення для визначення ймовірності $P_n(m_1, m_2)$ настання події A не менше m_1 і не більше m_2 разів у n незалежних випробуваннях:

$$\boxed{P_n(m_1, m_2) = \sum\nolimits_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) = \sum\nolimits_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}}.$$

Приклад 3. Контрольна робота у тестовій формі складається з $n = 5$ запитань, на кожне з яких пропонується $k = 4$ варіантів відповіді. Студент не підготувався і відповідає навмання. Яка ймовірність, що студент дасть правильні відповіді принаймні на три запитання?

□ Розглянемо подію A={надання правильної відповіді}. Імовірність її настання $p = 1/k = 1/4$ і ненастання $q = 1 - p = 1 - 1/4 = 3/4$. Тоді ймовірність $P(B)$ події B={надання правильної відповіді принаймні на три запитання з $n = 5$ запитань} обчислюється як ймовірність $P_n(m_1, m_2)$ настання події A не менше $m_1 = 3$ і не більше $m_2 = 5$ разів у $n = 5$ незалежних випробуваннях у вигляді суми ймовірностей $P_n(m)$, $m = 3, 4, 5$ трьох несумісних подій B_m={надання правильної відповіді рівно на m запитань з $n = 5$ }, $m = 3, 4, 5$:

$$P(B) = P_n(3,5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = P_5(3) + P_5(4) +$$

$$+ P_5(5) = C_5^3 (1/4)^3 (3/4)^{5-3} + C_5^4 (1/4)^4 (3/4)^{5-4} +$$

$$+ C_5^5 (1/4)^5 (3/4)^{5-5} \approx 0{,}088 + 0{,}015 + 0{,}001 \approx 0{,}10\,. \quad ■$$

Найімовірнішим числом появи події A в n незалежних випробуваннях називається таке ціле невід’ємне число $m = m_0$, для якого ймовірність $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ досягає свого найбільшого значення.

Оскільки $P_n(m_0)=\max\limits_{0\le m\le n} P_n(m)$, то

1) $P_n(m_0-1)\le P_n(m_0)=\dfrac{(n-(m_0-1))p}{(m_0-1+1)q}P_n(m_0-1)$, звідки

$$1\le\frac{(n-m_0+1)p}{m_0(1-p)};\quad m_0(1-p)\le(n-m_0+1)p;\ m_0\le p(n+1);$$

2) $P_n(m_0)\ge P_n(m_0+1)=\dfrac{(n-m_0)p}{(m_0+1)q}P_n(m_0)$, звідки

$$1\ge\frac{(n-m_0)p}{(m_0+1)(1-p)};\ (m_0+1)(1-p)\ge(n-m_0)p;\ m_0\ge p(n+1)-1.$$

Отже, для визначення найімовірнішого числа m_0 одержуємо подвійну нерівність $\boxed{p(n+1)-1\le m_0\le p(n+1)}$.

<u>Зауваження 4</u>. Оскільки відрізок $[p(n+1)-1;\ p(n+1)]$ має одиничну довжину, то на ньому може знаходитися або тільки одне ціле число m_0 всередині, або два цілих числа m_{01} і $m_{02}=m_{01}+1$ на його кінцях.

<u>Приклад 4</u>. У відділ комплектації від кожної з $n=12$ бригад електромонтажників щодня з імовірністю $p=0{,}6$ надходить заявка на витратні матеріали. Знайти найімовірніше число m_0 заявок за день та ймовірність $P_n(m_0)$ надходження цього числа заявок.

□ Найімовірніше число m_0 заявок знайдемо з подвійної нерівності $p(n+1)-1\le m_0\le p(n+1)$:

$$0{,}6\cdot(12+1)-1\le m_0\le 0{,}6\cdot(12+1);\quad 6{,}2\le m_0\le 7{,}2;\quad m_0=7.$$

З умови задачі маємо $q=1-p=1-0{,}6=0{,}4$. Обчислимо ймовірність $P_n(m_0)$ надходження $m_0=7$ заявок:

$$P_{12}(7)=C_{12}^7\cdot 0{,}6^7\cdot 0{,}4^{12-7}\approx 0{,}23.\quad ■$$

<u>Приклад 5</u>. Контролер розглядає $n=49$ зразків деякого товару, призначеного для продажу. Для кожного зразка ймовірність p

того, що він буде допущений до продажу, однакова і дорівнює $0{,}8$. Знайти найімовірніше число m_0 зразків цього товару, що будуть допущені до продажу.

□ Найімовірніше число m_0 заявок знайдемо з подвійної нерівності $p(n+1)-1 \le m_0 \le p(n+1)$:

$$0{,}8\cdot(49+1)-1 \le m_0 \le 0{,}8\cdot(49+1); \qquad 39 \le m_0 \le 40;$$

$$m_{01}=39; \qquad m_{02}=40. \quad \blacksquare$$

1.3.2. Локальна й інтегральна формули Лапласа

Не зважаючи на простий вигляд формули Бернуллі, знаходити за нею біноміальні ймовірності $P_n(m)$ при великих значеннях n дуже складно через наявність у формулі числа сполучень, що вимагає трудомістких обчислень факторіалів. Формулу Бернуллі та одержане на її основі співвідношення для $P_n(m_1,m_2)$ рекомендується використовувати при числі випробувань $n<100$. При $n\ge100$ краще уникнути зазначених обчислень, замінюючи ймовірності $P_n(m)$ і $P_n(m_1,m_2)$ їх наближеними оцінками.

Нехай кількість випробувань n велика ($n\ge100$), а ймовірності p і q не малі ($npq\ge15$), так що виконуються умови:

$$np-3\sqrt{npq}>0; \qquad np+3\sqrt{npq}<n.$$

Тоді справедливі наступні наближені співвідношення:

1) ***локальна формула Лапласа*** $\boxed{P_n(m)\approx\dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)}$;

2) ***інтегральна формула Лапласа*** $\boxed{P_n(m_1,m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)}$.

У наведених формулах

$\boxed{\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}}$ – ***функція Гаусса***; $\boxed{\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-u^2/2}du}$

– ***функція Лапласа***; $\boxed{x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}}$; $\boxed{x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}}$; $\boxed{x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}}$.

Зауваження 1. Відносні похибки формул Лапласа швидко прямують до нуля з необмеженим зростанням n. При фіксованому n ці формули забезпечують тим точніші результати, чим ближче число p до $1/2$.

Для функцій $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$ наявні готові довідкові таблиці значень і обчислювальні комп'ютерні процедури. Графіки цих функцій зображені відповідно на рис. 8 і рис. 9.

Зауваження 2. Зазначимо, що $\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(u)du$; $\Phi'(x) = \varphi(x)$.

Зауваження 3. Користуючись довідковими таблицями значень функцій $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$, треба враховувати, що:

а) функція $\varphi(x)$ – парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

б) функція $\Phi(x)$ – непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

в) при $x \le -4$ можна вважати, що $\varphi(x) = 0$ і $\Phi(x) = -0{,}5$;

г) при $x \ge 4$ можна вважати, що $\varphi(x) = 0$ і $\Phi(x) = 0{,}5$.

Приклад 1. Для кожної з деталей, що надходять у складальний цех, імовірність виявитися бракованою p стала й дорівнює $0{,}01$. Яка ймовірність $P_n(m)$, що в партії з $n = 2000$ деталей бракованих буде рівно $m = 12$.

□ За умовою $p = 0{,}01$, $n = 2000 \ge 100$. Тоді

$$q = 1 - p = 0{,}99;\ np = 20;\ npq = 19{,}8 \ge 15;\ \sqrt{npq} \approx 4{,}450;$$

$$np - 3\sqrt{npq} \approx 6{,}650 > 0;\ np + 3\sqrt{npq} \approx 33{,}350 < n = 2000.$$

Одержані нерівності показують, що для обчислення ймовірності $P_n(m)$ можна застосувати локальну формулу Лапласа:

$$x = (m - np)\big/\sqrt{npq} \approx (12 - 20)/4{,}450 \approx -1{,}798;$$

$$\varphi(-1{,}798) = \varphi(1{,}798) \approx 0{,}0792;$$

$$P_n(m) \approx \varphi(x)\Big/\sqrt{npq} \approx 0{,}0792/4{,}450 \approx 0{,}018\,. \quad \blacksquare$$

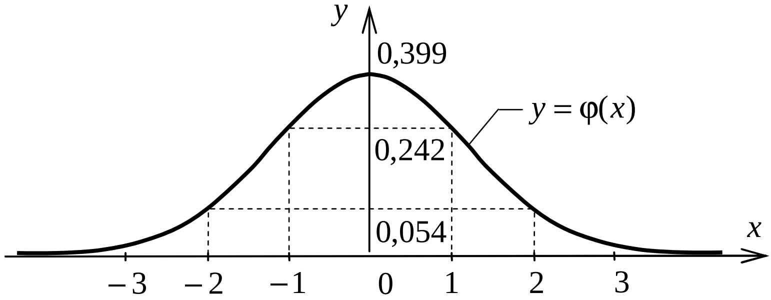


Рис. 8

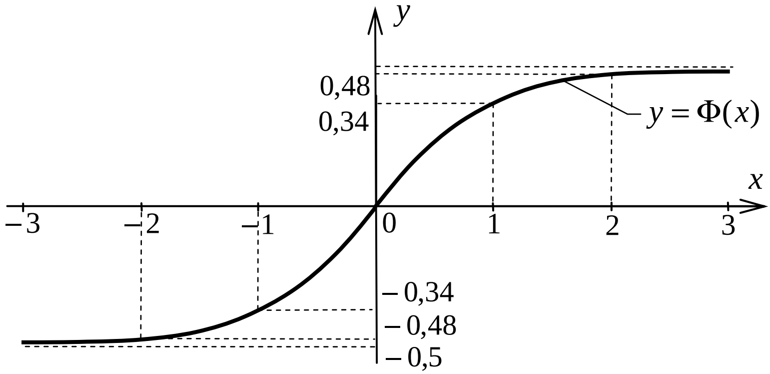


Рис. 9

Приклад 2. Імовірність p події A, що навмання взята зі складу деталь не пройшла перевірку відділом технічного контролю (ВТК), стала й дорівнює $0{,}03$. Знайти ймовірність $P_n(m_1, m_2)$, що серед $n = 600$ випадково відібраних зі складу деталей виявляться неперевіреними ВТК від $m_1 = 15$ до $m_2 = 30$ штук.

