МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

А. В. Якунін

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ДИСЦИПЛІНИ

ВИЩА МАТЕМАТИКА ІІ

(*для практичних занять та самостійної роботи студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 “Облік і аудит”*)

Харків
ХНАМГ
2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

А. В. Якунін

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ДИСЦИПЛІНИ

ВИЩА МАТЕМАТИКА ІІ

(*для практичних занять та самостійної роботи студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 "Облік і аудит"*)

Харків
ХНАМГ
2012

Методичні вказівки з дисципліни “Вища математика ІІ” (для практичних занять та самостійної роботи студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 “Облік і аудит”) / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: А. В. Якунін. − Х.: ХНАМГ, 2012. − 107 с.

Викладені короткі теоретичні відомості з теорії функціональних рядів, інтегрального числення функцій багатьох змінних та чисельних методів. Наведені зразки розв’язання типових задач, а також завдання для практичних аудиторних занять та модульної контрольної роботи.

Укладач: *А. В. Якунін*

Рецензент: *к. ф.-м. н., доц. О. С. Архіпова*

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики, протокол № 3 від 26.10.2011 р.

Передмова

Методичні вказівки з навчальної дисципліни “Вища математика II” призначені для студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 “Облік і аудит”. Крім загальних рекомендацій щодо роботи над засвоєнням курсу, вони містять короткі теоретичні відомості з теорії степеневих рядів і рядів Фур’є, кратних і криволінійних інтегралів, чисельних методів. Для сприяння в опануванні практичної частини даного курсу наведені приклади розв’язання типових задач, які не тільки ілюструють відповідні теоретичні питання програми, але й служать зразками розв’язання й оформлення задач модульної контрольної роботи. Методичні вказівки доповнено завданнями для практичних аудиторних занять та модульної контрольної роботи. У кінці наведено орієнтовний список літератури.

Критичні зауваження і пропозиції щодо запропонованих методичних вказівок надсилайте на кафедру вищої математики за адресою:

61002, Україна, Харків, вул. Революції, 12, ХНАМГ,
каф. ВМ;
e-mail: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

Загальні рекомендації

При заочній формі основним видом навчання служить самостійна робота студента над навчальним матеріалом, що полягає в опрацюванні теоретичних положень та їх застосувань за підручниками та посібниками, розв'язуванні різнопланових задач, що розкривають суть і застосування теоретичних відомостей, самоконтролі ступеня засвоєння понять, законів, правил і алгоритмів, виконанні контрольних робіт, здійсненні їх аналізу та, при необхідності, їх доробка після рецензування. Завершальним етапом вивчення курсу "Вища математика II" є захист контрольної роботи і складання заліку відповідно до навчального плану.

<u>Робота з навчальною літературою</u>. Вивчаючи навчальний матеріал за книгою, треба проводити на папері всі необхідні обчислення (також і ті, що для стислості пропущені у книзі) і відтворювати всі наведені креслення. Переходити до наступного питання слід тільки після вірного розуміння попереднього,

Особливу увагу треба зосереджувати на визначеннях основних понять. Заочник повинен ретельно розбирати приклади, що пояснюють такі означення і знаходити аналогічні приклади самостійно.

При вивчені теорем корисно складати схеми їх доведення. Вірному розумінню багатьох теорем сприяє розгляд прикладів математичних об'єктів, для яких справджуються і не справджуються умови теореми.

Вивчаючи навчальний матеріал за книгою, треба вести конспект, в який рекомендується записувати означення, формулювання теорем, формули, рівняння і т.п. Поля конспекту служать для поміток. На них записують питання, призначені для одержання письмової чи усної консультації викладача.

Записи в конспекті повинні вестись чисто, акуратно і розміщуватися в певному порядку. Якісне зовнішнє оформлення конспекту не тільки привчає до необхідного в роботі порядку, а й дозволяє уникнути численних помилок, що виникають через неохайність і безладність записів.

Результуючі формули рекомендується виділяти певним тоном чи рамкою, щоб при перечитуванні конспекту вони краще запам'ятовувалися. Багатьом заочникам допомагає складання таблиць найважливіших і часто вживаних формул, що можуть слугувати довідниками з відповідних розділів.

Розв'язування задач. Читання навчальних книг повинно супроводжуватися розв'язуванням задач, для чого рекомендується вести спеціальний зошит.

Розв'язуючи задачу, треба обґрунтовувати кожний етап, спираючись на теоретичні положення. Коли проглядається декілька шляхів розв'язування, то треба порівняти їх і вибрати найкращий. Корисно перед початком розрахунків скласти короткий план.

Розв'язання задач і прикладів треба записувати докладно, в строгому порядку, відділяючи допоміжні обчислення від основних розрахунків. Креслення можна виконувати від руки, проте акуратно й у відповідності з заданими умовами. Розв'язування кожної задачі треба доводити до відповіді, що вимагається в її умові, по можливості в загальному вигляді. Потім в одержану формулу підставити конкретні числові дані, якщо вони вказані. У проміжних обчисленнях не треба вводити наближенні значення коренів, логарифмів і т.п. Одержану відповідь треба перевіряти способами, що випливають з суті даної задачі. При можливості розв'язати задачу декількома способами корисно порівняти одержані результати.

Розв'язування задач певного типу треба продовжувати до набуття твердих навичок.

Самоперевірка. Після вивчення певного змістового модулю за книгами і розв'язування достатньої кількості задач рекомендується відтворити по пам'яті означення, формулювання теорем запис формул і т.п. При необхідності треба ще раз розібратися з начальним матеріалом, розв'язати ряд задач.

Інколи недостатність засвоєння того чи іншого питання стає очевидною лише при вивченні подальших розділів курсу. Тоді треба повернутися назад і повторити погано засвоєний матеріал.

Важливим критерієм засвоєння теоретичних положень є вміння розв'язувати задачі. Проте вдале розв'язування задач само по собі не гарантує якості засвоєння теорії, оскільки часто правильне розв'язання задачі одержується в результаті застосування механічно завчених формул, без розуміння їх суті.

Контрольні роботи. У процесі вивчення дисципліни "Вища математика II" заочник повинен виконати модульну контрольну роботу (КР) за варіантом, номер якого співпадає з останньою цифрою номеру залікової книжки (цифра 0 відповідає варіанту №10).

Не рекомендується розпочинати виконання чергового завдання КР, не розв'язавши достатньої кількості типових задач, що йому відповідають.

Контрольна робота повинна виконуватися самостійно. Невиконання цієї вимоги призводить до поганого засвоєння навчального матеріалу, у результаті чого студент не набуде необхідних знань і виявиться неготовим до складання заліку.

Виконана КР передається на рецензію викладачеві.

При її оформленні необхідно дотримуватися наступних правил:

роботу виконують в окремому зошиті у клітинку, залишаючи на кожній сторінці широке поле (не менше 3 см) для поміток рецензента;

на титульній сторінці повинно бути чітко написане прізвище студента і його ініціали, номер залікової книжки і відповідного варіанту, дата подання роботи, звичайна поштова й електронна адреси для зв'язку зі студентом;

задачі, їх умови і розв'язання варто розташовувати у тому ж порядку, в якому вони наведені у завданні, зберігаючи їх нумерацію; перед розв'язанням кожної задачі треба повністю привести її умову; коли задача має загальне формулювання, треба при записі її умови замінити загальні дані конкретними з відповідного варіанту; не допускається заміна задач свого варіанту на інші;

перехід від умови задачі до її розв'язання виділяється словом "Розв'язання"; розв'язання задачі повинне супроводжуватися необхідними поясненнями і посиланнями на теоретичні положення; формули, що використовуються, потрібно приводити у загальному вигляді з поясненням використаних позначень; розв'язання треба викладати докладно й акуратно, приводити необхідні креслення; наближені обчислення треба виконувати, дотримуючись відповідних правил;

у кінці КР через один порожній рядок привести список використаної літератури (для кожного джерела вказати авторів, назву, місто, видавництво, рік видання, кількість сторінок).

Одержавши прорецензовану КР (як допущену до захисту, так і ні), студент повинен у найкоротший термін виправити вказані рецензентом помилки і недоліки (наприклад, рецензент пропонує переробити в роботі ті чи інші задачі чи надати більш докладне розв'язання), якщо такі є, виконати всі його пропозиції й повернути КР викладачеві. Якщо в роботі наявні лише окремі недоліки, то потріб-

ні виправлення слід робити у кінці того ж зошита після запису “Робота над помилками”. У випадку наявності позначки ”Не допущена до захисту” вся КР повинна бути виконана заново. Повторну роботу треба подати у новому зошиті з додатковими приписами на титульній сторінці ”Повторна” і ”Не допущена до захисту рецензентом __________________”. При поданні виправленої роботи разом з нею
(*прізвище рецензента*)
повинна знаходитися прорецензована раніше робота.

