МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ
ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА

К печати разрешаю
Первый проректор

_________________Г.В. Стадник

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

(Конспект лекций с задачами для самостоятельной работы для студентов технических специальностей и иностранных студентов)

Одобрено кафедрой высшей
математики. Протокол № 11
от30.06.2000 г.

Харьков - ХГАГХ - 2000

Гиперболические функции и их приложения (Конспект лекций с задачами для самостоятельной работы для студентов технических специальностей и иностранных студентов) / Сост.: Печенежский Ю.Е., Якунин А.В. – Харьков: ХГАГХ, 2000. – 94 с.

Составители: Ю.Е. Печенежский,
А.В. Якунин

Рецензент: С.А. Станишевский

Предисловие

Цель данной работы – ознакомить студентов с элементами теории гиперболических функций. Она будет полезна студентам электротехнических и строительных специальностей втузов, поскольку раздел о гиперболических функциях в общепринятых руководствах по высшей математике излагается весьма схематично, а соответствующие сведения необходимы при изучении теоретических основ ряда дисциплин.

В пособии излагаются основные сведения об этих функциях и приводятся примеры применения их в математическом анализе, геометрии, механике. В конце помещены задачи, самостоятельное решение которых поможет студентам закрепить соответствующий теоретический материал и научиться свободно пользоваться гиперболическими функциями.

Введение

В математике и ее приложениях к естествознанию и технике находят широкое применение показательные функции. Это, в частности, объясняется тем, что многие изучаемые в естествознании явления относятся к числу так называемых процессов органического роста, в которых скорости изменения участвующих в них функций пропорциональны величинам самих функций. Если обозначить через y функцию, а через x аргумент, то дифференциальный закон процесса органического роста может быть записан в виде:

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad ,$$

где k – некоторый постоянный коэффициент пропорциональности.

Интегрирование этого уравнения приводит к общему решению в виде показательной функции:

$$y = Ce^{kx} .$$

При начальном условии $y(x_0) = y_0$ можно определить произвольную постоянную $C = y_0 e^{-kx_0}$ и, таким образом, найти частное решение $y = y_0\, e^{-k(x-x_0)}$, которое представляет собой интегральную запись рассматриваемого процесса.

К процессам органического роста, при некоторых упрощающих предположениях, относятся такие явления, как: изменение атмосферного давления в зависимости от высоты над поверхностью Земли; радиоактивный распад; охлаждение или нагревание тела в окружающей среде постоянной температуры; унимолекулярная химическая реакция (например, растворение вещества в воде), при которой имеет место закон действия масс (скорость реакции пропорциональна наличному количеству реагирующего вещества); возрастание денежной суммы вследствие начисления на нее сложных процентов (проценты на проценты); размножение микроорганизмов и многие другие.

Наряду с отдельными показательными функциями в математике и ее приложениях находят применение различные комбинации показательных функций, среди которых особое значение имеют некоторые линейные и дробно-линейные комбинации функций e^{x} и e^{-x} - так называемые гиперболические функции, рассмотрению которых посвящена данная работа.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СООТНОШЕНИЯ

§ 1. Тригонометрические функции как функции площади

Напомним определения тригонометрических функций синуса и косинуса. На окружности радиуса r с центром в начале координат(рис. 1), уравнение которой $x^2 + y^2 = r^2$, возьмём точку $P(x,y)$. Тогда:

$$cos\,\alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r} \quad ; \qquad\qquad sin\,\alpha = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{r} \quad ,$$

т.е. синус есть отношение ординаты точки окружности к радиусу, а косинус – отношение абсциссы точки к радиусу. В качестве аргумента функций синус и косинус в данном случае принимается центральный угол α или $\cup\, AP = \alpha$, причем угол и дуга α измеряются в радианах.

Можно этот аргумент заменить другим на основании следующих соображений.

Площадь сектора *AOP* равна произведению длины дуги *AP* на половину радиуса, т.е. $S_{\nabla AOP} = \cup\, AP\,\frac{r}{2} = r\,\alpha\,\frac{r}{2} = \frac{\alpha\, r^2}{2}$ Тогда удвоенная площадь сектора *AOP* равна $2\,S_{\nabla AOP} = \alpha\, r^2$. Если принять радиус круга за единицу, то $2\,S_{\nabla AOP} = \alpha$, т.е. величина α, которая выражала величину угла (или дуги) и была аргументом для определения тригонометрических функций в настоящем толковании выражает удвоенную площадь сектора круга, при радиусе, равном единице.

Иначе говоря, можно сказать, что синус и косинус – функции удвоенной площади сектора *AOP* единичной окружности.

Этот факт можно развить еще и так. Известно, что уравнение окружности в параметрической форме имеет вид:

$$x = r \cos \alpha, \qquad y = r \sin \alpha,$$

где r – радиус окружности, α – угол, образованный радиусом с положительным направлением оси Ox.

Площадь сектора ТОР: $S_{\nabla TOP} = \cup PT \cdot \frac{r}{2}$. Но так как $PT = 2r\alpha$, то и площадь сектора $S_{\nabla TOP} = 2r\alpha\frac{r}{2} = \alpha r^2$ и, при условии, что $r = 1$, имеем $S_{\nabla TOP} = S = \alpha$.

Следовательно, уравнение окружности принимает вид:

$$x = \cos S, \qquad y = \sin S,$$

где S – площадь удвоенного сектора AOP, т.е. отношение ординаты точки к радиусу, равному 1, есть синус площади сектора, у которого хорда стягивает дугу, равную 2α.

Аналогично, отношение абсциссы точки окружности к единичномурадиусу, есть косинус площади сектора.

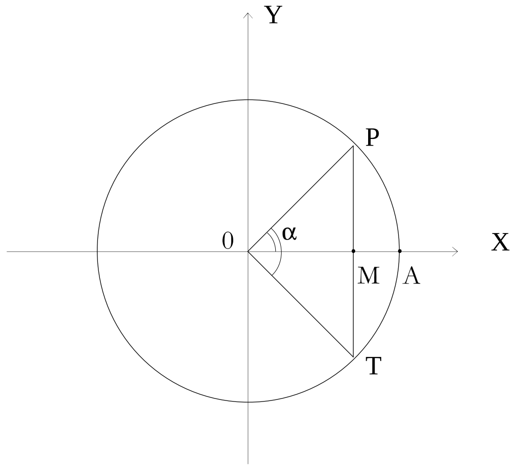

Рис. 1

§2. Определение гиперболических функций

Уравнение равнобочной гиперболы, отнесенной к центру и осям, имеет вид:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad .$$

Возьмем на гиперболе (рис. 2) точку $P(x,y)$.

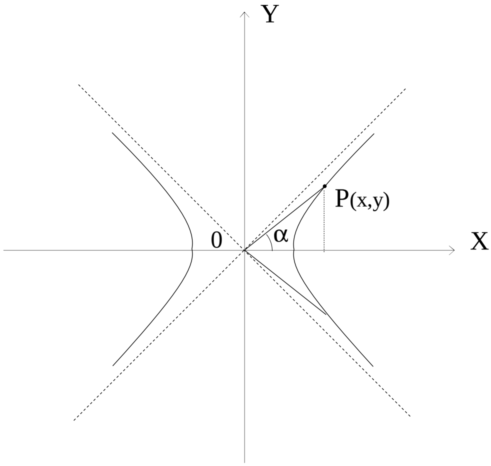

Рис. 2

Отношение x/a, т.е. отношение абсциссы точки равнобочной гиперболы к вещественной полуоси называется гиперболическим косинусом и обозначается $ch\alpha$, а отношение ординаты точки равнобочной гиперболы к вещественной полуоси, т.е. y/a называется гиперболическим синусом и обозначается $sh\alpha$.

Аргументом в данном случае, как для синуса и косинуса в окружности, принимается удвоенная площадь сектора, но не угол и не дуга.

Если принять вещественную полуось равнобочной гиперболы за 1, то её уравнение примет вид:

$$x^2 - y^2 = 1 \ .$$

Соответственно, выражения для гиперболического косинуса и гиперболического синуса примут вид:

$$ch\alpha = x, \qquad sh\alpha = y \ .$$

Возводя обе части последних двух равенств в квадрат, и вычитая, получим, принимая во внимание равенство $x^2 - y^2 = 1$:

$$ch^2\alpha - sh^2\alpha = 1.$$

Из рис. 2 устанавливаем, что при $\alpha \to 0$, $ch\alpha$ убывает до 1, а $sh\alpha$ убывает до 0, т.е.

$$ch0 = 1, \qquad sh0 = 0.$$

С увеличением α, т.е. с увеличением площади, $ch\alpha$ и $sh\alpha$ неограниченно возрастают.

Если точка P будет перемещаться от вершины до той части кривой, где ординаты отрицательны (рис. 3), то по чертежу видно, что $ch\alpha$ будет величиной <u>положительной</u> и неограниченно возрастающей, а $sh\alpha$ будет <u>отрицателен</u> и неограниченно возрастает по абсолютной величине, т.е. получим:

$$ch(-\alpha) = ch\alpha \ , \qquad sh(-\alpha) = -sh\alpha \ .$$

Если в равнобочной гиперболе (рис. 4) провести касательную к кривой в вершине A, то отношение отрезков AK и OA, т.е. отношение отрезка касательной от вершины до пересечения с прямой, соединяющей точку P с центром, к вещественной полуоси, называется <u>гиперболическим тангенсом и обозначается $th\alpha$</u>, т.е. $th\alpha = \dfrac{AK}{a}$.

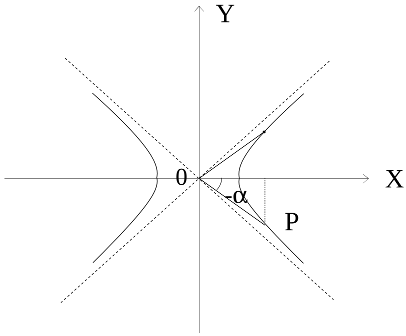

Рис. 3

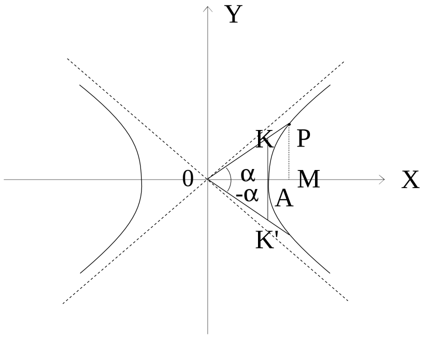

Рис. 4

Из подобия ΔOMP и ΔOAK, следует: $\frac{AK}{OK}=\frac{PM}{OM}$. При $OA=1$, $PM=sh\alpha$., $OM=ch\alpha$, вытекает $th\alpha=\frac{sh\alpha}{ch\alpha}$.

При увеличении α, т.е. когда точка P по кривой удаляется в бесконечность, прямая OP стремится слиться с асимптотой, а так как в равнобочной гиперболе угол наклона асимптоты к оси Ox равен $\pi/4$, то в этом предельном случае AK стремится к a, следовательно, $\lim\limits_{\alpha\to\infty} th\alpha=1$.

Когда точка P будет перемещаться по нижней части кривой, то AK будет иметь отрицательный знак, т.е.

$$th(-\alpha)=th\alpha$$

и

$$\lim_{\alpha\to-\infty} th\alpha=-1.$$

Отношение $ch\alpha\,/\,sh\alpha$ называется <u>гиперболическим котангенсом и обозначается $cth\alpha$</u>. Очевидно, что

$$cth(-\alpha) = -\,cth\alpha,$$

и при изменении $-\infty < \alpha < \infty$ имеем $-1 < cth\alpha < 1$.

Таким образом, изменение гиперболических функций выражается следующей таблицей:

α	$-\infty$	0	$+\infty$
$sh\alpha$	$-\infty$	0	$+\infty$
$ch\alpha$	$+\infty$	1	$+\infty$
$th\alpha$.	-1	0	$+1$
$cth\alpha$.	-1	0	$+1$

Более наглядно ход изменения функций выражается таблицей:

α	$-\infty$	<0	0	>0	$+\infty$
$sh\alpha$	$-\infty$	–	0	+	$+\infty$
$ch\alpha$	$+\infty$	+	1	+	$+\infty$
$th\alpha$.	-1	–	0	+	$+1$
$cth\alpha$.	-1	–	0	+	$+1$

§ 3. Основные соотношения для гиперболических функций

Различные тригонометрические функции одного и того же аргумента связаны между собой рядом известных соотношений. Аналогичные соотношения имеют место и для гиперболических функций. При этом основному тригонометрическому тождеству $sin^2x + cos^2x = 1$ соответствует тождество, связывающее гиперболические синус и косинус:

$$ch^2 x - sh^2 x = 1 . \qquad (1)$$

В § 2 были установлены следующие формулы:

$$th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x} \quad ; \qquad (2)$$

$$cth\,x = \frac{ch\,x}{sh\,x} \quad . \qquad (3)$$

Тогда

$$th\,x\ cth\,x = 1\ . \qquad (4)$$

По аналогии с тригонометрическими вводятся гиперболические косеканс

$$\frac{1}{sh\,x} = csc\,h\,x \qquad (5)$$

и секанс

$$\frac{1}{ch\,x} = sch\,x \quad . \qquad (6)$$

Из соотношения (1) путем деления обеих его частей соответственно на $ch^2\,x$ и $sh^2\,x$ с учетом выражений (5) и (6) получаются формулы

$$1 - th^2\,x = sch^2\,x \qquad (7)$$

и

$$cth^2\,x - 1 = csc\,h^2\,x \quad . \qquad (8)$$

Пользуясь этими восемью формулами, можно, как и для тригонометрических функций, любую гиперболическую функцию аргумента x выразить через любую другую гиперболическую функцию одного и того же аргумента. Ниже приводится таблица для первых четырех функций:

$sh\,x =$		$\pm\sqrt{ch^2x-1}$	$\dfrac{thx}{\sqrt{1-th^2x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{cth^2x-1}}$
$ch\,x=$	$\sqrt{sh^2x+1}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-th^2x}}$	$\pm\dfrac{cthx}{\sqrt{cth^2x-1}}$
$th\,x=$	$\dfrac{shx}{\sqrt{sh^2x+1}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{ch^2x-1}}{chx}$		$\dfrac{1}{cthx}$
$cth\,x=$	$\pm\dfrac{\sqrt{sh^2x+1}}{shx}$	$\pm\dfrac{chx}{\sqrt{ch^2x-1}}$	$\dfrac{1}{thx}$	

Здесь имеет место очень простое правило знаков: $ch\,x$ всегда положителен, а $sh\,x$, $th\,x$ и $cth\,x$ имеют тот же знак, что и аргумент.

Согласно этому правилу, если $x>0$, следует взять перед корнем знак «+», а если $x<0$, то надо взять знак «-».