□ За умовою $p = 0{,}03$, $n = 600 \geq 100$. Тоді

$$q = 1 - p = 0{,}97\,;\ np = 18\,;\ npq = 17{,}46 \geq 15\,;\ \sqrt{npq} \approx 4{,}179\,;$$

$$np - 3\sqrt{npq} \approx 5{,}463 > 0\,;\ np + 3\sqrt{npq} \approx 30{,}537 < n = 600\,.$$

Оскільки необхідні передумови справджуються, то для обчислення ймовірності $P_n(m)$ можна застосувати інтегральну формулу Лапласа:

$$x_1 = (m_1 - np)\Big/\sqrt{npq} \approx (15-18)/4{,}179 \approx -0{,}718;$$

$$x_2 = (m_2 - np)\Big/\sqrt{npq} \approx (30-18)/4{,}179 \approx 2{,}872;$$

$$\Phi(x_1) = \Phi(-0{,}718) = -\Phi(0{,}718) \approx -0{,}2636;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(2{,}872) \approx 0{,}4980;$$

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx 0{,}4980 + 0{,}2636 \approx 0{,}762. \quad \blacksquare$$

Зауваження 4. Нехай за серією з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі подія A, ймовірність появи якої p, характеризується відносною частотою $W_n(A)$. Для ймовірності того, що відхилення відносної частоти $W_n(A)$ від ймовірності p за модулем не перевищує заданого додатного числа ε, справджується наближена оцінка

$$\boxed{P\left(|W_n(A) - p| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}\right)}, \text{ де } q = 1 - p.$$

Приклад 3. Імовірність p події A, що навмання взята деталь бракована, дорівнює $0{,}1$. Знайти ймовірність того, що для випадково відібраних $n = 256$ деталей відносна частота $W_n(A)$ появи серед них бракованих відхиляється від ймовірності p за абсолютною величиною не більш, ніж на $\varepsilon = 0{,}03$.

□ За умовою $p = 0{,}1$, $n = 256$, $\varepsilon = 0{,}03$, $q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Тоді $$P\left(|W_n(A) - 0{,}1| \le 0{,}03\right) \approx 2\Phi\left(0{,}03\sqrt{256/(0{,}1 \cdot 0{,}9)}\right) =$$

$$= 2\Phi(1{,}6) = 2 \cdot 0{,}44520 \approx 0{,}89.$$

Одержаний результат можна тлумачити так: якщо взяти достатньо велику кількість проб по $n = 256$ деталей у кожній, то приблизно в 89% цих проб відхилення відносної частоти $W_n(A)$ від ймовірності $p = 0{,}1$ за модулем не перевищить заданого числа $\varepsilon = 0{,}03$. $\blacksquare$

1.3.3. Формула Пуассона

Якщо ймовірність p настання події A в кожному з n випробувань близька до нуля (тобто, у випадку ***рідкісних*** подій), то навіть при великому n, але при малому значенні добутку np, застосування наближених формул Лапласа призводить до суттєвих похибок.

Для обчислення ймовірності $P_n(m)$, коли кількість випробувань n досить велика ($n \geq 1000$), а ймовірність p мала ($p < 0{,}1$), так що виконуються умови:

$$p << 1/\sqrt{n}\,; \qquad a = np \leq 10\,; \qquad |\,m - a\,| \leq 10\,,$$

застосовується наближена ***формула Пуассона*** $\boxed{P_n(m) \approx a^m e^{-a} / m!}$, де $\boxed{a = np}$.

Для ***функції Пуассона*** $P(a,m) = a^m e^{-a} / m!$ наявні готові довідкові таблиці значень і обчислювальні комп'ютерні процедури.

При тих же припущеннях, що й для формули Пуассона, і малій різниці $m_2 - m_1$ для обчислення ймовірності $P_n(m_1, m_2)$ застосовується наближена формула $\boxed{P_n(m_1, m_2) \approx e^{-a} \sum_{m=m_1}^{m_2} a^m / m!}$.

Зауваження. Підкреслимо, що наведені співвідношення використовуються у випадку масових (n досить велике) і рідкісних (p мале) подій, коли добуток $a = np$ зберігає приблизно стале значення для різних серій випробувань (тобто середнє число $a = np$ появ події A у різних серіях випробувань залишається майже незмінним). Формула Пуассона широко застосовуються в теорії масового обслуговування та в теорії надійності, де a – інтенсивність відмов.

Приклад 1. Імовірність p допустити помилку при наборі на клавіатурі деякого тексту, що містить $n = 1200$ знаків, дорівнює $0{,}005$. Знайти найімовірніше число m_0 зроблених помилок і його ймовірність $P_n(m_0)$.

□ Спочатку знайдемо найімовірніше число m_0 помилок:

$$p(n+1) - 1 \leq m_0 \leq p(n+1)\,; \quad 0{,}005 \cdot (1200 + 1) - 1 \leq m_0 \leq$$

$$\leq 0{,}005\cdot(1200+1);\;\; 5{,}005 \leq m_0 \leq 6{,}005;\;\; m_0 = 6.$$

За умовою $p = 0{,}005 < 0{,}1$, $n = 1200 \geq 1000$. Тоді

$$p = 0{,}005 << 1\big/\sqrt{n} \approx 0{,}03;\;\; a = np = 6 \leq 10;\;\; |\, m_0 - a\,| = 0 \leq 10.$$

Оскільки необхідні припущення для застосування формули Пуассона справджуються, то для ймовірності $P_n(m_0)$ одержимо наближену оцінку:

$$P_n(m_0) \approx a^{m_0} e^{-a}\big/m_0! \approx 6^6 e^{-6}\big/6! \approx 0{,}161. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. З підприємства на базу відправлено $n = 8000$ справних виробів. Для кожного виробу ймовірність p його пошкодження при транспортуванні до бази дорівнює $0{,}0003$. Знайти ймовірність $P_n(4, n)$, що на базу надійде більше трьох пошкоджених виробів.

□ Спочатку знайдемо ймовірність $P_n(0, 3)$ протилежної події, що на базу надійде не більше трьох пошкоджених виробів.

За умовою

$$p = 0{,}0003 < 0{,}1,\;\; n = 8000 \geq 1000,\;\; m_1 = 0,\;\; m_2 = 3.$$

Тоді

$$p = 0{,}0003 << 1\big/\sqrt{n} \approx 0{,}01;\;\; a = np = 2{,}4 \leq 10;$$

$$|\, m_1 - a\,| = |\,0 - 2{,}4\,| \leq 10;\;\; |\, m_2 - a\,| = |\,3 - 2{,}4\,| \leq 10.$$

Таким чином, необхідні передумови справджуються, тому для обчислення ймовірності $P_n(0, 3)$ можна застосувати співвідношення $P_n(m_1, m_2) \approx e^{-a} \sum_{m=m_1}^{m_2} a^m\big/m!$, що випливає з формули Пуассона. Дістанемо:

$$P_n(0{,}3) \approx e^{-2{,}4}\left(2{,}4^0\big/0! + 2{,}4^1\big/1! + 2{,}4^2\big/2! + 2{,}4^3\big/3!\right) \approx 0{,}7787.$$

Тоді $P_n(4, n) = 1 - P_n(0{,}3) \approx 1 - 0{,}7787 \approx 0{,}221$. $\blacksquare$

1.4. Випадкові величини та їх закони розподілу

1.4.1. Основні поняття про випадкові величини

Випадковою називають величину, що в результаті випробування може прийняти те або інше наперед невідоме значення.

Випадкову величину позначають прописною літерою латинського алфавіту $..., U, V, X, Y, Z$, а будь-яке її значення – відповідною малою літерою $..., u, v, x, y, z$. Множину всіх можливих значень випадкової величини називають її ***спектром***.

Приклад 1. Випадкова величина X – порядковий номер дня народження (у відповідному році народження) навмання вибраного працівника деякого підприємства. Ця величина X приймає заздалегідь невідомі натуральні значення x з діапазону $[1;366]$, який є її спектром.

Приклад 2. Припустимо, що автобуси за маршрутом курсують строго за графіком з інтервалом руху Δ. Нехай випадкова величина X – час очікування автобусу навмання взятим пасажиром на зупинці. Ця величина X приймає наперед невідомі дійсні невід'ємні значення x. Її спектром служить відрізок $[0;\Delta]$.

