клад, $X = 21{,}376(1 \pm 0{,}0002)$ або $X = 21{,}376(1 \pm 0{,}02\%)$.

Приклад. Скільки вірних значущих цифр має дане число x, якщо:

а) $x = 274{,}58190$ і $\Delta_x^* = 0{,}008$; б) $x = 48{,}3882401$ і $\Delta_x^* = 4 \cdot 10^{-5}$;
в) $x = 0{,}009317243$ і $\Delta_x^* = 0{,}0007$; г) $x = 213{,}8494(1 \pm 0{,}000008$.

□ а) Маємо $0{,}5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0{,}8 \cdot 10^{-2} \le 0{,}5 \cdot 10^{-1}$. Отже, у числа x вірними є чотири значущі цифри $2,7,4,5$, а цифри $8,1,9,0$ – сумнівні.

б) Оскільки $0{,}5 \cdot 10^{-7} < \Delta_x^* = 0{,}4 \cdot 10^{-4} \le 0{,}5 \cdot 10^{-4}$, то x має вірні чотири значущі цифри після коми, тобто вірними будуть шість значущих цифр $4,8,3,8,8,2$, а цифри $4,0,1$ – сумнівні.

в) Маємо $0{,}5 \cdot 10^{-3} < \Delta_x^* = 0{,}7 \cdot 10^{-3} \le 0{,}5 \cdot 10^{-2}$. Отже, у числа x немає ні однієї вірної значущої цифри, всі вони сумнівні.

Гранична відносна похибка $\delta_x^* = 0{,}000008$, тоді гранична абсолютна похибка $\Delta_x^* = |x|\,\delta_x^* = 213{,}8494 \cdot 0{,}000008 = 0{,}0017$. Оскільки $0{,}5 \cdot 10^{-3} < \Delta_x^* = 0{,}17 \cdot 10^{-2} \le 0{,}5 \cdot 10^{-2}$, то x має п’ять вірних значущих цифр $2,1,3,8,4$, а цифри $9,4$ – сумнівні. ■

2.1.2. Похибки округлення

Заокруглюванням називається заміна числа наближеним числом з меншою кількістю значущих цифр. При цьому виникає ***похибка округлення***. Щоб вона була мінімальною, треба застосовувати наступне правило симетричного заокруглювання:

якщо цифра старшого розряду, що відкидається, менше 5, то попередня до нього цифра не змінюється;

якщо цифра старшого розряду, що відкидається, дорівнює або більше 5, то попередня до нього цифра збільшується на 1.

При використанні цього правила ***абсолютна похибка округлення*** $\Delta_{x\,окр}$ числа

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots$$

до p значущих цифр не перевищує половини одиниці розряду останньої залишеної цифри α_p, тобто за ***граничну абсолютну похибку округлення*** $\Delta^*_{x\,окр}$ можна взяти $\Delta^*_{x\,окр} = 0{,}5 \cdot 10^{m-p+1}$.

Під час заокруглювання наближеного числа x_1 отримуємо нове наближене число x_2, абсолютна похибка Δ_{x_2} якого визначається за формулою: $\boxed{\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2\,окр}}$, де Δ_{x_1} – абсолютна похибка числа x_1; $\Delta_{x_2\,окр} = | x_1 - x_2 |$ – абсолютна похибка округлення числа x_2.

Аналогічною формулою зв'язані граничні значення цих похибок: $\boxed{\Delta^*_{x_2} = \Delta^*_{x_1} + \Delta^*_{x_2\,окр}}$.

Приклад 1. Нехай задані числа

а) $x_1 = 617{,}349571021$ і б) $x_1 = 7531{,}9532657$.

Заокруглити ці числа, відкидаючи t ($t = 1, 2, 3, \ldots, 10$) останні цифри.

□ Відповідно дістанемо:

$t = 1$: а) $x_2 = 617{,}34957102$ і б) $x_2 = 7531{,}953266$;

$t = 2$: а) $x_2 = 617{,}3495710$ і б) $x_2 = 7531{,}95327$;

$t = 3$: а) $x_2 = 617{,}349571$ і б) $x_2 = 7531{,}9533$;

$t = 4$: а) $x_2 = 617{,}34957$ і б) $x_2 = 7531{,}953$;

$t = 5$: а) $x_2 = 617{,}3496$ і б) $x_2 = 7531{,}95$;

$t = 6$: а) $x_2 = 617{,}3540$ і б) $x_2 = 7532{,}0$; $t = 7$: а) $x_2 = 617{,}35$ і б) $x_2 = 7532$; $t = 8$: а) $x_2 = 617$ і б) $x_2 = 753 \cdot 10^1$;

$t = 9$: а) $x_2 = 62 \cdot 10^1$ і б) $x_2 = 75 \cdot 10^2$;

$t = 10$: а) $x_2 = 6 \cdot 10^2$ і б) $x_2 = 8 \cdot 10^3$. ■

Приклад 2. Округлити сумнівні цифри даного числа x_1 і знайти абсолютну Δ_{x_2} і відносну δ_{x_2} похибки результату x_2:

а) $x_1 = 538{,}369 \pm 0{,}00082$; б) $x_1 = 274{,}563(1 \pm 0{,}000013)$.

а) $x_1 = 34{,}124 \pm 0{,}021$; б) $x_1 = 91{,}735(1 \pm 0{,}0000082)$.

□ а) Наближене число x_1 має п'ять вірних цифр: 5, 3, 8, 3, 6, тому що $0{,}0005 < \Delta_{x_1} = 0{,}00082 \le 0{,}005$. Використовуючи правило заокруглювання, знайдемо наближене значення x_2, зберігаючи вірні десяткові знаки: $x_2 = 538{,}37$. Обчислимо похибку округлення $\Delta_{x_2\,окр}$, абсолютну Δ_{x_2} і відносну δ_{x_2} похибки числа x_2:

$$\Delta_{x_2\,окр} = |\,x_1 - x_2\,| = |\,538{,}369 - 538{,}37| = 0{,}001;$$

$$\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2\,окр} = 0{,}00082 + 0{,}001 = 0{,}0018;$$

$$\delta_{x_2} = \Delta_{x_2} / |\,x_2\,| = 0{,}0018 / |\,538{,}37\,| = 0{,}0000033.$$

Оскільки $0{,}0005 < \Delta_{x_2} = 0{,}0018 \le 0{,}005$, то всі значущі цифри числа x_2 вірні. Отже, $X = 538{,}37 \pm 0{,}0018$.

б) Оскільки відносна похибка $\delta_{x_1} = 0{,}000013$, то абсолютна похибка $\Delta_{x_1} = |\,x_1\,|\,\delta_{x_1} = 274{,}563 \cdot 0{,}000013 = 0{,}0036$. Значить, число $x_1 = 274{,}563$ має п'ять вірних значущих цифр: 2, 7, 4, 5, 6, тому що $0{,}5 \cdot 10^{-3} < \Delta_{x_1} = 0{,}0036 \le 0{,}5 \cdot 10^{-2}$. Знайдемо наближене значення x_2 з п'ятьма десятковими знаками, використовуючи правило заокруглювання: $x_2 = 274{,}56$. Обчислимо похибку округлення $\Delta_{x_2\,окр}$, абсолютну Δ_{x_2} і відносну δ_{x_2} похибки числа x_2:

$$\Delta_{x_2\,окр} = |\,x_1 - x_2\,| = |\,274{,}563 - 274{,}56\,| = 0{,}003;$$

$$\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2\,окр} = 0{,}0036 + 0{,}003 = 0{,}0066;$$

$$\delta_{x_2} = \Delta_{x_2} / |\,x_2\,| = 0{,}0066 / |\,274{,}56\,| = 0{,}24 \cdot 10^{-4}.$$

Оскільки $0{,}5\cdot 10^{-2} < \Delta_{x_2} = 0{,}0066 \le 0{,}5\cdot 10^{-1}$, то вірними значущими цифрами числа x_2 є тільки перші чотири 2, 7, 4, 5, а остання цифра 6 – сумнівна. Отже, $x_2 = 274{,}56 \pm 0{,}0066$. ■

2.1.3. Похибка функції. Похибки арифметичних операцій

За наближене значення функції $Y = f(X)$ можна взяти $\boxed{y = f(x)}$. При цьому абсолютну похибку Δ_y можна розглядати як модуль її приросту, викликаного приростом аргументу $\pm\Delta_x$. З достатньою точністю можна використовувати ***лінійні оцінки***:

$$\boxed{\Delta_y = |\,f'(x)\,|\cdot\Delta_x} \text{ і } \boxed{\Delta_y^* = |\,f'(x)\,|\cdot\Delta_x^*}.$$

Ці формули безпосередньо узагальнюються на випадок функції n змінних $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$: $\boxed{y = f(x_1, x_2, ..., x_n)}$;

$$\boxed{\Delta_y = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i}\right|\cdot\Delta_{x_i}}; \quad \boxed{\Delta_y^* = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i}\right|\cdot\Delta_{x_i}^*}.$$

На основі одержаного наближеного значення функції та лінійної оцінки її абсолютної похибки дістанемо лінійні оцінки відносної похибки δ_y та її граничного значення δ_y^*.

а) У випадку функції однієї змінної $y = f(x)$:

$$\boxed{\delta_y = \left|x\frac{d\ln f(x)}{dx}\right|\delta_x} \text{ і } \boxed{\delta_y^* = \left|x\frac{d\ln f(x)}{dx}\right|\delta_y^*}.$$

б) У випадку функції n змінних $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$\boxed{\delta_y = \sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial\ln f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i}\right|\delta_{x_i}}$$

$$\text{і } \boxed{\delta_y^* = \sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial\ln f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i}\right|\delta_{x_i}^*}.$$

Використовуючи одержані формули, можна визначити лінійні оцінки похибок результатів арифметичних операцій як окремих випадків функції двох змінних.

а) Похибка суми. Нехай $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Оскільки $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_i = 1$ і $\partial \ln f(x_1, x_2)/\partial x_i = 1/(x_1 + x_2)$, $i = 1, 2$, то дістанемо

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right| \delta_{x_2} .$$

Абсолютна похибка суми дорівнює сумі абсолютних похибок доданків.

Аналогічно знаходяться похибки для інших результатів арифметичних операцій.

б) Похибка різниці. $y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \left| \frac{x_1}{x_1 - x_2} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{x_2}{x_1 - x_2} \right| \delta_{x_2} .$$

Абсолютна похибка різниці дорівнює сумі абсолютних похибок зменшуваного і від'ємника.

в) Похибка добутку. $y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.

$$\Delta_y = |x_2| \Delta_{x_1} + |x_1| \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} .$$

Відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок співмножників.

г) Похибка частки. $y = f(x_1, x_2) = x_1 / x_2$.

$$\Delta_y = \frac{|x_2| \Delta_{x_1} + |x_1| \Delta_{x_2}}{(x_2)^2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} .$$

Відносна похибка частки дорівнює сумі відносних похибок діленого і дільника.

Правила підрахунку цифр:

1) *При знаходженні суми й різниці наближених чисел у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх має компонент операції з найменшим числом десяткових знаків.*

2) *При знаходженні добутку й частки наближених чисел у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх моє компонент операції з найменшим числом значущих цифр*.

Приклад 1. Знайти абсолютну Δ_u і відносну δ_u похибки обчислення значення функції $u = x^3 z / y^2$, якщо $x = 0{,}43 \pm 0{,}005$, $y = 3{,}17 \pm 0{,}01$, $z = 2{,}36 \pm 0{,}008$.

□ За формулою для лінійної оцінки абсолютної похибки результату отримаємо:

$$\Delta_u = \left|\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\right|\Delta_y + \left|\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right|\Delta_z =$$

$$= \left|\frac{3x^2 z}{y^2}\right|\Delta_x + \left|\frac{2x^3 z}{y^3}\right|\Delta_y + \left|\frac{x^3}{y^2}\right|\Delta_z = \frac{3\cdot 0{,}43^2 \cdot 2{,}36}{3{,}17^2}\cdot 0{,}005 +$$

$$+ \frac{2\cdot 0{,}43^3 \cdot 2{,}36}{3{,}17^3}\cdot 0{,}01 + \frac{0{,}43^3}{3{,}17^2}\cdot 0{,}008 = 0{,}0006514 +$$

$$+ 0{,}000118 + 0{,}0000633 = 0{,}00083 = 0{,}83\cdot 10^{-3}.$$

Знайдемо наближене значення функції:

$$u = 0{,}43^3 \cdot 2{,}36 / 3{,}17^2 = 0{,}0187 = 0{,}019.$$

Тоді $\delta_u = \Delta_u / |u| = 0{,}83\cdot 10^{-3} / 0{,}0187 = 0{,}044$. ■

Приклад 2. Твірна l та радіус основи R конуса виміряні з точністю до $0{,}03\%$. Яка відносна похибка при обчисленні бокової поверхні S конуса, якщо взято $\pi = 3{,}142$?