Легко также вывести формулы для гиперболических функций суммы и разности аргументов, двойного и половинного аргумента, а также для сумм, разностей и произведений гиперболических функций. Эти соотношения аналогичны соответствующим тригонометрическим формулам. Приводим их сводку:

$$sh(x+y)=shx\cdot chy+chx\cdot shy \quad; \qquad (9)$$

$$sh(x-y)=shx\cdot chy-chx\cdot shy \quad; \qquad (10)$$

$$ch(x+y)=chx\cdot chy+shx\cdot shy \quad ; \qquad (11)$$

$$ch(x-y)=chx\cdot chy-shx\cdot shy \quad ; \qquad (12)$$

$$th(x+y)=\frac{thx+thy}{1+thx\cdot thy} \quad ; \qquad (13)$$

$$th(x-y)=\frac{thx-thy}{1-thx\cdot thy} \quad ; \qquad (14)$$

$$cth(x+y)=\frac{1+cthx\cdot cthy}{cthx+cthy} \quad ; \qquad (15)$$

$$cth(x-y)=\frac{1-cthx\cdot cthy}{cthx-cthy} \quad ; \qquad (16)$$

$$sh2x=2shx\cdot chx \quad ; \qquad (17)$$

$$ch2x=ch^2x+sh^2x=2sh^2x+1=2ch^2x-1 \quad ; \qquad (18)$$

$$th2x=\frac{2thx}{1+th^2x} \quad ; \qquad (19)$$

$$cth2x=\frac{1+cth^2x}{2cthx} \quad ; \qquad (20)$$

$$ch^2x=\frac{1+ch2x}{2} \quad ; \qquad (21)$$

$$sh^2x=\frac{ch2x-1}{2} \quad ; \qquad (22)$$

$$sh\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{chx-1}{2}} \quad ; \qquad (23)$$

$$ch\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{chx+1}{2}} \quad ; \tag{24}$$

$$th\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{chx-1}{chx+1}} \quad ; \tag{25}$$

$$cth\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{chx+1}{chx-1}} \quad ; \tag{26}$$

$$shx+shy=2sh\frac{x+y}{2}ch\frac{x-y}{2} \quad ; \tag{27}$$

$$shx-shy=2sh\frac{x-y}{2}ch\frac{x+y}{2} \quad ; \tag{28}$$

$$chx+chy=2ch\frac{x+y}{2}ch\frac{x-y}{2} \quad ; \tag{29}$$

$$chx-chy=2sh\frac{x+y}{2}sh\frac{x-y}{2} \quad ; \tag{30}$$

$$thx\pm thy=\frac{sh(x\pm y)}{chx\cdot chy} \quad ; \tag{31}$$

$$cthx\pm cthy=\frac{sh(y\pm x)}{shx\cdot shy} \quad ; \tag{32}$$

$$shx\cdot shy=\frac{1}{2}\left(ch(x+y)-ch(x-y)\right) \quad ; \tag{33}$$

$$shx\cdot chy=\frac{1}{2}\left(sh(x+y)+sh(x-y)\right) \quad ; \tag{34}$$

$$chx\cdot chy=\frac{1}{2}\left(ch(x+y)+ch(x-y)\right) \quad . \tag{35}$$

§4. Связь гиперболических функций с показательными

Докажем справедливость двух формул

$$ch\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \quad ; \quad sh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \quad .$$

Для доказательства вычислим величину площади α.

Из рис. 5 видно:

$$\frac{\alpha}{2} = S_{\Delta OPM} - S_{APM} \qquad (\bullet)$$

Площадь $S_{\Delta OPM} = \frac{1}{2}xy$ (если координаты точки $P(x;y)$).

Площадь S_{APM} выражается интегралом

$$P_{APM} = \int_0^x ydx = \int_0^x \sqrt{x^2 - 1}dx \quad , \qquad \otimes$$

где величина y найдена из уравнения гиперболы:

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 1}\,) \;.$$

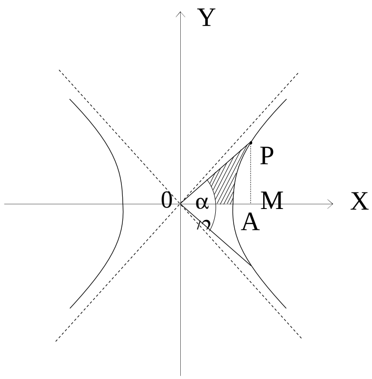

Рис. 5

Вычислим величину $\otimes$

$$\int_0^x \sqrt{x^2-1}dx = \int_0^x \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Первый из интегралов берется «по частям»

$$\left| \begin{matrix} u = x; & v = \sqrt{x^2-1} \\ du = dx; & dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} \end{matrix} \right| \qquad I_1 = u \cdot v - \int_0^x v \cdot du = x\sqrt{x^2-1}\Big|_0^x - \int_0^x \sqrt{x^2-1}dx$$

.

$$I_2 = ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|_0^x .$$

Следовательно,

$$\otimes = x\sqrt{x^2-1}\Big|_0^x - \int_0^x \sqrt{x^2-1} \cdot dx - ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big|_0^x$$

или

$$2\int_0^x \sqrt{x^2-1} \cdot dx = x\sqrt{x^2-1}\Big|_0^x - ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big|_0^x .$$

Тогда

$$\int_0^x \sqrt{x^2-1} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}\Big|_0^x - \frac{1}{2}ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big|_0^x .$$

Подставляя в $(\bullet)$, имеем

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{xy}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}ln(x+\sqrt{x^2-1}) = \frac{1}{2}ln(x+\sqrt{x^2-1}) ,$$

так как $y = \sqrt{x^2-1}$. Следовательно,

$$\alpha = ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad \text{или} \qquad e^{\alpha} = x + \sqrt{x^2 - 1} \quad .$$

Сделаем дальнейшие преобразования:

$$e^{\alpha} - x = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow e^{2\alpha} - 2e^{\alpha} \cdot x + x^2 = x^2 - 1 \Rightarrow e^{2\alpha} - 2e^{\alpha} \cdot x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{e^{2\alpha} + 1}{2e^{\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2\alpha} + 1}{e^{\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \quad ,$$

т.е.

$$\boxed{ch\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}} \quad . \tag{36}$$

Определим $sh\alpha$:

$$sh\alpha = \sqrt{ch^2\alpha - 1} = \sqrt{\left(\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{e^{2l} + e^{-2\alpha} - 2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}\right)^2} = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \quad ,$$

т.е.

$$\boxed{sh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}} \quad . \tag{37}$$

Учитывая, что

$$thx = \frac{shx}{chx} \qquad \text{и} \qquad cthx = \frac{chx}{shx} \, ;$$

имеем

$$\boxed{th\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}} \quad ; \tag{38}$$

$$\boxed{cth\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}} \quad . \tag{39}$$

В заключение, выразим показательные функции через гиперболические.

Складывая почленно и вычетая формулы (36) и (37), имеем:

$$e^{x} = chx + shx \quad ; \tag{40}$$

$$e^{-x} = chx - shx \quad . \tag{41}$$

Теперь доказательство формул (9)–(35) можно провести, скажем, так:

$$sh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^{x} e^{y} - e^{-x} e^{-y}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\big((chx + shx)(chy + shy) - (chx - shx)(chy - shy)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}(2shx \cdot chx + 2chx \cdot shy) = shx \cdot chy + chx \cdot shy \quad .$$

Здесь учтено, что

$$e^{x} = chx + shx \quad ; \qquad e^{-x} = chx - shx \quad .$$

Заменяя y на $(-y)$, получим

$$sh(x-y) = shx \cdot ch(-y) + chx \cdot sh(-y) = shx \cdot chy - chx \cdot shy$$

и т. д.

§5. Степени гиперболических функций

Поставим задачу: выразить степени гиперболического синуса и гиперболического косинуса через функции кратных аргументов.

Так как

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{и} \qquad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ ,$$

то

$$sh^n x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^n \ ; \qquad sh^n x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^n \ .$$

Следовательно,

$$sh^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - 1 \right) = \frac{ch2x - 1}{2} \ ;$$

$$sh^3 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3x} - e^{-3x} - 3e^x + 3e^{-x}) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} - \frac{3(e^x - e^{-x})}{2} \right) = \frac{sh3x - 3shx}{4} \ ;$$

$$sh^4 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} \left(e^{4x} + e^{-4x} - 4(e^{3x} - e^{-3x}) + 6 e^{2x} e^{-2x} \right) =$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2} - \frac{4(e^{3x} - e^{-3x})}{2} + \frac{6}{2} \right) = \frac{ch4x - 4ch2x + 3}{8} \ .$$

Аналогично получим:

$$ch^2x=\frac{ch2x+1}{2} \quad ; \qquad ch^3x=\frac{ch3x+3chx}{4} \quad ;$$

$$ch^4x=\frac{ch4x+4ch2x+3}{8} \quad .$$

Из этих формул устанавливаем, что степени гиперболического косинуса выражаются только через гиперболические косинусы кратных аргументов, а степени гиперболического синуса выражаются через гиперболические синусы кратных аргументов для нечетных степеней и через гиперболические косинусы для четных степеней.

Укажем еще на то обстоятельство, что этим методом можно выразить через функции кратных аргументов произведение любых целых положительных степеней гиперболического косинуса и гиперболического синуса, т.е. выражения виде $sh^m x \cdot ch^n x$.

При этом независимо от гиперболического косинуса (т.е. «n») произведение выразится через гиперболические синусы кратных углов, если m – нечетное, т.е. $m=2k+1$; и через гиперболические косинусы кратных углов, если m – четное, т.е. $m=2k$, $k \in N$.

Это легко установить, если иметь в виду, что $y=chx$ – четная функция, а $y=shx$ – нечетная и поэтому произведение четной функции на нечетную степень shx будет нечетной функцией и выразится через гиперболические синусы; произведение четной функции на четную степень shx будет четной функцией и выразится через гиперболические косинусы кратных аргументов.

Например, вычислим $sh^2x \cdot ch^2x$.

Подставляя найденные выше sh^2x и ch^2x , имеем

$$sh^2x\cdot ch^2x=\frac{ch2x-1}{2}\cdot\frac{ch2x+1}{2}=\frac{ch^2 2x-1}{4} \quad .$$

Или можно так:

$$\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{1}{16}(e^x-e^{-x})^2\cdot(e^x+e^{-x})^2=$$

$$=\frac{1}{16}(e^{2x}-e^{-2x})^2=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}sh^2 2x \quad .$$

Тождественность результатов очевидна.

Аналогично,

$$shx\cdot ch^3x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^3=\frac{1}{16}(e^x-e^{-x})\times$$

$$\times(e^{3x}+3e^x+3e^{-x}+e^{-3x})=\frac{1}{16}(e^{4x}-e^{-4x}+2e^{2x}-2e^{-2x})=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{2}+\frac{2(e^{2x}-e^{-2x})}{2}\right)=\frac{1}{8}(ch4x+2sh2x) \quad .$$

§6. Исследование гиперболических функций и построение их графиков

Вводя общепринятую форму, запишем гиперболические функции так:

$$y=sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \ ; \qquad\qquad y=ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \ ;$$

$$y = th\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \;; \qquad\qquad y = cth\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \;.$$

* * *

6.1. Исследование и график функции $y = sh\,x$.

1) D: $x \in R$. 2) E: $y \in R$.

3) $x = 0$, $y = 0$ – кривая проходит через начало координат.

4) $y(-x) = -y(x)$ – т.е. функция нечетная, график симметричен относительно начала координат.

$$5)\quad y' = (shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx\;; \tag{42}$$

$$chx = 0 \;\Rightarrow\; \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; e^{2x} + 1 = 0 \;\Rightarrow\; e^{2x} = -1\,.$$

Это уравнение не имеет корней. Критических точек нет, Экстремума нет. $y' > 0$ при $x \in R$, т.е. функция монотонно возрастает.

6) $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$, т.е. график расположен в I–III четвертях.

7) Неограниченна.

$$8)\; y'' = (y')' = (chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = shx\;;$$

$$y'' = 0 \Rightarrow shx = 0 \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0\;;$$

$y'' < 0$ при $x < 0$, $y'' > 0$ при $x > 0$, т.е. $x = 0$ – точка перегиба, слева от $x = 0$ кривая выпукла, справа – вогнута.

9)• Вертикальных асимптот нет, т.к. $D(y) = R$

• Горизонтальных асимптот нет, т.к.

$$\lim_{x\to\pm\infty} shx = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \pm\infty$$

• Наклонных асимптот нет, т.к.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{shx}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \pm\infty$$

По полученным данным и данным §2 можно построить график функции $y = shx$ (рис. 6).

* * *

6.2. Исследование и график функции $y = ch\,x$.

1) D: $x \in R$. 2) E: $y \ge 1$.

3) $x = 0$; $y = 1$ – кривая проходит через точку (0;1).

4) $y(-x) = y(x)$, т.е. функция четная, график симметричен относительно оси $0y$.

$$5)\quad y' = (chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = shx \; ; \qquad (43)$$

$$shx = 0 \;\Rightarrow\; \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; e^x = e^{-x} \;\Rightarrow\; x = 0 \; ;$$

$$y'(x) < 0 \text{ при } x < 0 ; \; y' > 0 \text{ при } x > 0 ,$$

т.е. в точке (0;1) функция имеет *min*, слева от точки *x=0* она убывает, справа – возрастает.

6) $y > 0$ при $x \in R$, т.е. график расположен в I–II четвертях.

7) Функция ограничена снизу: $y = 1$

8) $y'' = (y')' = (shx)' = chx$; $y'' = 0 \Rightarrow chx = 0$.

Полученное уравнение не имеет корней, т.е. точки перегиба нет. $y'' > 0$ при $x \in D$, график вогнут при всех $x \in D$.

9) Вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот нет. Это можно показать также, как и у функции $y = shx$.

График функции $y = chx$ приведен на рис. 7.

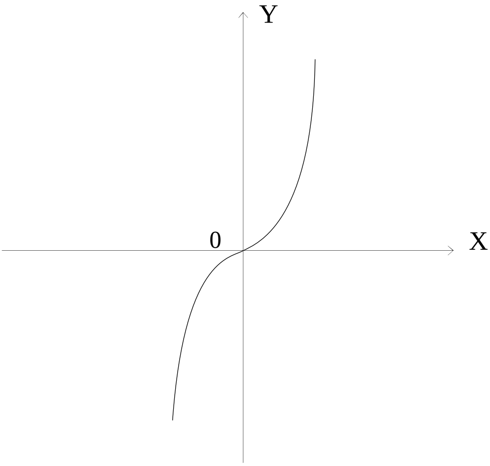

Рис. 6

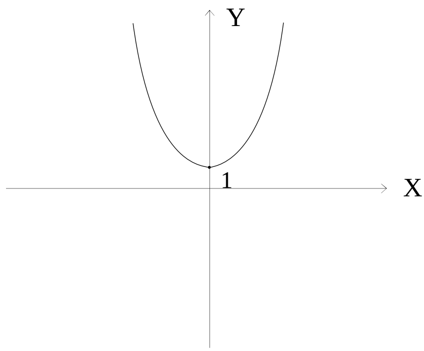

Рис. 7

* * *

6.3. Исследование и график функции $y = th\,x$.

1) D: $x \in R$. 2) E: $-1 \le y \le 1$.

3) $x = 0 \Rightarrow y = 0$ – кривая проходит через начало координат.

4) $y(-x) = -y(x)$ – функция нечетная, график расположен симметрично начала координат.

$$5)\quad y' = (thx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}\ ;\ y' = 0\ . \qquad (44)$$

Это уравнение не имеет корней. Критических точек нет, экстремума нет. $y' > 0$ при $x \in D$, т.е. функция монотонно возрастает при всех $x \in D$.

6) $y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$, т.е. график расположен в I–III четвертях.

7) Функция ограничена сверху $(y = 1)$ и снизу $(y = -1)$.

$$8)\quad y'' = (y')' = -\frac{8(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3}\ ;\quad y'' = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0\ ;$$

$y'' > 0$ при $x < 0$; $y'' < 0$ при $x > 0$, т.е. $x = 0$ – точка перегиба; слева от $x = 0$ кривая вогнута; справа – выпукла.