З кожною випадковою подією A можна зв'язати деяку випадкову величину X. Припустимо, що в результаті випробування може відбутися чи не відбутися подія A. Тоді можна розглядати випадкову величину X, яка дорівнює 1, коли настає подія A, і дорівнює 0, коли подія A не відбувається. Така випадкова величина X приймає два значення: $x = 0$ і $x = 1$. Її називають ***характеристичною випадковою величиною*** події A. На практиці часто замість подій розглядають їх характеристичні випадкові величини.

Розрізняють дискретні й неперервні випадкові величини.

Дискретною називають випадкову величину, всі можливі значення якої можна пронумерувати. Тобто, множина значень дискретної величини або скінченна, або нескінченна зліченна.

Неперервною називають випадкову величину, значення якої цілком заповнюють деякий числовий проміжок. Тобто, множина значень неперервної величини нескінченна незліченна.

Для повної характеристики випадкової величини необхідно знати всі можливі її значення, а також імовірність появи кожного з них у результаті випробування.

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке правило, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями.

1.4.2. Форми задання закону розподілу дискретної випадкової величини. Найважливіші розподіли

Існують різні форми задання закону розподілу дискретної випадкової величини. Найчастіше використовуються дві наступні:

1) ряд розподілу; 2) інтегральна функція розподілу.

Рядом розподілу дискретної випадкової величини називають перелік у порядку зростання всіх можливих її значень, для кожного з яких указана відповідна ймовірність його появи.

Звичайно його оформлюють у вигляді таблиці:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

де $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$. Очевидно, що $\boxed{p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = 1}$ (***умова нормування***), оскільки події $\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ несумісні й утворюють повну групу.

Ряд розподілу можна подати графічно. Для цього на осі абсцис Ox відкладають можливі значення випадкової величини, на осі ординат Oy – їх відповідні ймовірності, а потім сполучають сусідні точки (x_i, p_i), $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ відрізками прямих. Одержану ламану називають ***многокутником*** (***полігоном***) ***розподілу*** (рис. 10).

Ряд розподілу можна задати аналітично: $p_i = p(x_i)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots$, де $p(x_i)$ – відома функція. Такий спосіб особливо важливий у випадку нескінченної множини значень x_i, $i = 1, 2, \ldots$.

<u>Біноміальний розподіл</u>. Розглянемо випадкову величину X – число появ $x_i = i$, $i = \overline{0, n}$ події A при n випробуваннях у межах біноміального експерименту за схемою Бернуллі. Її ряд розподілу

визначають за формулою Бернуллі $\boxed{p_i = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}}$. Такий розподіл дискретної випадкової величини X називають ***біноміальним***.

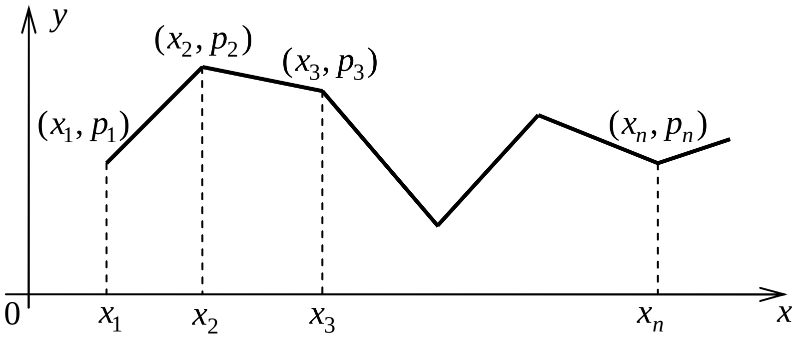


Рис. 10

<u>Пуассонівський розподіл</u>. Розглянемо дискретну випадкову величину X, що приймає тільки цілі невід’ємні значення 0, 1, 2, …, n,…, послідовність яких нескінченна. Таку випадкову величину X називають розподіленою за ***законом Пуассона***, якщо ймовірність того, що вона прийме значення $x_i = i$, $i = 0,1,2,...$ визначається за формулою $\boxed{p_i = a^i e^{-a} / i!}$, де $a > 0$ – деяке додатне число, яке називають ***параметром*** закону Пуассона.

<u>Зауваження 1</u>. Розглянемо типову задачу, що приводить до розподілу Пуассона. На осі Ox випадковим чином розподіляються точки так, що виконуються наступні умови: 1) ймовірність попадання деякого числа точок на відрізок довжиною l залежить тільки від його довжини і не залежить від розміщення відрізка на осі Ox (точки розміщуються з однаковою середньою щільністю – властивість ***стаціонарності***); 2) точки розподіляються незалежно одна від одної (ймовірність попадання якої-небудь кількості точок на даний відрізок не залежить від числа точок, що потрапили на будь-який інший відрізок – властивість ***відсутності післядії***); 3) практично неможливо, щоб дві точки чи більше співпали (ймовірність того, що на достатньо малий відрізок довжиною Δx попадає одна

точка, є нескінченно малою величиною першого порядку відносно Δx, а ймовірність того, що на цей відрізок влучає більше однієї точки, є нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж Δx – властивість ***ординарності***). Тоді випадкова величина X – число точок $x_i = i$, $i = 0,1,2,\ldots$, які попадають на відрізок довжиною l – розподілена за законом Пуассона $p_i = a^i e^{-a} / i!$, де a – середнє число точок, що припадає на довільний відрізок довжиною l.

Приклад 1. На виробничій дільниці $n = 3$ верстатів. При нормальному ході виробництва коефіцієнт використання кожного з них складає $p = 0{,}7$. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – числа $x_i = i$, $i = \overline{0,n}$ працюючих верстатів. Побудувати відповідний многокутник розподілу.

□ Випадкова величина X розподілена за біноміальним законом $p_i = P(X = x_i) = C_n^i p^i q^{n-i}$, $i = \overline{0,n}$, де $q = 1 - p = 0{,}3$. Тоді

$$p_0 = C_3^0 \cdot 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^{3-0} = 0{,}027;$$

$$p_1 = C_3^1 \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^{3-1} = 0{,}189;$$

$$p_2 = C_3^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^{3-2} = 0{,}441;$$

$$p_3 = C_3^3 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^{3-3} = 0{,}343.$$

Таким чином, ряд розподілу має вигляд:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,027	0,189	0,441	0,343

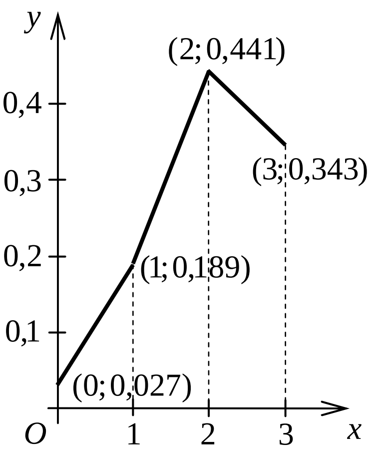


Рис. 11

Відповідний многокутник розподілу зображений на рис. 11. ■

Для характеристики як неперервних, так і дискретних випадкових величин часто зручніше користуватися ймовірністю події $\{X < x_i\}$.

Інтегральною функцією розподілу випадкової величини X

називають функцію $F(x)$, що при кожному значенні свого аргументу x дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X прийме значення, менше x: $F(x) = P(X < x)$.

Графіком інтегральної функції розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X служить розривна ступінчата лінія, що має розриви типу скінченного стрибка в точках $x_i = i$, $i = 1, 2, \ldots$, які відповідають можливим значенням випадкової величини X.

З означення випливають наступні властивості інтегральної функції розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X:

1. $\boxed{F(x) = \sum\limits_{i,\ x_i < x} p_i}$ при довільному x.

2. $0 \le F(x) \le 1$ при довільному x.

3. $F(-\infty) \equiv \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $F(+\infty) \equiv \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

4. Функція $F(x)$ – неспадна кусково-стала, що зберігає своє значення в кожному i-му діапазоні $(x_{i-1}, x_i]$ зміни аргументу x і стрибкоподібно збільшується в точках $x = x_i$, які відповідають можливим значенням випадкової величини X і розділяють указані діапазони, при цьому в кожній точці розриву x_i, $i = 1, 2, \ldots$ функція $F(x)$ неперервна зліва: $\lim\limits_{x \to x_i - 0} F(x) = F(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

5. Для довільних α і β, $\alpha < \beta$:

$$\boxed{P(\alpha \le X < \beta) = P(X < \beta) - P(X < \alpha) = F(\beta) - F(\alpha)}.$$

Зауваження 2. За допомогою ***ступінчатої одиничної функції*** $\eta(t)$, що визначається формулою $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$ інтегральну функцію розподілу $F(x)$ можна подати одним виразом

$$F(x) = p(x_1)\eta(x - x_1) + p(x_2)\eta(x - x_2) + \ldots + p(x_n)\eta(x - x_n) + \ldots.$$

Приклад 2. Проводяться послідовні незалежні випробування приладів на надійність. Кожний наступний прилад досліджується тільки в тому випадку, коли попередній виявився надійним. Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X – число $x_i = i$, $i = 1, 2, ..., n, ...$ досліджених приладів, якщо ймовірність витримати випробування для кожного з приладів $p = 0{,}75$. Побудувати графік $F(x)$. Обчислити ймовірність $P(1{,}5 \le X < 3{,}8)$ попадання випадкової величини X в діапазон $[1{,}5; 3{,}8)$.