Без наявності прорецензованої КР, що має позначку ”Допущена до захисту”, заочника не допускають до її захисту і складання заліку.

<u>Захист контрольної роботи</u> проводиться у вигляді співбесіди. У процесі захисту заочник повинен підтвердити самостійність виконання КР. Після успішного захисту контрольна робота вважається зарахованою і студент допускається до складання заліку. Під час співбесіди перевіряється самостійність виконання КР, вияснюється знання основних теоретичних положень курсу, що відображені у завданнях КР, вміння розв’язувати подібні задачі. Тому до співбесіди рекомендується детально розібрати методи розв’язування задач і повторити відповідний теоретичний матеріал, основні формули. При позитивному результаті співбесіди КР зараховується і на обкладинці зошита викладач робить відповідний запис. Зараховані роботи відбираються і не повертаються.

<u>Залік</u> з дисципліни “Вища математика ІІ”, як правило, проводиться у письмовій формі. На заліку вияснюється достатність засвоєння всіх теоретичних і практичних питань програми і вміння застосовувати одержані знання до розв’язування задач. Визначення, теореми, правила повинні формулюватися точно і з розумінням суті справи. Розв’язування задач у найпростіших випадках повинно виконуватися без помилок і впевнено. Письмові завдання повинні бути виконанні акуратно і чітко.

При підготовці до заліку рекомендується: повторити навчальний матеріал за книгами і конспектом; розібрати розв’язування типових задач; розібрати розв’язування задач з інших варіантів КР.

Змістовий модуль 1.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

1.1. Кратні інтеграли

1.1.1. Подвійний інтеграл

Подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ ***по області*** D визначається як *границя інтегральної суми за формулою*

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum\nolimits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta S_i},$$

де x і y – ***змінні інтегрування***; $f(x,y)$ – ***підінтегральна функція***; dS – ***елемент*** (***диференціал***) ***площі***; $f(x,y)\,dS$ – ***підінтегральний вираз***; D – ***область інтегрування***.

<u>Геометричний зміст</u>: якщо функція $z = f(x,y)$ невід'ємна, то подвійний інтеграл від неї чисельно дорівнює об'єму V циліндричного тіла, нижньою основою якого є область D, верхньою – частина поверхні $z = f(x,y) \ge 0$, що проектується в D, а бічна поверхня – циліндрична з твірними, паралельними осі Oz, і напрямною L – межею області D: $\boxed{V = \iint_D f(x,y)\,dS}$.

У декартовій прямокутній системі координат Oxy диференціал площі набуває вигляду $\boxed{dS = dxdy}$ і подвійний інтеграл можна подати у формі $\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy}$.

Якщо область інтегрування D – правильна в напрямі осі Oy (рис. 1) і може бути подана у вигляді

$$D:\left\{(x,y)\middle|\; y_1(x) \le y \le y_2(x),\; x \in [a;b],\; D \xrightarrow{Oy} [a;b]\right\},$$

то подвійний інтеграл зводиться до двократного повторного інтеграла за формулою

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy}. \qquad (1)$$

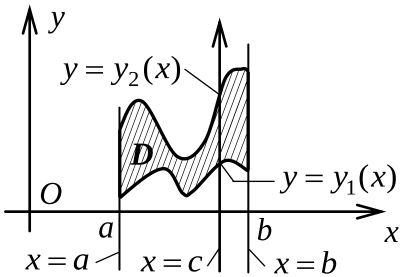

Рис. 1

Якщо область D – правильна в напрямі осі Ox (рис. 2) і може бути подана у вигляді

$$D: \{(x,y)|\ x_1(y) \le x \le x_2(y),$$

$$y \in [c;d],\ D \xrightarrow{Ox} [c;d]\},$$

то подвійний інтеграл зводиться до двократного повторного інтеграла за формулою (змінні x і y міняються ролями)

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx}. \qquad (2)$$

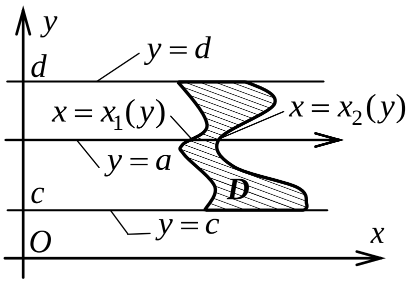

Рис. 2

Зауваження 1. Спочатку обчислюється ***внутрішній інтеграл*** $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ за ***внутрішньою змінною*** y в припущенні, що ***зовнішня змінна*** x фіксована. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла в межах від $y_1(x)$ до $y_2(x)$ одержуємо певну функцію $S(x)$ однієї змінної x.

Зауваження 2. Якщо область D правильна в напрямах обох осей Ox і Oy, то подвійний інтеграл можна звести до повторного будь-яким з указаних способів. *Значення подвійного інтеграла не залежить від порядку інтегрування*:

$$\boxed{\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx}.$$

Перехід від лівої частини цього співвідношення до правої і навпаки називається ***зміною порядку інтегрування***.

Зауваження 3. Якщо область D неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Для цього, звичайно, застосовують прямі, що паралельні координатним осям.

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{x^3\,dxdy}{1+y^2}$, де D – квадрат $0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1$.

□ Область D (рис. 3) є правильною у напрямі як осі Oy, так і осі Ox. Тому для обчислення даного інтеграла можна користуватись як формулою (1), так і формулою (2).

За формулою (1) маємо:

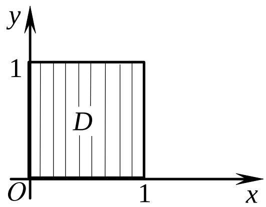

Рис. 3

$$\iint\limits_D \frac{x^3\,dxdy}{1+y^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^3}{1+y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^1 x^3 dx \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^1 x^3 arctg\, y\Big|_0^1 dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot (x^4/4)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

За формулою (2) маємо:

$$\iint\limits_D \frac{x^3\,dxdy}{1+y^2} = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^3}{1+y^2}\,dx = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \left(\frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 dy =$$

$$= (1/4) \cdot arctg\, y\Big|_0^1 = \pi/16.$$

Зауважимо, що у цьому прикладі при обох способах переходу до повторного інтеграла внутрішній інтеграл має сталі межі інтегрування і тому дорівнює сталій величині. У такому випадку подвійний інтеграл перетворюється на добуток двох визначених інтегралів. ■

Приклад 2. Знайти межі інтегрування для подвійного інтеграла

$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, якщо область D є трикутник, обмежений лініями: $y=0,\ y=2-x,\ x=0$.

□ Область D (рис. 3) є правильною у напрямі як осі Oy, так і осі Ox.

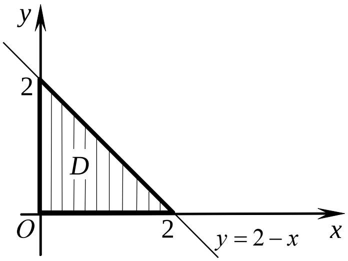

Рис. 4

За формулою (1) маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

За формулою (2) маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx. \ ■$$

<ins>Приклад 3</ins>. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

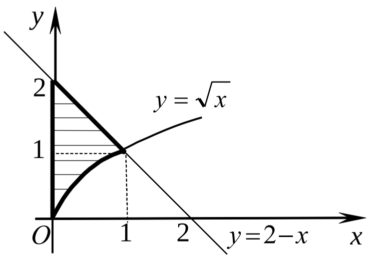

Рис. 5

□ Область інтегрування D (рис. 5) обмежена лініями $x=0$, $x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=2-x$. З останніх двох рівнянь маємо: $x=y^2$, $x=2-y$.

Область D є неправильною у напрямі осі Ox. Пряма $y=1$ розбиває її на дві правильні у напрямі осі Ox частини D_1 і D_2, де

$$D_1:\ 0\le y\le 1,\quad 0\le x\le y^2,\quad D_2:\ 1\le y\le 2,\quad 0\le x\le 2-y.$$

Тоді $I = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx.$ ■

<ins>Приклад 4</ins>. Обчислити повторний інтеграл $I = \int_1^2 x\,dx \int_0^x y^2 dy$.

$\square\quad I=\int\limits_1^2 x\,dx\int\limits_0^x y^2dy=\int\limits_1^2 x\cdot\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^x dx=\frac{1}{3}\int\limits_1^2 x^4dx=\frac{1}{3}\cdot\left.\frac{x^5}{3}\right|_1^2=\frac{31}{15}.\ \blacksquare$

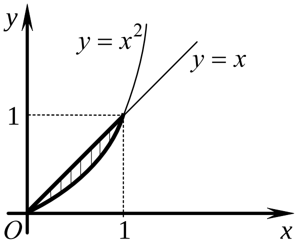

Рис. 6

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл

$$I=\iint\limits_D(5x+3y^2)\,dx\,dy,$$

де область D обмежена лініями $x=0,\ x=1,\ y=x^2,\ y=x$.