9) • Вертикальных асимптот нет, т.к. $D = R$

• Горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to+\infty} thx = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \ \Rightarrow\ y = 1\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} thx = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -1 \ \Rightarrow\ y = -1\ .$$

• Наклонных асимптот нет, так как

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{thx}{x} = 0\ .$$

По полученным данным можно построить график функции $y = thx$ (рис. 8).

* * *

6.4. Исследования и график функции $y = cth\,x$.

1) D: $x \neq 0$. 2) $|y| > 1$.

3) Пересечений с осями координат нет.

4) $y(-x) = -y(x)$ – функция нечетная, график симметричен относительно начала координат.

$$5)\ y' = (chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right)' = -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2} \qquad (45)$$

Уравнение $y' = 0$ не имеет решения. Критических точек нет, экстремума нет.

$y' < 0$ при $x \in D$, т.е. функция монотонно убывает при всех $x \in D$.

6) $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$, т.е. график расположен в I–III четвертях.

7) Функция неограниченна.

$$8)\ y'' = (y')' = \frac{8(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^3} .$$

Уравнение $y'' = 0$ не имеет решения, т.е. точки перегиба нет.

$y'' > 0$ при $x > 0$; $y'' < 0$ при $x < 0$, т.е. слева от точки $x = 0$ кривая выпукла, справа – вогнута.

9) • Вертикальная асимптота $x = 0$.

• Горизонтальные асимптоты:

$$y = 1 \text{ (при } x \to +\infty\text{)} \;; \qquad y = -1 \text{ (при } x \to -\infty\text{)}$$

• Наклонных асимптот нет, так как

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad .$$

График функции $y = cthx$ представлен на рис. 9.

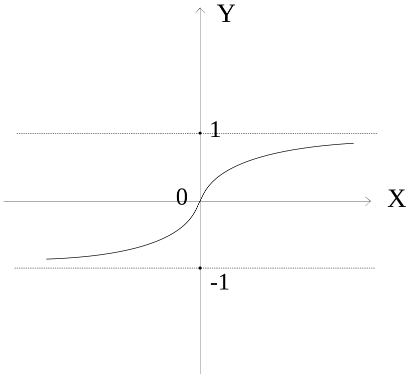

Рис. 8

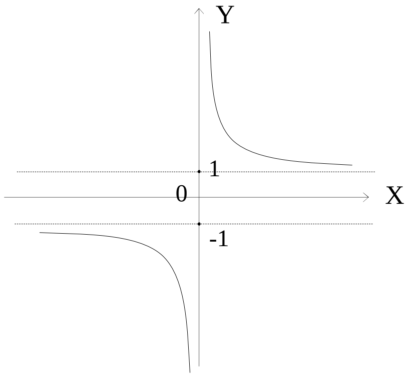

Рис. 9

<u>Примечание 1</u>. При построении графиков гиперболических функций были также использованы данные, полученные в §2.

<u>Примечание 2</u>. Поскольку <u>гиперболический секанс</u> $sch\, x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ и <u>гиперболический косеканс</u> $csc\, h\, x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$ являются функциями, обратными, соответственно, к $ch\, x$ и $sh\, x$, т.е. $sch\, x = \dfrac{1}{ch\, x}$ и $csc\, h\, x = \dfrac{1}{sh\, x}$, то отдельно их рассматривать не будем.

§7. Обратные гиперболические функции

Если $x = sh\, y$, то, желая выразить зависимость y от x, обозначают y символом $Arsh\, x$ (читается «ареасинус гиперболический») или, более подробно, y есть площадь, гиперболический синус который равен x ($area$ – латинское слово, означающее в переводе площадь). Подобным же образом определяются и другие обратные гиперболические функции:

если $x = ch\, y$, то $y = Arch\, x$ (ареакосинус гиперболический);

если $x = th\, y$, то $y = Arth\, x$ (ареатангенс гиперболический);

если $x = cth\, y$, то $y = arcth\, x$ (ареакотангенс гиперболический).

Графики обратных гиперболических функций с их краткими описаниями приводятся ниже.

* * *

7.1. Ареасинус $y = Arsh\, x$ (рис. 10).

Функция нечетная, область определения $-\infty < x < \infty$, монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. В начале координат точка перегиба и центр симметрии графика. Угол α, образован с осью абсцисс касательной в этой точке, равен $\pi / 4$. Асимптот не имеет.

* * *

7.2. Ареакосинус $y = Arch\, x$ (рис. 11).

Функция двузначная, область определения каждой ветви $1 \le x < +\infty$. График симметричен относительно оси Ox; в точке $A(1,0)$

имеется вертикальная касательная $x = 1$, при возрастании x (при $(x > 1)$) y по абсолютной величине возрастает.

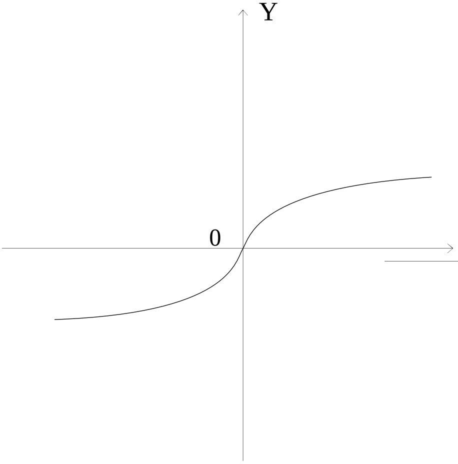

Рис. 10

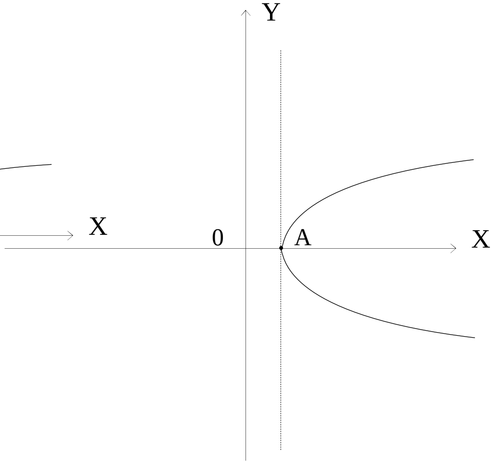

Рис. 11

* * *

6.3. Ареатангенс $y = Arth\,x$ (рис. 12).

Функция нечетная, область определения $-1 < x < 1$, монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. В начале координат – точка перегиба и центр симметрии графика. Угол α, образованный с осью касательной в этой точке, равен $\pi / 4$. Вертикальные асимптоты $x = \pm 1$.

* * *

6.4. Ареакотангенс $y = Arcth\,x$ (рис. 13).

Функция нечетная, область определения $|x| > 1$. При $-\infty < x < -1$ убывает от 0 до $-\infty$, при $+1 < x < +\infty$ убывает от $+\infty$ до 0.

Экстремумов и точек перегиба нет. Имеются горизонтальная $y=0$ и вертикальные $x=\pm 1$ асимптоты.

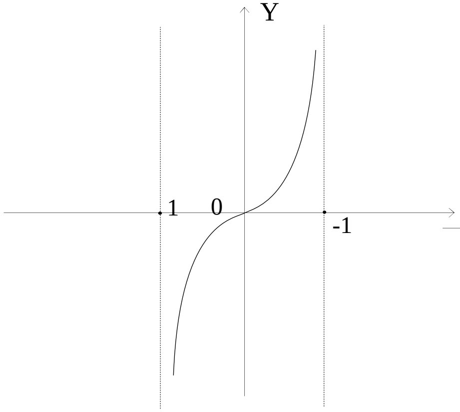

Рис. 12

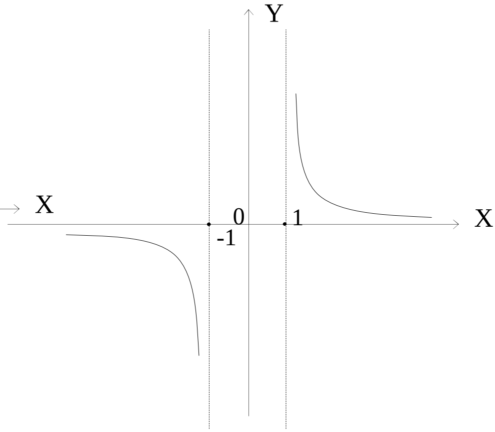

Рис. 13

Любую из обратных гиперболических функций можно выразить через остальные функции, как показано в таблице:

$Arsh\, x =$		$\pm Arch\sqrt{x^2+1}$	$Arth\,\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$Arcth\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$
$Arch\, x =$	$\pm Arsh\sqrt{x^2-1}$		$\pm Arth\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\pm Arcth\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$Arth\, x =$	$Arsh\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\pm Arch\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$Arcth\dfrac{1}{x}$
$Arcthx =$	$Arsh\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\pm Arch\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$Arth\dfrac{1}{x}$	

Следует иметь в виду, что при выражении функции через ареакосинус последний надо брать со знаком «+» при $x>0$ и со знаком «–» при $x<0$. Это объясняется двузначностью ареакосинуса и нечетностью остальных функций которые при $x>0$ – положительны, а при $x<0$ – отрицательны. Выражение же самого ареакосинуса через остальные функции (вторая строка) надо брать с двумя знаками, что также объясняется его двузначностью.

Легко убедиться в справедливости приведенных в таблице соотношений. Для примера выразим $Arsh\,x$ через остальные функции.

$$chy=\sqrt{sh^2y+1}=\sqrt{x^2+1}\ .\quad \text{Откуда}\qquad y=\pm Arch\sqrt{x^2+1}\quad;$$

$$thy=\frac{shy}{\sqrt{sh^2y+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\quad.\qquad \text{Тогда}\qquad y=Arth\frac{x}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$cthy=\frac{\sqrt{sh^2y+1}}{shy}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\ .\ \text{Окончательно имеем}\quad y=Arcth\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\quad.$$

Аналогично проверяются и остальные соотношения.

Суммы и разности обратных гиперболических функций выражаются следующим образом:

$$Arshx+Arshy=Arsh\left(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\right)\ ; \tag{46}$$

$$Arshx-Arshy=Arsh\left(x\sqrt{1+y^2}-y\sqrt{1+x^2}\right)\ ; \tag{47}$$

$$Archx+Archy=Arch\left(xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right)\ ; \tag{48}$$

$$Archx-Archy=Arch\left(xy-\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right)\ ; \tag{49}$$

$$Arthx + Arthy = Arth\frac{x+y}{1+xy} \ ; \qquad (50)$$

$$Arthx - Arthy = Arth\frac{x-y}{1-xy} \ . \qquad (51)$$

Проверим формулу (46). Для этого обозначим $Arsh\,x = u$; $Arsh\,y = \upsilon$. Тогда $sh\,u = x$; $sh\,y = \upsilon$; $ch\,u = \sqrt{x^2+1}$; $ch\,\upsilon = \sqrt{y^2+1}$.

Преобразуем выражение

$$sh(\,Arsh\,x + Arsh\,y\,) = sh(\,u+\upsilon\,) = sh\,u \cdot ch\,\upsilon \ + ch\,u \ \cdot sh \ \upsilon =$$

$$= x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} \ .$$

Откуда $Arsh\,x + Arsh\,y = Arsh(\,x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}\,)$.

Аналогично проверяются остальные формулы.

Подобно тому, как гиперболические функции выражаются через показательные, обратные гиперболические функции могут быть выражены через функции, обратные показательным, т.е. через логарифмические.

Например, если $Arsh\,x$, то $x = sh\,y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ или $e^{2y} - 2x \cdot e^y - 1 = 0 \ \Rightarrow \ e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ (решая как квадратное относительно e^y). Знак “–” перед корнем в действительной области невозможен, ибо при действительных значениях x величина $e^y > 0$. Следовательно, $y = ln(\,x + \sqrt{x^2+1}\,)$, а так как $y = Arsh\,x$, то

$$Arsh\,x = ln(\,x + \sqrt{x^2 + 1}\,) \quad . \tag{52}$$

Аналогично получаем:

$$Arch\,x = ln(\,x \pm \sqrt{x^2 + 1}\,) \quad ; \tag{53}$$

$$Arth\,x = \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x} \qquad (\,|x| < 1\,) \qquad ; \tag{54}$$

$$Arcth\,x = \frac{1}{2} ln \frac{x+1}{x-1} \qquad (\,|x| > 1\,) \qquad . \tag{55}$$

Для вывода формулы (53) исходим из того, что если $y = Arch\,x$, то $x = ch\,y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$. Откуда $e^{2y} - 2x \cdot e^y + 1 = 0$ и $e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$. (Знак “–” следует сохранить, т.к. правая часть будет положительной и в этом случае). Логарифмируя последнее равенство, получим формулу (53).

Заметим, что формуле (53) можно придать несколько иной вид:

$$Arch\,x = \pm ln(\,x + \sqrt{x^2 - 1}\,) \; .$$

Для этого достаточно показать, что

$$ln(\,x - \sqrt{x^2 - 1}\,) = -ln(\,x + \sqrt{x^2 - 1}\,)\,.$$

В этом легко убедиться, произведя преобразование:

$$ln(\,x - \sqrt{x^2 - 1}\,) = ln \frac{(\,x - \sqrt{x^2 - 1}\,)(\,x + \sqrt{x^2} - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = -ln(\,x + \sqrt{x^2 - 1}\,) \; .$$

Если взять $y = Arth\,x$, то $x = thy = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$. Откуда $e^y(1-x) = e^{-y}(1+x)$ или $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$. Следовательно,

$$e^y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \; y = Arth\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad .$$

Аналогично получаем формулу (55).

Приведенные формулы позволяют выяснить вопрос об области определения обратных гиперболических функций. Из формулы (52) следует, что $Arsh\,x$ существует при любом $x \in R$, поскольку $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ как при положительном, так и при отрицательном x. Формула (53) показывает, что $Arch\,x$ существует только при $x \ge 1$, так как $\sqrt{x^2-1}$ имеет действительные значения при $|x| \ge 1$. Но x не может быть отрицательным, ибо тогда $x \pm \sqrt{x^2-1}$ тоже становится отрицательной величиной, а значит, $ln(\, x \pm \sqrt{x^2-1}\,)$ не может быть действительным. Из формулы (53) вытекает, что $Arth\,x$ существует при $|x| < 1$, так как для того, чтобы эта функция имела действительные значения, необходимо выполнение неравенства $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$, из которой следует: $|x| < 1$. Аналогично можно установить, что $Arcth\,x$ существует только при $|x| > 1$.

<u>Примечание</u>. Если $x = sch\,y$, то $y = Arsch\,x$ (ареасеканс гиперболический); если $x = csc\,h\,y$, то $y = Ar\,csc\,h\,x$ (ареакосеканс гиперболический).

§8. Показательные, тригонометрические и гиперболические функции от комплексного аргумента. Формулы Эйлера

До сих пор рассматривались только действительные значения аргумента показательной, тригонометрических и гиперболических функций. Возникает вопрос об определении этих функций для комплексных значений аргумента.

Определим эти функции при комплексных, в частности, мнимых значениях аргумента с помощью их разложений в степенные ряды, полагая, что аргумент может принимать не только действительные, но и комплексные значения.