□ Маємо серію випробувань за схемою Бернуллі. Для кожного приладу $p = 0{,}75$. Тоді $q = 1 - p = 0{,}25$. Імовірність, що при першому випробуванні $x_1 = 1$ прилад виявиться ненадійним, після чого дослідження припиняються, визначається так: $p_1 = q = 0{,}25$. Якщо ж у цьому випадку прилад виявився надійним, то проводиться друге випробування. Імовірність, що при другому випробуванні $x_2 = 2$ прилад виявиться ненадійним, після чого дослідження припиняються, визначається рівністю: $p_2 = pq = 0{,}75 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}188$. Далі:

$$p_3 = p^2 q = 0{,}75^2 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}141; \ldots; \ p_n = p^{n-1} q = 0{,}75^{n-1} \cdot 0{,}25; \ldots.$$

Тоді ряд розподілу має вигляд:

x_i	1	2	3	…	x_n	…
p_i	0,25	0,188	0,141	…	$0{,}75^{n-1} \cdot 0{,}25$	…

За формулою $F(x) = \sum\limits_{i,\ x_i < x} p_i$ знайдемо значення інтегральної функції розподілу $F(x)$ на кожному інтервалі $(-\infty; 1]$, $(1; 2]$, .., $(n-1; n]$, … між сусідніми можливими значеннями $x_i = i$, $i = 1, 2, ..., n, ...$ випадкової величини X:

$$F(x) = 0,\ x \in (-\infty; 1];\ \ F(x) = p_1 = q = 0{,}25,\ x \in (1; 2];$$

$$F(x) = p_1 + p_2 = q + pq \approx 0{,}438,\ x \in (2; 3];$$

$$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = q(1 - p^3)\big/(1 - p) = 1 - p^3 \approx 0{,}578,\ x \in (3; 4];$$

$$\ldots;\ F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} = q(1 - p^{n-1})\big/(1 - p) = 1 - p^{n-1} =$$

$$=1-0{,}75^{n-1},\ x\in(n-1;n];\ \ldots.$$

Приходимо до такої інтегральної функції розподілу $F(x)$:

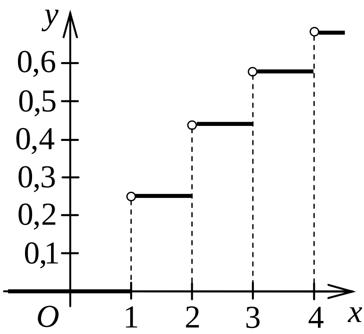


Рис. 12

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty;1];\\ 0{,}25, & x\in(1;2];\\ 0{,}438, & x\in(2;3];\\ 0{,}578, & x\in(3;4];\\ \ldots; & \\ 1-0{,}75^{n-1}, & x\in(n-1;n];\\ \ldots, & \end{cases}$$

графік якої зображений на рис. 12.

Тоді ймовірність попадання випадкової величини X в діапазон $[1{,}5;3{,}8)$:

$$P(1{,}5\le X<3{,}8)=F(3{,}8)-F(1{,}5)\approx 0{,}578-0{,}25\approx 0{,}328. \quad\blacksquare$$

1.4.3. Форми задання закону розподілу неперервної випадкової величини. Найважливіші розподіли

Говорити про розподіл ймовірностей між окремими значеннями неперервної випадкової величини X немає сенсу, оскільки їх число нескінченне, а ймовірність, що така випадкова величина прийме будь-яке одне своє значення x дорівнює нулю (це не суперечить тому, що вказане значення x можливе). Визначаючи ймовірність неперервної випадкової величини, мають на увазі попадання її значень у той чи інший інтервал.

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X вводиться так само, як і для дискретної випадкової величини: $F(x)=P(X<x)$. Ця форма задання закону розподілу є універсальною, оскільки застосовується як для дискретних, так і неперервних випадкових величин.

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X характеризується наступними властивостями:

1) $0 \le F(x) \le 1$ при довільному x; 2) $F(-\infty) \equiv \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

$F(+\infty) \equiv \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$; 3) Функція $F(x)$ – неспадна;

4) для довільних α і β, $\alpha < \beta$: $\boxed{P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)}$.

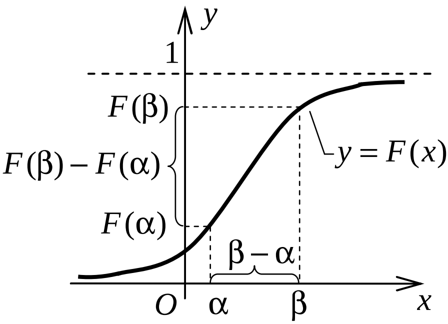


Рис. 13

Графіком інтегральної функції розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X служить деяка неперервна лінія. На рис. 13 дана графічна інтерпретація процесу визначення ймовірності $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ влучення в інтервал $(\alpha;\beta)$.

<u>Приклад 1</u>. Нехай

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2/4, & 0 \le x \le 2; \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

– інтегральна функція розподілу деякої неперервної випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що в результаті п'яти випробувань випадкова величина X тричі прийме значення з інтервалу $(-0{,}5;1{,}8)$.

□ Маємо серію $n = 5$ випробувань за схемою Бернуллі, де подія A полягає у влученні величини X в інтервал $(-0{,}5;1{,}8)$. Тоді $p = F(1{,}8) - F(-0{,}5) = 1{,}8^2/4 - 0 = 0{,}81$; $q = 1 - p = 0{,}19$. Знайдемо ймовірність $m = 3$ появ події A в $n = 5$ випробуваннях:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}81^3 \cdot 0{,}19^{5-3} \approx 0{,}192. \quad ■$$

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ не дозволяє порівнювати окремі значення неперервної випадкової величини X з точки зору ймовірнісних уявлень. Для цього використовується інша форма задання закону розподілу – щільність розподілу.

Нехай неперервна випадкова величина X характеризується неперервно диференційовною інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Відношення $P(x < X < x+\Delta x)/\Delta x$ ймовірності влучення випадкової величини X в малий діапазон $(x; x+\Delta x)$ до довжини цього діапазону Δx можна розглядати як середню щільність ймовірності випадкової величини X на проміжку $(x; x+\Delta x)$. Границя цього відношення при $\Delta x \to 0$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

характеризує щільність ймовірності випадкової величини X у точці x.

Щільністю (***диференціальною функцією***) ***розподілу*** $f(x)$ неперервної випадкової величини X називають похідну інтегральної функції розподілу $F(x)$: $\boxed{f(x) = F'(x)}$.

Властивості щільності розподілу $f(x)$:

1. Щільність розподілу невід'ємна $f(x) \geq 0$ як похідна неспадної функції.
2. Невласний інтеграл з нескінченними межами інтегрування від щільності розподілу $f(x)$ дорівнює одиниці: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1}$.
3. Імовірність $P(\alpha < X < \beta)$ влучення неперервної випадкової величини X в інтервал $(\alpha; \beta)$, $\alpha < \beta$ знаходиться за формулою $\boxed{P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx}$ і чисельно дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції (рис. 14).

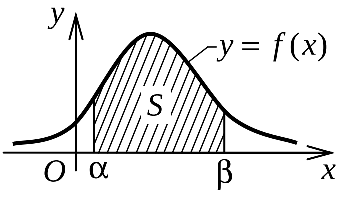


Рис. 14

4. Інтегральна функція розподілу $F(x)$ визначається за формулою:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx}.$$

Приклад 2. Неперервна випадкова величина X задана своєю щільністю розподілу $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} C\cos 2x, -\pi/4\le x\le \pi/4; \\ 0, \quad |x|>\pi/4. \end{cases}$$

Знайти значення сталого коефіцієнта C, інтегральну функцію розподілу $F(x)$, ймовірність $P(\pi/12 < X < 4)$ влучення неперервної випадкової величини X в інтервал $(\pi/12;4)$. Побудувати графіки диференціальної $f(x)$ та інтегральної $F(x)$ функцій розподілу.

□ Оскільки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx +$

$$+\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} C\cos 2xdx + \int\limits_{\pi/4}^{+\infty} 0dx = \frac{C}{2}\sin 2x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = C; \quad C=1.$$

Знайдемо інтегральну функцію розподілу $F(x)$:

1) На ділянці $x < -\pi/4$: $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

2) На ділянці $-\pi/4 \le x \le \pi/4$:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{x}\cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2};$$

3) На ділянці $x > \pi/4$:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2xdx + \int\limits_{\pi/4}^{x} 0dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$$

Таким чином: $\quad F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\pi/4; \\ (1/2)(\sin 2x+1), & -\pi/4\le x\le \pi/4; \\ 1, & x>\pi/4. \end{cases}$

Обчислимо ймовірність $P(\pi/12 < X < 4)$ влучення неперервної випадкової величини X в інтервал $(\pi/12;4)$:

<u>Перший спосіб</u>: $\quad P\left(\frac{\pi}{12} < x < 4\right) = \int\limits_{\pi/12}^{4} f(x)dx = \int\limits_{\pi/12}^{\pi/4}\cos 2xdx +$

$$+\int_{\pi/4}^{4} 0dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\pi/12}^{\pi/4} = \frac{1}{4}.$$

Другий спосіб:

$$P(\pi/12 < x < 4) = F(4) - F(\pi/12) = 1-(1/2)(\sin(\pi/6)+1) = 1/4.$$

(Графіки диференціальної $f(x)$ та інтегральної $F(x)$ функцій розподілу побудуйте самостійно). ■

Рівномірний розподіл. Неперервна випадкова величина X має ***рівномірний розподіл*** на відрізку $[\alpha;\beta]$, якщо її щільність розподілу $f(x)$ на цьому проміжку стала, при цьому

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} 0, & x<\alpha; \\ 1/(\beta-\alpha), & \alpha\le x\le\beta; \\ 0, & x>\beta. \end{cases}}$$

Інтегральна функція $F(x)$ рівномірно розподіленої випадкової величини визначається за формулою

$$\boxed{F(x)=\begin{cases} 0, & x<\alpha; \\ (x-\alpha)/(\beta-\alpha), & \alpha\le x\le\beta; \\ 0, & x>\beta. \end{cases}}$$

Графіки інтегральної $F(x)$ та диференціальної $f(x)$ функцій рівномірного розподілу зображені відповідно на рис. 15 і рис. 16.