□ $S = \pi R l$. Для числа π більш точне значення $\pi = 3{,}14159265$. Тоді $\Delta_\pi = |3{,}14159265 - 3{,}142| = 0{,}41\cdot 10^{-3}$, а $\delta_\pi = 0{,}16\cdot 10^{-2} / 3{,}14 = 0{,}13\cdot 10^{-3} = 0{,}013\%$. За формулою відносної похибки добутку дістанемо:

$$\delta_S = \delta_\pi + \delta_R + \delta_h = 0{,}013\% + 0{,}03\% + 0{,}03\% = 0{,}07\%. \quad ■$$

2.2. Чисельні методи знаходження дійсних коренів скінченних рівнянь

Рівнянням з однією змінною x називається рівність

$$\boxed{f(x)=0},$$

яка справджується при певних значеннях x, що називаються ***коренями*** рівняння. Вважають, що корінь x^* має кратність k, якщо

$$f(x^*)=f'(x^*)=f''(x^*)=...=f^{(k-1)}(x^*)=0, \text{ але } f^{(k)}(x^*)\neq 0.$$

Розв'язування рівняння полягає в знаходженні його коренів.

2.2.1. Дослідження рівняння і відокремлення коренів

Наближене обчислення кожного з дійсних коренів складається з наступних етапів:

а) дослідження кількості й розташування коренів на числовій прямій, з'ясування їх кратності; виділення області пошуку D коренів, яка відповідає умовам поставленої задачі;

б) ***відокремлення*** (***ізоляція***, ***локалізація***) кореня x^*, тобто знаходження як можна меншого відрізку $[a;b]$ з області пошуку D, в межах якого лежить один і тільки один цей корінь, і вибір його початкового наближення x_0;

в) ***уточнення*** значення кореня x^*, тобто обчислення його з необхідною точністю.

Найчастіше відокремлення коренів здійснюється аналітичним чи графічним способами.

При ***аналітичному способі*** формують таблицю, в яку заносять послідовно розміщенні на осі Ox точки x_i, $i=1,2,...$ з досить малим кроком $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$ і обчислені в них значення $f(x_i)$ лівої частини рівняння $f(x)=0$. Потім у таблиці вибирають ті пари сусідніх значень аргументу x_i і x_{i+1}, між якими функція $f(x)$ змінює знак.

При ***графічному способі*** будують графік функції $y=f(x)$ і приблизно виявляють ділянки його перетину з віссю Ox. Або, перетворивши вхідне рівняння $f(x)=0$ до вигляду $f_1(x)=f_2(x)$, будують графіки двох функцій $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ і приблизно визначають проміжки, яким належать абсциси їх точок перетину між собою.

Приклад 1. Графічно знайти проміжки ізоляції коренів рівняння $e^x(2-x^2)-1=0$.

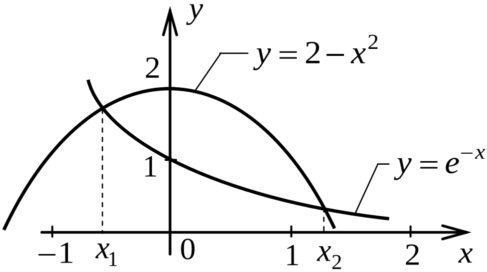

Рис. 26

□ Областю допустимих значень є промінь $(-\infty;+\infty)$. Подамо рівняння у вигляді $2-x^2=e^{-x}$. Тоді корені можуть бути знайдені як абсциси точок перетину параболи $y=2-x^2$ і експоненти $y=e^{-x}$. Побудуємо ці графіки (рис. 26) і за ними визначимо кількість коренів та інтервали їх ізоляції.

З рис. 26 видно, що коренів два: x_1 знаходиться на відрізку $[-1;0]$, а x_2 – на відрізку $[1;2]$.

Якщо взяти по осі Ox менший крок, то і проміжок локалізації можна знайти точніше. ■

Приклад 2. Для рівняння $x^3-2x^2-x+2-1{,}5\,e^{-x}=0$ знайти інтервали ізоляції його коренів, що лежать на проміжку $[-2;3]$, аналітичним способом, а потім проконтролювати результат графічним методом.

□ Побудуємо таблицю значень функції $y=f(x)$, де

$$f(x)=x^3-2x^2-x+2-1{,}5\,e^{-x}.$$

x	- 2	- 1,5	- 1	- 0,5	0
y	- 23,1	- 11,1	- 4,1	- 0,6	0,5

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0,2	- 0,6	- 1,0	- 0,2	2,5	7,9

З таблиці значень видно, що відрізку $[-2;3]$ функція $y=f(x)$ тричі змінює знак, тому можна припустити, що рівняння має три корені, проміжки локалізації яких $[-0{,}5;0]$, $[0{,}5;1]$ і $[2;2{,}5]$.

Для контролю розв'яжемо задачу графічно. Подамо рівняння у вигляді $x^3-2x^2-x+2=1{,}5\,e^{-x}$ і побудуємо графіки лівої $y=x^3-2x^2-x+2$ та правої $y=1{,}5\,e^{-x}$ частин (рис. 27). Перетин графіків на рис. 27 показує, що коренів три і вони розміщені на відрізках $[-0{,}5;0]$, $[0{,}5;1]$ і $[2;2{,}5]$. ■

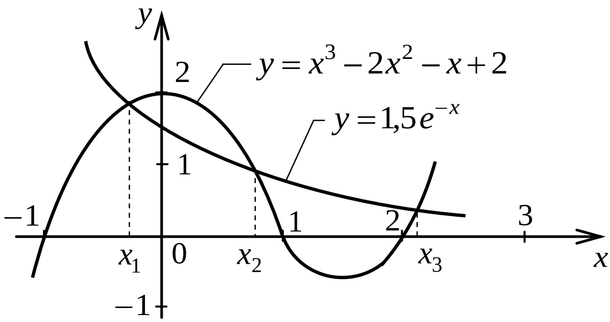

Рис. 27

2.2.2. Методи уточнення наближених значень коренів. Метод поділу навпіл. Метод простих ітерацій. Метод Ньютона

На етапі уточнення кореня x^* рівняння $f(x)=0$ обчислюють його наближене значення з заданою точністю.

Для цього використовують різні ітераційні методи (методи послідовних наближень), суть яких полягає у послідовному обчисленні, виходячи з початкового наближення x_0, за однією й тією ж схемою (за допомогою відповідного рекурентного співвідношення

$$x_k=\varphi_k(x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}),\ k=1,2,...)$$

значень $x_1,x_2,...,x_k,...$, що наближаються до кореня x^*:

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$ (це забезпечується вибором φ_k).

Критеріями закінчення ітераційного процесу служать:

а) досягнення заданої точності за аргументом: $\left|x_k - x^*\right| < \delta$, де $\delta > 0$ – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного значення x_k кореня x^*;

б) досягнення заданої точності за функцією: $\left|f(x_k)\right| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного нульового значення $f(x_k)$ функції $f(x)$;

в) досягнення заданого максимально допустимого числа ітерацій $k_{\max}$: $k = k_{\max}$.

Далі наведемо розрахункові схеми деяких найпоширеніших ітераційних методів уточнення наближеного значення кореня:

а) ***Метод дихотомії*** (***бісекції, поділу навпіл***):

$$\boxed{x_k = (a_{k-1} + b_{k-1})/2; \quad f(a_{k-1})\ f(b_{k-1}) < 0, \quad k = 1, 2, \ldots},$$

де x_k – наближення до шуканого кореня x^*; $[a_{k-1}; b_{k-1}]$ – попередній проміжок ізоляції кореня. Якщо $f(x_k) = 0$, то покласти $x^* = x_k$ і закінчити обчислення. Якщо $f(x_k) \cdot f(a_{k-1}) > 0$, то покласти $a_k = x_k$; $b_k = b_{k-1}$, інакше – $a_k = a_{k-1}$; $b_k = x_k$. Далі присвоїти $k := k + 1$ і продовжити обчислення.

б) ***Модифікований метод простих ітерацій***:

$$\boxed{x_k = x_{k-1} + \alpha f(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots},$$

де α – параметр, значення якого підбирається експериментально так, щоб справджувалася умова збіжності $|1 + \alpha f'(x)| < 1$ (звичайно, з діапазону $|\alpha| = 0{,}1 \div 1$). За початкове наближення кореня x_0 можна прийняти довільне значення x з проміжку ізоляції $[a_0; b_0]$ (зокрема, за x_0 можна взяти середину $(a_0 + b_0)/2$ проміжку локалізації $[a_0; b_0]$ або один з його кінців a_0 чи b_0).

в) ***Модифікований метод Ньютона*** (***дотичних*** або ***лінеари-***

зації): $\boxed{x_k = x_{k-1} - \alpha\, f(x_{k-1}) / f'(x_{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots}$,

де α – параметр, значення якого підбирається експериментально (звичайно, з діапазону $\alpha = 0{,}1 \div 1$). За початкове наближення кореня x_0 прийняти довільне значення x з проміжку ізоляції $[a_0; b_0]$, для якого виконується умова $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ (зокрема, за x_0 можна прийняти один з кінців відрізка локалізації $[a_0; b_0]$, де додержується вказана умова).

Приклад. Дано рівняння $f(x) = 0$. Виконати наступне:

1. Подати задане рівняння у вигляді $f_1(x) = f_2(x)$. Знайти найменший за модулем дійсний корінь x^* рівняння наближено графічно як абсцису x_g найближчої до осі Oy точки перетину графіків $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і вказати проміжок ізоляції $[a_0; b_0]$ цього кореня, де $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

2. Уточнити найменший за модулем корінь рівняння $f(x) = 0$ вказаним далі методом. Задано точність (за аргументом) δ обчислення кореня: $|x_k - x_{k-1}| < \delta$. Задано точність (за функцією) ε обчислення кореня: $|f(x_k)| < \varepsilon$. Виконати $k_{\max}$ ітерацій. Знайти наближене значення $x_{k_{\max}}$ цього кореня та досягнуті характеристики його точності $\delta_{k_{\max}} = \left| x_{k_{\max}} - x_{k_{\max}-1} \right|$ і $\varepsilon_{k_{\max}} = \left| f\left(x_{k_{\max}}\right) \right|$. Якщо обидві задані характеристики точності δ і ε досягнуті, то вказати найменшу достатню для цього кількість ітерацій $k_{дост}$.

а) Методом поділу навпіл. б) Модифікованим методом простих ітерацій. в) Модифікованим методом Ньютона.

$$f(x) = 2 - 0{,}5\, x^3 - \ln(1 + x^2);\ \ \delta = 0{,}01;\ \ \varepsilon = 0{,}01;\ \ k_{\max} = 10.$$

Вказівки. 1. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. 2. Проміжок локалізації $[a_0; b_0]$ шуканого кореня x^* визначити так, що його кінці a_0 і b_0 – цілі числа, причому $b_0 - a_0 = 1$ і $f(a_0)\ f(b_0) < 0$. 3. У модифікаціях методу простих ітерацій і методу Ньютона за значення параметра спочатку взяти відповідно $\alpha = -\mathrm{sgn}(f(b_0) - f(a_0))$ і $\alpha = 1$, де $\mathrm{sgn}\, x = \{-1\ \text{при}\ x < 0,\ 0\ \text{при}\ x = 0,\ 1\ \text{при}\ x > 0\}$. Якщо при цьому ітераційний процес розбігається, то способом проб, послідовно зменшуючи за модулем значення α з кроком $\Delta\alpha = 0{,}1$, знайти достатнє для збіжності відмінне від нуля значення параметра α.