Итак, если $z = x + iy$, где x и $y \in R$, а $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, то, <u>по определению,</u> под символами e^z, $\sin z$ и $\cos z$ понимают суммы следующих абсолютно сходящихся при любом z рядов:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \ ;$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \ ;$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots - (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \ .$$

В связи с этим гиперболические функции $sh\, z$ и $ch\, z$ определяются как соответствующие комбинации показательных функций e^z и e^{-z} или равносильными этим комбинациям рядами:

$$sh\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \ \Rightarrow$$

$$sh\,z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \quad ;$$

$$ch\,z=\frac{e^z+e^{-z}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$ch\,z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots \quad .$$

Эти ряды сходятся на всей плоскости XOY, т.е. при всех комплексных значениях z.

Функции $tg\,z$, $ctg\,z$, $th\,z$, $cth\,z$ определяются так:

$$tg\,z=\frac{sin\,z}{cos\,z}; \qquad ctg\,z=\frac{cos\,z}{sin\,z} \quad ;$$

$$th\,z=\frac{sh\,z}{ch\,z}; \qquad cth\,z=\frac{ch\,z}{sh\,z} \quad .$$

Распространив понятия показательной и тригонометрических функций на комплексную область, получим важные соотношения между показательной и тригонометрическими функциями, отсутствующие в действительной области.

Согласно нашему определению, функцию e^{iz}, где z – комплексная величина, можно дать в виде ряда:

$$e^{iz}=1+\frac{iz}{1!}+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\ldots+\frac{(iz)^4}{n!}+\ldots \quad .$$

Так как $i^{4m}=1$; $i^{4m+1}=i$; $i^{4m+2}=1$; $i^{4m+3}=-i$, $m\in N_0$,

то

$$e^{iz}=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots\right)+$$

$$+i\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right) .$$

Содержащиеся в скобках ряды являются разложениями функций $\cos z$ и $\sin z$, поэтому

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z \quad . \tag{56.1}$$

Заменяя в этом равенстве z на $-z$, получим:

$$e^{-iz}=\cos z-i\ \sin z \quad . \tag{56.2}$$

Обе эти функции дают выражения показательных функций e^{iz} и e^{-iz} через тригонометрические $\cos z$ и $\sin z$. Из них легко получить еще две формулы, выражающие тригонометрические функции $\cos z$ и $\sin z$ через показательные e^{iz} и e^{-iz}:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad ; \tag{56.3}$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad . \tag{56.4}$$

<u>Все четыре выведенные формулы называются формулами Эйлера.</u>

Из формулы (56.1), в частности, получаем:

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=1+i\cdot 1=i \quad ; \qquad e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1 \quad ;$$

$$e^{\frac{3}{2}\pi i}=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi=-i \quad ; \qquad e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=i$$

и, вообще,

$$e^{2k\pi i}=1\,; \qquad e^{(4k+1)\frac{\pi}{2}i}=i\,; \qquad e^{(4k+2)\frac{\pi}{2}i}=-1\,;$$

$$e^{(4k+3)\frac{\pi}{2}i}=-i\,; \qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ .$$

Формулы Эйлера позволяют ввести еще одну так называемую <u>показательную форму комплексного числа</u> z, наряду с его алгебраической и тригонометрической формами.

$$z=x+iy\ ,\quad |z|=r,\quad arg\,z=\varphi\ ,\ 0\le\varphi<2\pi\ ,\ x\ =\ r\ cos\ \ \varphi\ ,$$

$y\ =\ r\ sin\ \varphi$ (см. рис. 14) $\Rightarrow z=r\,cos\varphi+i\,sin\varphi=\ r(cos\varphi+i\,sin\varphi)$.

Тогда из алгебраической формы комплексного числа $z=x+iy$ получаем тригонометрическую $z=r(cos\varphi+i\,sin\varphi)$.

По формуле Эйлера, заменяя $cos\varphi+i\,sin\varphi=e^{i\varphi}$, имеем

$z=r\cdot e^{i\varphi}$ – <u>показательная форма комплексного числа</u> .

Следует отметить, что равенства

$$e^{x_1+x_2}=e^{x_1}\cdot e^{x_2}\ ; \qquad e^{x_1-x_2}=e^{x_1}:e^{x_2}\ ; \quad (e^{x_1})^n=e^{nx_1}$$

остаются справедливыми и при комплексных показателях z_1 и z_2 .

Если $z=x+iy$, где $x,y\in R$, то

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x\cdot(cos\,y+i\,sin\,y)\ . \tag{57}$$

Отсюда следует, что $r=\left|e^z\right|=e^x$, а $\varphi=arg\,z=y$.

Равенство (57) позволяет вычислять значения показательной функции при любом комплексном показателе степени z. Например:

$$e^{3-8i}=e^3(sin8-i\,sin8)\ .$$

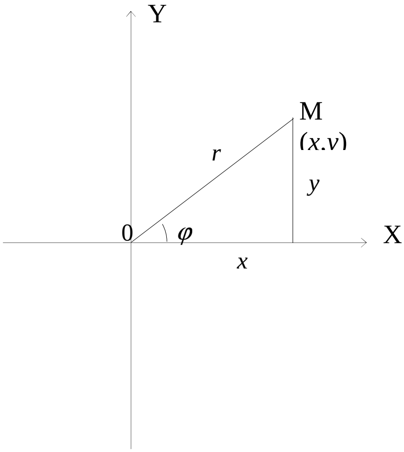

Рис. 14

Подобно этому формулы (56) и (57) дают возможность вычислить значения $\cos z$ и $\sin z$ при любом комплексном аргументе z. Например:

$$\sin(1+2i)=\frac{e^{i-2}-e^{2-i}}{2i}=\frac{e^{-2}(\cos 1+i\sin 1)-e^{2}(\cos 1-i\sin 1)}{2}=$$

$$=\frac{\cos 1\cdot(e^{-2}-e^{2})+i\sin 1\cdot(e^{-2}+e^{2})}{2i}=ch2\cdot\sin 1+i\;sh2\cdot\cos 1\ .$$

Ниже будет показан другой, более удобный практически, способ вычисления этих значений, позволяющий получить ответ непосредственно в гиперболических функциях, минуя показательные.

§9. Периодичность гиперболических функций

Напомним, что функция $y = f(x)$ будет периодична с периодом t, если для любого $x \in D$ справедливо равенство

$$f(x - t) = f(x) = f(x + t) \quad .$$

Для установления периодичности гиперболических функций решим предварительно вопрос о периодичности показательной функции e^x.

На основании формулы Эйлера $e^{ix} = cos\,x + i\,sin\,x$ имеем $e^{2\pi i} = cos\,2\pi + i\,sin\,2\pi = 1 + 0 = 1$. Поэтому

$$e^x = e^x \cdot 1 = e^x \cdot e^{2\pi i} = e^{x + 2\pi i} \quad .$$

Из равенства

$$e^x = e^{x + 2\pi i} \tag{58}$$

следует, что $2\pi i = t$ – период показательной функции. Очевидно, что эта постоянная величина может быть взята любое целое число раз, т.е. в виде $2\pi ki$, вследствие чего равенство (58) может быть записано в форме:

$$e^x = e^{x + 2\pi ki} \quad . \tag{59}$$

Заменяя в предыдущей формуле x на $-x$, получаем $e^{-x} = e^{-(x + 2k\pi i)}$, Тогда

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{x + 2\pi ki} + e^{-(x + 2\pi ki)}}{2} = sh(x + 2\pi ki) \ ,$$

т.е. имеем

$$sh\,x = sh(x + 2\pi ki) \quad .$$

Таким образом, гиперболический синус имеет период $t = 2\pi i$.

Аналогично,

$$ch\,x = ch(\,x + 2\pi ki\,),$$

т.е. $t = 2\pi i$.

Для установления периодичности функций $th\,x$ и $cth\,x$ следует иметь в виду, что $e^{2x} = e^{2x+2k\pi i}$. Тогда

$$thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{2x+2k\pi i} - 1}{e^{2k+2k\pi i} + 1} = \frac{e^{2(\,x+k\pi i\,)} - 1}{e^{2(\,x+2\pi i\,)} + 1} = th(\,x + k\pi i\,) \quad ,$$

т.е.

$$th\,x = th(\,x + k\pi i\,) \;.$$

Таким образом, период $th\,x:\;\; t = \pi i$.

Аналогично,

$$cth\,x = cth(\,x + \pi ki\,),$$

т.е. период $cth\,x:\; t = \pi i$.

Для справки: функции $sch\,x$ и $csc\,h\,x$ имеют период $t = 2\pi i$.

В комплексной области тригонометрические функции остаются периодическими и имеют те же периоды, что и в действительной области. В этом легко убедиться с помощью формул (56.3) и (56.4), если произвести в них замену z на $z + 2\pi$.

Так как

$$e^{i(\,z+2\pi\,)} = e^{iz+2\pi i} = e^{iz} \cdot e^{2\pi i} = e^{iz} \,,$$

а

$$e^{i(\,z+2\pi\,)} = e^{-iz} \cdot e^{-2\pi i} = e^{-iz} \cdot \frac{1}{e^{2\pi i}} = e^{-iz} \quad ,$$

то

$$cos(z+2\pi)=cos\, z\,, \qquad sin(z+2\pi)=sin\, z\ .$$

Это доказывает, что функции $cos\, z$ и $sin\, z$ периодические и имеют период, равный 2π и в комплексной области.

Периодичность $tg\, z$ и $ctg\, z$ можно обнаружить с помощью тех же формул. Имеем

$$e^{i(z+\pi)}=e^{iz+i\pi}=e^{iz}\cdot e^{i\pi}=-e^{-iz}\,; \qquad e^{-i(z+\pi)}=e^{-iz-i\pi}=e^{-iz}\cdot\frac{1}{e^{i\pi}}=-e^{-iz}$$

и, следовательно,

$$tg(z+\pi)=tg\, z\,; \qquad cfg(z+\pi)=ctg\, z\ .$$

Таким образом, функции $tg\, z$ и $ctg\, z$ также периодические и имеют период, равный π.

Проверим, что для функций $sin\, z$ и $cos\, z$ при любых комплексных z сохраняется основное тождество

$$sin^2 z+cos^2 z=1\ .$$

В самом деле

$$sin^2 z+cos^2 z=\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2+\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{e^{+2iz}-2+e^{-2iz}}{-4}+\frac{e^{2iz}+2+e^{-2iz}}{4}=1\ .$$

Точно также в комплексной области сохраняются и все остальные тождества, связывающие тригонометрические функции.

§10. Формулы приведения для гиперболических функций

Так как

$$sh(k\pi i + x) = \frac{e^{k\pi i + x} - e^{-(k\pi i + x)}}{2} = \frac{e^{k\pi i} \cdot e^{x} - e^{-k\pi i} \cdot e^{-x}}{2} =$$

$$= e^{-k\pi i} \cdot \frac{e^{2k\pi i} \cdot e^{x} - e^{-x}}{2}$$

и учитывая, что $e^{2k\pi i} = 1,\ e^{-k\pi i} = (-1)^k$, то

$$sh(k\pi i + x) = (-1)^k \cdot sh\, x\ . \qquad (60)$$

Аналогично,

$$ch(k\pi i + x) = (-1)^k \cdot ch\, x\ ; \qquad (61)$$

$$sh(k\pi i - x) = (-1)^{k+1} sh\, x\ ; \qquad (62)$$

$$ch(k\pi i - x) = (-1)^k ch\, x\ . \qquad (63)$$

Последние две формулы можно получить из первых двух ввиду нечетности $sh\, x$ и четности $ch\, x$.

Полезно иметь в виду следующие формулы:

$$sh\left((2k+1)\frac{\pi}{2} i + x\right) = (-1)^k i \cdot ch\, x\ ; \qquad (64)$$

$$sh\left((2k+1)\frac{\pi}{2} i - x\right) = (-1)^k i \cdot ch\, x\ ; \qquad (65)$$

$$ch\left((2k+1)\frac{\pi}{2} i + x\right) = (-1)^k i \cdot sh\, x\ ; \qquad (66)$$

$$ch\left((2k+1)\frac{\pi}{2}i - x\right) = (-1)^{k+1} i \cdot sh\,x \quad . \qquad (67)$$

Аналогично можно получить формулы приведения для функций $th\,x$ и $cth\,x$,

§11. Соотношения между тригонометрическими и гиперболическими функциями

Используя формулы

$$cos\,z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad (I) \qquad i\,sin\,z = \frac{e^{iz} - e^{iz}}{2}; \quad (II)$$

$$ch\,z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}; \quad (III) \qquad sh\,z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\ , \quad (IV)$$

можно установить простую связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями. Если в тождестве (III) произвести замену z на iz , то в правой части получится то самое выражение, которое стоит в правой части тождества (I), откуда вытекает равенство левых частей. То же самое имеет место для тождеств (IV) и (II).

Итак:

$$cos\,z = ch\,iz \quad ; \qquad (68)$$

$$i\,sin\,z = sh\,iz \quad . \qquad (69)$$

Из тождества (68) и (69) получим

$$i\,tg\,z = th\,iz \quad ; \qquad (70)$$

$$\frac{1}{i}ctg\,z = cth\,iz \quad . \qquad (71)$$

Аналогичная замена в тождествах (I) и (II) и сравнение с тождествами (III) и (IV) дают:

$$ch\, z = cos\, iz \quad ; \tag{72}$$

$$i\, sh\, z = sin\, iz \quad . \tag{73}$$

Наконец из тождеств (72) и (73) находим:

$$i\, th\, z = tg\, iz \quad ; \tag{74}$$

$$\frac{1}{i} cth\, z = ctg\, z \quad . \tag{75}$$

Если в тождествах (68) - (75) поменять $z = ix$, где $x \in R$, т.е. считать аргумент чисто мнимым, то получим еще восемь тождеств между тригонометрическими функциями чисто мнимого аргумента и соответствующими гиперболическими функциями действительного аргумента, а также между гиперболическими функциями чисто мнимого аргумента и соответствующими тригонометрическими функциями действительного аргумента:

$cos\, ix = ch\, x$; (68.1) $\qquad$ $sin\, ix = i\, sh\, x$; (69.1)

$tg\, ix = i\, th\, x$; (70.1) $\qquad$ $ctg\, ix = -i\, cth\, x$; (71.1)

$ch\, ix = cos\, x$; (72.1) $\qquad$ $sh\, ix = i\, sin\, x$; (73.1)

$th\, ix = i\, tg\, x$; (74.1) $\qquad$ $cth\, ix = -i\, ctg\, x$. (75.1)

Полученные соотношения дают возможность переходить от гиперболических функций к тригонометрическим с заменой мнимого аргумента действительным. Они могут быть сформулированы в виде следующего правила.

Для перехода от тригонометрических функций мнимого аргумента к гиперболическим или, наоборот, следует у синуса и тангенса мнимую единицу $"i"$ вынести за знак функции, а у косинуса отбросить её вовсе.

Примечание. У функции котангенс выносится $-i$.

Установленная связь позволяет получить все соотношения между гиперболическими функциями из известных соотношений между тригонометрическими функциями путем замены последних гиперболическими функциями.

Возьмем, для примера, основное тригонометрическое тождество

$$sin^2 z + cos^2 z = 1$$

и пологая в нем $z = ix$, где $x \in R$, получим

$$sin^2 iz + cos^2 iz = 1 \ .$$

Так как

$$sin\, ix = i\, sh\, x \Rightarrow sin^2 ix = -sh^2 x \ ;$$

$$cos\, ix = ch\, x \Rightarrow cos^2 ix = ch^2 x \ ,$$

то

$$ch^2 x - sh^2 x = 1 \, ,$$

а это и есть основное тождество между $sh\, x$ и $ch\, z$, выведенное ранее другим путем.

Аналогичным способом можно вывести все остальные формулы для гиперболических функций.