$\square$ Область D зображена на рис. 6. Вона правильна у напрямі як осі Oy, так і осі Ox.

За формулою (1) маємо:

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x}(5x+3y^2)\,dy=\int\limits_0^1\left(5x\int\limits_{x^2}^{x}dy+3\int\limits_{x^2}^{x}y^2\,dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(5x\,y\Big|_{x^2}^{x}+\ y^3\Big|_{x^2}^{x}\right)dx=\int\limits_0^1\left(5x^2-5x^3+x^3-x^6\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(5x^2-4x^3-x^6\right)dx=(5x^3/3-x^4-x^7/7)\Big|_0^1=11/21.\ \blacksquare$$

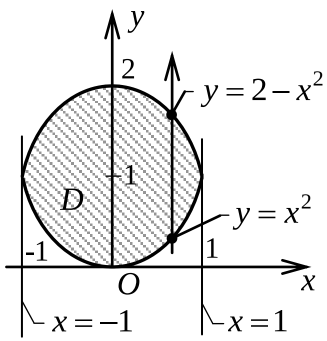

Рис. 7

Приклад 6. Обчислити подвійний інтеграл $I=\iint_D(x^2+1)\,dxdy$, де область інтегрування D обмежена лініями $y=x^2$ і $y=2-x^2$.

$\square$ Область D (рис. 7) є правильною у напрямі осі Oy. За формулою (1) маємо:

$$I=\int\limits_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx\int\limits_{x^2}^{2-x^2}dy=$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^2+1)\cdot y\Big|_{x^2}^{2-x^2} dx = 2\int_{-1}^{1} (x^2+1)(1-x^2)\,dx = 2\int_{-1}^{1} (1-x^4)\,dx =$$

$$= 2(x - x^5/5)\Big|_{-1}^{1} = 16/5. \ \blacksquare$$

1.1.2. Потрійний інтеграл

Нехай V – деяка замкнена обмежена просторова область (просторове тіло), а плоска область D_{xy} - її проекція паралельно осі Oz на координатну площину Oxy (рис. 8). Область V називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямі осі*** Oz, якщо виконуються наступні умови: 1) межа L проекції D_{xy} складається зі скінченного числа неперервних кривих; 2) довільна пробна пряма, що проходить хоча б через одну внутрішню точку області V паралельно осі Oz і в тому ж напрямі, перетинає її межу тільки у двох точках – по одній на ближній ***поверхні входу*** σ_1 і дальній ***поверхні виходу*** σ_2; 3) рівняння кожної з поверхонь σ_1 і σ_2 задається в явному вигляді, розв'язаному відносно z, причому тільки однією формулою відповідно $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$, де функції $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ неперервні в D_{xy} і $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$.

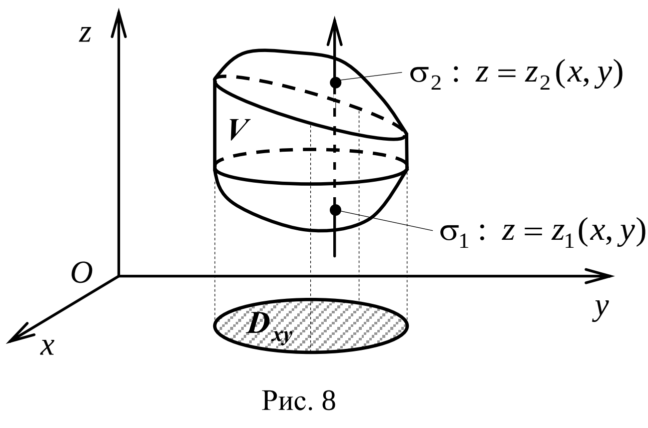

Рис. 8

Така просторова область V має вигляд вертикального циліндричного тіла. Як множину точок її можна подати у вигляді

$$\boxed{V:\left\{(x,y,z)\middle|\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy},\ V\xrightarrow{Oz}D_{xy}\right\}}.$$

Аналогічно вводиться означення просторової області V, що ***правильна*** (***стандартна***) ***в напрямі осі*** Ox ***чи*** Oy, відповідно

$$\boxed{V:\left\{(x,y,z)\middle|\ x_1(y,z)\le x\le x_2(y,z),\ (y,z)\in D_{yz},\ V\xrightarrow{Ox}D_{yz}\right\}}$$

і

$$\boxed{V:\left\{(x,y,z)\middle|\ y_1(x,z)\le y\le y_2(x,z),\ (x,z)\in D_{xz},\ V\xrightarrow{Oy}D_{xz}\right\}}.$$

Потрійний інтеграл від функції $f(x,y,z)$ ***по області*** V визначається як *границя інтегральної суми за формулою*

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\lim_{\max d_i\to 0}\sum\nolimits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i}, \qquad (3)$$

де x, y і z – ***змінні інтегрування***; $f(x,y,z)$ – ***підінтегральна функція***; $dV=dxdydz$ – ***елемент*** (***диференціал***) ***об'єму***; $f(x,y,z)\,dxdydz$ – ***підінтегральний вираз***; V – ***область інтегрування***.

Нехай просторова область V – правильна в напрямі осі Oz (є вертикальним циліндричним тілом, зображеним на рис. 8), і може бути подана у вигляді

$$V:\left\{(x,y,z)\middle|\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy},\ V\xrightarrow{Oz}D_{xy}\right\},$$

причому її проекція D_{xy} на площину Oxy є правильною в напрямі осі Oy плоскою областю (рис. 1) і може бути подана у вигляді

$$D_{xy}:\left\{(x,y)\middle|\ y_1(x)\le y\le y_2(x),\ x\in[a;b],\ D\xrightarrow{Oy}[a;b]\right\},$$

Тоді справедлива формула

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz},$$

яка зводить потрійний інтеграл до трикратного повторного інтеграла.

Зауваження 1. За цією формулою спочатку обчислюється самий внутрішній інтеграл по внутрішній змінній z при фіксованих зовнішніх змінних x і y. Потім знаходиться проміжний інтеграл по y при фіксованому x. В останню чергу обчислюється зовнішній інтеграл по x.

Зауваження 2. Можна одержати повторний інтеграл з іншим порядком інтегрування. Його доцільність залежить як від розташування області V відносно прийнятої системи координат $Oxyz$ та її форми, так і від вигляду підінтегральної функції $f(x,y,z)$.

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл, що поданий як трикратний повторний інтеграл

$$I=\iiint\limits_V xyz\,dxdydz=\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^x y\,dy\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\,.$$

$$\square\ I=\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^x y\,dy\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz=\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^x y\cdot(z^2/2)\Big|_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\,dx\int\limits_0^x (x^2y+y^3)\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x\left(x^2y^2/2+y^4/4\right)\Big|_0^x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x^4/2+x^4/4)x\,dx=\frac{3}{8}\int\limits_0^1 x^5\,dx=\frac{3}{8}\cdot(x^6/6)\Big|_0^1=\frac{1}{16}.\ \blacksquare$$

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $I=\iiint\limits_V x^2dxdydz$, де V – трикутна піраміда, що обмежена координатними площинами та площиною $2x+2y+z-6=0$.

□ Піраміда V – правильна в напрямі осі Oz просторова область (рис. 9), що обмежена знизу поверхнею входу – площиною $z=0$, а зверху поверхнею виходу – площиною $z=6-2x-2y$. Проекцією D тіла V на площину Oxy служить ΔAOB – правильна в напрямі осі Oy плоска область (рис. 10), для якої $x\in[0;3]$ і y змінюється від лінії входу $y=0$ до лінії виходу $y=3-x$.

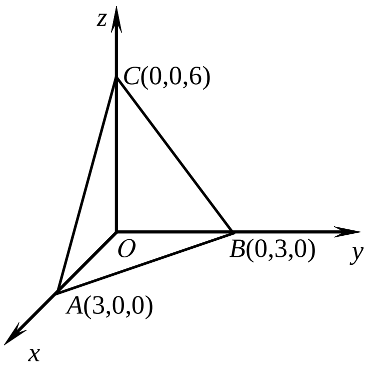

Рис. 9

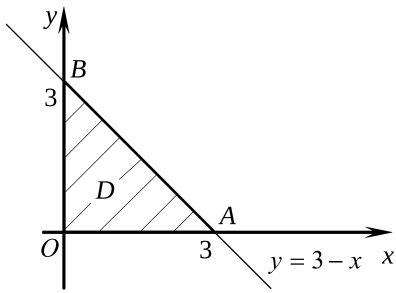

Рис. 10

Тоді

$$I=\int_0^3 x^2dx\int_0^{3-x}dy\int_0^{6-2x-2y}dz=\int_0^3 x^2dx\int_0^{3-x} z\,\Big|_0^{6-2x-2y}dy=$$

$$=\int_0^3 x^2dx\int_0^{3-x}(6-2x-2y)\,dy=\int_0^3 x^2(6y-2xy-y^2)\Big|_0^{3-x}dx=$$

$$=\int_0^3 x^2(6(3-x)-2x(3-x)-(3-x)^2)\,dx=\int_0^3 x^2(18-6x-$$

$$-6x+2x^2-9+6x-x^2)\,dx=\int_0^3(9x^2-6x^3+x^4)\,dx=$$

$$=(3x^3-3x^4/2+x^5/5)\Big|_0^3=81-243/2+243/5=81/10\,.\quad\blacksquare$$

Приклад 3. Обчислити потрійний інтеграл від функції $f(x,y,z)=x(y+z)$ по просторовій області V, що обмежена параболічним циліндром $x^2=2y$ і площинами $z=0$, $2y+z-4=0$.