□ 1. Подамо дане рівняння у вигляді $2 - 0{,}5\,x^3 = \ln(1 + x^2)$. Дослідимо перетин графіків $y = 2 - 0{,}5\,x^3$ і $y = \ln(1 + x^2)$ (рис. 28). У результаті одержимо, що найменший за модулем дійсний корінь x^* (у даному випадку він єдиний) лежить на відрізку $[1; 2]$.

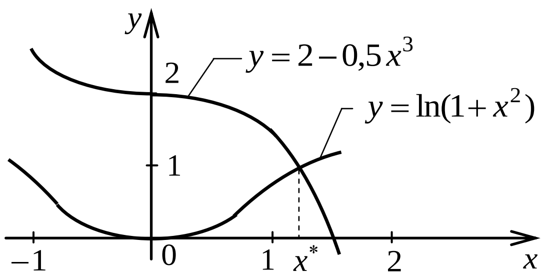

Рис. 28

Судячи з графіків, за наближене значення цього кореня можна прийняти $x_g = 1{,}2$. На кінцях відрізка $f(1) = 0{,}806853 > 0$ і $f(2) = -3{,}609438 < 0$.

2. Уточнимо найменший за модулем корінь рівняння.

а) Метод поділу навпіл. Результати обчислень наведені у наступній таблиці. Наближене значення кореня $x_{k_{\max}} = 1{,}27$.

Досягнуті характеристики його точності

$$\delta_{k_{\max}} = 0{,}98 \cdot 10^{-3} < \delta = 0{,}01 \ \text{ і } \ \varepsilon_{k_{\max}} = 0{,}34 \cdot 10^{-3} < \varepsilon = 0{,}01.$$

Достатня для досягнення заданих характеристик точності $\delta = 0{,}01$ і $\varepsilon = 0{,}01$ кількість ітерацій $k_{дост} = 7$.

k	0	1	2	3
x_k		1,500000	1,250000	1,375000
$f(x_k)$		-0,866155	0,082454	-0,361277
$\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$			0,250000	0,125000
a_k	1,000000	1,000000	1,250000	1,250000
b_k	2,000000	1,500000	1,500000	1,375000
$f(a_k)$	0,806853	0,806853	0,082454	0,082454
$f(b_k)$	-3,609438	-0,866155	-0,866155	-0,361277

k	4	5	6	7
x_k	1,312500	1,281250	1,265625	1,273438
$f(x_k)$	-0,132101	-0,023036	0,030151	0,003668
$\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	0,062500	0,031250	0,015625	0,007813
a_k	1,250000	1,250000	1,265625	1,273438
b_k	1,312500	1,281250	1,281250	1,281250
$f(a_k)$	0,082454	0,082454	0,030151	0,003668
$f(b_k)$	-0,132101	-0,023036	-0,023036	-0,023036

k	8	9	10
x_k	1,277344	1,275391	1,274414
$f(x_k)$	-0,009656	-0,002987	0,000342
$\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	0,003906	0,001953	0,000977
a_k	1,273438	1,273438	1,274414
b_k	1,277344	1,275391	1,275391
$f(a_k)$	0,003668	0,003668	0,000342
$f(b_k)$	-0,009656	-0,002987	-0,002987

б) Модифікований метод простих ітерацій. За початкове наближення кореня взято $x_0 = (a_0 + b_0)/2 = 1{,}5$. За початкове значення параметра прийнято $\alpha = -\mathrm{sgn}(f(b_0) - f(a_0)) = 1$. Способом підбору знайдено достатнє для збіжності значення параметра $\alpha = 0{,}4$. Результати обчислень наведені у наступній таблиці, де $\varphi(x) = x + \alpha\, f(x)$. Наближене значення кореня $x_{k_{\max}} = 1{,}27$. Досягнуті характеристики його точності $\delta_{k_{\max}} = 0{,}40 \cdot 10^{-4} < \delta = 0{,}01$ і $\varepsilon_{k_{\max}} = 0{,}36 \cdot 10^{-4} < \varepsilon = 0{,}01$. Достатня для досягнення заданих характеристик точності $\delta = 0{,}01$ і $\varepsilon = 0{,}01$ кількість ітерацій $k_{дост} = 5$.

k	0	1	2	3
x_k	1,500000	1,153538	1,308088	1,261495
$f(x_k)$	-0,866155	0,386375	-0,116484	0,044062
$\varphi(x_k)$	1,153538	1,308088	1,261495	1,279120
$\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$		0,346462	0,154550	0,046593

k	4	5	6	7
x_k	1,279120	1,272827	1,275125	1,274292
$f(x_k)$	-0,015732	0,005746	-0,002082	0,000757
$\varphi(x_k)$	1,272827	1,275125	1,274292	1,274595
$\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	0,017625	0,006293	0,002299	0,000833

k	8	9	10
x_k	1,274595	1,274485	1,274525
$f(x_k)$	-0,000275	0,000100	-0,000036
$\varphi(x_k)$	1,274485	1,274525	1,274511
$\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	0,000303	0,000110	0,000040

в) Модифікований метод Ньютона. На відрізку локалізації $[1;2]$ справджується нерівність $f'(x) = -1{,}5\,x^2 - 2x/(1+x^2) < 0$, тобто похідна $f'(x)$ зберігає знак. Тому на цьому проміжку функція $f(x)$ монотонна (спадна) і рівняння має єдиний корінь. Друга похідна $f''(x) = -3x - 2(1-x^2)/(1+x^2)^2$. Оскільки виконується умова $f(1{,}5)\,f''(1{,}5) > 0$, то взято $x_0 = 1{,}5$. За початкове значення параметра прийнято $\alpha = 1$, яке не змінюється, оскільки забезпечує збіжність ітераційного процесу. Результати обчислень наведені у наступній таблиці.

k	0	1	2	3
x_k	1,500000	1,298478	1,274817	1,274515
$f(x_k)$	-0,866155	-0,082718	-0,001031	0,000000
$f'(x_k)$	-4,298077	-3,495902	-3,408969	-3,407866
$\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1}\rvert$		0,201522	0,023661	0,000303

k	4	5	6	7
x_k	1,274515	1,274515	1,274515	1,274515
$f(x_k)$	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
$f'(x_k)$	-3,407866	-3,407866	-3,407866	-3,407866
$\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

k	8	9	10
x_k	1,274515	1,274515	1,274515
$f(x_k)$	0,000000	0,000000	0,000000
$f'(x_k)$	-3,407866	-3,407866	-3,407866
$\delta_k = \lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	0,000000	0,000000	0,000000

Наближене значення кореня $x_{k_{\max}} = 1{,}27$. Досягнуті характеристики його точності

$$\delta_{k_{\max}} < 10^{-15} < \delta = 0{,}01 \quad \text{і} \quad \varepsilon_{k_{\max}} < 10^{-15} < \varepsilon = 0{,}01.$$

Достатня для досягнення заданих характеристик точності $\delta = 0{,}01$ і $\varepsilon = 0{,}01$ кількість ітерацій $k_{дост} = 3$.

Отже, шукане значення кореня $x^* = 1{,}27 \pm 0{,}01$. ■

2.3. Апроксимація функцій

Задача ***апроксимації*** (наближення) функцій полягає у тому, щоб для заданої функції $y = f(x)$ побудувати ***апроксимуючу*** (наближену) функцію (модель) $y = F(x)$, значення якої достатньо близькі до значень даної функції. ***Відхилення*** $R(x) = f(x) - F(x)$ характеризує якість наближення.

2.3.1. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Нехай досліджувана функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$ своїми значеннями в $n+1$ (у загальному випадку, нерівновіддалених) вузлах $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ і $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$. Розглядається інтерполяційна задача: побудувати многочлен $L_n(x)$ (степеня не вище за n), значення якого в $n+1$ точках $x_0, x_1, ..., x_n$ співпадали би зі значеннями в них функції $f(x)$:

$$P_n(x_k) = y_k, \quad \text{де} \quad y_k = f(x_k), \quad k = \overline{0,n}.$$

Інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ можна подати у формі:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}},$$

яку називають ***інтерполяційним многочленом*** (***формулою***) ***Лагранжа***. Інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ можна записати у стислому вигляді:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}}.$$

Приклад. Для функції $y = f(x)$, що задана таблицею

k	0	1	2	3
x_k	-4	-2	1	2
y_k	-2	0,5	1,5	3

знайти інтерполяційний многочлен Лагранжа $y = L_n(x)$. Обчислити значення цього інтерполяційного многочлена на відрізку $[-4;4]$ з кроком $h = 0{,}5$, скласти відповідну таблицю і побудувати його графік.

Вказівка. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Значення коефіцієнтів Лагранжа подати з округленням до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Степінь многочлена Лагранжа при $n+1$ вузлах дорівнює n. Для нашого прикладу $n = 3$, тобто многочлен Лагранжа має третій порядок. Конкретизуємо формулу $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$:

$$L_3(x) = \frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{y_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+ \frac{y_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{y_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Підставимо значення з таблиці в отриману формулу:

$$L_3(x) = \frac{-2\cdot(x+2)(x-1)(x-2)}{(-4+2)(-4-1)(-4-2)} + \frac{0{,}5\cdot(x+4)(x-1)(x-2)}{(-2+4)(-2-1)(-2-2)} +$$

$$+ \frac{1{,}5\cdot(x+4)(x+2)(x-2)}{(1+4)(1+2)(1-2)} + \frac{3\cdot(x+4)(x+2)(x-1)}{(2+4)(2+2)(2-1)} =$$

$$= (1/30)(x^2-4)(x-1) + (1/48)((x+4)(x^2-3x+2) - (1/10)\times$$

$$\times(x+4)(x^2-4) + (1/8)(x+4)(x^2+x-2) = (1/30)(x^3-x^2-4x+$$

$$+4) + (1/48)(x^3+x^2-10x+8) - (1/10)(x^3+4x^2-4x-16) +$$

$$+(1/8)(x^3+5x^2+2x-8)=(0{,}033333+0{,}020833-0{,}100000+$$

$$+0{,}125000)x^3+(-0{,}033333+0{,}020833-0{,}400000+0{,}625000)\times$$

$$\times x^2+(-0{,}133333-0{,}208333+0{,}400000+0{,}250000)x+$$

$$+(0{,}133333+0{,}166667+1{,}600000-1{,}000000)=0{,}079166x^3+$$

$$+0{,}212500x^2+0{,}308334x+0{,}900000=$$

$$=0{,}0792x^3+0{,}2125x^2+0{,}3083x+0{,}9000\,.\ \blacksquare$$

Складемо таблицю значень $y=L_3(x)$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0
$L_3(x_k)$	-2,00	-0,96	-0,24	0,23	0,50	0,65	0,73	0,79	0,90

k	9	10	11	12	13	14	15	16
x_k	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$L_3(x_k)$	1,12	1,50	2,11	3,00	4,24	5,87	7,97	10,60

Графік інтерполяційного полінома Лагранжа $y=L_3(x)$ зображено на рис. 29.

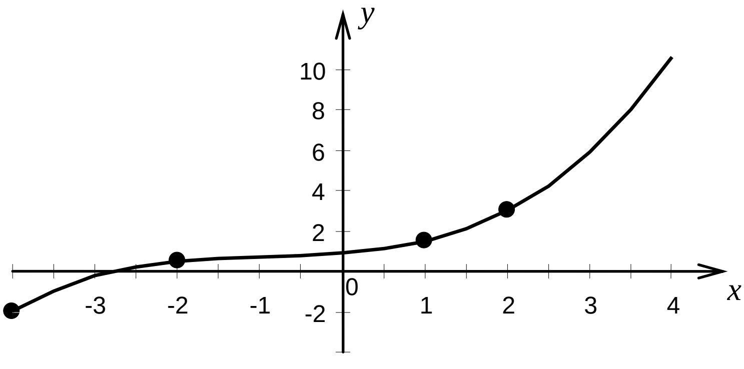

Рис. 29

2.3.2. Апроксимація за методом найменших квадратів

Нехай вхідна функція $y = f(x)$ задана таблицею значень $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ для скінченної множини точок $x_0, x_1, ..., x_n$. Припускаємо, що значення функції y_k, $k = \overline{0,n}$ відомі з похибками.