Из равенств

$$ch\,x = cos\,ix \;; \qquad sh\,x = \frac{1}{i}\,sin\,ix$$

следует

$$sh(x+y) = \frac{1}{i}\,sin\big(i(x+y)\big) = \frac{1}{i}\,sin(ix+iy) =$$

$$= \frac{1}{i}\big(sin\,ix\,cos\,iy + cos\,ix\,sin\,iy\big) = \frac{1}{i}\,sin\,ix \cdot cos\,iy + \frac{1}{i}\,cos\,ix\,sin\,iy \;.$$

Но, так как

$$\frac{1}{i}\,sin\,ix = sh\,x \;; \quad cos\,iy = ch\,y \;; \quad \frac{1}{i}\,sin\,iy = sh\,y \;; \quad cos\,ix = ch\,x \;,$$

то

$$sh(x+y) = sh\,x \cdot ch\,y + ch\,x \cdot sh\,y \;.$$

Аналогично,

$$ch(x+y) = cos\big(i(x+y)\big) = cos(ix+iy) = cos\,ix\,cos\,iy - sin\,ix\,sin\,iy \;.$$

$$sin\,ix = i\,sin\,x, \;\; sin\,iy = ishy \;; \qquad ch(x+y) = ch\,x \cdot ch\,y + sh\,x \cdot sh\,y \;.$$

Если положить $z = x + iy$, где $x, y \in R$, то можно получить ряд важных соотношений, применяя формулы для тригонометрических и гиперболических функций суммы аргументов:

$$sin(x+iy) = sin\,x \cdot chy + i\,cos\,x \cdot shy \;; \tag{76}$$

$$cos(x+iy) = cos\,x \cdot chy - i\,sin\,x \cdot shy \;; \tag{77}$$

$$tg(x+iy) = \frac{sin\,2x + ish2y}{cos\,2x + ch2y} \;; \tag{78}$$

$$ctg(x+iy)=\frac{\sin 2x - ish2y}{-\cos 2x + ch2y} \quad ; \tag{79}$$

$$sh(x+iy)=shx\cdot\cos y + ichx\cdot\sin y \quad ; \tag{80}$$

$$ch(x+iy)=chx\cdot\cos y + ishx\cdot\sin y \quad ; \tag{81}$$

$$fh(x+iy)=\frac{sh2x + i\sin 2y}{ch2x + \cos 2y} \quad ; \tag{82}$$

$$cfh(x+iy)=\frac{sh2x - i\sin 2y}{ch2x - \cos 2y} \quad . \tag{83}$$

Путем замены в последних восьми формулах y на $-y$ можно получить еще восемь формул для

$\sin(x-iy)$, $\cos(x-iy)$, $tg(x-iy)$, $cth(x-iy)$,

$sh(x-iy)$, $ch(x-iy)$, $th(x-iy)$, $cth(x-iy)$.

§12. Соотношения между обратными тригонометрическими и обратными гиперболическими функциями

Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции сведены между собой формулами:

$$\arcsin z = -i\, Arsh(iz) \quad ; \tag{84}$$

$$\arccos z = -iArch(iz) \quad ; \tag{85}$$

$$arctg\, z = -iArth(iz) \quad ; \tag{86}$$

$$arcctg\, z = iArcth(iz) \quad . \tag{87}$$

§13. Формула Муавра для гиперболических функций

Напомним формулу Муавра для тригонометрических функций.

Если два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ выразить в тригонометрической форме, то получим:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \;; \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \;.$$

Перемножая z_1 и z_2, получим:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\bigl(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\bigr) \;.$$

В случае наличия нескольких множителей $z_1, z_2, z_3 \ldots, z_n$, получим:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots r_n\bigl(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)\bigr) \;.$$

Целая положительная степень комплексного числа является частным случаем произведения <u>равных</u> сомножителей. Если $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, то предыдущая формула принимает вид:

$$z^n = \bigl(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\bigr)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi$, $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$.

Полагая $r = 1$, имеем формулу:

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi} \;, \qquad (88)$$

<u>называемую формулой Муавра</u>.

Эта формула справедлива при $\underline{n \in Z}$, т.е. $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Справедливость формулы Муавра для любого $"n"$ может быть доказана следующим образом.

Комплексное число $z = a + bi$ выразим в показательной форме $z = a + bi = r \cdot e^{i\varphi}$. Возводя в степень n, имеем

$$z^n = (a + bi)^n = r^n \cdot e^{i\varphi n} \quad .$$

При $r = 1$

$$z^n = e^{i\varphi n} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin\varphi \quad ,$$

так как $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ – формула Эйлера.

Если применить к левой части формулы Муавра при целом положительном n формулу Ньютона, то получим:

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos^n x + n\cos^{n-1} x \cdot i\sin x +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\cos^{n-2} x \cdot (i\sin x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\cos^{n-3} x \cdot (i\sin x)^3 + \ldots$$

или

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin x =$$

$$\cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \cdot \sin^4 x + \ldots$$

$$+ i(n\cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \cdot \sin^3 x + \ldots), \qquad (89)$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad 0 \le k \le n$ – биноминальные коэффициенты.

Тогда

$$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \cdot \sin^4 x - \ldots \; ; \qquad (89.1)$$

$$\sin nx = n\cos^{n-1} x \cdot \sin x - C_n^3 \cos^{-3} x \cdot \sin^3 x + \ldots \quad . \qquad (89.2)$$

Заменяя $"x"$ на $"ix"$, имеем:

$$cosnxi = cos^n ix - C_n^2 cos^{n-2} ix sin^2 ix + C_n^4 cos^{n-4} ix sin^4 ix - ... \quad ; \qquad (90.1)$$

$$sin\, nix = n\, cos^{n-1} ix\, sin\, ix - C_n^3 cos^{n-3} ix\, sin^3 ix + C_n^5 cos^{n-5} ix\, sin^5 ix - ... \quad .$$

(90.2)

Так как $cos\, ix = chx$ и $sin\, ix = ishx$, то

$$chnx = ch^n x + C_n^2 ch^{n-2} x \cdot sh^2 x + C_n^4 ch^{n-4} sh^4 x + ... \quad ; \qquad (91.1)$$

$$shnx = n \cdot ch^{n-1} x \cdot shx + C_n^3 ch^{n-3} sh^3 + C_n^5 ch^{n-5} \cdot sh^5 x + ... \quad . \qquad (91.2)$$

Равенство (91.2) получается из равенства (90.2) путем деления на i и переходе к гиперболическим функциям.

Формулы (91.1) и (91.2) можно получить и другим способом.

Так как $chx + shx = e^x$, $chx - shx = e^{-x}$, то

$$e^{nx} = (chx + shx)^n = ch^n x + C_n^1 ch^{n-1} shx + ...$$

$$e^{-nx} = (chx - shx)^n = ch^n x - C_n^1 ch^{n-1} shx + ... \quad .$$

Откуда

$$\frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2} = ch^n x + C_n^2 ch^2 x \cdot sh^2 x + ... \quad ;$$

$$\frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} = n \cdot ch^{n-1} xshx + C_n^3 ch^{n-3} x \cdot sh^3 x + ... \quad .$$

А это и есть формулы (91.1) и (91.2),

Пример,

• Найти $ch4x$ и $sh4x$.

Решение .

$$ch4x = ch^4 x + C_n^2 ch^2 x \cdot sh^2 x + C_n^4 sh^4 x = ch^4 x + 6ch^2 x \cdot sh^2 x + sh^4 x \quad .$$

Аналогично,

$$sh4x = 4ch^3x \cdot shx + 4chx \cdot sh^3x \ .$$

Таким образом, эти формулы позволяют выразить гиперболические функции кратных аргументов через гиперболические функции данного аргумента.

Примечание. Следует отметить, что существуют также соотношения между логарифмическими, обратными тригонометрическими и обратными гиперболическими функциями от комплексного аргумента. Интересующимся этим вопросом рекомендуем литературу, помещенную в конце данной работы.

§14. Гиперболическая амплитуда (гудерманиан)

Зависимость между гиперболическими и тригонометрическими функциями можно установить без мнимой единицы с помощью специального угла, называемого гиперболической амплитудой или гудерманианом. На равносторонней гиперболе $x^2 - y^2 = 1$ (рис. 15) возьмем точку $M(x,y)$. Из начала координат, как из центра, радиусом $0A = 1$, опишем дугу AB окружности и в точке A проведем к ней касательную до пересечения в точке C с прямой MC, проведенной из точки M параллельно оси абсцисс. Начало координат O соединим с точкой C прямой, пересекающей окружность в точке $N(X,Y)$. Угол $N0A = \gamma$ называется гиперболической амплитудой или гудерманианом, соответствующим точке M гиперболы, а также аргументу α гиперболических функций $ch\alpha = x$ и $sh\alpha = y$. Границы его изменения от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Если соединить точку N с основанием P перпендикуляра, опущенного из точки M на ось $0x$, то получим $\Delta 0NP$, в котором $\angle 0NP = 90^\circ$.

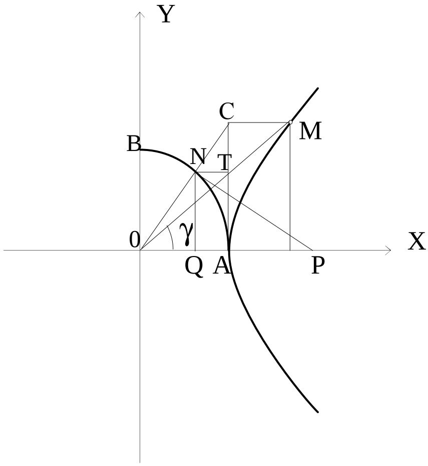

Рис. 15

Чтобы в этом убедится, достаточно доказать, что $0P^2 = 0N^2 + NP^2$. Для этого заметим, что $\Delta 0AC \infty \Delta 0QN$, где Q – основание перпендикуляра, опущенного из точки N на ось $0x$, поэтому, $\dfrac{0A}{0Q} = \dfrac{AC}{QN}$, т.е. $\dfrac{1}{X} = \dfrac{y}{Y}$, откуда $y = \dfrac{Y}{X}$. Заменяя в уравнении гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, на которой лежит точка M, y через $\dfrac{Y}{X}$, получим $x^2 - \dfrac{Y^2}{X^2} = 1$, откуда $(xX)^2 = X^2 + Y^2$. Так как точка N лежит на окружности, то $X^2 + Y^2 = 1$, и поэтому в первой четверти имеем соотношение $x \cdot X = 1$.

Теперь можно проверить справедливость доказываемого равенства. Имеем:

$$0P^2 = x^2\ ,\ 0N^2 = 1;\ NP^2 = (x - X)^2 + Y^2 = x^2 - 1\ ,$$

ибо $x \cdot X = 1$ и $X^2 + Y^2 = 1$. Следовательно,

$$0N^2 + NP^2 = 1 + x^2 - 1 = x^2 = 0P^2\ .$$

Из прямоугольных треугольников $0AC$, $0NP$ и $0 \in N$ имеем соответственно:

$$sht = y = AC = 0A \cdot tg\gamma = tg\gamma \quad (\text{ибо } A0 = 1)\ ;$$

$$cht = x = 0P = 0P \cdot sec\,\gamma = sec\,\gamma \quad (\text{ибо } 0N = 1)\ .$$

Кроме того,

$$th\alpha = \frac{sh\alpha}{ch\alpha} = \frac{tg\gamma}{sec\,\gamma} = sin\,\gamma\ ; \quad cth\alpha = \frac{1}{th\alpha} = \frac{1}{sin\,\gamma} = cos\,ec\gamma\ ;$$

$$sch\alpha = \frac{1}{cht} = \frac{1}{sec\,\gamma} = cos\,\gamma\ ; \quad cscht = \frac{1}{sht} = \frac{1}{tg\gamma} = ctg\gamma\ .$$

Итак, получены соотношения:

$$sh\ \alpha = tg\ \gamma\ ; \tag{92}$$

$$ch\ \alpha = sec\,\gamma\ ; \tag{93}$$

$$th\ \alpha = sin\,\gamma\ ; \tag{94}$$

$$cth\ \alpha = cos\,ec\,\gamma\ ; \tag{95}$$

$$sch\ \alpha = cos\,\gamma\ ; \tag{96}$$

$$csc\,h\ \alpha = ctg\ \gamma\ . \tag{97}$$

Для гиперболической амплитуды (гудерманиана) γ соответствующей аргументу гиперболических функций α, применяют обозначения:

$$\underline{\gamma = amph\alpha = gd\alpha} \; .$$

Если известен гудерманиан γ, то легко найти аргумент α, и наоборот. Для этого воспользуемся формулой

$$e^{\alpha} = ch\alpha + sh\alpha,$$

в которой произведем замену $ch\alpha$ через $sec\gamma$ и $sh\alpha$ через $tg\gamma$. Получим:

$$e^{\alpha} = sec\,\gamma + tg\,\gamma = \frac{1 + sin\,\gamma}{cos\,\gamma} = \frac{1 - cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)}{sin\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)} = tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right)$$

и, следовательно,

$$\alpha = ln\,tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) \; ; \tag{98}$$

$$\gamma = gd\alpha = 2arctge^{\alpha} - \frac{\pi}{2} \; . \tag{99}$$

Можно получить еще одну зависимость между α и γ:

$$tg\,\frac{\gamma}{2} = th\frac{\alpha}{2} \; . \tag{100}$$

В самом деле,

$$tg\,\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\gamma}{1 + cos\gamma}} = \sqrt{\frac{ch\alpha - 1}{ch\alpha + 1}} = tg\,\frac{\alpha}{2} \; .$$

Из формулы (100) имеем:

$$\gamma = gd\alpha = 2arctg\left(th\frac{\alpha}{2} \right) \quad . \qquad (101)$$

Последнюю формулу использовать для исследования функции $y = gd\,x$ и построения ее графика.

При $x = 0$ $\qquad y = 2arctg(\,th0\,) = 0$.

При $x \to +\infty$ функция $th\frac{x}{2} \to 1$, а $\quad arctg\left(tg\frac{x}{2} \right) \to \frac{\pi}{4}$,

следовательно, $y \to \frac{\pi}{2}$. При $x \to -\infty$ $\qquad y \to -\frac{\pi}{2}$.

График функции $y = gd\,x$ дан на рис. 16.

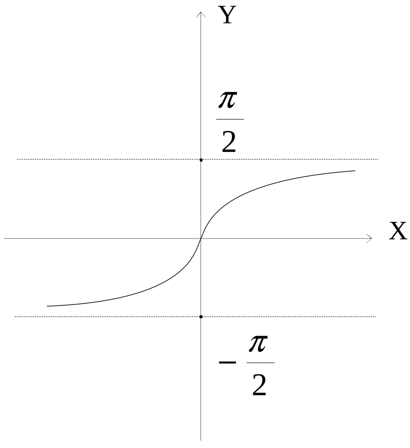

Рис. 16

Понятие гудерманиана обобщается и на случай мнимого аргумента. При этом можно получить следующее важное соотношение.

Если $\gamma = gd\,\alpha$, то как было показано, справедливо равенство (100). Умножив обе его части на i, получим $itg\frac{\gamma}{2} = ith\frac{\alpha}{2}$ или, по ранее доказанному, $th\frac{i\gamma}{2} = tg\frac{i\alpha}{2}$. Откуда $i\alpha = gdi\gamma$.