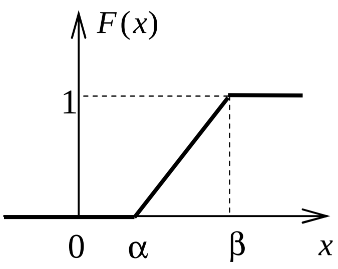


Рис. 15

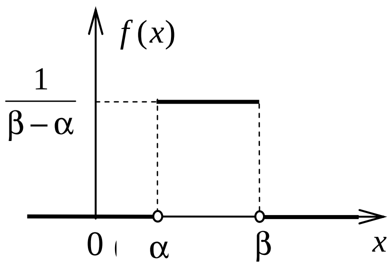


Рис. 16

Показниковий розподіл. Неперервна випадкова величина X розподілена ***за показниковим*** (***експоненціальним***) ***законом***, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}}$$

де $\lambda>0$ – додатний ***параметр*** розподілу.

Знайдемо інтегральну функцію експоненціального розподілу $F(x)$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\lambda\int_0^x e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x}.$$

Таким чином, $$\boxed{F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}}$$

Графіки інтегральної $F(x)$ та диференціальної $f(x)$ функцій експоненціального розподілу зображені відповідно на рис. 17 і рис. 18.

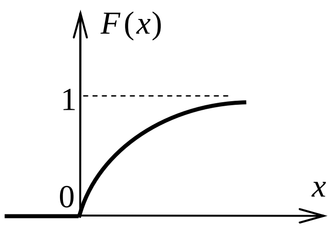


Рис. 17

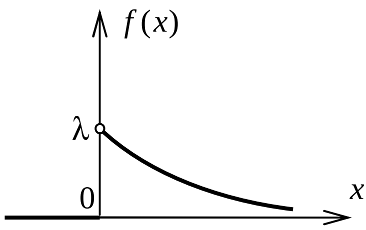


Рис. 18

Знайдемо ймовірність влучення випадкової величини X, що має експоненціальний розподіл, в інтервал $(\alpha;\beta)$, $0\le\alpha<\beta$:

$$\boxed{P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}}.$$

Зауваження 1. Експоненціальний розподіл часто зустрічається в задачах теорії масового обслуговування та в теорії надійності.

Припустимо, що деякий прилад починає працювати в момент часу $t=0$ і в деякий момент часу $t>0$ відмовляє. Позначимо через T випадкову величину – тривалість безвідмовної роботи приладу. Інтегральна функція розподілу $F(x)=P(T<t)$ визначає ймовірність відмови за проміжок часу $(0;t)$. Імовірність $R(t)$ протилежної події – безвідмовна робота приладу на протязі часу $(0;t)$ – називають ***функцією надійності*** $R(t)=P(T>t)$. При експоненціальному законі розподілу маємо $R(t)=P(T>t)=1-F(t)=e^{-\lambda t}$. Таким чином, безвідмовна робота приладу залежить тільки від інтенсивності відмов λ і пройденого часу t, але не залежить від його попередньої роботи.

Нормальний розподіл. Неперервна випадкова величина X розподілена ***за нормальним законом***, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}},$$

де a і σ – ***параметри*** розподілу, тлумачення яких наведено далі.

Цей ***закон*** носить ім’я ***Гаусса***, оскільки вперше був запропонований ним при дослідженні випадкових похибок вимірювань, виходячи з двох припущень: 1) похибки різного знака, але однакові за величиною, мають однакову ймовірність; 2) малі похибки більш ймовірні, ніж великі (промахи).

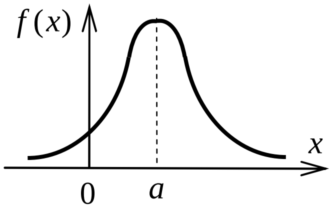


Рис. 19

Графіком щільності нормального розподілу $f(x)$ служить горбоподібна крива, зображена на рис. 19. Пряма $x=a$ є її віссю симетрії.

Інтегральна функція нормального розподілу $F(x)$ визначається так:

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-(u-a)^2/(2\sigma^2)}\,du}.$$

Графік інтегральної функції $F(x)$ поданий на рис. 20. Він центрально симетричний відносно точки $S(a;0{,}5)$.

Оскільки останній інтеграл не виражається через елементарні функції, то для обчислення $F(x)$ використовують співвідношення

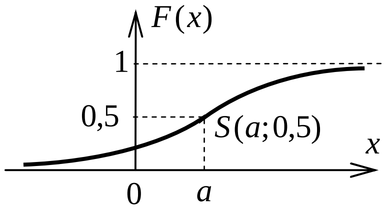


Рис. 20

$$\boxed{F(x) = F^*\big((x-a)/\sigma\big)},$$

де $$\boxed{F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du}$$

– інтегральна функція ***стандартного нормального розподілу*** з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$. Її можна подати через функцію Лапласа $\Phi(x)$:

$$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

Знайдемо ймовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини X в діапазон $(\alpha;\beta)$, $\alpha < \beta$:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = F^*\big((\beta - a)/\sigma\big) - F^*\big((\alpha - a)/\sigma\big) =$$
$$= 0{,}5 + \Phi\big((\beta - a)/\sigma\big) - 0{,}5 - \Phi\big((\alpha - a)/\sigma\big) =$$
$$= \Phi\big((\beta - a)/\sigma\big) - \Phi\big((\alpha - a)/\sigma\big).$$

Отже, $\boxed{P(\alpha < X < \beta) = \Phi\big((\beta - a)/\sigma\big) - \Phi\big((\alpha - a)/\sigma\big)}$.

<u>Приклад 3</u>. Неперервна випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 20$ і $\sigma = 10$. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X потраплять в інтервал $(15;40)$.

□ Тут $\alpha = 15$ і $\beta = 40$. Тоді

$$P(15 < X < 40) = \Phi\big((40-20)/10\big) - \Phi\big((15-20)/10\big) = \Phi(2) -$$
$$- \Phi(-0{,}5) = \Phi(2) + \Phi(0{,}5) = 0{,}47725 + 0{,}19146 \approx 0{,}669. \quad ■$$

<u>Зауваження 2</u>. Часто треба обчислити $P(|X - a| < \delta)$ – ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її значення $x = a$ за модулем менше заданого додатного числа δ, тобто ймовірність $P(a - \delta < X < a + \delta)$. Покладаючи $\alpha = a - \delta$ і $\beta = a + \delta$ у формулі для $P(\alpha < X < \beta)$, дістанемо

$$\boxed{P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma)}.$$

Приклад 4. Неперервна випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=20$ і $\sigma=5$. Знайти ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її значення $x=a$ за модулем менше заданого додатного числа $\delta=3$.

□ $P(|X-20|<3)=2\Phi(3/5)=2\cdot 0{,}22575\approx 0{,}452$. ■

1.4.4. Числові характеристики випадкових величин

Закон розподілу випадкової величини з імовірнісної точки зору є її вичерпною характеристикою. Проте в багатьох практичних задачах не має потреби у такому повному описі. Досить указати тільки окремі числові параметри, що у стислій формі характеризують суттєві риси розподілу. Такі числа називають ***числовими характеристиками*** випадкової величини. Часто знання числових характеристик відкриває можливість розв'язувати задачі з випадковими величинами, не знаючи законів розподілу.

Числові характеристики випадкових величин *не є випадковими величинами*. Для заданої випадкової величини будь-яка з цих характеристик має тільки одне певне значення, що не залежить від кількості проведених випробувань і конкретного результату кожного з них.

Далі розглядаються основні числові характеристики, що відображають форму розподілу та його положення.

Математичним сподіванням $M(X)$ називають середнє зважене за ймовірностями значення випадкової величини X, що визначається за формулами:

1) $\boxed{M(X)=\sum_i x_i p_i}$ – для дискретної випадкової величини X

(сума добутків всіх можливих значень x_i, $i=1,2,\dots,n,\dots$ випадкової величини X на відповідні ймовірності p_i, $i=1,2,\dots,n,\dots$);

2) $\boxed{M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx}$ – для неперервної випадкової величини X (невласний інтеграл з нескінченними межами інтегрування від добутку значення x випадкової величини X на відповідне зна-

чення щільності розподілу $f(x)$).

Математичне сподівання – найважливіша числова характеристика, що відображає зміщення значень випадкової величини на числовій осі Ox відносно початку координат.