□ Просторова область V є правильною в напрямі осі Oz (рис. 11). Вона обмежена знизу поверхнею входу – площиною $z=0$, а зверху поверхнею виходу – площиною $z=4-2y$. Проекцією D тіла V на площину Oxy служить параболічний сегмент – правильна в напрямі осі Oy плоска область (рис. 12), для якої

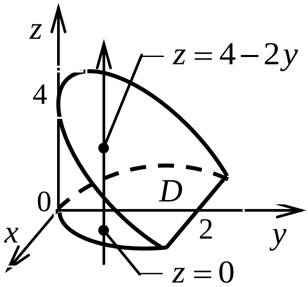

Рис. 11

$x \in [-2;2]$ і y змінюється від лінії входу $y = x^2/2$ до лінії виходу $y = 2$.

Тоді

$$I = \iiint\limits_V x(y+z)\,dxdydz =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} x\,dx \int\limits_{x^2/2}^{2} dy \int\limits_{0}^{4-2y} (y+z)\,dz =$$

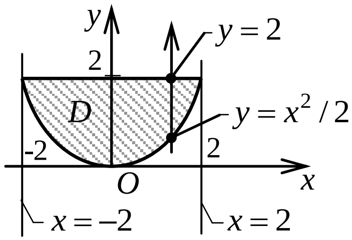

Рис. 12

$$= \int\limits_{-2}^{2} x\,dx \int\limits_{x^2/2}^{2} (yz + z^2/2)\Big|_0^{4-2y} dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} xdx \int\limits_{x^2/2}^{2} \big(y(4-2y) + (4-2\times$$

$$\times\, y)^2/2\big)dy = \int\limits_{-2}^{2} x\,dx \int\limits_{x^2/2}^{2} (8-4y)dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} x(8y - 2y^2)\Big|_{x^2/2}^{2} dx = \int\limits_{-2}^{2} x(16 - 8 - 4x^2 + x^4/2)\,dx =$$

$$= \int\limits_{x^2/2}^{2} (x^5/2 - 4x^3 + 8x)\,dx = (x^6/12 - x^4 + 4x^2)\Big|_{-2}^{2} = 0. \quad \blacksquare$$

1.1.3. Застосування кратних інтегралів

Площа плоскої фігури. Якщо в подвійному інтегралі $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x,y) \equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме площі області інтегрування D: $\boxed{S = \iint_D dx\,dy}$.

Приклад 1. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу плоскої області D, що обмежена параболою $y = x^2 - 2x$ і прямою $x - y = 0$.

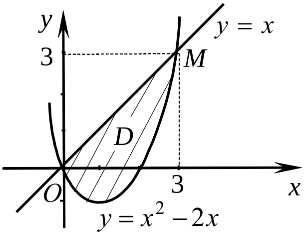

Рис. 13

□ Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x; \\ x - y = 0, \end{cases}$$

знаходимо точки перетину ліній, що обмежують область: $O(0,0)$ і $M(3,3)$. Зображення області D подано на рис. 13. Вона є правильною в напрямі осі Oy: $D: 0 \le x \le 3,\ x^2 - 2x \le y \le x$.

Тоді $$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-2x}^{x} dy = \int\limits_0^3 y\Big|_{x^2-2x}^{x} dx =$$

$$= \int\limits_0^3 (x - x^2 + 2x)\,dx = (3x^2/2 - x^3/3)\Big|_0^3 = 9/2\ \frac{9}{2}\ \text{(кв. од.).}\ \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу плоскої області D, що обмежена параболою $y = x^2$, півколом $x = \sqrt{2 - y^2}$ і віссю Ox.

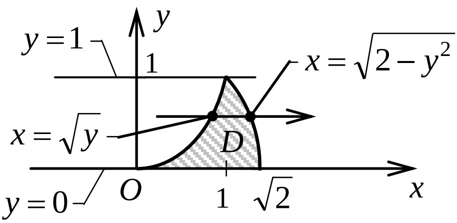

Рис. 14

□ На рис. 14 область D подана як правильна в напрямі осі Ox. Тоді

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x\Big|_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\sqrt{2 - y^2} - \sqrt{y}\right)dy = \int\limits_0^1 \sqrt{2 - y^2}\,dy - \int\limits_0^1 y^{1/2}\,dy = \Big|\ y = \sin u;$$

$$dx = \sqrt{2}\cos u\,du;\ \sqrt{2 - y^2} = \sqrt{2}\cos u;\ \ u = \arcsin\left(y/\sqrt{2}\right);$$

$$u_1 = \arcsin 0 = 0;\ u_2 = \arcsin\left(\sqrt{2}/2\right) = \pi/4 \Big| = \int\limits_0^{\pi/4} 2\cos^2 u\, du -$$

$$-(2/3)y^{3/2}\Big|_0^1 = \int\limits_0^{\pi/4}(1+\cos 2u)\,du - \frac{2}{3} = \left(u + (1/2)\sin 2u\right)\Big|_0^{\pi/4} - \frac{2}{3} =$$

$$= \pi/4 + 1/2 - 2/3 = (3\pi - 2)/12 \ \text{(кв. од.)}. \ \blacksquare$$

Об'єм тіла. Нехай правильне у напрямі осі Oz просторове тіло V, яке обмежене знизу і зверху поверхнями входу $z = z_1(x, y)$ і виходу $z = z_2(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D_{xy}. Тоді його об’єм обчислюється за формулою

$$\boxed{V = \iint_{D_{xy}} \left(z_2(x, y) - z_1(x, y)\right) dxdy}.$$

Зауваження 1. Якщо тіло V – правильне в напрямі осі Ox чи Oy, то його об’єм обчислюється за аналогічними формулами. При цьому змінні x, y і z міняються ролями.

Приклад 3. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об’єм тіла V, що задане системою нерівностей:

$$0 \le z \le 4 - x^2 - y^2; \qquad 0 \le x \le 2y - y^2.$$

□ На рис. 15 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz. Воно обмежене знизу координатною площиною $z = 0$, зверху – параболоїдом обертання $z = 4 - x^2 - y^2$, спереду – параболічним циліндром $x = 2y - y^2$, ззаду – координатною площиною $x = 0$. Його проекцією на площину Oxy служить область D – параболічний сегмент, обмежений параболою $x = 2y - y^2$ і віссю Oy. На рис. 16 область D зображена як правильна в напрямі осі Ox. Тоді

$$V = \iint_D \left(z_2(x, y) - z_1(x, y)\right) dxdy = \iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dxdy =$$

$$= \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2y-y^2} (4 - x^2 - y^2)\,dx = \int\limits_0^2 (4x - x^3/3 - y^2 x)\Big|_0^{2y-y^2} dy =$$

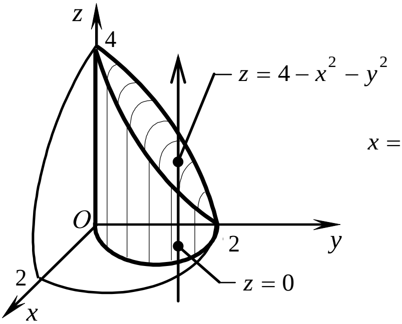

Рис. 15

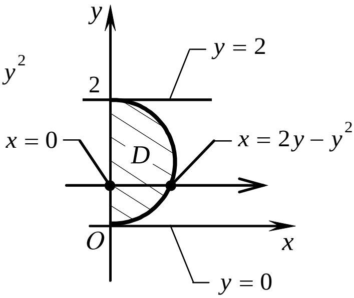

Рис. 16

$$=\int_0^2 (8y-4y^2-(8/3)y^3+4y^4-2y^5+(1/3)y^6-2y^3+y^4)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^2 \Big((1/3)y^6-2y^5+5y^4-(14/3)y^3-4y^2+8y\Big)\,dy=$$

$$=\left(\frac{1}{21}y^7-\frac{1}{3}y^6+y^5-\frac{7}{6}y^4-\frac{4}{3}y^3+4y^2\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{21}\cdot 128-\frac{1}{3}\cdot 64+$$

$$+32-(7/6)\cdot 16-(4/3)\cdot 8+4\cdot 4=24/7 \text{ (куб. од.).} \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. Згідно геометричного змісту потрійного інтеграла об’єм просторової області V також можна обчислити за формулою $\boxed{V=\iiint_V dV=\iiint_V dxdydz}$.