Итак, если $\gamma = gd\ \alpha$, то

$$i\alpha = gd\, i\gamma\ . \tag{102}$$

Можно ввести также функцию, обратную гудерманиану. Если $x = gd\ y$, то y обозначают так: $y = arg\ gd\ x$.

§15. Дифференцирование и интегрирование гиперболических и обратных гиперболических функций

Получим ряд формул дифференцирования гиперболических и обратных гиперболических функций.

15.1. $\underline{y = sh\,x}$

$$y' = (sh\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = ch\,x\ . \tag{103}$$

15.2. $\underline{y = ch\,x}$

$$y' = (ch\,x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\,x\ . \tag{104}$$

15.3. $\underline{y = th\,x}$

$$y' = (th\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$=\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}=\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^2=\frac{1}{ch^2x} \qquad (105)$$

или

$$y'=(th\,x)'=\left(\frac{shx}{chx}\right)'=\frac{chx\cdot chx-shx\cdot shx}{ch^2x}=\frac{1}{ch^2x}\ .$$

15.4. $\underline{y=cth\,x}$

$$y'=(cth\,x)'=\left(\frac{ch\,x}{sh\,x}\right)'=\frac{shx\cdot shx-chx\cdot chx}{sh^2x}=-\frac{1}{sh^2x}\ . \qquad (106)$$

Так как гиперболические функции выражаются через показательные, то производные обратных гиперболических функций можно найти следующим образом.

15.5. $\underline{y=Arsh\,x}$

Из равенства $y=Arsh\,x$ имеем $x=shy$. Дифференцируем по $''x''$:

$$1=chy\cdot y'\Rightarrow y'=\frac{1}{chy}=\frac{1}{\pm\sqrt{sh^2y+1}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}\ ,$$

т.е.

$$(Arsh\,x)'=\frac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}\ . \qquad (107)$$

При выборе знака перед корнем в формуле (107) следует принять во внимание следующий факт: так как функции $y=sh\,x$ и $y=Arsh\,x$ являются функциями однозначными и обе – возрастающие, то в производной берется знак $''+''$. Итак:

$$(Arsh\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad . \tag{108}$$

15.6. $\underline{y = Arch\,x}$

Аналогично:

$$y = Archx \;\Rightarrow\; x = chy\,;\; x' = (chy)' = shy \cdot y' \;\Rightarrow\; 1 = shy \cdot y'$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{sh\,y} = \frac{1}{\pm\sqrt{chy^2-1}} = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \; .$$

Для устранения двузначности в результате дифференцирования условимся принимать во внимание только положительные значения функции $Arch\,x$, т.е. когда $Archx = ln(x\sqrt{x^2+1})$ имеет положительные значения. При этом условии:

$$(Arch\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad . \tag{109}$$

15.7. $\underline{y = Arth\,x}$

Аналогично:

$$y = Arthx \;\Rightarrow\; x = thy \;\Rightarrow\; x' = (thy)' = \frac{1}{ch^2 y}\cdot y' \;\Rightarrow 1 = \frac{1}{ch^2 y}\cdot y' \;\Rightarrow$$

$$1 = \frac{ch^2 y - sh^2 y}{ch^2 y}\cdot y' \;\Rightarrow\; 1 = (1 - th^2 y)\cdot y' \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{1-th^2 y} = \frac{1}{1-x^2} \; .$$

Итак

$$(Arthx)' = \frac{1}{1-x^2} \quad . \tag{110}$$

15.8. $\underline{y = Arcth\,x}$

Аналогично,

$$y = Arcthx \;\Rightarrow\; x = cthy \;\Rightarrow\; x' = (\,cthy\,)' = -\frac{1}{sh^2 y}\cdot y' \;\Rightarrow$$

$$1 = -\frac{1}{sh^2 y}\cdot y' \;\Rightarrow\; 1 = -\frac{ch^2 y - sh^2 y}{sh^2 y}\cdot y' \;\Rightarrow\; .$$

Итак:

$$(\,Arcth\,x\,)' = \frac{1}{1-x^2}\quad . \tag{111}$$

Отметим, что

$$\left(gd\;x\right)' = sch\,x\;\;; \tag{112}$$

$$\left(arg\;gd\;x\right)' = sec\,x\;\;. \tag{113}$$

Производя обращение таблицы производных, получим таблицу интегралов

$$\int ch\,x\,dx = sh\,x + c\quad ; \tag{114}$$

$$\int sh\,x\,dx = ch\,x + c\quad ; \tag{115}$$

$$\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\,x + c\quad ; \tag{116}$$

$$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\,x + c\quad ; \tag{117}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = ln(\,x + \sqrt{x^2+a}\,) + C =$$

$$=\begin{cases} Arsh\dfrac{x}{\sqrt{a}}+C & npu\; a>0, \\ Arsh\dfrac{x}{\sqrt{-a}}+C & npu\;\; a<0, \end{cases} \tag{118}$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C=$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{1}{a}Arth\dfrac{x}{a}+C & npu\; |x|<a, \\ -\dfrac{1}{a}Arcth\dfrac{x}{a}+C & npu\; |x|>a, \end{cases} \tag{119}$$

$$\int\frac{dx}{ch\,x}=gd\;x+C=2\,arctg\;e^x+C \quad ; \tag{120}$$

$$\int\frac{dx}{cos\,x}=arg\;gd\;x+C=ln\,th\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C \;. \tag{121}$$

Приведенную таблицу интегралов можно продолжить.

Приведем примеры интегрирования гиперболических функций. В дальнейшем будут показаны некоторые приемы, позволяющие применить гиперболические функции к более сложным вопросам интегрирования.

1). $\int sh^3xdx=\int sh^2x\cdot shxdx=\int(ch^2x-1)shxdx=$

$$=\int ch^2x\cdot shxdx-\int shxdx=\int ch^2x\cdot d(chx)-chx+c=\frac{ch^3x}{3}-chx+C \;.$$

2). $\int ch^4xdx=\int(ch^2x)^2dx=\int\left(\dfrac{ch2x+1}{2}\right)^2dx=$

$$=\frac{1}{4}\left(\int ch^2 2xdx+2\int ch2xdx+\int dx\right)= \frac{1}{4}\int\frac{ch4x+1}{2}dx+\frac{1}{2}shx+x=$$

$$=\frac{1}{8}sh4x+\frac{1}{8}x+\frac{2shx}{4}+\frac{x}{4}+C= \frac{1}{8}sh4x+\frac{2shx}{4}+\frac{3}{8}x+C \quad .$$

3). $\int th^2xdx=\int\frac{sh^2x}{ch^2x}dx=\int\frac{ch^2x-1}{ch^2x}dx=$

$$=\int dx-\int\frac{1}{ch^2x}dx=x-thx+C \quad .$$

На последнем примере видно преимущество, в некоторых случаях, применения гиперболических функций. Так, если был бы задан интеграл $\int\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2dx$, то интегрирование его обычным способом было бы сложно; а, если обратить внимание, что $\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2=th^2x$, то результат получается просто, как показано в примере 3.

4). $\int\frac{dx}{(e^x+e^{-x})^2}$

Данный интеграл можно записать так:

$$\int\frac{dx}{(e^x+e^{-x})^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{ch^2x}=\frac{1}{4}thx+c=\frac{1}{4}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+C \quad .$$

5). $\int\limits_0^{ln2}\frac{dx}{ch^4x}=\int\limits_0^{ln2}\frac{ch^2x-sh^2x}{ch^4x}dx=\int\limits_0^{ln2}\frac{ch^2x}{ch^4x}dx-$

$$-\int_0^{\ln 2}\frac{sh^2x}{ch^4x}dx = thx\Big|_l^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2}\frac{sh^2x}{ch^2x}\cdot\frac{dx}{ch^2x} = thx\Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} th^2x\cdot d(thx) =$$

$$= thx\Big|_0^{\ln 2} - \frac{th^3x}{3}\Big|_0^{\ln 2} = thx\left(1-\frac{th^2x}{3}\right)\Big|_0^{\ln 2} \quad . \qquad \otimes$$

Но $thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, тогда $th(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}} = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{5}$;

$th(0) = 0$, поэтому $\otimes$ равно: $\dfrac{3}{5}\left(1-\dfrac{9}{75}\right) = \dfrac{66}{125}$.

6). $$\int\frac{dx}{chx\cdot shx} = \int\frac{\frac{dx}{ch^2x}}{\frac{chx\cdot shx}{ch^2x}} = \int\frac{1}{thx}\cdot\frac{dx}{ch^2x} = \int\frac{d(thx)}{thx} =$$

$$= \ln|thx| + C \quad .$$

Рассмотрим вопрос о вычислении интеграла от рациональной функции гиперболического синуса и гиперболического косинуса $\int R(sh\,x, ch\,x)\,dx$, где R – символ рациональной функции.

Такой интеграл можно вычислить с помощью подстановки $th\dfrac{x}{2} = z$. При этом:

$$x = 2Arth\,z \quad ; \qquad dx = \frac{2dz}{1-z^2} \quad ; \quad sh\,x = \frac{2z}{1-z^2} \quad ; \quad ch\,z = \frac{1+z^2}{1-z^2} \quad .$$

Тогда:

$$\int R(shx,chx)dx=\int R\left(\frac{2z}{1-z^2};\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)\cdot\frac{2dz}{1-z^2}=\int R_1(z)dz\ ,$$

где R_1 – символ рациональной функции от z .

7). $$\int\frac{dx}{(1+chx)^2}=\int\left(\left(\frac{2}{1-z^2}\right)\Big/\left(1+\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^2\right)dz=$$

$$\frac{1}{2}\int(1-z^2)dz=2\left(z-\frac{z^3}{3}\right)+C=\frac{1}{2}th\frac{x}{2}-\frac{1}{6}th^3\frac{x}{2}+C\ .$$

В заключении приведем ряд формул для интегрирования гиперболических функций:

$$\int sh^n x\,dx=\frac{sh^{n-1}\cdot chx}{n}-\frac{n-1}{n}\int sh^{n-2}x\cdot dx+C\ ; \qquad (122)$$

$$\int ch^n x\,dx=\frac{ch^{n-1}\cdot shx}{n}-\frac{n-1}{n}\int ch^{n-1}x\,dx+C\ ; \qquad (123)$$

$$\int th^n x\,dx=-\frac{th^{n-1}x}{n-1}+\int th^{n-2}x\cdot dx+C\ ; \qquad (124)$$

$$\int\frac{dx}{th\,x}=ln\,sh\,x+C\ ; \qquad (125)$$

$$\int\frac{dt}{cth\,x}=ln\,ch\,x+C\ ; \qquad (126)$$

$$\int sh2x\,dx=ch^2x+C=sh^2x+C\ . \qquad (127)$$

§16. Разложение гиперболических функций в степенные ряды и в тригонометрические ряды Фурье

Из курса дифференциального исчисления известно разложение показательной функции $y = e^x$ в степенной ряд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

сходящийся при любом $x \in R$.

Заменяя x на $-x$, имеем

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Складывая и вычитая почленно, имеем:

$$e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right)$$

или

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots ,$$

т.е.

$$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots . \tag{128}$$

Аналогично:

$$e^x - e^{-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right)$$

или

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots ,$$

т.е.

$$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... \quad . \qquad (129)$$

Эти ряды сходятся для любого значения $x \in R$.

Ниже приводятся разложения некоторых других функций:

$$thx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{5}x^5 - \frac{17x^5}{315} + \frac{62x^9}{2835} - ... +$$

$$+ \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} \cdot B_{2n} \cdot x^{2n-1} + ... \quad (|x| < \frac{\pi}{2}) \ , \qquad (130)$$

где B_n – числа Бернулли. Подробнее о числах Бернулли см. в «Приложениях».

$$cth\, x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + ... +$$

$$+ \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_{2n} \cdot x^{2n-1} + ... \qquad (|x| < \pi; \quad x \neq 0) \ ; \qquad (131)$$

$$sch\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} - \frac{61x^6}{6!} + ... +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{(2n)!} E_n \cdot x^{2n} + ... \qquad \left(|x| < \frac{\pi}{4}\right), \qquad (132)$$

где E_n – числа Эйлера. О числах Эйлера см. в «Приложениях».

$$csc\,h\ x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15120} + ... +$$

$$+\frac{(-1)^n \cdot 2(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n \cdot x^{2n-1}+\dots \quad (|x|<\pi,\ x\neq 0)\ ; \qquad (133)$$

$$Arsh\,x = x+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\dots+$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots\cdot 2n(2n+1)}\cdot x^{2n+1}+\dots \quad (|x|\leq 1)\ ; \qquad (134)$$

$$Arsth\,x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots+$$

$$+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots \qquad (|x|<1)\quad ; \qquad (135)$$

$$gd\,x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{24}-\frac{61x^7}{5040}+\dots\ ; \qquad (136)$$

$$arg\,gd\,x = x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{24}+\frac{61x^7}{5040}+\dots \qquad \left(|x|<\pi/2\right)\ . \qquad (137)$$

Из теории рядов Фурье известны разложения показательных функций e^x и e^{-x} в тригонометрические ряды Фурье на промежутке $(-\pi;\pi)$:

$$e^x = \frac{sh\pi}{\pi}+\frac{2sh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\cos nx+n\sin nx}{1+n^2}\quad ;$$

$$e^{-x} = \frac{sh\pi}{\pi}+\frac{2sh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\cos nx-n\sin nx}{1+n^2}\quad .$$

Беря полусумму и полуразность этих рядов, получим разложения в ряды Фурье гиперболических функций $ch\,x$ и $sh\,x$:

$$ch\,x = \frac{sh\pi}{\pi} + \frac{2sh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\cos nx}{1+n^2} \qquad (|x| \le \pi)\ ; \qquad (138)$$

$$shx = \frac{sh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{n\sin nx}{1+n^2} \qquad (|x| < \pi)\ . \qquad (139)$$

Приведем разложения некоторых других тригонометрических функций в тригонометрические ряды Фурье:

$$shax = \frac{2sha\pi}{\pi} + \frac{2sh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{n\sin nx}{a^2+n^2} \qquad (|x| < \pi)\ ; \qquad (140)$$

$$chax = \frac{2sha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right) \qquad (|x| \le \pi)\ ; \qquad (141)$$

$$sh\,a(\pi - x) = \frac{2sha\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{n\sin nx}{a^2+n^2} \qquad (0 < x < 2\pi)\ ; \qquad (142)$$

$$ch\ a(\pi - x) = \frac{2sha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right) \qquad (0 < x < 2\pi)\ ; \qquad (143)$$

$$ch\,x = \frac{2sh\,x}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{\cos nx}{1+n^2}\right) \qquad (0 < x < \pi)\ ; \qquad (144)$$

$$ch\,x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{1-(-1)^n\,ch\pi}{1+n^2} \cdot n\sin nx \qquad (0 < x < \pi)\ . \qquad (145)$$

Глава II. ПРИМЕНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§17. Решение кубических уравнений

Пусть заданно кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ .$$

Это уравнение путем замены $x = y - \dfrac{b}{3a}$ можно преобразовать в так называемый приведенный вид:

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \ , \qquad \otimes$$

При этом коэффициенты обоих видов уравнения связаны следующими соотношениями:

$$3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}; \quad 2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \ .$$

Корни уравнения $\otimes$ можно вычислить с помощью тригонометрических и гиперболических функций по приводимой ниже таблице.

В указанной таблице $r = \pm\sqrt{|p|}$, причем знак r должен совпадать со знаком q, т.е. $rq > 0$. Вспомогательная величина φ определяется из приведенной таблицы в зависимости от знаков p и суммы $q^2 + p^3$ по формуле, расположенной в соответствующем столбце таблицы. Вычислив r и φ, находят все три корня x_1, x_2, x_3 по формулам в том же столбце.