У цьому випадку використання інтерполяційної формули невиправдане, оскільки призведе до відтворення апроксимуючою функцією $y = F(x)$ всіх цих похибок і спотвореного ними характеру поведінки вхідної функції $y = f(x)$. Більш обґрунтованим є застосування апроксимації за методом найменших квадратів (МНК).

При цьому на практиці за апроксимуючу функцію часто приймають звичайний алгебраїчний многочлен m-го степеня

$$F(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m,$$

де $a_0, a_1, ..., a_m$ – невідомі коефіцієнти.

Найпростішою (при $m = 1$) є залежність $\boxed{F(x) = a_0 + a_1 x}$ – ***лінійна регресія***. Близькість експериментального розподілу точок $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, …, $M_n(x_n; y_n)$ до ***лінії регресії*** – прямої $y = a_0 + a_1 x$ легко проглядається після їх побудови в одній прямокутній системі координат.

Оптимальні МНК-оцінки коефіцієнтів a_0 і a_1 визначаються як розв’язки системи

$$\boxed{\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} f(x_k); \\ a_0 \sum_{k=0}^{n} x_k + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \sum_{k=0}^{n} x_k f(x_k). \end{cases}}$$

Точність лінійної апроксимації за МНК оцінюється на основі досягнутого мінімального значення ***суми квадратів відхилень*** (***нев’язок***) $\rho_2(a_0, a_1) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x_k) - a_0 + a_1 x_k \right)^2$ або відповідного ***середньоквадратичного відхилення***

$$\boxed{\Delta y_s = \sqrt{\left(1/(n+1)\right) \sum_{k=0}^{n} (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2}}.$$

Приклад. Функція $f(x)$ задана таблицею

k	0	1	2	3
x_k	-3	-1	1	2
$y_k = f(x_k)$	-2	1	1	2

Знайти апроксимацію цієї функції $f(x)$ лінійною регресією $F(x) = a_0 + a_1 x$ за методом найменших квадратів. Обчислити значення отриманої лінійної регресії $y = a_0 + a_1 x$ на кінцях відрізка $[-4;4]$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення Δy_s лінійної регресії від заданих значень вхідної функції.

Вказівка. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Значення коефіцієнтів лінійної регресії подати з округленням до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Застосуємо лінійну апроксимацію $F(x) = a_0 + a_1 x$. Проведемо попередні обчислення і заповнимо таблицю

k	x_k	$f(x_k)$	x_k^2	$x_k f(x_k)$
0	-3	-2	9	6
1	-1	1	1	-1
2	1	1	1	1
3	2	2	4	4
$\sum$	-1	2	15	10

Складемо і розв'яжемо (за формулами Крамера) систему для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a_0(3+1) + a_1 \cdot (-1) = 2; \\ a_0 \cdot (-1) + a_1 \cdot 15 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a_0 - a_1 = 2; \\ -a_0 + 15a_1 = 10; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 15 \end{vmatrix} = 59; \quad \Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 40; \quad \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} = 42;$$

$$a_0 = \Delta^{(1)}/\Delta = 40/59 = 0,6780\,; \quad a_1 = \Delta^{(2)}/\Delta = 42/59 = 0,7119\,.$$

Отже, $y = 0,6780 + 0,7119x$ – шукана лінійна регресія.

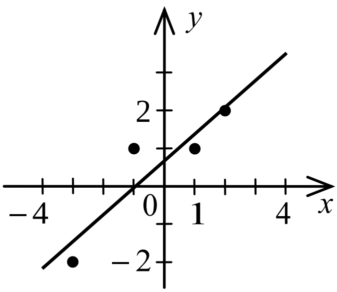

Рис. 30

Обчислимо значення отриманої лінійної апроксимації та складемо відповідну таблицю:

x	-4	4
$y = a_0 + a_1 x$	-2,17	3,53

Побудуємо графік – лінію регресії $y = 0,6780 + 0,7119x$ (рис. 30).

Знайдемо середньоквадратичне відхилення Δy_s:

$$\Delta y_s = \sqrt{\big(1/(n+1)\big)\sum\nolimits_{k=0}^{n} (y_k - a_0 - a_1 x_k)^2} = (1/2)\cdot\Big((-2+1,4577)^2 +$$

$$+ (1+0,0339)^2 + (1-1,3899)^2 + (2-2,1018)^2\Big)^{1/2} = 1,0775\,. \quad \blacksquare$$

2.4. Чисельне диференціювання та інтегрування функцій

2.4.1. Чисельне диференціювання

Нехай на сітці $\{x_k : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b\}$ з рівномірним кроком $h = x_k - x_{k-1} = const$, $k = \overline{1,n}$ у всіх вузлах x_k, $k = \overline{0,n}$ відомі значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ вхідної функції $y = f(x)$. Використовуючи інтерполяцію многочленом Лагранжа другого порядку (за ***шаблоном*** з трьох вузлів x_{k-1}, x_k і x_{k+1}), дістанемо формулу:

$$\boxed{f'(x_k) = F'(x_k, h) + R'_2(x_k, h)},$$

де $\boxed{F'(x_k, h) = (-y_{k-1} + y_{k+1})/(2h)}$ – ***апроксимація похідної за допомогою центральної різниці***; $\boxed{R'_2(x_k, h) = -(h^2/6)\, f'''(c_k)}$ – ***похибка*** цієї ***апроксимації***, що має ***порядок точності*** $r = 2$ відносно h ($R'_2(x_k,h)=O(h^r)$); c_k – деяка невідома точка з інтервалу $(x_{k-1};x_{k+1})$.

За ***методом Рунге*** (***методом подвоєння кроку***) можна оцінити абсолютну похибку апроксимації похідної $\Delta_1 = |R'(x,h)|$:

$$\boxed{\Delta_1 \approx \left|F'(x,h)-F'(x,2h)\right| \big/ (2^r-1)}$$ (***перша формула Рунге***)

і знайти уточнене значення похідної з підвищеним порядком точності $r+1$:

$$\boxed{f'(x)=F'(x,h)+\big(F'(x,h)-F'(x,2h)\big)\big/(2^r-1)+O(h^{r+1})}$$

(***друга формула Рунге***).

<u>Приклад</u>. Функція $y=f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$, де $a=-1$ і $b=1{,}8$, наступною таблицею значень $y_k=f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$ ($n=8$) у рівновіддалених вузлах x_k, $k=\overline{0,n}$ з кроком $h=(b-a)/n=0{,}35$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	-1	-0,65	-0,3	0,05	0,4	0,75	1,1	1,45	1,8
y_k	-1,2	-0,95	-0,6	-0,4	-0,15	0,55	0,8	1,15	1,45

Знайти наближене значення $f'(x_5)$ похідної $f'(x)$ у вузлі x_5 за формулою $f'(x_k)\approx F'(x_k,h)=(-y_{k-1}+y_{k+1})/(2h)$, що має порядок точності $r=2$, з кроком $h=0{,}35$. Користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку), оцінити абсолютну похибку апроксимації Δ_1 та уточнити значення похідної $f'(x_5)$.

<u>Вказівка</u>. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Уточнене значення похідної подати з округленням до двох десяткових знаків після коми.

□ При кроці $h=0{,}35$ маємо:

$$f'(x_5)\approx F'(x_5,h)=(-y_4+y_6)/(2h)=1{,}357143=1{,}36.$$

Згідно з методом Рунге обчислимо наближене значення $f'(x_5)$ за тією ж формулою при подвоєному кроці $2h=0{,}7$:

$$f'(x_5) \approx F'(x_5, 2h) = (-y_7 + y_3)/(4h) = 1{,}107143.$$

Далі знайдемо оцінку абсолютної похибки Δ_1 і уточнене значення похідної:

$$\Delta_1 = |R'(x_5,h)| \approx \left|\left(F'(x_5,h) - F'(x_5,2h)\right)/(2^r - 1)\right| =$$

$$= \left|(1{,}357143 - 1{,}107143)/(2^2 - 1)\right| = 0{,}083333 = 0{,}08;$$

$$f'(x_5) \approx F'(x_5,h) + \left(F'(x_5,h) - F'(x_5,2h)\right)/(2^r - 1) =$$

$$= 1{,}357143 + 0{,}083333 = 1{,}440476 = 1{,}44. \quad \blacksquare$$

2.4.2. Чисельне інтегрування функцій. Метод прямокутників. Метод трапецій. Метод Симпсона

Нехай необхідно знайти наближене значення $I_n(f)$ визначеного інтеграла $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, де підінтегральна функція $f(x)$ задана своїми значеннями $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ у вузлах рівномірної сітки $\{x_k :\ a = x_0 < ... < x_k < ... < x_n = b\}$ зі сталим кроком h.

Наведемо найпростіші ***квадратурні формули*** знаходження наближення $I_n(f)$ у вигляді лінійної комбінації значень підінтегральної функції у вузлах x_k, $k = \overline{0,n}$:

а) ***Метод прямокутників***:

формула лівих прямокутників

$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) + R_n}$, де R_n – похибка;

формула правих прямокутників

$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)(y_1 + y_2 + ... + y_n) + R_n}$, де R_n – похибка.

Абсолютну похибку $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за цими формулами можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ_n^*

за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^2/(2n))M_1}, \text{ де } M_1 = \max_{x\in[a;b]} |f'(x)|.$$

Тобто, формули прямокутників характеризуються першим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 1$.

б) ***Метод трапецій***:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)\cdot(y_0/2 + y_1 + ... + y_{n-1} + y_n/2) + R_n},$$

де R_n – похибка. Абсолютну похибку $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за формулою трапецій можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ_n^* за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^3/(12n^2))M_2}, \text{ де } M_2 = \max_{x\in[a;b]} |f''(x)|.$$

Тобто, формула трапецій характеризується другим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 2$.

в) ***Метод Симпсона*** (***парабол***):

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/(3n))\cdot(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}) + \\ &+ 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2})) + R_n, \text{ де } R_n \text{ – похибка; } n \text{ – парне.}\end{aligned}}$$

Абсолютна похибка $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за формулою парабол оцінюється граничною абсолютною похибкою Δ_n^* так:

$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^5/(180n^4))M_4}, \text{ де } M_4 = \max_{x\in[a;b]} |f^{IV}(x)|.$$

Тобто, формула Симпсона характеризується четвертим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 4$.

<u>Зауваження</u>. Згідно з методом подвоєння кроку за першою формулою Рунге можна оцінити граничну абсолютну похибку:

$\boxed{\Delta_n^* \approx |I_h - I_{2h}|/(2^r - 1)}$, а за другою формулою Рунге можна уточнити значення інтеграла: $\boxed{I_{ym} \approx I_h + (I_h - I_{2h})/(2^r - 1)}$. Тут I_h і I_{2h} – наближені значення інтеграла, обчислені за вибраною квадратурною формулою відповідно при кроці h і $2h$; r – порядок точності цієї квадратурної формули ($r = 1$ – для формул лівих і правих прямокутників, $r = 2$ – для формули трапецій, $r = 4$ – для формули Симпсона).

Приклад. Дано визначений інтеграл $I = \int\limits_1^4 \frac{\ln(16x-1)}{x^{3/2}} dx$.

Виконати наступне:

1. Обчислити заданий інтеграл аналітично. Прийняти результат аналітичного розрахунку I_a за точне значення інтеграла.
2. Розбити відрізок інтегрування $[a;b] = [1;4]$ на $n = 12$ рівних частин з кроком $h = (b-a)/n = 0{,}25$ точками x_k, $k = \overline{0,n}$. Обчислити відповідні значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ підінтегральної функції $f(x) = (1/x^{3/2})\ln(16x-1)$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік цієї функції.
3. Обчислити наближено заданий інтеграл, застосовуючи при $n = 12$ формули: а) лівих прямокутників, б) правих прямокутників, в) трапецій, г) Симпсона. Користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку), для кожної вказаної квадратурної формули оцінити граничну абсолютну похибку Δ_n^* одержаного наближення I_h і знайти уточнене наближене значення інтеграла I_{ym}. Для кожного методу знайти відносну похибку $\delta_{ym} = \left| (I_{ym} - I_a)/I_a \right| \cdot 100\%$ уточненого наближення інтеграла I_{ym} порівняно з точним I_a.