Математичне сподівання $M(X)$ також називають ***центром розподілу***, оскільки воно служить середнім (зваженим за ймовірностями) значенням випадкової величини X, навколо якого групуються всі її можливі значення. У наближених розрахунках замість самої випадкової величини звичайно використовують її математичне сподівання.

Зауваження 1. Математичне сподівання $M(X)$ випадкової величини X може не співпадати ні з одним з її можливих значень.

Модою $Mo(X)$ називають локально найбільш імовірне значення випадкової величини X, тобто те можливе значення x, для якого ймовірність p_i (у дискретному випадку) чи щільність розподілу $f(x)$ (у неперервному випадку) досягає локального максимуму.

Розподіл з однією модою називають ***унімодальним*** (рис. 21). Також виділяють ***полімодальні*** (рис. 22), ***антимодальні*** (рис. 23) і ***безмодальні*** (рис. 24) розподіли.

Неперервні випадкові величини мають ще одну характеристику положення на осі Ox – медіану.

Медіаною $Me(X)$ називають значення неперервної випадкової величини X, для якого справджується рівність

$$\boxed{P\left(X < Me(X)\right) = P\left(X > Me(X)\right)}.$$

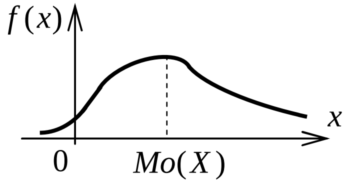


Рис. 21

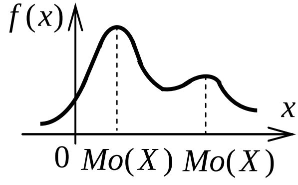


Рис. 22

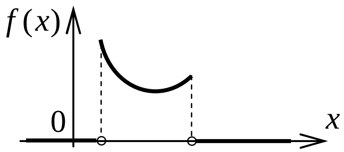


Рис. 23

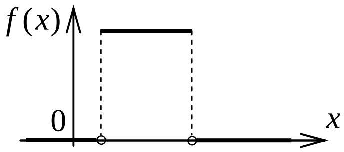


Рис. 24

Пряма $x = Me(X)$, що проходить через медіану перпендикулярно до осі Ox, ділить площу фігури, обмеженої графіком щільності розподілу $f(x)$ і віссю Ox, на дві рівні частини (рис. 25).

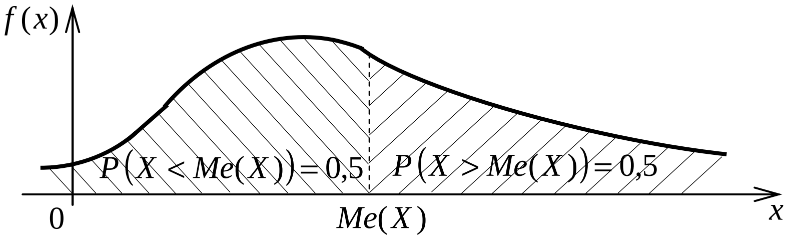


Рис. 25

<u>Зауваження 2</u>. Для симетричного унімодального розподілу випадкової величини значення математичного сподівання, моди і медіани збігаються. Обернене твердження, в загальному випадку, не справджується.

Нехай $a = M(X)$. ***Дисперсією*** $D(X)$ випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата її відхилення $X - a$ від математичного сподівання: $\boxed{D(X) = M\left((X - a)^2\right)}$. Дисперсія $D(X)$ характеризує розсіювання цієї величини навколо математичного сподівання і визначається за формулами:

1) $\boxed{D(X) = \sum_i (x_i - a)^2 p_i}$ – для дискретної величини X;

2) $\boxed{D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 f(x)\, dx}$ – для неперервної величини X.

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, що не завжди зручно. Тому для характеристики розсіювання випадкової величини X часто застосовують ***середнє квадратичне відхилення*** $\sigma(X)$ – квадратний корінь із дисперсії: $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{D(X)}}$.

На рис. 26 подані графіки щільності розподілу $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ двох неперервних випадкових величин X_1 і X_2 з однаковими математичними сподіваннями $M(X_1)=M(X_2)=a$ і різними дисперсіями $D(X_1)<D(X_2)$. Розподіл з більшою дисперсією (відповідно з більшим середнім квадратичним відхиленням) має вищий ступінь розсіювання (сильніше “розмазаний” вздовж осі Ox).

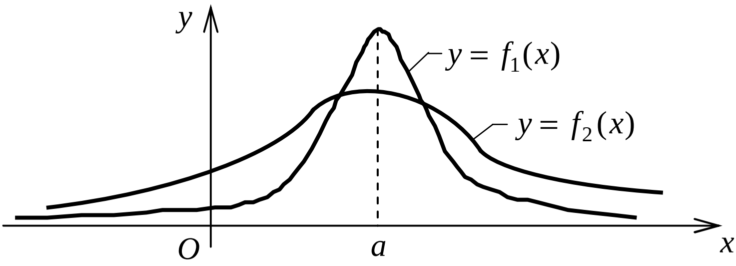


Рис. 26

<u>Зауваження 3</u>. Для нормально розподіленої випадкової величини X зі щільністю розподілу $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$ параметри a і σ відповідно дорівнюють її математичному сподіванню $M(X)$ і середньому квадратичному відхиленню $\sigma(X)$:

$$a=M(X);\qquad \sigma=\sigma(X).$$

У цьому полягає <u>статистичний зміст</u> параметрів a і σ нормального закону розподілу. У додатку 1 наведено формули для обчислення математичного сподівання та дисперсії найважливіших розподілів.

Розглянемо унімодальний розподіл $y=f(x)$. Позначимо $a=M(X)$. Для характеристики ступеня асиметрії (“зкошеності”) графіка функції щільності розподілу $y=f(x)$ використовують безрозмірний ***коефіцієнт асиметрії*** S, що визначається за формулою

$$\boxed{S=\mu_3(X)/\sigma^3(X)},\quad \text{де}\quad \boxed{\mu_3(X)=M\left((X-a)^3\right)}.$$

У випадку симетричності графіка $y = f(x)$ відносно прямої $x = a$ (зокрема, для нормального розподілу) коефіцієнт асиметрії дорівнює нулю: $S = 0$. Якщо $S > 0$, то крива щільності розподілу більш полога справа від моди $Mo(X)$ (рис. 27). При $S < 0$ вона більш полога зліва від моди $Mo(X)$ (рис. 28).

Для характеристики ступеня "гостровершинності" графіка щільності унімодального розподілу $y = f(x)$ використовують безрозмірний ***коефіцієнт ексцесу*** E, що визначається за формулою

$$\boxed{E = \mu_4(X)/\sigma^4(X) - 3}, \quad \text{де} \quad \boxed{\mu_4(X) = M\left((X - a)^4\right)}.$$

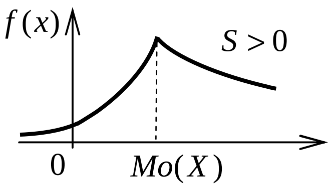


Рис. 27

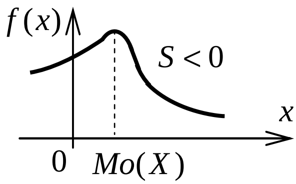


Рис. 28

У випадку нормального закону розподілу випадкової величини коефіцієнт ексцесу дорівнює нулю: $E = 0$. Усі інші розподіли порівнюються з нормальним: ті, для яких $E > 0$, є більш "гостровершинними", а ті, для яких $E < 0$, – менш "гостровершинними" (рис. 29).

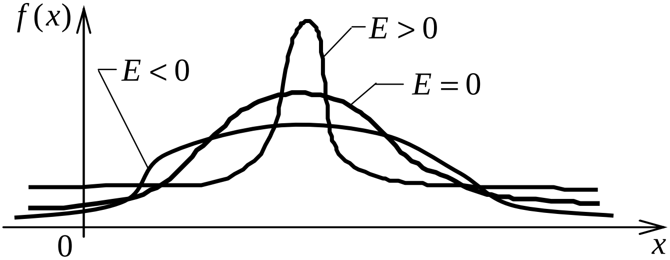


Рис. 29

Розглянемо деяку випадкову величину X з інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Нехай p – деяке дійсне число таке, що

$0 < p < 1$. Корінь рівняння $\boxed{F(x) = p}$ називають ***квантилем порядку*** p випадкової величини X і позначають x_p.

Медіана є квантилем порядку $p = 0{,}5$: $Me(X) = x_{0,5}$. При цьому квантилі $x_{0,25}$, $x_{0,5}$ і $x_{0,75}$ ділять вісь Ox на такі чотири частини, що ймовірності попадання в них випадкової величини X однакові й дорівнюють $0{,}25$ (рис. 30).

Для багатьох важливих розподілів складені таблиці значень квантилей найбільш уживаних порядків.