Таблица корней кубического уравнения

$p < 0$		$p > 0$
$q^2 + p^3 \le 0$	$q^2 + p^3 > 0$	
$\cos\varphi = \dfrac{q}{r^3}$	$ch\varphi = \dfrac{q}{r^3}$	$sh\varphi = \dfrac{q}{r^3}$
$x_1 = -2r\cos\dfrac{\varphi}{3}$	$x_1 = -2r\,ch\dfrac{\varphi}{3}$	$x_1 = -2r\,sh\dfrac{\varphi}{3}$
$x_2 = 2r\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\varphi}{3}\right)$	$x_2 = r\,ch\dfrac{\varphi}{3} + i\sqrt{3}\,r\,sh\dfrac{\varphi}{3}$	$x_2 = r\,sh\dfrac{\varphi}{3} + i\sqrt{3}\,r\,ch\dfrac{\varphi}{3}$
$x_3 = 2r\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\varphi}{3}\right)$	$x_3 = r\,ch\dfrac{\varphi}{3} - i\sqrt{3}\,r\,sh\dfrac{\varphi}{3}$	$x_3 = r\,sh\dfrac{\varphi}{3} - i\sqrt{3}\,r\,ch\dfrac{\varphi}{3}$

- В качестве примера решим кубическое уравнение

$$x^3 + 2x - 1 = 0 .$$

Имеем $p = \dfrac{2}{3}$, $q = -\dfrac{1}{2}$. Следовательно, $q^2 + p^3 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{9} > 0$.

А так как $p > 0$, то следует воспользоваться третьим столбцом таблицы.

По формуле для вычисления r определим, что $r = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} = -0.816$. А из таблицы находим, что

$sh\varphi = \frac{q}{2^3} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} = 0.916$. По таблице гиперболического синуса получаем $\varphi = 0.82$, т.е. $\frac{\varphi}{3} = 0.27$, а $sh\frac{\varphi}{3} = sh0.27 = 0.273$, $ch\frac{\varphi}{3} = ch0.27 = 1.037$. Подставляя вычисленные значения r, $sh\frac{q}{3}$ и $ch\frac{\varphi}{3}$ в формулы для нахождения корней, получаем:

$$x_1 = -2rsh\frac{\varphi}{3} = 2\cdot 0.816\cdot 0.273 = 0.445; \quad x_2 = r\,sh\frac{\varphi}{3} + ir\sqrt{3}\cdot ch\frac{\varphi}{3} =$$

$$= -0.816\cdot 0.272 - i\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3}\cdot 1.037 = -0.223 - 1.466\cdot i;$$

$$x_3 = r\cdot sh\frac{\varphi}{3} - ir\cdot\sqrt{3}\cdot ch\frac{\varphi}{3} = -0.223 + 1.466\cdot i.$$

§18. Интегрирование функций (гиперболические подстановки)

Как известно из курса интегрального исчисления, интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, где R – символ рациональной функции, может быть вычислен с помощью так называемых тригонометрических подстановок, т.е. путем замены аргумента x тригонометрической функцией новой переменной t.

Однако тригонометрические подстановки иногда приводят к громоздким выкладкам, особенно тогда, когда вводится секанс или косеканс. В этом случае можно при интегрировании функции вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ применять гиперболические подстановки.

Изложим этот способ.

1). Преобразуем сначала подкоренное выражение путем дополнения квадратичного трехчлена до полного квадрата:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)=a\left(y^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right),$$

где $x+\dfrac{b}{2a}=y$;

2). Если $a>0$, то обозначив $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}=\pm h^2$ и заметив, что $dx=dy$, приведем данный интеграл к виду:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(y-\frac{b}{2a},\ \sqrt{a}\cdot\sqrt{y^2\pm h^2}\right)dy\ .$$

3). Если $a<0$, то запишем $ax^2+bx+c=-a\left(\dfrac{b^2-4ac}{4ac^2}-y^2\right)$ и обозначим $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=h^2$. (Знак «–» перед h^2 невозможен при условии вещественного корня $\sqrt{ax^2+bx+c}$). Тогда

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(y-\frac{b}{2a},\ \sqrt{-a}\cdot\sqrt{h^2-y^2}\right)dy\ .$$

4). Данный интеграл приводится к одному из следующих трех типов:

$$I_1 = \int R_1\left(y, \sqrt{y^2 + h^2} \right) dy \ ; \qquad I_2 = \int R_1\left(y, \sqrt{y^2 - h^2} \right) dy \ ;$$

$$I_3 = \int R_1\left(y, \sqrt{h^2 - y^2} \right) dy \ ,$$

где R_1 - символ рациональной функции.

5). Интеграл I_1 подстановкой $y = h \cdot sht$ преобразуется к виду

$$I_1 = \int R_1(h\,sh\,t,\ h\,ch\,t\,)h\,ch\,t\,dt = \int R_2(\,sh\,t, ch\,t\,)\,dt \ .$$

Аналогичный результат получается для интегралов I_2 и I_3. Введя, соответственно, подстановки $y = h \cdot ch\,t$ и $y = h \cdot th\,t$, имеем

$$I_2 = \int R_1(\,h\,ch\,t,\ h\,sh\,t\,)h\,sh\,t\,dt = \int R_2(\,sh\,t,\ ch\,t\,)\,dt \ ;$$

$$I_3 = \int R_1(\,h\,th\,t, h\,sch\,t\,)\frac{h\,dt}{ch^2 t} = \int R_2(\,sh\,t,\ sch\,t\,)\,dt \ .$$

<u>Примеры</u>.

• Вычислить: $\int \sqrt{x^2 + a^2}\ dx$.

<u>Решение.</u> Положим $x = a\,sh\,t$, тогда $dx = a\,ch\,t$ и

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = a^2 \int ch^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (ch2t + 1)dt = \frac{a^2}{2}\left(\frac{sh2t}{2} + t \right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} shtcht + \frac{a^2}{2} t + C = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} Arsh \frac{x}{a} + C \ ,$$

где $Arsh\dfrac{x}{a}$ – функция, обратная к $x = a\,sh\,t$.

- Вычислить: $\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx$.

<u>Решение.</u> Положим $x = ch\,t$, тогда $dx = sh\,t\,dt$ и

$$\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx = \int sh^4 t\,dt = \int \left(\frac{ch2t-1}{2} \right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int ch^2 2tdt - \frac{1}{2}\int ch2tdt + \frac{1}{4}\int dt = \frac{1}{32}sh4t - \frac{1}{4}sh2t + \frac{3}{8}t + C \ .$$

Если принять во внимание равенства

$$sh4t = 2sh2tch2t = 4chtsht(ch^2 t + sh^2 t) = 4x\sqrt{x^2-1}(2x^2-1),$$

$$sh2t = 2x\sqrt{x^2-1}\,, \qquad t = Arch\,x = ln(x + \sqrt{x^2+1}) \ ,$$

то можно записать

$$\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx = \frac{1}{8}(2x^3-5x)\sqrt{x^2-1} + \frac{3}{8}ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C \ .$$

§19. Интегрирование некоторых дифференциальных уравнений

Гиперболические функции находят применение при интегрировании некоторых дифференциальных уравнений. В процессе интегрирования уравнений можно получить легко вычисляемые интегралы при помощи гиперболических подстановок. Решения многих дифференциальных уравнений, в частности линейных, удобно выражать через гиперболические функции. При этом значительно сокращаются выкладки и сами решения получаются в более компактной форме. Кроме того, гиперболические подстановки позволяют иногда упростить дифференциальные уравнения, сводя их к легко интегрируемым видам.

Рассмотрим примеры.

1). $y''-a^2 y=0$.

Это однородное линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $r^2-a^2=0$ имеет корни $r_1=a$ и $r_2=-a$. Поэтому частными решениями будут показательные функции e^{ax} и e^{-ax}, а также их линейные комбинации. Примем в качестве частных решений

$$y_1=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}=ch\,ax \quad \text{и} \quad y_2=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}=sh\,ax \ .$$

Легко убедится в линейной независимости этих частных решений. Для этого составим и вычислим определитель Вронского

$$W[y]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ch\,ax & sh\,ax \\ a\,sh\,ax & a\,ch\,ax \end{vmatrix}=a(ch^2ax-sh^2ax)=a\neq 0 \ .$$

Так как $W[y]\neq 0$, то частные решения образуют фундаментальную систему и общее решение запишется так:

$$y=C_1\,ch\,ax+C_2\,sh\,ax \ .$$

При начальных условиях $y(0)=1$; $y'(0)=0$ частным решением будет $y=ch\,ax$. При $y(0)=0$; $y'(0)=1$ в качестве частного решения получим $y=sh\,ax$.

2). $y^{IV}-a^4y=0$.

Это однородное линейное уравнение 4-го порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $z^4-a^4=0$ имеет корни $r_{1,2}=\pm a$; $r_{3,4}=\pm ia$. Общее решение

$y = C_1^* e^{ax} + C_2^* e^{-ax} + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax$. Если заменить e^{ax} через $ch\,ax + sh\,ax$, а e^{-ax} через $ch\,ax - sh\,ax$, то получим

$$y = C_1\, ch\,ax + C_2\, sh\,ax + C_3 \cos ax + C_4 \sin ax \ ,$$

где $C_1^* + C_2^* = C_1$ и $C_1^* - C_2^* = C_2$.

3). $ay' = \sqrt{1 + y^2}$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. После разделения переменных получим $\dfrac{ady}{\sqrt{1+y^2}} = dx$, откуда

$$\int \frac{ady}{\sqrt{1+y^2}} = \int dx + C \Rightarrow Arsh\, y = x + C \ .$$

Общее решение

$$y = sh\frac{x+C}{a} \quad .$$

В частности, при $y(0) = 0$ получаем $C = 0$, $y = sh\dfrac{x}{a}$.

4). $yy'' = 1 + (y')^2$.

Это нелинейное уравнение 2-го порядка, которое подстановкой $y' = p$, $y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy}$ сводится к уравнению 1-го порядка $yp \cdot \dfrac{dp}{dy} = 1 + p^2$, откуда $\dfrac{pdp}{1+p^2} = \dfrac{dy}{y}$.

После интегрирования имеем:

$$\frac{1}{2}ln(1+p^2)=ln\,y-ln\,C_1 \Rightarrow \sqrt{1+p^2}=\frac{y}{C_1}$$

или $\dfrac{dy}{\sqrt{(y/C_1)^2-1}}=\pm dx$. Тогда

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(y/C_1)^2-1}}=\pm\int dx \Rightarrow C_1 Arch\frac{y}{C_1}=\pm(x+C_2),$$

откуда $y=C_1\cdot ch\dfrac{x+C_2}{C_1}$ (знак «–» опущен за счет четности функции $y=ch\,x$).

5). $y=a\sqrt{1+(y')^2}$.

Положим, $y'=sh\,z$, тогда уравнение преобразуется к виду $y=a\,ch\,z$, откуда $y'=az'\cdot sh\,z$ или, заменяя y' через $sh\,z$, $sh\,z=az'\,sh\,z$. Получим $z'=\dfrac{1}{a}$, откуда $z=\dfrac{x+C}{a}$, т.е.

$$y=a\cdot ch\frac{x+C}{a} \;.$$

6). $y'=\dfrac{y}{x}+a\sqrt{x^2+y^2}$.

Это однородное уравнение. Пусть $y=x\,sh\,z$, тогда $y'=x\cdot z'\,ch\,z+sh\,z$, что дает $xz'\,ch\,z+sh\,z=sh\,z+ax\,ch\,z$, откуда вытекает $z'=a$, $z=ax+C$ и, следовательно,

$$y=x\cdot sh(ax+c) \;.$$

7). $ay''=\sqrt{1+(y')^2}$.

Положим $y' = shz,$ тогда $y'' = z'ch\,z,$ и уравнение преобразуется к виду $az' = 1,$ откуда $z = \dfrac{x + C_1}{a}$. Поэтому $y' = sh\dfrac{x + C_1}{a},$ и, окончательно,

$$y = a\,ch\frac{x + C_1}{a} + C_2 \;.$$

§20. Задача о провисании нити

Тяжелая гибкая однородная нерастяжимая нить, закрепленная концами в двух точках (рис. 18), провисает под действием собственного веса. Вывести уравнение линии провисания нити.

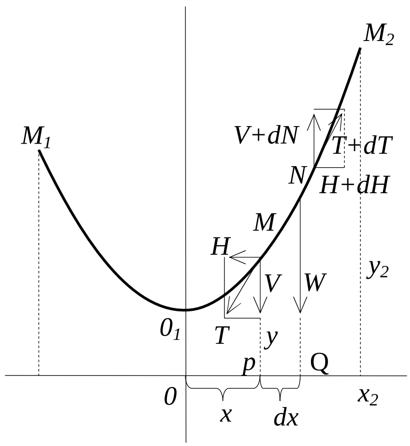

Рис. 18

Решение. Выделим бесконечно малый элемент нити $\cup MN$ от точки $M(x, y)$ до точки $N(x + dx, y + dy)$ и выясним, какие силы на него действуют.

В точке M на нить действует натяжение $\overline{T}$, направленное по касательной к кривой. Его составляющие по осям координат $\overline{H}$ и $\overline{V}$. Соответственно в точке N имеется натяжение $T+dT$, направленное по касательной в точке N, с составляющими $\overline{H}+d\overline{H}$ и $\overline{V}+d\overline{V}$. Кроме того, на элемент $\overline{MN}$ действует направленная вертикально вниз сила тяжести $W=q\cdot ds$, где ds –дифференциал длины дуги нити, а q – вес единицы длины нити.

Как известно из статики, если система сил находится в равновесии, то сумма проекций на любую ось всех действующих на нее сил равна 0.

Проектируя на ось $0x$, получим

$$-H+(H+dH)=0 \quad \text{или} \quad dH=0,$$

откуда $H=const$, т.е. горизонтальная составляющая натяжения во всех точках одна и та же.

Проектируя на ось $0y$, получим.

$$-V-q\cdot ds+(v+dv)=0 \quad \text{или} \quad dv=q\cdot ds\ .$$

Если обозначить через угол α, образованный касательной в точке M кривой с осью $0x$, то, получим

$$\frac{dy}{dx}=tg\alpha=\frac{V}{H} \quad \text{или} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)'=\left(\frac{V}{H}\right)' \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{H}\cdot\frac{dv}{dx}\ .$$

Но так как $dv=q\cdot ds$, то

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{H}\cdot\frac{ds}{dx}\ .$$

Используя из математического анализа формулу $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+(y')^2}$, получим

$$ay'' = \sqrt{1+(y')^2} ,$$

где $a = \frac{H}{q}$.

Общее решение этого уравнения

$$y = a\,ch\frac{x+C_1}{a} + C_2 \qquad \otimes$$

(см. § 19, пример 7) представляет собой некоторое семейство кривых.

График гиперболической функции $y = a \cdot ch\frac{x}{a}$ называется цепной линией. Это название связано с тем, что цепь, подвешенная свободно за оба конца, принимает форму этой кривой.

Если в уравнении $\otimes$ подобрать произвольные постоянные C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворялись граничные условия $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, то будет определена искомая линия провисания, которая является цепной линией, смещенной по осям координат.