Вказівка. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Уточнені наближені значення інтеграла подати з округленням до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ 1. Обчислимо заданий інтеграл аналітично:

$$I_a = \int_1^4 \frac{\ln(16x-1)}{x^{3/2}}\,dx = \left|\, u=\ln(16x-1);\ dv=\frac{dx}{x^{3/2}};\ du=\frac{16dx}{16x-1};\right.$$

$$\left. v=-\frac{2\,dx}{x^{1/2}}\right| = \left(-\frac{2\ln(16x-1)}{x^{1/2}}\Bigg|_1^4 + 32\int_1^4 \frac{dx}{x^{1/2}(16x-1)}\right) = -\ln 63 +$$

$$+2\ln 15 + \left|\begin{matrix} x=u^2; & u_1=1;\\ dx=2udu; & u_2=2 \end{matrix}\right| + 32\int_1^2 \frac{2u\,du}{u(16u^2-1)} = \ln\frac{25}{7} +$$

$$+4\int_1^2 \frac{du}{u^2-1/16} = \ln\frac{25}{7} + 4\cdot\frac{1}{2\cdot(1/4)}\ln\left|\frac{u-1/4}{u+1/4}\right|\Bigg|_1^2 = \ln(25/7)+$$

$$+8\big(\ln(7/9)-\ln(3/5)\big) = \ln(25/7)+8\ln(35/27) = 3{,}3490552\,.$$

2. Розіб’ємо відрізок інтегрування $[a;b]=[1;4]$ на $n=12$ рівних частин з кроком $h=(b-a)/n=0{,}25$ точками x_k, $k=\overline{0,n}$ і обчислимо відповідні значення $y_k = f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$ підінтегральної функції $f(x)=(1/x^{3/2})\ln(16x-1)$. Складемо таблицю:

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5
y_k	2,708050	2,106869	1,706747	1,423668	1,214098	1,053436	0,926816

k	7	8	9	10	11	12
x_k	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
y_k	0,824760	0,740961	0,671072	0,612003	0,561502	0,517892

і побудуємо графік підінтегральної функції $y=f(x)$ (рис. 31).

3. Обчислимо наближено заданий інтеграл, застосовуючи при $n=12$ вказані квадратурні формули. Для кожного методу знайдемо відповідні характеристики точності.

а) Знайдемо наближені значення інтеграла I_h і I_{2h} за формулою лівих прямокутників:

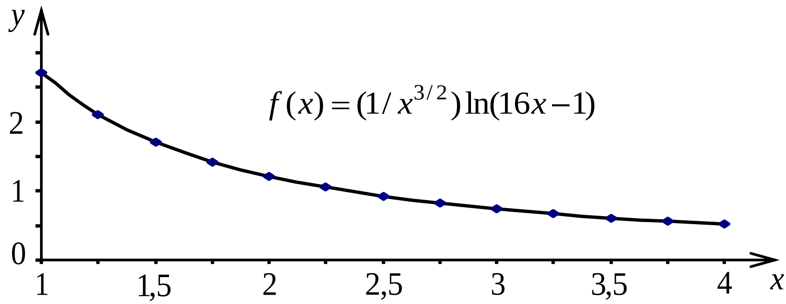

Рис. 31

$$I_h = h \cdot (y_0 + y_1 + ... + y_{11}) = 3{,}637495;$$

$$I_{2h} = 2h \cdot (y_0 + y_2 + y_4 + ... + y_{10}) = 3{,}954337.$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_h^* \approx |I_h - I_{2h}| / (2^1 - 1) = 0{,}316842.$$

Знайдемо уточнене значення інтеграла I_{ym} за другою формулою Рунге: $I_{ym} \approx I_h + (I_h - I_{2h}) / (2^1 - 1) = 3{,}320653 = 3{,}3207$.

Обчислимо відносну похибку δ_{ym} уточненого наближеного значення інтеграла I_{ym} порівняно з точним I_a:

$$\delta_{ym} = \left| \left(I_{ym} - I_a\right) / I_a \right| \cdot 100\% = 0{,}8481\%.$$

б) Знайдемо наближені значення інтеграла I_h і I_{2h} за формулою правих прямокутників:

$$I_h = h \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_{12}) = 3{,}089956;$$

$$I_{2h} = 2h \cdot (y_2 + y_4 + y_6 + ... + y_{12}) = 2{,}859258.$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_h^* \approx |I_h - I_{2h}| / (2^1 - 1) = 0{,}230698.$$

Знайдемо уточнене значення інтеграла I_{ym} за другою формулою Рунге: $I_{ym} \approx I_h + (I_h - I_{2h}) / (2^1 - 1) = 3{,}320653 = 3{,}3207$.

Обчислимо відносну похибку $\delta_{ут}$ уточненого наближеного значення інтеграла $I_{ут}$ порівняно з точним I_a:

$$\delta_{ут} = \left| \left(I_{ут} - I_a\right) / I_a \right| \cdot 100\% = 0{,}8481\% .$$

в) Знайдемо наближені значення інтеграла I_h і I_{2h} за формулою трапецій:

$$I_h = h \cdot (y_0 / 2 + y_1 + y_2 + ... + y_{11} + y_{12} / 2) = 3{,}363726;$$

$$I_{2h} = 2h \cdot (y_0 / 2 + y_2 + y_4 + ... + y_{10} + y_{12} / 2) = 3{,}406798.$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_h^* \approx \left| I_h - I_{2h} \right| / (2^2 - 1) = 0{,}014357.$$

Знайдемо уточнене значення інтеграла $I_{ут}$ за другою формулою Рунге: $I_{ут} \approx I_h + \left(I_h - I_{2h}\right) / (2^2 - 1) = 3{,}349368 = 3{,}3494$.

Обчислимо відносну похибку $\delta_{ут}$ уточненого наближеного значення інтеграла $I_{ут}$ порівняно з точним I_a:

$$\delta_{ут} = \left| \left(I_{ут} - I_a\right) / I_a \right| \cdot 100\% = 0{,}0093\% .$$

г) Знайдемо наближені значення інтеграла I_h і I_{2h} за формулою Симпсона:

$$I_h = (h/3) \cdot \big(y_0 + y_{12} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{11}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + ... + y_{10})\big) = 3{,}349368; \quad I_{2h} = (2h/3) \cdot \big(y_0 + y_{12} +$$

$$+ 4(y_2 + y_4 + ... + y_{10}) + 2(y_4 + y_8)\big) = 3{,}353054.$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_h^* \approx \left| I_h - I_{2h} \right| / (2^4 - 1) = 0{,}000246.$$

Знайдемо уточнене значення інтеграла $I_{ут}$ за другою формулою Рунге: $I_{ут} \approx I_h + \left(I_h - I_{2h}\right) / (2^4 - 1) = 3{,}349122 = 3{,}3491$.

Обчислимо відносну похибку $\delta_{ут}$ уточненого наближеного значення інтеграла I_{ym} порівняно з точним I_a:

$$\delta_{ym} = \left| \left(I_{ym} - I_a \right) / \, I_a \right| \cdot 100\% = 0{,}0020\% . \quad ■$$

2.5. Чисельні методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь

2.5.1. Загальні поняття про чисельні методи розв'язування задачі Коші

Нехай ***звичайне диференціальне рівняння першого порядку*** $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ можна подати у ***нормальній формі***

$$y'(x) = f(x, y(x)) .$$

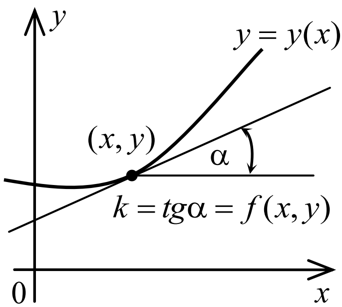

Рис. 32

Його ***розв'язком*** є диференційовна функція $y(x)$, що при підстановці в рівняння перетворює його у вірну тотожність. На рис. 32 наведено графік розв'язку диференціального рівняння, який називається ***інтегральною кривою***.

Задача Коші полягає у тому, щоб відшукати функцію $y = y(x)$, яка задовольняє рівнянню $y'(x) = f(x, y(x))$ і початковій умові $y(x_0) = y_0$. Геометричний зміст цієї задачі: знайти інтегральну криву $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$. Звичайно визначають розв'язок задачі Коші на відрізку, який розташований праворуч від початкового значення x_0, тобто для $x \in [x_0, X]$, де $X > x_0$.

Чисельні методи розв'язування задачі Коші діляться на: ***однокрокові*** та ***багатокрокові***, ***явні*** та ***неявні***.

Однокроковий метод використовує дані про розв'язок $y(x)$ тільки в одній попередній точці. Проте деякі з них передбачають обчислення значень правої частини $f(x, y)$ у проміжних точках.

А m***-кроковий метод*** для обчислення поточного значення розв’язку y_k потребує даних про розв’язок у m попередніх точках x_{k-i}, $i=1,2,...,m$, $m \geq 1$.

В ***явних методах*** поточне значення розв’язку виражається в явній формі і знаходиться безпосередньо через його відомі значення на попередніх кроках за допомогою скінченного числа операцій. (Ці методи не потребують ітерацій).

У ***неявних методах*** знаходження поточного значення розв’язку зводиться до наближеного розв’язування скінченного рівняння. Звичайно, для цього застосовують метод простих ітерацій або метод Ньютона.

Нехай $y(x)$ – точний розв’язок задачі Коші, а y_k, $k=0,1,...,n$ – її наближений чисельний розв’язок. ***Глобальною похибкою*** (або просто ***похибкою***) чисельного методу називають сіткову функцію $R_k = y(x_k) - y_k$, $k=\overline{0,n}$, задану у вузлах x_k сітки ω_n, $k=\overline{0,n}$. За ***абсолютну похибку*** приймають величину $\Delta_n = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |R_k|$. ***Локальною похибкою*** на k-му кроці ***однокрокового методу*** називають $l_k = \tilde{y}_k - y(x_k)$, де $\tilde{y}_k$ – чисельний розв’язок, отриманий при умові, що за наближення y_{k-1} до розв’язку на попередньому кроці взято його точне значення: $y_{k-1} = y(x_{k-1})$. ***Локальною похибкою*** на k-му кроці m***-крокового методу*** називають величину $l_k = \tilde{y}_k - y(x_k)$, де $\tilde{y}_k$ – чисельний розв’язок, одержаний при умові, що за наближення $y_{k-i}, i=1,2,...,m$ до розв’язку на m попередніх кроках взято його точні значення: $y_{k-i} = y(x_{k-i})$, $i=1,2,...,m$.

Для оцінки якості наближення на відрізку $[x_0; x_n]$ також використовується ***середньоквадратичне відхилення*** σ_n наближених значень y_k розв’язку від точних $y(x_k)$, яке обчислюється за формулою $\boxed{\sigma_n = \sqrt{(1/n)\sum_{k=1}^{n} \left(y(x_k) - y_k\right)^2}}$.

Чисельний метод має r***-й порядок точності*** ($r > 0$), якщо для абсолютної похибки Δ_n справджується оцінка $\Delta_n \leq Ch^r$, де C

– деяка додатна стала.

Зауваження. Похибка наближеного розв'язку тим чи іншим чисельним методом виражається через похідні шуканого розв'язку, які наперед невідомі. На практиці у випадку рівномірної сітки двічі проводять розрахунки за однією й тією ж схемою r-го порядку точності при кроках h і $2h$. Як результат отримують відповідно два наближення $y(x,h)$ і $y(x,2h)$ до точного розв'язку $y(x)$. Використовуючи першу формулу Рунге, для оцінки граничної абсолютної похибки Δ_n^* наближеного розв'язку $y(x,h)$ на густішій сітці можна дістати співвідношення

$$\boxed{\Delta_n^* \approx \left(1/(2^r-1)\right)\max_x |\,y(x,h)-y(x,2h)\,|},$$

де максимум береться за всіма співпадаючими вузлами x обох сіток.

2.5.2. Явні однокрокові методи Ейлера і Рунге – Кутта

Нехай треба розв'язати задачу Коші $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ на відрізку $x \in [x_0, X]$, де $X > x_0$. Візьмемо сталий крок $h = (X - x_0)/n$ і побудуємо рівномірну сітку з вузлами $x_k = x_0 + kh,\ \ k = 0,1,2,\ldots,n$.