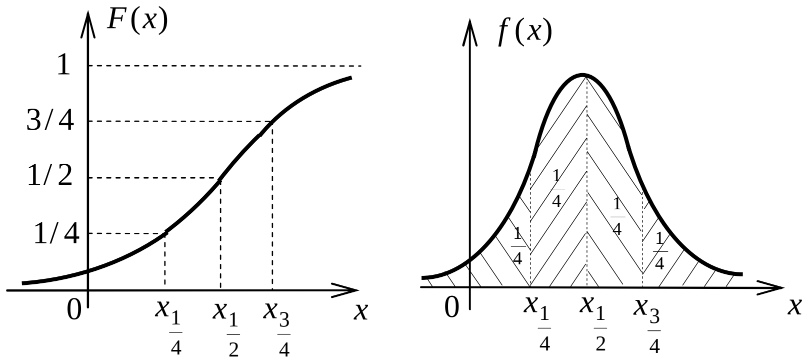


Рис. 30

Властивості математичного сподівання та дисперсії:

1. *Математичне сподівання сталої величини* C *дорівнює їй самій*: $\boxed{M(C) = C}$.

□ Дійсно, сталу C можна розглядати як дискретну випадкову величину, що приймає лише одне значення C з імовірністю 1. Тому $M(C) = C \cdot 1 = C$. ■

2. *Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання*: $\boxed{M(CX) = C\,M(X)}$.

□ Дійсно, математичне сподівання – це або скінченна сума, або ряд, або інтеграл. Сталу можна виносити і за знак суми, і за знак ряду, і за знак інтеграла. ■

3. *Дисперсія сталої величини* C *дорівнює нулю*: $\boxed{D(C) = 0}$.

□ Дійсно, $D(C) = M\left((C-C)^2\right) = \mathrm{M}(0) = 0$. ■

4. *Дисперсія добутку сталої величини C на випадкову величину X дорівнює добутку квадрата цієї сталої на дисперсію випадкової величини X:* $\boxed{D(CX) = C^2 D(X)}$.

□ Дійсно, $D(CX) = M\left((CX - M(CX))^2\right) = M\left((CX - CM(X))^2\right) =$

$$= M\left(C^2(X - M(X))^2\right) = C^2 M\left((X - M(X))^2\right) = C^2 D(X).\ ■$$

5. $\boxed{D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2}$.

□ Дійсно,

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right) = M\left(X^2 - 2X\,M(X) + + \left(M(X)\right)^2\right) =$$

$$= M\left(X^2\right) - 2M(X)\cdot M(X) + \left(M(X)\right)^2 = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2.\ ■$$

Приклад 1. На підприємстві ймовірність виготовлення бракованої деталі $p = 15\%$. У відділ технічного контролю (ВТК) одна за одною надходять $n = 6$ деталей. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – числа $x_i = i$, $i = \overline{0, n}$ бракованих деталей серед перевірених. Знайти математичне сподівання $M(X)$, моду $Mo(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

□ Випадкова величина X розподілена за біноміальним законом $p_i = P(X = x_i) = C_n^i p^i q^{n-i}$, $i = \overline{0, n}$, де $p = 15\% = 0{,}15$, $q = 1 - p = 0{,}85$. Тоді ряд розподілу має вигляд:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,3771	0,3993	0,1762	0,0415	0,0055	0,0004	0,0000

З аналізу ряду розподілу знайдемо моду: $Mo(X) = 1$.

Далі обчислимо математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення:

$$a = M(X) = \sum_i x_i p_i = 0\cdot 0{,}3771 + 1\cdot 0{,}3993 + 2\cdot 0{,}31762 +$$

$$+ 3\cdot 0{,}0415 + 4\cdot 0{,}0055 + 5\cdot 0{,}0004 + 6\cdot 0{,}0000 \approx 0{,}9000;$$

$$D(X)=\sum_i (x_i-a)^2 p_i=(0-0{,}9000)^2\cdot 0{,}3771+(1-0{,}9000)^2\times$$

$$\times 0{,}3993+(2-0{,}9000)^2\cdot 0{,}31762+(3-0{,}9000)^2\cdot 0{,}0415+$$

$$+(4-0{,}9000)^2\cdot 0{,}0055+(5-0{,}9000)^2\cdot 0{,}0004+(6-0{,}9000)^2\times$$

$$\times 0{,}0000\approx 4{,}2045;\quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{4{,}2045}=2{,}0505. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1; \\ (x+1)^3/8, & -1\le x\le 1; \\ 1, & x>1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ і медіану $Me(X)$.

□ Знайдемо щільність розподілу $f(x)=F'(x)$:

1) На ділянці $x<-1$: $f(x)=0'=0$;

2) На ділянці $-1\le x\le 1$: $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left((x+1)^3/8\right)=\dfrac{3}{8}(x+1)^2$;

3) На ділянці $x>1$: $f(x)=1'=0$.

Таким чином: $$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1; \\ (3/8)(x+1)^2, & -1\le x\le 1; \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Далі обчислимо математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення:

$$a=M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{-1} x\cdot 0\,dx+\int_{-1}^{1} x\frac{3(x+1)^2}{8}dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0\,dx=$$

$$=0+(3/8)\int_{-1}^{1}(x^3+2x^2+x)\,dx+0=(3/8)(x^4/4+2x^3/3+$$

$$+x^2/2)\Big|_{-1}^{1}=0{,}5\,; \qquad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{-1}(x-0{,}5)^2\cdot 0\,dx+\int\limits_{-1}^{1}(x-0{,}5)^2\,\frac{3(x+1)^2}{8}\,dx+\int\limits_{1}^{+\infty}(x-0{,}5)^2\cdot 0\,dx=$$

$$=(3/32)\int_{-1}^{1}\left(4x^4+4x^3-3x^2-2x+1\right)dx=(3/32)\left((4/5)x^5+x^4-\right.$$

$$\left.-x^3-x^2+x\right)\Big|_{-1}^{1}=0{,}15\,; \quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}15}\approx 0{,}3873\,.$$

Медіану $Me(X)$ як квантиль порядку $p=0{,}5$ знайдемо з рівняння $F(x)=0{,}5$:

$$(x+1)^3/8=0{,}5; \quad (x+1)^3=4; \quad Me(X)=x=\sqrt[3]{4}-1\approx 0{,}5874\,. \ \blacksquare$$

Зауваження 4. Для опису властивостей випадкової величини X, крім розглянутих вище характеристик, також використовуються й інші. До них належать початкові та центральні моменти.

Початковим моментом k***-го порядку*** $\alpha_k(X)$ випадкової величини X називають математичне сподівання її k–го степеня: $\alpha_k(X)=M(X^k)$. Зокрема, *математичне сподівання* $M(X)$ *є першим початковим моментом* $\alpha_1(X)$: $\alpha_1(X)=M(X)$.

Центральним моментом k***-го порядку*** $\mu_k(X)$ випадкової величини X називають математичне сподівання k-го степеня її відхилення $X-a$ від математичного сподівання $a=M(X)$: $\mu_k(X)=M\left((X-a)^k\right)$. Зокрема, *дисперсія* $D(X)$ *є другим центральним моментом* $\mu_2(X)$: $\mu_2(X)=D(X)$.

Приклад 3. Знайти математичне сподівання $a=M(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$, центральні моменти $\mu_3(X)$ і $\mu_4(X)$, коефіцієнт асиметрії S і коефіцієнт ексцесу E випадкової величини X, що розподілена за показниковим законом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases} \qquad \text{(Розв'язати самостійно).}$$

1.4.5. Багатовимірні випадкові величини

При вивченні масових випадкових явищ часто необхідно декілька випадкових величин, що їх характеризують, розглядати сумісно, враховуючи зв'язки між ними.

Систему n випадкових величин X_1, X_2, …, X_n, кожна з яких набуває те чи інше своє значення у результаті одного й того ж випробування, позначають $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ і називають ***n-вимірною випадковою величиною*** або ***n-вимірним випадковим вектором***.

Приклад 1. Підприємство виготовляє керамічну плитку. Якщо для кожного виробу контролюються його довжина X_1 і ширина X_2, то маємо двовимірну випадкову величину $X = (X_1, X_2)$. Якщо ж, крім зазначених параметрів, для кожного виробу контролюється також його товщина X_3, то маємо тривимірну випадкову величину $X = (X_1, X_2, X_3)$.

Як і для одновимірної випадкової величини, для випадкового вектора вводять поняття закону розподілу і числові характеристики.

Зауваження 1. Надалі, для простоти, розглядаються тільки двовимірні випадкові величини $Z = (X, Y)$. Узагальнюючи наведені положення, їх можна перенести за аналогією на випадкові вектори більшої розмірності.

Двовимірна випадкова величина $Z = (X, Y)$ характеризується множинами значень U_X і U_Y своїх компонент X і Y, а також сумісним двовимірним законом розподілу. У відповідності з типом компонент X і Y розрізняють ***дискретні***, ***неперервні*** та ***змішані двовимірні випадкові величини*** $Z = (X, Y)$.

Двовимірну випадкову величину $Z = (X, Y)$ геометрично можна подати як випадкову точку $M(X, Y)$ на координатній площині Oxy або як відповідний випадковий радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$.

Закон розподілу дискретної випадкової величини $Z = (X, Y)$ можна задати у формі ***матриці розподілу*** – прямокутної таблиці, що містить усі можливі значення компонент x_i, $i = 1, 2, ..., k, ...$

і y_j, $j = 1, 2, ..., l, ...$, та для кожної з можливих пар (x_i, y_j) – її ймовірність $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$:

(X,Y)	x_1	x_2	…	x_k	…
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{k1}	…
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{k2}	…
…	…	…	…	…	…
y_l	p_{1l}	p_{2l}	…	p_{kl}	…
…	…	…	…	…	…

Властивості матриці розподілу:

1. $\boxed{\sum_{i,j} p_{ij} = 1}$ (умова нормування).
2. $\boxed{p_i = \sum_j p_{ij}}$ (перехід до ряду розподілу компоненти X).
3. $\boxed{p_j = \sum_i p_{ij}}$ (перехід до ряду розподілу компоненти Y).