Приклад 4. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об’єм тіла V, що обмежене знизу координатною площиною $z=0$, зверху – параболоїдом обертання $2z=x^2+y^2$, а збоку – круговим циліндром $x^2+y^2=4$.

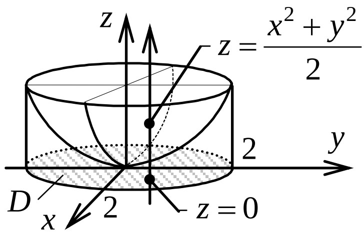

Рис. 17

□ На рис. 17 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz. Його проекцією на площину Oxy служить область D – круг, обмежений колом $x^2+y^2=4$. На рис. 18 область D зображена як правильна в напрямі осі Oy. Тоді

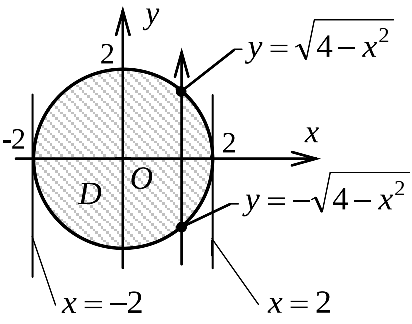

Рис. 18

$$V=\iiint_V dxdydz=$$

$$=\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{0}^{(x^2+y^2)/2} dz=$$

$$=\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} z\Big|_0^{(x^2+y^2)/2} dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(x^2y+y^3/3)\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\Big(2x^2\sqrt{4-x^2}+(2/3)(4-x^2)\times$$

$$\times\sqrt{4-x^2}\Big)dx=\frac{2}{3}\int_{-2}^{2}(x^2+2)\sqrt{4-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=2\sin u; \\ dx=2\cos u\,du; \end{array}\right.$$

$$\sqrt{4-x^2}=2\cos u;\quad u=\arcsin(x/2);\ u_1=\arcsin(-1)=\pi/2;$$

$$u_2=\arcsin 1=\pi/2\,\Big|=\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(4\sin^2 u+2)2\cos u\cdot 2\cos u\,du=\frac{8}{3}\times$$

$$\times\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos 2u+1)(1+\cos 2u)\,du=\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2-\cos^2 2u+\cos 2u)\,du=$$

$$=\frac{16}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}du-\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 4u)\,du+\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2u\,du=\frac{16}{3}\cdot u\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}-$$

$$-\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}du-\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 4u\,du+\frac{4}{3}\cdot\sin 2u\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{16\pi}{3}-\frac{4}{3}\cdot u\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}-$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\sin 4u\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{16\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}=4\pi \text{ (куб. од.).}\quad\blacksquare$$

1.2. Криволінійні інтеграли

1.2.1. Криволінійний інтеграл за довжиною

Криволінійний інтеграл за довжиною (***першого роду***) ***від функції*** $f(x,y)$ ***по плоскій дузі*** L_{AB} визначається як *границя інтегральної суми за формулою*

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\,\Delta l_i},$$

де dl – ***диференціал*** (***елемент***) ***довжини дуги***.

Якщо покласти $f(x,y) \equiv 1$, то криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює довжині l дуги L_{AB}: $\boxed{l = \int_{L_{AB}} dl}$ (геометричний зміст криволінійного інтеграла за довжиною).

Зауваження 1. При $f(x,y) \geq 0$ криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює площі S_c частини вертикальної циліндричної поверхні (рис. 19) з напрямною L_{AB} і паралельними осі Oz твірними, що розміщена між координатною площиною $z = 0$ і поверхнею $z = f(x,y)$:

$$\boxed{S_c = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl}.$$

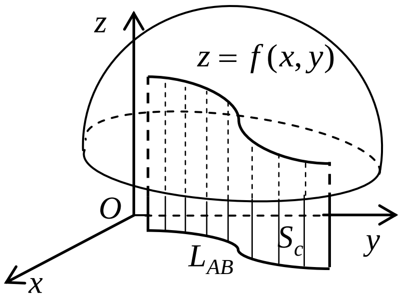

Рис. 19

Зауваження 2. Криволінійний інтеграл за довжиною не залежить від напряму руху по дузі:

$$\boxed{\int_{L_{BA}} f(x,y)\,dl = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl}.$$

Інші *властивості цього інтеграла аналогічні властивостям звичайного одновимірного інтеграла*.

Зауваження 3. Поняття криволінійного інтеграла за довжиною поширюється на випадок дуги L_{AB} просторової лінії L, розміщеної в просторовому скалярному полі $u = f(x,y,z)$:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} f(x,y,z)\,dl = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\,\Delta l_i}.$$

Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

<u>Випадок 1</u>. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$. Тоді

$$\boxed{\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\,\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}.$$

<u>Приклад 1</u>. Обчислити $I = \int_L x\sqrt{x^2 + 16y^2}\,dl$, якщо L – дуга еліпса, розміщена в першій чверті: $x = 4\cos t$; $y = 2\sin t$; $0 \le t \le \pi/2$.

□ Обчислимо: $x' = -4\sin t$; $y' = 2\cos t$;

$$dl = \sqrt{(-4\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\,dt = 2\sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt.$$

Підставимо в інтеграл:

$$I = \int_0^{\pi/2} 4\cos t\sqrt{(4\cos t)^2 + 16(2\sin t)^2} \cdot 2\sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt =$$

$$= 32\int_0^{\pi/2} \cos t\,(4\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \left| \begin{matrix} u = \sin t; & u_1 = \sin 0 = 0; \\ du = \cos t\,dt; & u_2 = \sin(\pi/2) = 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= 32\int_0^1 (4u^2 + 1 - u^2)\,du = 32\int_0^1 (3u^2 + 1)\,du = 32 \cdot (u^3 + u)\Big|_0^1 = 64. \quad ■$$

<u>Випадок 2</u>. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x)$, $a \le x \le b$. Тоді

$$\boxed{\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x, y(x))\,\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int_L xe^y dl$, де L – дуга плоскої кривої $y = \ln x$ при $1 \le x \le 2$.

□ Знайдемо диференціал довжини дуги

$$y' = 1/x; \quad dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+1/x^2}\;dx;$$

Тоді $\quad I = \int\limits_1^2 x e^{\ln x}\sqrt{1+1/x^2}\,dx = \int\limits_1^2 \sqrt{x^2+1}\;x\,dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x^2+1;\; u_1 = \sqrt{2}; \\ du = 2x\,dx;\; u_2 = \sqrt{5} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}\,u^{3/2}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}. \ \blacksquare$$

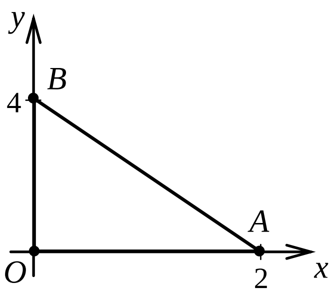

Рис. 20

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I = \int_L (2x - y + 4)\,dl$, де L – контур трикутника ABO: $A(2;0)$, $B(0;4)$, $O(0;0)$ (рис. 20).

□ $I = \int_L (2x - y + 4)\,dl =$

$$= \int_{AB} (2x - y + 4)\,dl + \int_{BO} (2x - y + 4)\,dl + \int_{OA} (2x - y + 4)\,dl.$$

Обчислимо кожний інтеграл окремо:

а) AB: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$; $\dfrac{x-2}{0-2} = \dfrac{y-0}{4-0}$; $y = -2x+4$; $y' = -2$;

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+(-2)^2}\;dx = \sqrt{5}\;dx; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 2;$$

$$I_{AB} = \int_{AB} (2x - y + 4)\,dl = \int\limits_0^2 (2x-(-2x+4)+4)\sqrt{5}\,dx = 4\sqrt{5}\times$$

$$\times\int\limits_0^2 x\,dx = 2\sqrt{5}\;x^2\Big|_0^2 = 8\sqrt{5};$$

б) BO: $x = 0$; $x' = 0$; $dl = \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \sqrt{1+0^2}\;dy = dy$;

$$y_1 = 0;\ \ y_2 = 4;\ \ I_{BO} = \int_{BO} (2x - y + 4)\,dl = \int_0^4 (2\cdot 0 - y + 4)\,dy =$$

$$= (-y^2/2 + 4y)\Big|_0^4 = -8 + 16 = 8;$$

в) OA: $y = 0$; $y' = 0$; $dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + 0^2}\,dx = dx$;

$$x_1 = 0;\ \ x_2 = 2;\ \ I_{OA} = \int_{OA} (2x - y + 4)\,dl = \int_0^2 (2x - 0 + 4)\,dx =$$

$$= (x^2 + 4x)\Big|_0^2 = 4 + 8 = 12.$$

Отже $I = \int_L (2x - y + 4)\,dl = 8\sqrt{5} + 8 + 12 = 8\sqrt{5} + 20$. ■

Випадок 3. Нехай просторова дуга L_{AB} задана параметричними рівняннями $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. Тоді

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt}.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I = \int_L (2x - 3y + 2z - 1)\,dl$, де L – відрізок прямої між точками $M_1(3;-1;-2)$ і $M_2(5;-3;-1)$.