У кожному вузлі x_{k-1}, $k = 1,\ldots,n$ замінимо похідну y' скінченною різницею вперед $y'_{k-1} \approx (y_k - y_{k-1})/h$, а праву частину $f(x,y)$ обчислимо в точці (x_{k-1}, y_{k-1}). Отримаємо $y_k = y_{k-1} + h\,f(x_{k-1}, y_{k-1})$ $(k = 1,\ldots,n)$ – ***різницеве рівняння***, що служить наближенням даного диференціального рівняння з локальною похибкою другого порядку: $l_k = O(h^2)$. Абсолютна похибка має перший порядок: $\Delta_n = O(h)$.

Додаючи початкову умову $y_0 = y(x_0)$, одержимо ***різницеву задачу Коші***, що апроксимує відповідну диференціальну задачу.

Явний однокроковий метод Ейлера задається розрахунковими формулами:

$$\boxed{y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,,\ \Delta y_k = h\,f\,(x_{k-1}, y_{k-1})\,,\ \ k = 1,\ldots,n}$$

і забезпечує перший порядок точності ($r = 1$).

Серед методів високої точності одним з найпоширеніших є ***метод Рунге – Кутта***. Він базується на розвиненні шуканого розв'язку $y(x)$ в ряд Тейлора в околі точки $x = x_k$ до членів r-го порядку включно. Розрахункові формули ***явного однокрокового методу Рунге – Кутта четвертого порядку точності*** ($r = 4$) для випадку сталого кроку інтегрування мають вигляд:

$$\boxed{\begin{gathered} y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,,\ \ \Delta y_k = (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6\,; \\ K_1 = h\,f\,(x_{k-1}, y_{k-1})\,;\ \ K_2 = h\,f\,(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_1/2)\,; \\ K_3 = h\,f\,(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_2/2)\,; \\ K_4 = h\,f\,(x_{k-1} + h, y_{k-1} + K_3)\,,\ \ k = 1,2,3,\ldots. \end{gathered}}$$

2.5.3. Явний чотирикроковий метод Адамса. Метод прогнозування і корекції Хеммінга

Замінюючи праву частину диференціального рівняння $y' = f\,(x, y)$ інтерполяційним многочленом третього порядку, можна одержати розрахункові формули ***явного чотирикрокового методу Адамса***

$$\boxed{\begin{gathered} y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,;\quad \Delta y_k = (h/24)\big(55\,f\,(x_{k-1}, y_{k-1}) - 59\times \\ \times\, f\,(x_{k-2}, y_{k-2}) + 37\,f\,(x_{k-3}, y_{k-3}) - 9\,f\,(x_{k-4}, y_{k-4})\big),\ k = 4, 5,\ \ldots, \end{gathered}}$$

що має четвертий порядок точності.

У методах ***прогнозування та корекції*** (***предиктор – коректор***) кожний крок розбивається на два етапи: спочатку явним методом (***предиктор***) знаходять його грубе наближення $y_k^{(0)}$ в новому k-му вузлі (***прогнозування***), а потім неявним методом (***коректор***), ітераційно уточнюють отримане значення $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$, ... (***корекція***).

На практиці часто застосовують ***чотирикроковий метод прогнозування і корекції Хеммінга***:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_k^{(0)} = y_{k-4} + (4h/3)\left(2f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2}) +\right. \\ \left. + 2f(x_{k-3}, y_{k-3})\right); \qquad y_k = (1/8)(9y_{k-1} - y_{k-3}) + (3h/8)\times \\ \times\left(f(x_k, y_k^{(0)}) + 2f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})\right); \quad k = 4,5,6,\ldots, \end{array}}$$

де корекція обмежується однією ітерацією. Він має четвертий порядок точності.

Зауваження. Для запуску багатокрокових методів Адамса і Хеммінга потрібно додатково визначити y_1, y_2 і y_3, наприклад, тим же методом Рунге – Кутта.

Приклад. Поставлено задачу Коші: знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y(1) = y_0$. Виконати наступне:

1. Розв'язати дану задачу Коші аналітично. Прийняти результат аналітичного розрахунку $y = y(x)$ за точний розв'язок. Обчислити значення $y(x_k)$ отриманого аналітичного розв'язку на відрізку $[1;2]$ у $n = 10$ рівновіддалених вузлах $x_k = x_{k-1} + h$, $x_0 = 1$, $k = 1,2,\ldots,n$ з кроком $h = 0{,}1$. Скласти відповідну таблицю і побудувати графік цього розв'язку $y = y(x)$.
2. Чисельно розв'язати задачу Коші на відрізку $[1;2]$ з кроком $h = 0{,}1$ вказаним далі способом: а) методом Ейлера; б) методом Рунге – Кутта; в) методом Адамса; г) методом Хеммінга. Для кожного способу отримані наближені значення y_k; $k = 0,1,\ldots,n$ занести у відповідну таблицю і побудувати графік наближеного розв'язку $y = y(x)$. Користуючись методом подвоєння кроку, знайти оцінку $\Delta_n^* \approx \left(1/(2^r - 1)\right) \max\limits_x |y(x,h) - y(x,2h)|$ граничної абсолютної похибки Δ_n^* одержаного наближеного розв'язку $y = y(x,h)$ на густішій сітці. Знайти $\sigma_n = \sqrt{(1/n)\sum_{k=1}^{n} (y(x_k) - y_k)^2}$ – середньоквадратичне відхилення наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$.

$$f(x,y)=2y/x-3/x^2; \quad y_0=2.$$

Вказівка. 1. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Наближені значення розв'язку подати з округленням до шести десяткових знаків після коми. 2. Необхідні для запуску чотирикрокових методів Адамса та Хеммінга, окрім початкової умови $y_0=y(1)$, ще три значення y_1, y_2 і y_3 попередньо знайти за допомогою однокрокового методу Рунге – Кутта (використати результати пункту 2.б).

□ 1. Розв'яжемо дану задачу Коші аналітично:

$y'=2y/x-3/x^2$ – лінійне рівняння; $y=uv$ – підстановка Бернуллі; $y'=u'v+uv'$; $u'v+uv'-2uv/x=-3/x^2$;

$$u'v+u(v'-2v/x)=-3/x^2; \; v'-2v/x=0; \; \int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln v=2\ln x; \; v=x^2; \; u'x^2=-3/x^2; \; u=-3\int x^{-4}dx=x^{-3}+C;$$

$y=uv=(x^{-3}+C)x^2$ – загальний розв'язок;

$$y(1)=2: \quad (1^{-3}+C)\cdot 1^2=2; \; C=1; \; y=(x^{-3}+1)x^2=1/x+x^2$$

– розв'язок задачі Коші.

Розіб'ємо заданий відрізок $[1;2]$ на $n=10$ рівних частин з кроком $h=0{,}1$ точками x_k, $k=\overline{0,n}$ і обчислимо відповідні значення $y_k=f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$ аналітичного розв'язку $y=1/x+x^2$. Складемо таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$y(x_k)$	2,000000	2,119091	2,273333	2,459231	2,674286	2,916667

k	6	7	8	9	10
x_k	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$y(x_k)$	3,185000	3,478235	3,795556	4,136316	4,500000

і побудуємо графік цього розв’язку $y = y(x)$ (рис. 33).

2. Розв’яжемо задачу Коші наближено на відрізку $[1;2]$ з кроком $h = 0{,}1$ вказаним далі способом. Для кожного методу знайдемо відповідні характеристики точності отриманого чисельного розв’язку.

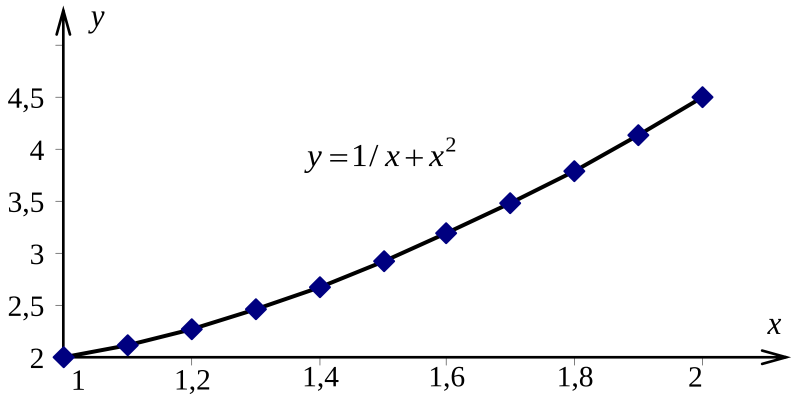

Рис. 33

а) Проведемо обчислення за методом Ейлера й отримані значення запишемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_k	2,000000	2,100000	2,233884	2,397865	2,589253	2,806085

k	6	7	8	9	10
x_k	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_k	3,046896	3,310570	3,596243	3,903233	4,230997

Аналогічно провівши розрахунки наближеного розв’язку з подвоєним кроком $2h = 0{,}2$, за формулою Рунге дістанемо оцінку граничної абсолютної похибки $\Delta_n^* = 2{,}27 \cdot 10^{-1}$.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з пункту 1. Дістанемо $\sigma_n = 1{,}55 \cdot 10^{-1}$.

б) Проведемо обчислення за методом Рунге – Кутта й отримані значення запишемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_k	2,000000	2,119085	2,273322	2,459215	2,674266	2,916643

k	6	7	8	9	10
x_k	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_k	3,184972	3,478203	3,795518	4,136274	4,499953

Аналогічно провівши розрахунки наближеного розв'язку з подвоєним кроком $2h = 0{,}2$, за формулою Рунге дістанемо оцінку граничної абсолютної похибки $\Delta_n^* = 8{,}76 \cdot 10^{-2}$.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з пункту 1. Дістанемо $\sigma_n = 2{,}93 \cdot 10^{-5}$.

в) З умови задачі $y_0 = 2$, а з пункту 2.б додатково маємо ще три значення $y_1 = 2{,}119085$, $y_2 = 2{,}273322$ і $y_3 = 2{,}459215$, одержані за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами методу Адамса й отримані значення занесемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_k	2,000000	2,119085	2,273322	2,459215	2,674418	2,916938

k	6	7	8	9	10
x_k	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_k	3,185364	3,478683	3,796087	4,136928	4,500692

Аналогічно провівши розрахунки наближеного розв'язку з подвоєним кроком $2h = 0{,}2$, за формулою Рунге дістанемо оцінку граничної абсолютної похибки $\Delta_n^* = 8{,}79 \cdot 10^{-2}$.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з пункту 1. Дістанемо $\sigma_n = 3{,}95 \cdot 10^{-4}$.

г) З умови задачі $y_0 = 2$, а з пункту 2.б додатково маємо ще три значення $y_1 = 2{,}119085$, $y_2 = 2{,}273322$ і $y_3 = 2{,}459215$, одержані за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами методу прогнозування і корекції Хеммінга й отримані значення запишемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y_k	2,000000	2,119085	2,273322	2,459215	2,674268	2,916645

k	6	7	8	9	10
x_k	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_k	3,184975	3,478207	3,795523	4,136279	4,499959

Аналогічно провівши розрахунки наближеного розв'язку з подвоєним кроком $2h = 0{,}2$, за формулою Рунге дістанемо оцінку граничної абсолютної похибки $\Delta_n^* = 8{,}76 \cdot 10^{-2}$.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з пункту 1. Дістанемо $\sigma_n = 2{,}59 \cdot 10^{-5}$. ■

Завдання для практичних занять і модульної контрольної роботи

Завдання 1. Для подвійного інтеграла $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ вказано підінтегральну функцію $f(x,y)$ і область інтегрування D, яка задана рівняннями ліній, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

1. Зобразити область інтегрування D у прямокутній системі координат Oxy.

2. Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Oy, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до двократного повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням за змінною x і внутрішнім інтегруванням за змінною y.

3. Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Ox, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до двократного повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням за змінною y і внутрішнім інтегруванням за змінною x.