Найбільш універсальною формою задання закону розподілу як дискретних, так і неперервних та змішаних багатовимірних випадкових величин є інтегральна функція розподілу.

Інтегральною функцією розподілу двовимірної випадкової величини $Z = (X, Y)$ (***функцією сумісного розподілу*** двох випадкових величин X і Y) називають функцію $F(x, y)$, яка для кожної пари (x, y) значень своїх аргументів дорівнює ймовірності того, що випадкові компоненти X і Y виявляться меншими за відповідні значення аргументів:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

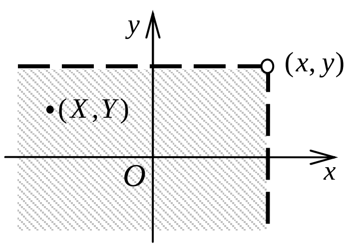


Рис. 31

Геометрично інтегральна функція $F(x, y)$ двовимірного випадкового вектора $Z = (X, Y)$ – це ймовірність влучення випадкової точки $M(X, Y)$ у заштриховану на рис. 31 область координатної площини Oxy

(нескінченний прямий кут з вершиною в точці (x, y)).

З означення випливають наступні властивості інтегральної функції розподілу $F(x, y)$:

1.°Усі значення функції $F(x, y)$ задовольняють подвійній нерівності $0 \le F(x, y) \le 1$.

2.° $F(x, y)$ – неспадна функція за кожним аргументом, тобто

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \le F(x_2, y); \quad y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \le F(x, y_2).$$

3.°Справедливі граничні співвідношення:

$$F(-\infty, -\infty) = 0; \ F(-\infty, y) = 0; \ F(x, -\infty) = 0; \ F(+\infty, +\infty) = 1.$$

4.°При $y \to +\infty$ двовимірна інтегральна функція розподілу $F(x, y)$ визначає інтегральну функцію розподілу $F_X(x)$ компоненти X: $F_X(x) = F(x, +\infty)$. Аналогічно, при $x \to +\infty$ двовимірна інтегральна функція розподілу $F(x, y)$ визначає інтегральну функцію розподілу $F_Y(y)$ компоненти Y: $F_Y(y) = F(+\infty, y)$.

Графіком інтегральної функції розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) служить деяка поверхня $z = F(x, y)$, розміщена між площинами $z = 0$ і $z = 1$ (рис. 32). Поверхня $z = F(x, y)$ асимптотично наближається до площини $z = 0$, коли або $x \to -\infty$, або $y \to -\infty$, або одночасно $x \to -\infty$ і $y \to -\infty$. При одночасному виконанні умов $x \to +\infty$ і $y \to +\infty$ поверхня $z = F(x, y)$ асимптотично наближається до площини $z = 1$.

Дві випадкові величини X і Y називають ***незалежними***, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яке значення набула інша.

Для двох незалежних випадкових величин X і Y справедливе співвідношення $\boxed{F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)}$, що служить ***критерієм незалежності***.

Якщо критерій не виконується хоча б в одній точці, то величини X і Y є ***залежними***.

Таким чином, у випадку залежності між випадковими величинами X і Y перехід від двох одновимірних законів $F_X(x)$ і $F_Y(y)$ до двовимірного закону розподілу $F(x, y)$ здійснити неможливо. Для цього необхідно знати умовні закони розподілу.

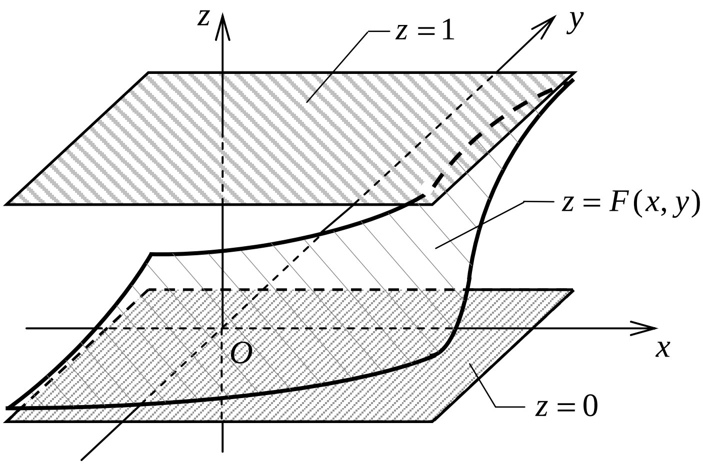


Рис. 32

Умовний закон розподілу у формі інтегральної функції $F(x/y)$ – це закон розподілу випадкової величини X при умові, що інша випадкова величин Y прийняла певне конкретне значення.

Якщо величини X і Y – незалежні, то

$$F(x/y) = F_X(x)\,; \qquad F(y/x) = F_Y(y)\,.$$

Зауваження 2. Необхідно розрізняти ***функціональну*** ("жорстку") і ***статистичну*** ("у тенденції") ***залежності***. Якщо випадкові величини X і Y зв'язані функціональною залежністю $y = \varphi(x)$, то за відомим значенням X можна однозначно визначити відповідне значення Y. У випадку статистичної залежності між випадковими величинами X і Y за відомим значенням однієї з них можна встановити тільки умовний закон розподілу іншої, тобто визначити ймовірність появи довільно взятого значення іншої величини.

Наприклад, між масою Y зібраного врожаю і масою X внесених при вирощуванні добрив існує статистична (ймовірнісна) залежність.

Розглянемо найважливіші числові характеристики двовимірних випадкових величин.

Математичним сподіванням двовимірної випадкової величини $Z=(X,Y)$ називають невипадковий вектор (a_x, a_y), компонентами якого є математичні сподівання відповідних компонент випадкового вектора $Z=(X,Y)$: $a_x = M(X)$ і $a_y = M(Y)$. Точка (a_x, a_y) визначає центр двовимірного розподілу.

Дисперсією двовимірної випадкової величини $Z=(X,Y)$ називають невипадковий вектор (σ_x^2, σ_y^2), компонентами якого є дисперсії відповідних компонент випадкового вектора $Z=(X,Y)$: $\sigma_x^2 = D(X)$ і $\sigma_y^2 = D(Y)$.

Особливу роль, як характеристика двомірного випадкового вектора $Z=(X,Y)$, відіграє другий змішаний центральний момент

$$\boxed{k_{xy} = M\big((X-a_x)(Y-a_y)\big)},$$

який називають ***кореляційним моментом*** або ***коваріацією***.

Для дискретних випадкових величин X і Y кореляційний момент k_{xy} визначається за формулою

$$\boxed{k_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - a_x)(y_i - a_y)p_{ij}},$$

де $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$; n – кількість можливих значень компоненти X; m – кількість можливих значень компоненти Y.

Кореляційний момент k_{xy} характеризує ступінь розсіювання випадкових величин X і Y навколо їх математичного сподівання (a_x, a_y), а також ступінь лінійної залежності між ними. Для характеристики тільки ступеня лінійної залежності між випадковими величинами X і Y використовується ***коефіцієнт кореляції***

$$\boxed{r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}},$$

де $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$ і $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$ – середні квадратичні відхилення випадкових величин відповідно X і Y.

Якщо $r_{xy} \neq 0$, то випадкові величини X і Y називають ***корельованими***.

Значення коефіцієнта кореляції r_{xy} знаходиться в діапазоні від –1 до +1. Якщо X і Y незалежні між собою, то $r_{xy} = 0$, тобто X і Y – некорельовані. Якщо X і Y зв'язані лінійною функціональною залежністю $Y = aX + b$, то $r_{xy} = -1$ при $a < 0$ і $r_{xy} = 1$ при $a > 0$. *Чим більша абсолютна величина коефіцієнта кореляції* r_{xy}, *тим ближче статистична залежність величин* X *і* Y *до лінійної функціональної.*

Зауваження 3. Поняття залежності ширше поняття корельованості. Дві незалежні випадкові величини завжди некорельовані. Дві корельовані випадкові величини обов'язково залежні. Проте дві залежні випадкові величини можуть бути як корельованими, так і ні, оскільки залежність може мати нелінійний характер.

Серед числових характеристик умовних розподілів залежних випадкових величин X і Y найбільше практичне значення має умовні математичні сподівання.

Умовним математичним сподіванням $a_{x/y} = M(X/y)$ випадкової величини X називають її математичне сподівання, обчислене при умові, що інша випадкова величина Y набула певного конкретного значення $Y = y$.

Для дискретних випадкових величин X і Y умовні математичні сподівання визначаються за формулами

$$\boxed{a_{x/y_j} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i/j}}; \quad \boxed{a_{y/x_i} = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{j/i}},$$

де $$p_{i/j} = P(X = x_i / Y = y_j) = p_{ij} \big/ P(Y = y_j);$$

$$p_{j/i} = P(Y = y_j / X = x_i) = p_{ij} \big/ P(X = x_i).$$

Умовне математичне сподівання $a_{x/y}$, що є деякою функцією від y: $a_{x/y} = h(y)$, називають ***регресією*** X ***на*** Y. Аналогічно,