□ Знайдемо параметричні рівняння прямої M_1M_2:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1};\quad \frac{x - 3}{5 - 3} = \frac{y + 1}{-3 + 1} = \frac{z + 2}{-1 + 2} = t;$$

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z + 2}{1} = t;\ \ x = 2t + 3;\ \ y = -2t - 1;\ \ z = t - 2.$$

Тоді

$$x' = 2;\ \ y' = -2;\ \ z' = 1;\ \ dl = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}\,dt = 3dt;\ \ x_1 = 3 \Rightarrow 2t + 3 = 3 \Rightarrow t_1 = 0;$$

$$x_2 = 5 \Rightarrow 2t + 3 = 5 \Rightarrow t_2 = 1; \quad I = \int_L (2x - 3y + 2z - 1)\,dl =$$

$$= \int_0^1 (2\cdot(2t+3) - 3\cdot(-2t-1) + 2\cdot(t-2) - 1)\cdot 3dt = 3\int_0^4 (4t + 6 + 6t +$$

$$+ 3 + 2t - 4 - 1)\cdot 3dt = 3\int_0^1 (12t+4)\,dt = 3\cdot(6t^2 + 4t)\Big|_0^1 = 30. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 5</u>. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_L \dfrac{y\,dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, де L – перший виток конічної гвинтової лінії: $x = t\cos t$; $y = t\sin t$; $z = \sqrt{3}t$, $0 \le t \le 2\pi$.

□ Оскільки $x' = \cos t - t\sin t$, $y' = \sin t + t\cos t$, $z' = \sqrt{3}$, то $dl = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 3}\,dt = \sqrt{t^2+4}\,dt$. Тоді

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{t\sin t\sqrt{t^2+4}\,dt}{\sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2 + 4}} = \int_0^{2\pi} t\sin t\,dt = \left| \begin{array}{c} u = t; \\ dv = \sin t\,dt; \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{c} du = dt; \\ v = -\cos t \end{array} \right| = -t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t\,dt = -2\pi + \sin t\Big|_0^{2\pi} = -2\pi. \quad \blacksquare$$

1.2.2. Криволінійний інтеграл за координатами. Формула Гріна

Криволінійний інтеграл за координатами (***другого роду***) ***від вектор-функції*** $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ ***по плоскій дузі*** L_{AB} визначається як <u>*границя інтегральної суми за формулою*</u>

$$\boxed{\int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =}$$

$$\boxed{= \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta y_i \right)}.$$

Криволінійний інтеграл другого роду також називають ***циркуляцією вектора*** $\vec{F}$ ***по дузі*** L_{AB} і позначають

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta\vec{l}_i}$$, де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$ – ***вектор диференціала (елемента) довжини плоскої дуги***.

Якщо лінія L замкнена, то інтеграл по ній записується так

$$\boxed{\oint_L \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy}.$$

<u>Зауваження 1</u>. Поняття криволінійного інтеграла за координатами поширюється на просторовий випадок:

$$\boxed{\oint_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \oint_{L_{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz},$$

де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ – вектор диференціала (елемента) довжини просторової дуги.

<u>Зауваження 2</u>. *При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл за координатами тільки змінює знак*

$$\boxed{\int_{L_{BA}} \vec{F}\,d\vec{l} = -\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l}}.$$

Інші властивості криволінійного інтеграла за координатами аналогічні властивостям звичайного визначеного інтеграла.

Обчислення криволінійного інтеграла за координатами здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

<u>Випадок 1</u>. Нехай $\vec{F} = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ і L_{AB} – плоска дуга, що задана в прямокутній системі координат параметричними рівняннями: $x = x(t)$; $y = y(t)$, причому початку дуги A відповідає значення параметра α, а кінцю дуги B – значення параметра β. Тоді $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =}$$

$$\boxed{= \int_{\alpha}^{\beta} \left[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\right] dt}.$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I=\int_{L_{AB}} xy^{1/3}dx+5x^2dy$ по дузі кривої L_{AB}: $x=3\cos t$; $y=\sin^3 t$, $\pi/6\le t\le\pi/2$.

□ $dx=-3\sin t\,dt$; $dy=3\sin^2 t\cos t\,dt$; $I=\int_{L_{AB}} xy^{1/3}dx+5x^2dy=$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}(3\cos t\cdot(\sin^3 t)^{1/3}\cdot(-3\sin t)+5(3\cos t)^2\cdot 3\sin^2 t\cos t)\,dt=$$

$$=-9\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\,dt+135\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\cos t\,dt=\Big|\,u=\sin t;$$

$$du=\cos t\,dt;\ \cos^2 t=1-\sin^2 t=1-u^2;\ u_1=\sin(\pi/6)=1/2;$$

$$u_2=\sin(\pi/2)=1\Big|=-9\int_{1/2}^{1}u^2\,du+135\int_{1/2}^{1}u^2(1-u^2)\,du=$$

$$=-3u^3\Big|_{1/2}^{1}+(45u^3-27u^5)\Big|_{1/2}^{1}=10\frac{19}{32}.\quad\blacksquare$$

Випадок 2. Нехай $\vec F=P(x,y)\vec i+Q(x,y)\vec j$ і L_{AB} – плоска дуга, що задана в прямокутній системі координат в явному вигляді: $y=y(x)$, $a\le x\le b$, причому коли x змінюється на відрізку $[a;b]$, біжуча точка $(x;y)$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Можна використати попередній спосіб, записавши рівняння дуги у параметричній формі

$$\begin{cases} y=y(x)\\ x=x\end{cases}\ a\le x\le b.\ \text{Тоді}\ \begin{cases} dy=y'(x)\,dx\\ dx=dx\end{cases}\ \text{і маємо}$$

$$\boxed{\int_{L_{AB}}\vec F(x,y)\,d\vec l=\int_{L_{AB}}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=}$$

$$\boxed{=\int_a^b\left[P\big(x,y(x)\big)+Q\,\big(x,y(x)\big)y'(x)\right]dx}\,.$$

Приклад 2. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec F=4x^3y\vec i+(x/y^3)\vec j$ по дузі гіперболи $L_{AB}: y=1/x$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(2;1/2)$.

□ $L_{AB}: y=1/x=x^{-1}$, $1\le x\le 2$; $y'=-x^{-2}$; $dy=-x^{-2}dx$;

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} 4x^3y dx + (x/y^3)\,dy = \int_1^2 \left[4x^3 \cdot (1/x) + \right.$$

$$\left. + x/(x^{-1})^3 \cdot (-x^{-2})\right] dx = 3\int_1^2 x^2\,dx = x^3\Big|_1^2 = 7. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Обчислити інтеграл $I = \int_L (y/x)\,dx + xe^{-y}dy$ по дузі $L: y = \ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.

□ $L: y = \ln x;\ 1 \le x \le e;\ y' = 1/x;$

$$I = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} + xe^{-\ln x}\frac{1}{x}\right)dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx + \int_1^e \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_1^e + \ln x\Big|_1^e = \frac{3}{2}. \blacksquare$$

<u>Випадок 3</u>. Розглянемо просторове векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Нехай просторова дуга L_{AB} задана в параметричній формі $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, причому початку дуги A відповідає значення параметра α, а кінцю дуги B – значення параметра β. . Тоді $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$; $dz = z'(t)\,dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної і дістаємо:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy +}$$

$$\boxed{+ R(x,y,z)\,dz = \int_\alpha^\beta \left[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + \right.}$$

$$\boxed{\left. + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\right]dt}.$$

<u>Приклад 4</u>. Обчислити циркуляцію просторового векторного поля $\vec{F} = xz\,\vec{i} - yz\,\vec{j} + (x - y - 2z)\,\vec{k}$ по дузі гвинтової лінії L_{AB}: $x = 3\cos t$; $y = 3\sin t$; $z = 4t$, $0 \le t \le \pi/2$.