№ в-та	Завдання
1	$f(x,y)=2x^2y$; D: $4x-y^2=0,\ x-9=0$
2	$f(x,y)=6x/y^4$; D: $xy=1,\ y=x,\ x=3$
3	$f(x,y)=6xy$; D: $\sqrt{2-x^2}+y=0,\ x^2+y=0$
4	$f(x,y)=2x^3-xy$; D: $y-3=-x^2,\ y+5=x^2$
5	$f(x,y)=3x^2y$; D: $y=x^3,\ x+y-2=0, y=0$
6	$f(x,y)=x+4y^3$; D: $xy=1,\ y=\sqrt{x},\ x=4$
7	$f(x,y)=3x^2y$; D: $y^2+x-3=0,\ y^2=x+1$
8	$f(x,y)=6xy$; D: $x^2+y^2\le 9,\ y\ge 2x/3+3$
9	$f(x,y)=x^2y$; D: $y=x^3,\ y=8,\ x=0$

10	$f(x,y)=2x-y$; $D: y=x^3,\ y=-2x^3,\ x=1$
11	$f(x,y)=6x-yx^3$; $D:\ 2x-y-1=0,\ x^2+y-2=0$
12	$f(x,y)=6y/x^2$; $D:\ y=x,\ xy=4,\ x=4$

Завдання 2. Обчислити вказаний криволінійний інтеграл за довжиною $I=\int_L f(x,y)\,dl$ по заданій дузі L.

№ в-та	Завдання
1	$\int\limits_L (x^2-2y)\,dl$, L – дуга кола $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$
2	$\int\limits_L x^4y^{-1}dl$, L – дуга гіперболи $y=1/x$, $\sqrt{3}\big/2\le x\le 2\big/\sqrt{3}$
3	$\int\limits_L \dfrac{y^3\,dl}{\sqrt{1+x^2}}$, L – дуга логарифма $y=\ln x$, $1\le x\le e^2$
4	$\int\limits_L \dfrac{y\cos^2 x\,dl}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, L – дуга синусоїди $y=\sin x$, $0\le x\le\pi/2$
5	$\int\limits_L y\,dl$, L – дуга циклоїди $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$
6	$\int\limits_L \dfrac{xy}{\sqrt{1+4y}}\,dl$, L – дуга параболи $y=x^2$, $0\le x\le 1$
7	$\int\limits_L \dfrac{x\ln y}{\sqrt{1+y^2}}\,dl$, L – дуга експоненти $y=e^x$, $0\le x\le 1$
8	$\int\limits_L \dfrac{y^3\sin x\,dl}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, L – дуга косинусоїди $y=\cos x$, $0\le x\le\pi/2$
9	$\int\limits_L (2x^{1/3}-y^{1/3})\,dl$, L – дуга астроїди $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $0\le t\le\pi/2$

10	$\int_L \frac{y\,dl}{1+9xy}$, L – дуга кубічної параболи $y = x^3$, $0 \le x \le 1/2$
11	$\int_L \frac{xy^2\,dl}{\sqrt{x^2+16y^2}}$, L – дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
12	$\int_L e^{-x}\sqrt{1+y^2}\,dl$, L – дуга експоненти $y = e^x$, $0 \le x \le 1$

Завдання 3. Обчислити вказаний криволінійний інтеграл за координатами $\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ по заданій дузі L.

№ в-та	Завдання
1	$\int_L (x^2 - y^2)\,dx + xy\,dy$, L – дуга параболи $y^2 = 2 - x$, $0 \le x \le 1$
2	$\int_L x(x^2 + y^2)\,dx + x^2 y dy$, L – дуга кола $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$
3	$\int_L \frac{y\,dx + 2x\,dy}{\sqrt{1-x^2}}$, L – дуга арксинуса $y = \arcsin x$, $0 \le x \le 1/2$
4	$\int_L 2y\,dx + (\cos^2 x + y^2)\,dy$, L – дуга синусоїди $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi/2$
5	$\int_L \sqrt{1+y^2}\sin x\,dx - y\cos x\,dy$, L – дуга тангенсоїди $y = tg\,x$, $\pi/6 \le x \le \pi/4$
6	$\int_L (x^{2/3} + y^{2/3})\,dx - dy$, L – дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$
7	$\int_L \frac{x(x^2+4y^2)\,dx + xy\,dy}{x^2+4y^2}$, L – дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$

8	$\int\limits_L \frac{y^2dx}{x} + y^2 \ln x\, dy$, L – дуга логарифма $y = \ln x$, $1 \le x \le e^2$
9	$\int\limits_L \frac{y\,dx - 2x\,dy}{x^2+1}$, L – дуга арктангенса $y = arctg\, x$, $0 \le x \le 1$
10	$\int\limits_L (2x^2 + \ln^2 y)\,dx + (x/y)\,dy$, L – дуга експоненти $y = e^x$, $0 \le x \le 1$
11	$\int\limits_L xy\,dx - xy(x^2+4y^2)\,dy$, L – дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi/2$
12	$\int\limits_L 2y^3 \sin x\,dx + y^2 \cos x\,dy$, L – дуга косинусоїди $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$

Завдання 4. Знайти радіус, інтервал і область збіжності степеневого ряду.

№ в-та	Ряд	№ в-та	Ряд
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n} x^{2n-1}}{n(n+4)}$	7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}(x-3)^n}{\sqrt{n^2+4}}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{3n}}{8^n(n+4)}$	8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n\,16^n}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{5n}}{(3n+4)^{2n}}$	9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n+3}}{4^n n^3}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{2^n + 3^{2n}}$	10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x-2)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^2+1)^n x^n$	11	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n(x+1)^{2n}}{n^3+1}$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{3n-1}}{2^{3n}\sqrt[3]{n}}$	12	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+2)^{3n}}{27^n}$

Завдання 5. Наближено обчислити даний визначений інтеграл з граничною абсолютною похибкою $\varepsilon = 0{,}0001$, розкладаючи підінтегральну функцію в степеневий ряд і потім інтегруючи його почленно.

№ в-та	Інтеграл	№ в-та	Інтеграл
1	$\int\limits_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}dx$	7	$\int\limits_0^{0,5} \frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2}dx$
2	$\int\limits_0^{0,5} \frac{arctg\, x^4}{x}dx$	8	$\int\limits_0^1 \frac{e^{-x^2}-1}{x}dx$
3	$\int\limits_0^1 \frac{1-\cos x^3}{x^2}dx$	9	$\int\limits_0^1 \frac{\sin x^2}{x}dx$
4	$\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^4)}{x}dx$	10	$\int\limits_0^{0,5} \frac{arctg\, x^6}{x^2}dx$
5	$\int\limits_0^{0,5} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}dx$	11	$\int\limits_0^1 \frac{e^{-x^3}-1}{x^2}dx$
6	$\int\limits_0^1 \frac{\sin x^3}{x^2}dx$	12	$\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^6)}{x^2}dx$

Завдання 6. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-\pi;\pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графік даної функції $y = f(x)$ і графік суми $y = S(x)$ одержаного її розвинення на відрізку $[-3\pi;3\pi]$.

№ в-та	Функція $f(x)$	№ в-та	Функція $f(x)$
1	$\begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0; \\ 3x-2\pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$	7	$\begin{cases} 2x+\pi, & -\pi < x < 0; \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$

2	$\lvert \pi - 2x \rvert,\ x \in (-\pi;\pi)$	8	$\lvert x \rvert - 2x,\quad -\pi < x < \pi$
3	$\begin{cases} x+\pi, & -\pi < x < 0; \\ x-2\pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$	9	$\begin{cases} -2\pi, & -\pi < x \le 0; \\ 2x, & 0 < x < \pi \end{cases}$
4	$\begin{cases} \pi\cos(x/2), & -\pi < x < 0; \\ \pi, & 0 \le x < \pi \end{cases}$	10	$\begin{cases} \pi\sin(x/2), & -\pi < x < 0; \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$
5	$\begin{cases} x+2\pi, & -\pi < x \le 0; \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$	11	$\begin{cases} x-\pi, & -\pi < x < 0; \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$
6	$\begin{cases} x+3\pi, & -\pi < x < 0; \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$	12	$\begin{cases} x, & -\pi < x < 0; \\ 4\pi - 3x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

Завдання 7. Для заданої функції $u = f(x, y, z)$ вказані значеннях її аргументів $X = x \pm \Delta_x$, $Y = y \pm \Delta_y$, $Z = z \pm \Delta_z$. Знайти наближене значення u цієї функції, а також лінійні оцінки його абсолютної Δ_u і відносної δ_u похибок.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$u = (x^4 - z)/y^2$, $x = 1{,}543 \pm 0{,}0005$, $y = 1{,}87 \pm 0{,}02$, $z = 2{,}14 \pm 0{,}006$	7	$u = (x^2 + yz)/y^3$, $x = 2{,}15 \pm 0{,}03$, $y = 1{,}593 \pm 0{,}005$, $z = 0{,}27 \pm 0{,}008$
2	$u = xz^3 - y^2/x^2$, $x = 5{,}391 \pm 0{,}007$, $y = 3{,}72 \pm 0{,}005$, $z = 1{,}68 \pm 0{,}02$	8	$u = y^3/z^2 + xz^3$, $x = 1{,}48 \pm 0{,}03$, $y = 0{,}9326 \pm 0{,}0005$, $z = 1{,}24 \pm 0{,}008$
3	$u = xz^4 - x^2/y^2$, $x = 3{,}629 \pm 0{,}004$, $y = 2{,}13 \pm 0{,}009$, $z = 1{,}97 \pm 0{,}05$	9	$u = yz^2 - x^2/y^3$, $x = 4{,}16 \pm 0{,}02$, $y = 2{,}39 \pm 0{,}005$, $z = 0{,}7182 \pm 0{,}0006$

4	$u = y^2/(xz) + x^2 z$, $x = 4{,}153 \pm 0{,}006$, $y = 2{,}274 \pm 0{,}0005$, $z = 1{,}24 \pm 0{,}03$	10	$u = y^3/(xz) - x z^2$, $x = 1{,}26 \pm 0{,}02$, $y = 0{,}8514 \pm 0{,}0005$, $z = 1{,}39 \pm 0{,}008$
5	$u = y^2/(x + z^2) - x z$, $x = 0{,}4839 \pm 0{,}0007$, $y = 1{,}62 \pm 0{,}05$, $z = 0{,}826 \pm 0{,}003$	11	$u = z^2/(xy + z) - y z$, $x = 0{,}8716 \pm 0{,}0003$, $y = 1{,}59 \pm 0{,}06$, $z = 1{,}63 \pm 0{,}005$
6	$u = (xy + z^4)/y^2$, $x = 3{,}157 \pm 0{,}005$, $y = 2{,}38 \pm 0{,}007$, $z = 1{,}75 \pm 0{,}04$	12	$u = xy^2 + z^4/y$, $x = 0{,}825 \pm 0{,}003$, $y = 1{,}89 \pm 0{,}08$, $z = 0{,}78 \pm 0{,}005$

Завдання 8. Дано рівняння $f(x) = 0$. Виконати наступне:

1. Подати задане рівняння у вигляді $f_1(x) = f_2(x)$. Знайти найменший за модулем дійсний корінь x^* рівняння наближено графічно як абсцису x_g найближчої до осі Oy точки перетину графіків $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і вказати проміжок ізоляції $[a_0; b_0]$ цього кореня, де $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

2. Уточнити найменший за модулем корінь рівняння $f(x) = 0$ вказаним далі методом. Задано точність (за аргументом) δ обчислення кореня: $|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0{,}01$. Задано точність (за функцією) ε обчислення кореня: $|f(x_k)| < \varepsilon = 0{,}01$. Виконати $k_{\max}$ ітерацій. Знайти наближене значення $x_{k_{\max}}$ цього кореня та досягнуті характеристики його точності $\delta_{k_{\max}} = |x_{k_{\max}} - x_{k_{\max}-1}|$ і $\varepsilon_{k_{\max}} = |f(x_{k_{\max}})|$. Якщо обидві задані характеристики точності δ і ε досягнуті, то вказати найменшу достатню для цього кількість ітерацій $k_{дост}$.

а) Методом поділу навпіл. б) Модифікованим методом простих ітерацій. в) Модифікованим методом Ньютона.