В заключение отметим, что гиперболические функции встречаются при решении различных задач из геометрии, механики, теплотехники, электротехники, химии и т.д. Укажем некоторые из них: падение тела в воздухе; движение материальной точки; скольжение цепочки; движение шарика во вращающейся трубке; включение электродвижущей силы в контур; установившееся распределение температуры в стержне; ионизация газа; диффузия, сопровождаемая химической реакцией; размножение бактерий и т.п.

ЗАДАЧИ

1. Проверить справедливость формул:

1) $sh2x = \dfrac{2th\,x}{1-th^2x}$; 2) $sh3x = 4sh^3x + 3shx = shx(4ch^2x - 1)$;

3) $sh(n+1)\cdot x = 2chx\cdot sh\,nx - sh(n-1)\cdot x$; 4) $ch2x = \dfrac{1+th^2x}{1-th^2x}$;

5) $ch3x = 4ch^3x - 3chx = chx(4sh^2x+1)$;

6) $ch(n+1)x = 2ch\,x\,chnx - ch(n-1)x$;

7) $th2x = \dfrac{2}{thx + ch\,hx}$; 8) $tg3x = \dfrac{th^3x + 3thx}{3th^2x+1}$;

9) $cth2x = \dfrac{thx + ct\,hx}{2}$; 10) $th\dfrac{x}{2} = \dfrac{sh\,x}{chx+1} = \dfrac{chx-1}{shx}$.

2. Проверить равенство:

1) $2sh^2x = ch2x - 1$; 2) $4sh^3x = sh3x - 3shx$;

3) $8sh^4x = ch4x - 4ch2x + 3$;

4) $16sh^5x = sh5x - 5sh3x + 10shx$;

5) $32sh^6x = ch6x - 6ch4x + 15ch2x - 10$;

6) $64sh^7x = sh7x - 7sh5x + 21sh3x - 35shx$;

7) $128sh^8x = ch8x - 8ch6x + 28ch4x - 56ch2x + 35$;

8) $2ch^2x = ch2x + 1$; 9) $4ch^3x = ch3x + 3chx$;

10) $8ch^4x = ch4x + 4ch2x + 3$;

11) $16ch^5x = ch5x + 5ch3x + 10chx$;

12) $32ch^6x = ch6x + 6ch4x + 15ch2x + 10$;

13) $64ch^7x = ch7x + 7ch5x + 21ch3x + 35chx$;

14) $128ch^8x = ch8x + 8ch6x + 28ch4x + 56ch2x + 35$.

3. Доказать, что:

1) $(chx \pm shx)^n = chnx \pm shnx$; 2) $(chx + shx)^{-1} = chx - shx$;

3) $ch2x + cos2y = 2 + 2(sh^2x - sin^2 y) = 2(sh^2x + cos^2 y)$;

4) $ch2x - cos2y = 2(sh^2x + sin^2 y)$;

5) $sh^2x - sh^2y = sh(x + y)sh(x - y) = ch^2x - ch^2y$;

6) $sh^2x + ch^2y = ch(x + y)ch(x - y) = ch^2x + gh^2y$;

7) $cth \pm thy = \dfrac{ch(x \pm y)}{shx \cdot chy}$; 8) $csch^2x - sch^2x = csch^2x \cdot sch^2x$.

4. Решить кубические уравнения:

1) $x^3 + 9x - 26 = 0$; 2) $x^3 + 1.25x - 3.72 = 0$;

3) $x^3 - 8x + 15 = 0$.

5. Решить уравнение $shx - 3chx + 9 = 0$.

6. Проверить справедливость формул, находящихся в таблице на стр. 30.

7. Проверить формулы (46)-(51) на стр. 31,32.

8. Доказать, что:

1) $Arch\,x = 2Arch\sqrt{\dfrac{x+1}{2}} = 2Arsh\sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$;

2) $Arth\,x = \dfrac{1}{2}Arsh\dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}Arch\dfrac{1+x^2}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}Arsth\dfrac{2x}{1+x^2}$.

9. Доказать, что:

1) $Arschx = \pm ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1}\right)$ $\qquad (0< x <1)$;

2) $Ar\,csc\,hx = ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} + 1}\right)$.

10. Вычислить действительную и мнимую часть числа e^{3+2i} .

11. Записать в показательной форме комплексные числа:

1) $1 \pm i$; 2) $1 \pm i\sqrt{3}$; 3) $\pm 2i$; 4) ± 5 .

12. Записать в тригонометрической формуле числа:

1) $\sqrt{3} - i$; 2) $-2+5i$; 3) $1-i$; 4) $-2+2\sqrt{3i}$.

13. Найти действительную и мнимую части:

1) e^{z^2} ; 2) ze^z , если $z = x+iy$.

14. Вычислить:

1) $\sin i$; 2) $cos\,i$; 3) $ch\,i$; 4) $sin(1+2i)$;

5) $tg\left(2-i\right)$; 6) $sh(-2+i)$.

15. Проверить равенства $e^z = cos\ iz - i\ sin\ iz$.

16. Показать, что из равенства $x+iy = ch(u+iv)$ следует, что

1) $\dfrac{x^2}{ch^2u}+\dfrac{y^2}{sh^2u}=1$; 2) $\dfrac{x^2}{cos^2 v}-\dfrac{y^2}{sin^2 v}=1$.

17. Вычислить вещественную и мнимую части выражения

$$cos(2+5i)x + sin(3-4i)x \ .$$

18. Показать, что:

1) $Arth\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=ln\,x$; 2) $Arsh\dfrac{x}{a}=ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$;

3) $Arch\dfrac{x}{a}=ln\dfrac{x\pm\sqrt{x^2-a^2}}{a}$.

19. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{shx}{ln(1+x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ln(chx+shx+1)}{a+bx}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{chax-ch\beta x+shax-sh\beta x}{sin\,ax-cos\,\beta x}$.

20. Преобразовать дифференциальные уравнения посредством указанной замены переменных:

1) $y''=\dfrac{y}{4ch^2x}$; $x=ln\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$;

2) $(1-x^2)y''-2x(1-x^2)y'+\dfrac{2ay}{1-x}=0$; $x=th\,t$;

3) $y''+2th2x\cdot y'+\dfrac{n^2y}{ch^2 2x}=0$; $x=ln\sqrt{tg2t}$.

21. Вычислить интегралы:

1) $\int\dfrac{tg^5x}{sch^4x}dx$; 2) $\int\dfrac{dx}{1-sh^4x}$; 3) $\int\dfrac{ch^3x-sh^3x}{ch^3x+sh^3x}dx$;

4) $\int\dfrac{ch\,x}{\sqrt{ch2x}}dx$; 5) $\int xcth^2xdx$; 6) $\int\dfrac{x+shx+chx}{chx-shx}dx$;

7) $\int\dfrac{dx}{e^{2x}\cdot ch^4x}$; 8) $\int\dfrac{e^x}{1-chx}dx$; 9) $\int arc\sin(shx)chx\,dx$;

10) $\int arctg(shx)shx\,dx$.

22. Проверить справедливость следующих разложений:

1) $th\,x=1-\dfrac{2}{e^{2x}}+\dfrac{2}{e^{4x}}-\dfrac{2}{e^{6x}}-...(-1)^{n+1}\dfrac{2}{e^{2nx}}+...$;

2) $cth\,x=1+\dfrac{2}{e^{2x}}+\dfrac{2}{e^{4x}}+\dfrac{2}{e^{6x}}+...\dfrac{2}{e^{2nx}}+...$

3) $Arsh\,x=ln(2x)+\dfrac{1}{2\cdot 2x^2}-\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 6x^6}$ -… $(x>1)$.

23. Вычислить:

1) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; 2) $\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2-3}}$;

3) $\int \sqrt{x^2+4x+13}dx$;   4) $\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx$.

24. Показать, что подстановкой $y = xu$ следующие уравнения приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными, и проинтегрировать их:

1) $x^2(y')^2 - 2xyy' + y^2(1-x^2) - x^4 = 0$;

2) $(y^4 + y^2x^2 - x^2)(y')^2 + 2xyy' - y^2 = 0$.

25. Решить однородные уравнения 1-го порядка:

1) $(x+\sqrt{x^2+y^2})y' = y$; 2) $xy' + a\sqrt{x^2+y^2} - y = 0$;

3) $xy'\,ch\dfrac{y}{x} + 2x\,sh\dfrac{y}{x} - y\,ch\dfrac{y}{x} = 0$.

26. Найти общие решения линейных дифференциальных уравнений с постоянным коэффициентом (однородных и неоднородных):

1) $y''+y'-\dfrac{y}{4}=0$;   2) $y''-13y'+36y=0$;

3) $y''+y=chx$;   4) $y''-a^2y=bshax$;

5) $y'''-2y''-a^2y'+2a^2y=shx$;   6) $y''-2y'+y=40\,chx$;

7) $y''-8y'-9y=50sh2x$; 8) $y''+2a^2y'+a^4y=chax$;

9) $y''-y=thx$;   10) $y''-a^2y=\dfrac{A}{chax}$;

11) $y''-4y=e^{2x}$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$;

12) $y''+ay^2=b^2$; 13) $yy''-(y)^2+1=0$;

14) $ay'''=\sqrt{1+(y'')^2}$;

15) $y''+\left(1-\frac{\alpha}{h^2}\right)\cdot y=0$; $y(0)=\frac{1}{a}$; $y'(0)=0$

16) $yy'''-y'\cdot y''=0$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение I

Как было отмечено в § 16, для получения разложения в степенные ряды $th\,x$ и $cth\,x$ используются числа Бернулли. Выведем формулы, для получения этих чисел.

Найдем сначала разложение вспомогательной функции $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ в ряд по степеням x, приняв $f(0)=1$.

Пусть

$$\frac{x}{e^x-1}=B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\ldots+\frac{B_n}{n!}x^n+\ldots \qquad (\text{П}1)$$

где $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ – коэффициенты, подлежащие определению. Они и называются числами Бернулли.

Так как, с другой стороны,

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{1+\dfrac{x}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{(n+1)!}+\ldots},$$

то имеем тождество

$$\left(B_0+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\ldots+\frac{B_n}{n!}x^n\right)\cdot\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{(n+1)!}+\ldots\right)\equiv 1 .$$

Откуда путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x получим бесконечную систему уравнений относительно неизвестных $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$.

Сравнивая свободные члены, найдем $B_0 = 1$. Приравнивая нулю коэффициент при x^{n-1}, получим общий вид n–го уравнения системы:

$$\frac{1}{n!}B_0 + \frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{B_1}{1!} + \frac{1}{(n-2)!}\cdot\frac{B_2}{2!} + ... + \frac{1}{1!}\cdot\frac{B_n - 1}{(n-1)!} = 0$$

или

$$B_0 + \frac{n}{1!}B_1 + \frac{n(n-1)}{2!}B_2 + ... + \frac{n!}{(n-1)!}B_{n-1} = 0$$

$$(n = 2,3...) \ . \qquad (\Pi 2)$$

Покажем, что все числа B_n с нечетными индексами, <u>кроме B_1</u>, равны 0.

Заменив в равенстве (П1) x на $-x$, будем иметь

$$-\frac{x}{e^{-x} - 1} = B_0 - \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 - \frac{B_3}{3!}x^3 + ... + (-1)^n\cdot\frac{B_n}{n!}x^n + ... \ .$$

Но, с другой стороны,

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{e^{-x} - 1} = \frac{x(1 - e^x)}{e^x - 1} = -x \ .$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правых частях последних двух равенств, получаем:

$$2B_1 = 1; \quad B_3 = 0; \qquad B_5 = 0; \ \dots; \ B_{2k+1} = 0; \dots$$

$$(k = 1,2,3\dots) \ .$$

Левая часть равенства (П2) напоминает разложение бинома Ньютона, и поэтому оно может быть записано в символичной форме

$$(1 + B)^n - B^n = 0 \ .$$

Эта формула в раскрытом виде дает равенство (П2), <u>если показатели степени B</u> заменить соответствующими индексами.

Подставляя в формулу (П2) последовательно $n = 2,3,\dots$, получим <u>числа Бернулли</u>:

$$B_1 = -\frac{1}{2}; \quad B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_3 = 0; \quad B_4 = -\frac{1}{30}; \quad B_5 = 0;$$

$$B_6 = \frac{1}{42}; \quad B_7 = 0; \quad B_8 = -\frac{1}{30}; \quad B_9 = 0; \quad B_{10} = \frac{5}{66};$$

$$B_{11} = 0; \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}; \quad B_{13} = 0; \quad B_{14} = \frac{7}{6}$$

и т.д.

Приложение II

Аналогично можно получить и числа Эйлера.

Пусть

$$sch\,x = \frac{1}{chx} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots} =$$

$$= E_0 + \frac{E_1}{2!}x^2 + \frac{E_4}{4!}x^4 + \dots + \frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \dots ,$$

где коэффициенты $E_0, E_2, E_4, \dots$ подлежат определению.

Рассмотрим тождество

$$\left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots\right)\left(E_0 + \frac{E_0}{2!}x^2 + \frac{E_1 x^4}{4!} + \dots + \frac{E_{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \dots\right) = 1$$

и путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x получим бесконечную систему уравнений относительно $E_0, E_2, E_4, \dots$.

Сравнивая свободные члены, получим $E_0 = 1$.

Приравнивая нулю коэффициенты при x^{2n} , получим

$$\frac{1}{(2n)!}E_0 + \frac{1}{(2n-2)!}\frac{E_2}{2!} + \frac{1}{(2n-4)!}\frac{E_4}{4!} + \dots + \frac{1}{0!}\frac{E_{2n}}{(2n)!} = 0$$

или

$$E_0 + \frac{2n(2n-1)}{2!}E_2 + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}E_4 + \dots + E_{2n} = 0$$

$$n = 1, 2, 3 \dots \qquad \text{(П3)}$$

Замечаем, что левая часть (П3) напоминает разложение бинома Ньютона и может быть записана в символической форме

$$(1+E)^{2n} + (-1+E)^{2n} = 0 \ .$$

Эта формула в раскрытом виде дает равенство (П3), если показатели степени E заменить соответствующими индексами.

Принимая последовательно $n = 1, 2, 3 \dots$, находим несколько первых чисел E_{2n} (напомним, что $E_0 = 1$):

$$E_1 = 1 \ ; \quad E_2 = -1 \ ; \quad E_4 = 5 \ ; \quad E_6 = -61 ; \quad E_8 = 1385$$

и т.д.

Числа E_{2n} называются числами Эйлера.

Примечание. Числа Эйлера с нечетными индексами равны *0*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Гостехиздат, 1957.
2. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. - М.: Наука, 1973.
3. Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Физматгиз, 1962.
4. Смолянский Н.Л. Таблицы неопределенных интегралов. - М.: Наука, 1963.
5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984.
6. Мантуров О.В. и др. Толковый словарь математических терминов. -М.: Просвещение, 1965.
7. Шерватов В.Г. Гиперболические функции. – М.: Гостехиздат, 1958.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

ГІПЕРБОЛІЧНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

(Конспект лекцій із задачами для самостійної роботи
для студентів технічних спеціальностей
та іноземних студентів)

Укладачі: Печеніжський Юрій Євгенович,
Якунін Анатолій Вікторович

Відповідальний за випуск: А.І. Колосов

Редактор: М.З. Аляб'єв

Комп'ютерний набір: О.О. Ковальова

План 2000, поз.26

Підп. до друку 14.11.2000 р. Формат 60x84 1/16
Папір офісний. Друк на ризографі.
Обл.-вид. арк. 3,5. Тираж 100 прим.
Зам. №

ХДАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХДАМГ
ХДАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12