□ $x' = -3\sin t$, $y' = 3\cos t$, $z' = 4$. Тоді

$$I = \int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} xz\,dx - yz\,dy + (x - y - 2z)\,dz =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \big(3\cos t \cdot 4t \cdot (-3\sin t) - 3\sin t \cdot 4t \cdot 3\cos t + (3\cos t - 3\sin t -$$

$$-2t)\cdot 4\big)dt=-72\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos t\,dt+12\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt-12\int_0^{\pi/2}\sin t\,dt-$$

$$-8\int_0^{\pi/2} t\,dt=-36\int_0^{\pi/2} t\sin 2t\,dt+12\cdot\sin t\Big|_0^{\pi/2}+12\cdot\cos t\Big|_0^{\pi/2}-4\cdot t^2\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=\big|\,u=t;\ dv=\sin 2t\,dt;\ du=dt;\ v=-(1/2)\cos 2t\,\big|=$$

$$=-36\left(t\cdot(-1/2)\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(-1/2)\cos 2t\,dt\right)+12\,\big(\sin(\pi/2)-$$

$$-\sin 0\big)+12\big(\cos(\pi/2)-\cos 0\big)-4(\pi/2)^2=-36\,\big((-\pi/4)\cos\pi+$$

$$+(1/4)\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\Big)+12-12-\pi^2=-9\pi-\pi^2.\ \blacksquare$$

Зв'язок між подвійним інтегралом по плоскій області D та криволінійним інтегралом по межі L цієї області відображається ***формулою Гріна***:

$$\boxed{\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy}.$$

Зауваження 3. З формули Гріна випливає наступне співвідношення для площі S_D плоскої області D, що обмежена контуром L: $\boxed{S_D=(1/2)\oint_L -y\,dx+x\,dy}$.

Приклад 5. Знайти площу області D, що обмежена еліпсом L: $x^2/16+y^2/9=1$, користуючись криволінійним інтегралом за координатами.

□ Перейдемо до параметричних рівнянь еліпса L: $x=4\cos t$; $y=3\sin t$ $\quad x=a\cos t; y=b\sin t$. Додатному обходу контуру L відповідає зміна параметра t від 0 до 2π. Тоді

$$x'=-4\sin t;\quad y'=3\cos t;\quad S_D=(1/2)\oint_L -y\,dx+x\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-3\sin t\cdot(-4\sin t)+4\cos t\cdot 3\cos t)\,dt=6\int_0^{2\pi}dt=6\cdot\ t\Big|_0^{2\pi}=12\pi.\ \blacksquare$$

1.3. Степеневі ряди

1.3.1. Степеневі ряди та їх збіжність

Степеневим рядом за степенями двочлена $x-x_0$ називають функціональний ряд вигляду:

$$\boxed{\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots},$$

де x – дійсна змінна (***аргумент***); x_0 – дійсне фіксоване число (***центр розвинення*** або ***опорна точка***); $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – дійсні сталі (***коефіцієнти***).

Теорема Абеля. а) *Якщо степеневий ряд* $\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збігається при деякому* $x = x_1 \neq 0$, *то він абсолютно збігається при всіх значеннях* x, *для яких* $|x| < |x_1|$. *б) Якщо степеневий ряд* $\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *розбігається при деякому* $x = x_2$, *то він розбігається при всіх значеннях* x, *для яких* $|x| > |x_2|$.

Існує таке невід'ємне число R, яке називають ***радіусом збіжності*** степеневого ряду $\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, що при $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний (рис. 27). Симетричний інтервал $(-R;R)$ називають ***інтервалом збіжності*** цього степеневого ряду.

Зауваження 1. На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = \pm R$, питання про збіжність розв'язується окремо для кожного конкретного ряду. Таким чином, ***область збіжності*** степеневого ряду $\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ може відрізнятись від інтервалу $(-R;R)$ не більше ніж двома точками $x = \pm R$.

Зауваження 2. Інтервал збіжності степеневого ряду можна знайти безпосередньо за ознакою Даламбера або за радикальною ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів даного ряду. Для дослідження кінців інтервалу використовуються більш "сильні" ознаки.

<u>Зауваження 3</u>. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно диференціювати та інтегрувати в інтервалі збіжності $(-R; R)$. Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності. Але при цьому може змінитися збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

<u>Приклад</u>. Знайти інтервал і область збіжності даного степеневого ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{5n}\, 32^n}{\sqrt{2n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^{2n}}{n^{n^2}}$;

в) $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{(2n)!\,(x-1)^{n+2}}{3^n\, n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(4n-1)\ln(4n-1)}$.

□ а) Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{(x+1)^{5n}\, 32^n}{\sqrt{2n-1}}; \quad u_{n+1} = \frac{(x+1)^{5(n+1)}\, 32^{n+1}}{\sqrt{2(n+1)-1}} = \frac{(x+1)^{5n+5} 32^{n+1}}{\sqrt{2n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{5n+5} 32^{n+1}}{\sqrt{2n+1}} : \frac{(x+1)^{5n}\, 32^n}{\sqrt{2n-1}}\right| = 32\,|\,x+1|^5 \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} = 32\,|\,x+1|^5 \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2-1/n}}{\sqrt{2+1/n}} = 32\,|\,x+1|^5;$$

$$32\,|\,x+1|^5 < 1; \;\; |\,x+1|^5 < 1/32; \;\; |\,x+1| < 1/2; \;\; -1/2 < x+1 < 1/2;$$
$$-3/2 < x < -1/2.$$

Таким чином, $(-3/2; -1/2)$ – інтервал збіжності даного ряду і $R = (-1/2 - (-3/2))/2 = 1/2$ – його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $x = -3/2$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-3/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3/2+1)^{5n}\, 32^n}{\sqrt{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{5n}}{\sqrt{2n-1}}.$$

Ряд з модулів його членів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$ дослідимо за допомогою граничної ознаки порівняння:

$|u_n(-3/2)| = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2n}} \sim \frac{1}{n^{1/2}} = v_n$ – розбіжний узагальнений гармонічний ряд; $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n(-3/2)|}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}}{\sqrt{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0, \infty$.

Ряд з модулів розбіжний.

Оскільки $\lim_{n\to\infty} |u_n(-3/2)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}} = 0$, то ряд є умовно збіжним за ознакою Лейбниця.

При $x = -1/2$ дістаємо знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1/2+1)^{5n}\, 32^n}{\sqrt{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}},$$

який співпадає з рядом з модулів при $x = -3/2$, що розбігається.

Отже, областю збіжності даного ряду є півінтервал $[-3/2; -1/2)$.

б) Для даного ряду скористаємося радикальною ознакою:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n (x-3)^{2n}}{n^{n^2}}\right|} = |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = 0$$

Оскільки $0 < 1$ при всіх дійсних значеннях x, то інтервалом і областю збіжності ряду є вся числова пряма $(-\infty; +\infty)$ і його радіус збіжності $R = +\infty$.

в) До даного ряду застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n = \frac{(2n)!\,(x-1)^{n+2}}{3^n\, n^2}; \quad u_{n+1} = \frac{(2n+2)!\,(x-1)^{n+3}}{3^{n+1}(n+1)^2}; \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)\,(x-1)^{n+3}}{3^{n+1}(n+1)^2} : \frac{(2n)!\,(x-1)^{n+2}}{3^n\, n^2} \right| =$$

$$= \frac{2|x-1|}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+1)}{n+1} = \begin{cases} 0 \;\; при \;\; x = 1; \\ +\infty \;\; при \;\; x \neq 1. \end{cases}$$

Отже, інтервалом і областю збіжності ряду є тільки одна точка $x=1$ і його радіус збіжності $R=0$.

г) Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{(x-2)^n}{(4n-1)\ln(4n-1)}\ ;\ \ u_{n+1}=\frac{(x-2)^{n+1}}{(4n+3)\ln(4n+3)}\ ;\ \ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(4n+3)\ln(4n+3)}:\frac{(x-2)^n}{(4n-1)\ln(4n-1)}\right|=|x-2|\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{4n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(4n+3)}{\ln(4n-1)}=\left|\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(4n+3)}{\ln(4n-1)}=\right.$$

$$\left.=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(4x+3))'}{(\ln(4x-1))'}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{4x+3}=1\right|=|x-2|;$$

$$|x-2|<1;\ \ -1<x-2<1;\ \ 1<x<3.$$

Таким чином, $(1;3)$ – інтервал збіжності даного ряду і $R=(3-1)/2=1$ – його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $x=1$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2)^n}{(4n-1)\ln(4n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n-1)\ln(4n-1)}.$$

Ряд з модулів його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)\ln(4n-1)}$ дослідимо за допомогою інтегральної ознаки Коші:

$$f(x)=\frac{1}{(4x-1)\ln(4x-1)};\ \ \int_1^{+\infty}f(x)\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(4x-1)\ln(4x-1)}=$$

$$=\left|u=\ln(4x-1);\ du=\frac{4\,dx}{4x-1};\ u_1=\ln 3;\ u_2=\ln(+\infty)=+\infty\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{du}{u}=\frac{1}{4}\cdot\ln|u|\Big|_{\ln 3}^{+\infty}=+\infty$$. Ряд з модулів розбігається.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(1)|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(4n-1)\ln(4n-1)}=0$, то ряд є умовно збіжним за ознакою Лейбниця.

При $x=3$ дістаємо знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-2)^n}{(4n-1)\ln(4n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)\ln(4n-1)},$$

який співпадає з рядом з модулів при $x=1$, що розбігається.