Вказівки. 1. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. 2. Проміжок локалізації $[a_0;b_0]$ шуканого кореня x^* визначити так, що його кінці a_0 і b_0 – цілі числа, причому $b_0-a_0=1$ і $f(a_0)\ f(b_0)<0$. 3. У модифікаціях методу простих ітерацій і методу Ньютона за значення параметра спочатку взяти відповідно $\alpha=-\text{sgn}(f(b_0)-f(a_0))$ і $\alpha=1$, де $\text{sgn}\,x=\{-1\ \textit{при}\ x<0,\ 0\ \textit{при}\ x=0,\ 1\ \textit{при}\ x>0\}$. Якщо при цьому ітераційний процес розбігається, то способом проб, послідовно зменшуючи за модулем значення α з кроком $\Delta\alpha=0{,}1$, знайти достатнє для збіжності відмінне від нуля значення параметра α.

№ в-та	Рівняння	№ в-та	Рівняння
1	$0{,}3-0{,}1x\cos x-0{,}5x^3=0$	7	$0{,}2+0{,}1\cos x-0{,}6x^3=0$
2	$0{,}2-0{,}1x\sin x-0{,}5x^3=0$	8	$0{,}3-0{,}1\sin x-0{,}6x^3=0$
3	$0{,}4-0{,}1x\sin x-0{,}5x=0$	9	$0{,}4-0{,}1\cdot 2^x-0{,}5x=0$
4	$0{,}2-0{,}1\sin x-0{,}5x^3=0$	10	$0{,}2-0{,}1x\cos x-0{,}4x=0$
5	$0{,}3-0{,}1\cdot 2^x-0{,}6x^3=0$	11	$0{,}4+0{,}1\cdot 2^{-x}-0{,}6x=0$
6	$0{,}3-0{,}1\sin x-0{,}5x=0$	12	$0{,}2-0{,}1x\sin x-0{,}4x^3=0$

Завдання 9. Досліджувана функція $f(x)$ задана своїми значеннями в $n+1$ вузлах $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$ згідно поданої таблиці, де $n=3$. У прямокутній системі координат Oxy зобразити наведені в таблиці точки $(x_k\,,y_k)$, $y_k=f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$. Виконати наступне:

1. Знайти для заданої функції $f(x)$ інтерполяційний многочлен Лагранжа $y=L_3(x)$. Обчислити значення цього інтерполяційного многочлена на відрізку $[-4;4]$ з кроком $h=0{,}5$, скласти відповідну таблицю і побудувати його графік.

2. Знайти апроксимацію цієї функції $f(x)$ лінійною регресією $F(x) = a_0 + a_1 x$ за методом найменших квадратів. Обчислити значення отриманої лінійної регресії $y = a_0 + a_1 x$ на кінцях відрізка $[-4;4]$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення Δy_s лінійної регресії від заданих значень вхідної функції.

Вказівка. 1. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Значення коефіцієнтів інтерполяційного многочлена і лінійної регресії подати з округленням до чотирьох десяткових знаків після коми. 2. Усі графіки побудувати в одній системі координат Oxy.

№ в-та	k	0	1	2	3
1	x_k	-2	0	1	4
	y_k	-2,5	-1,3	2,5	1,5
2	x_k	-3	-1	2	3
	y_k	-1,5	-2,5	1,7	2,2
3	x_k	-4	-3	0	2
	y_k	-2,1	-1,5	1,4	2,6
4	x_k	-2	0	3	4
	y_k	1,5	2,3	-2,1	1,2
5	x_k	-3	-2	1	3
	y_k	2,5	1,4	-2,5	0,6
6	x_k	-4	-3	0	3
	y_k	-1,5	-2,5	1,8	-1,2
7	x_k	-2	-1	2	4
	y_k	1,5	-2,1	-1,4	1,7
8	x_k	-3	-1	2	3
	y_k	-2,5	-1,5	1,3	2,3

9	x_k	-4	-3	0	2
	y_k	-2,3	-1,8	0,5	1,2
10	x_k	-2	1	3	4
	y_k	-1,8	0,7	1,3	2,1
11	x_k	-3	-1	2	3
	y_k	-0,8	-1,5	1,7	2,1
12	x_k	-4	-3	0	2
	y_k	-2,4	-1,7	1,3	2,2

Завдання 10. Функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[x_0; x_n]$ таблицею значень $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ ($n = 5$) у рівновіддалених вузлах x_0, $x_k = x_{k-1} + h$, $k = \overline{1,n}$ зі сталим кроком $h = (b-a)/n$. Знайти наближене значення $f'(x_3)$ похідної $f'(x)$ у вузлі x_3 за формулою $f'(x_k) \approx F'(x_k, h) = (-y_{k-1} + y_{k+1})/(2h)$, що має порядок точності $r = 2$, з кроком h. Користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку), оцінити абсолютну похибку апроксимації Δ_1 та уточнити значення похідної $f'(x_3)$.

Вказівка. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Уточнене значення похідної подати з округленням до двох десяткових знаків після коми.

№ в-та	k	0	1	2	3	4	5
	x_k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1	y_k	1,24	0,95	0,62	0,47	0,35	0,23
2	y_k	1,13	0,87	0,72	0,53	0,38	0,25
3	y_k	1,37	1,45	1,67	1,89	2,15	2,28
4	y_k	3,14	2,75	2,36	2,17	1,85	1,62

5	y_k	2,93	2,71	2,38	2,04	1,92	1,54
6	y_k	2,83	2,64	2,32	2,01	1,87	1,68
7	y_k	2,75	2,36	2,18	1,97	1,52	1,34
8	y_k	3,12	2,96	2,59	2,34	2,05	1,87
9	y_k	2,79	2,55	2,31	2,07	1,85	1,56
10	y_k	0,85	1,15	1,36	1,52	1,83	2,04
11	y_k	0,36	0,58	0,84	1,03	1,25	1,38
12	y_k	1,53	1,37	1,18	1,07	0,85	0,63

Завдання 11. Дано визначений інтеграл $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$.

Виконати наступне:
1. Обчислити заданий інтеграл аналітично. Прийняти результат аналітичного розрахунку I_a за точне значення інтеграла.
2. Розбити відрізок інтегрування $[a;b]$ на $n=12$ рівних частин з кроком $h=(b-a)/n$ точками x_k, $k=\overline{0,n}$. Обчислити відповідні значення $y_k=f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$ підінтегральної функції $y=f(x)$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік цієї функції.
3. Обчислити наближено заданий інтеграл, застосовуючи при $n=12$ формули: а) лівих прямокутників, б) правих прямокутників, в) трапецій, г) Симпсона. Користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку), для кожної вказаної квадратурної формули оцінити граничну абсолютну похибку Δ_n^* одержаного наближення I_h і знайти уточнене наближене значення інтеграла $I_{ут}$. Для кожного методу знайти відносну похибку $\delta_{ут}=\left|\left(I_{ут}-I_a\right)/\,I_a\right|\cdot 100\%$ уточненого наближення інтеграла $I_{ут}$ порівняно з точним I_a.

Вказівка. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Уточнені наближені значення інтеграла подати з округленням до чотирьох десяткових знаків після коми.

№ в-та	Інтеграл	№ в-та	Інтеграл
1	$I=\int\limits_1^4 \frac{arctg\, x}{x^2}dx$	7	$I=\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{25+x^2}}{x^2}dx$
2	$I=\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}+9}{x^2+4x}dx$	8	$I=\int\limits_1^4 \frac{\sqrt[3]{x}+16}{\sqrt[3]{x^2}+1}dx$
3	$I=\int\limits_1^4 arctg\sqrt{x}\,dx$	9	$I=\int\limits_1^4 x^2 arctg\, x\,dx$
4	$I=\int\limits_1^4 \frac{\ln(25+x^2)}{x^3}dx$	10	$I=\int\limits_1^4 \frac{\ln(9+x^2)}{x^2}dx$
5	$I=\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}+8}{(x+1)\sqrt{x}}dx$	11	$I=\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2}dx$
6	$I=\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x^2}dx$	12	$I=\int\limits_1^4 \frac{\ln(25+\sqrt{x})}{x^2}dx$

Завдання 12. Поставлено задачу Коші: знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'=f(x,y)$, який задовольняє початковій умові $y(1)=y_0$. Виконати наступне:

1. Розв'язати дану задачу Коші аналітично. Прийняти результат аналітичного розрахунку $y=y(x)$ за точний розв'язок. Обчислити значення $y(x_k)$ отриманого аналітичного розв'язку на відрізку $[1;2]$ у $n=10$ рівновіддалених вузлах $x_k=x_{k-1}+h$, $x_0=1$, $k=1,2,...,n$ з кроком $h=0{,}1$. Скласти відповідну таблицю і побудувати графік цього розв'язку $y=y(x)$.
2. Чисельно розв'язати задачу Коші на відрізку $[1;2]$ з кроком $h=0{,}1$ вказаним далі способом: а) методом Ейлера; б) методом Рунге – Кутта; в) методом Адамса; г) методом Хеммінга. Для кожного способу отримані наближені значення y_k; $k=0,1,\dots,n$ занес-

ти у відповідну таблицю і побудувати графік наближеного розв'язку $y = y(x)$. Користуючись методом подвоєння кроку, знайти оцінку граничної абсолютної похибки Δ_n^* одержаного наближеного розв'язку $y = y(x,h)$ на густішій сітці. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$.

Вказівка. 1. Усі проміжні обчислення проводити з точністю не менше шести десяткових знаків після коми. Наближені значення розв'язку подати з округленням до шести десяткових знаків після коми. 2. Необхідні для запуску чотирикрокових методів Адамса та Хеммінга, окрім початкової умови $y_0 = y(1)$, ще три значення y_1, y_2 і y_3 попередньо знайти за допомогою однокрокового методу Рунге – Кутта (використати результати пункту 2.б).

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y' = -\dfrac{2xy}{x^2+1}$; $y(1) = 1/2$	7	$y' = \dfrac{y^4}{(x+2)^2}$; $y(1) = 1$
2	$y' = x^2y^4;\ y(1) = -1$	8	$y' = \dfrac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+3}}$; $y(1) = 1$
3	$y' + \dfrac{y}{x} = 5\sqrt{x};\ y(1) = 2$	9	$y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{2}{x^2};\ y(1) = 2$
4	$y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2};\ y(1) = 1$	10	$y' = -\dfrac{\sqrt{y^3}}{2\sqrt{x+3}}$; $y(1) = 1$
5	$y' = \dfrac{y^3+1}{3y^2(x+1)};\ y(1) = 1$	11	$y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{2x^2} - \dfrac{1}{2};\ y(1) = 1{,}2$
6	$y' = -\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+3}}$; $y(1) = \dfrac{1}{2}$	12	$y' = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{1}{x};\ y(1) = 1$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632с.

3. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: У 2 ч. Ч.2. – К.: КНЕУ, 2002. – 451 с.

4. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. Кн.2. Спеціальні розділи. – 368 с.

5. Данилович В.П. Чисельні методи в задачах і вправах. – К.: ІСДО, 1995.–248 с.

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.2. – М.: Высш. шк., 1997. – 416 с.

7. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2006. – 480 с.

8. Колосов А.І., Якунін А.В., Ситникова Ю.В. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина третя: Функціональні ряди. – Х.: ХНАМГ, 2007. – 132 с.

9. Колосов А.І., Якунін А.В., Ситникова Ю.В. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина четверта: Кратні та криволінійні інтеграли. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 152 с.

10. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.

11. Орвис В.Д. Excel для ученых, инженеров и студентов. – К.: Юниор, 1999. – 528 с.

12. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.

13. Печеніжський Ю.Є., Станішевський С.О. Посібник для розв'язування задач з вищої математики, – Х.: ХДАМГ, 2003. – 100 с.

14. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. – М.: Наука, 1985. Т.2. – 560 с.

15. Станішевський С.О. Вища математика. – Х.: ХНАМГ, 2005.–270 с.

16. Фадеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента. – СПб.: Лань, 2008. – 128 с.

З М І С Т

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ЯКУНІН Анатолій Вікторович

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ДИСЦИПЛІНИ
ВИЩА МАТЕМАТИКА II

(для практичних занять та самостійної роботи
студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки
6.030509 "Облік і аудит")

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *З. І. Зайцева*
Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2011, поз. 156М

Підп. до друку 11.01.2012 Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 6,0
Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011