Отже, областю збіжності даного ряду є півінтервал $[1;3)$. ■

1.3.2. Ряди Тейлора і Маклорена. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки x_0 і в цій точці нескінченне число разів диференційовна. ***Ряд Тейлора*** для даної функції $f(x)$ має вигляд:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+}$$

$$\boxed{+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots}.$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0=0$, то отримаємо ***ряд Маклорена*** для даної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots}.$$

Розвинення функцій в степеневі ряди в загальному випадку ґрунтується на використанні рядів Тейлора чи Маклорена. На практиці найчастіше для цього застосовують ***спосіб формальних перетворень*** – без знаходження виразів для похідних довільного порядку, а за допомогою формальних перетворень ***стандартних*** (уже відомих) ***розвинень***. Тоді залишається обґрунтувати збіжність і саме до даної функції отриманого розкладу на певному проміжку.

Приклад 1. Розкласти в ряд Тейлора функцію $f(x)=\dfrac{1}{3x-4}$ за степенями двочлена $x-2$ та знайти область збіжності отриманих рядів.

□ Спочатку подамо функцію $f(x)=1/(3x-4)$ через нову змінну $z=x-2$ – відхилення від центру розвинення $x=x_0=2$:

$$x=z+2;\quad f(x)=\frac{1}{3(z+2)-4}=\frac{1}{3z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+3z/2}.$$

Скористаємося рядом

$$1/(1+x)=1-x+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,,\quad x\in(-1;1)\,,$$

в який замість x підставимо $3z/2$. Отримаємо:

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+3z/2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3z/2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n z^n}{2^{n+1}}\,.$$

Поклавши $z=x-2$, повернемося до початкової змінної x і дістанемо шукане розвинення $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$.

Дослідження отриманого ряду на збіжність здійснимо за ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}(x-2)^{n+1}}{2^{n+2}}:\frac{(-1)^n 3^n (x-2)^n}{2^{n+1}}\right|=$$

$$=(3/2)\,|\,x-2\,|<1;\quad -3/2<x-2<3/2;\quad 1/2<x<7/2.$$

На кінцях інтервалу збіжності $(1/2;7/2)$ маємо ряди $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(1/2)=(1/2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}1$ і $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(7/2)=(1/2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, що розбігаються, оскільки для них не виконується необхідна ознака збіжності. Отже, $(1/2;7/2)$ – область збіжності одержаного ряду. ■

Степеневі ряди широко застосовують у наближених обчисленнях, зокрема, для: обчислення значень функцій; обчислення інтегралів; розв’язування диференціальних рівнянь.

Приклад 2. Обчислити наближено визначений інтеграл $I=\int\limits_0^{1/2}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}dx$ з точністю до $\varepsilon=0{,}000001$.

□ Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи стандартний розклад (у ряд Маклорена) косинусу

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x\in R,$$

де замість x підставимо $\sqrt{x}$, потім віднімемо 1 і почленно поділимо на x:

$$\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\frac{1}{x}\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}+...-1\right)=$$

$$=-\frac{1}{2!}+\frac{x}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^{n-1}}{(2n)!}+...,\ \ x\in(-\infty;+\infty).$$

Оскільки проміжок інтегрування $[0;1/2]$ лежить в інтервалі збіжності $(-\infty;+\infty)$, то цей степеневий ряд можна почленно проінтегрувати на $[0;1/2]$. Дістанемо:

$$I=\int\limits_0^{1/2}\left(-\frac{1}{2!}+\frac{x}{4!}-...+\frac{(-1)^n x^{n-1}}{(2n)!}+...\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!\cdot 2}-\frac{x^3}{6!\cdot 3}+...+\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!\cdot n}+...\right)\Bigg|_0^{1/2}=-1/(2!\cdot 2)+$$

$$+1/(4!\cdot 2\cdot 2^2)-1/(6!\cdot 3\cdot 2^3)+...+1/\left((2n)!\cdot n\cdot 2^n\right)+....$$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакопочергового ряду. З’ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon=0{,}000001$.

Для заданої точності $\varepsilon=0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2=0{,}000001/2=0{,}0000005.$$

З ознаки Лейбниця дістанемо оцінку модулю n-го залишку:

$$|R_n| \le |u_{n+1}| = 1\Big/\Big((2(n+1))! \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1}\Big) =$$
$$= 1\Big/\Big((2n+2))! \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1}\Big).$$

Підберемо n так, щоб виконувалася умова

$$R_n \le 1\Big/\Big((2n+2))! \cdot (n+1) \cdot 2^{n+1}\Big) \le \varepsilon_1 = 0{,}0000005:$$
$$n = 2: \;\; R_2 \le 1\Big/\Big(6! \cdot 3 \cdot 2^3\Big) = 0{,}00006 > \varepsilon_1 = 0{,}0000005;$$
$$n = 3: \;\; R_3 \le 1\Big/\Big(8! \cdot 4 \cdot 2^4\Big) = 0{,}0000004 < \varepsilon_1 = 0{,}0000005.$$

Отже, досить взяти три перших члени ряду.

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot n = 0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot 3 \le \varepsilon_2 = 0{,}0000005; \; 10^{-k} \le 0{,}00000033;$$
$$-k \le \lg 0{,}00000033; \;\; -k \le \lg 33 - 8; \quad k \ge 8 - \lg 33; \; k = 7.$$

Таким чином $\quad I \approx S_3 = -\dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{4! 2 \cdot 2^2} - \dfrac{1}{6! 3 \cdot 2^3} =$

$$= -0{,}5000000 + 0{,}0052083 - 0{,}0000579 = -0{,}4948496.$$

Остаточно $I \approx -0{,}494850$. ■

<u>Приклад 3</u>. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \displaystyle\int_0^{3/4} \frac{1-\sqrt{1-x^3}}{x^3}\,dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$.

□ Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, взявши за основу стандартний розклад для бінома

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

при $\alpha = 1/2$:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{x^3}{3!} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{x^n}{n!} + \ldots = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2! \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3x^3}{3! \cdot 2^3} -$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5x^4}{4!\cdot 2^4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-3)\,x^n}{n!\cdot 2^n}+\ldots.$$ Тут

$$x\in(-1;1)\ .$$

В одержане розвинення замість x підставимо $-x^3$, потім віднімемо його від 1 і почленно поділимо на x^3:

$$\frac{1-\sqrt{1-x^3}}{x^3}=\frac{1-(1-x^3)^{1/2}}{x^3}=\frac{1}{x^3}\left(1-1+\frac{x^3}{2}+\frac{x^6}{2!\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 3x^9}{3!\cdot 2^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^{12}}{4!\cdot 2^4}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-3)\,x^{3n}}{n!\cdot 2^n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}+\frac{x^3}{2!\cdot 2^2}+$$

$$+\frac{1\cdot 3x^6}{3!\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^9}{4!\cdot 2^4}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-3)\,x^{3n-3}}{n!\cdot 2^n}+\ldots,$$

де $x\in(-1;1)$.

Оскільки $[0;\,1/4]\subseteq(-1;1)$, то цей степеневий ряд можна проінтегрувати почленно на $[0;\,1/4]$. Дістанемо:

$$I=\int_0^{3/4}\frac{1-\sqrt{1-x^3}}{x^3}dx=\int_0^{3/4}\left(\frac{1}{2}+\frac{x^3}{2!\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 3x^6}{3!\cdot 2^3}+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^9}{4!\cdot 2^4}+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-3)\,x^{3n-3}}{n!\cdot 2^n}+\ldots\right)dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{x^4}{2!\cdot 2^2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3x^7}{3!\cdot 2^3\cdot 7}+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot 5x^{10}}{4!\cdot 2^4\cdot 10}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\,x^{3n-2}}{n!\cdot 2^n\cdot(3n-2)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{3/4}=\frac{3}{2\cdot 4}+$$

$$+\frac{3^4}{2!\cdot 2^2\cdot 4\cdot 4^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 3^7}{3!\cdot 2^3\cdot 7\cdot 4^7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 3^{10}}{4!\cdot 2^4\cdot 10\cdot 4^{10}}+\ldots+$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\cdot(2n-3)\cdot 3^{3n-2}}{n!\cdot 2^n\cdot(3n-2)\cdot 4^{3n-2}}+\ldots.$$

Таким чином, шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакододатного ряду. З'ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon = 0{,}0001$.

Для заданої точності $\varepsilon = 0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon / 2 = 0{,}0001/2 = 0{,}00005.$$

Спочатку оцінимо n-й залишок:

$$R_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2(n+1)-3)\cdot 3^{3(n+1)-2}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot (3(n+1)-2)\cdot 4^{3(n+1)-2}} +$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2(n+2)-3)\cdot 3^{3(n+2)-2}}{(n+2)!\cdot 2^{n+2}\cdot (3(n+2)-2)\cdot 4^{3(n+2)-2}} + \ldots =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)\cdot 3^{3n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot 4^{3n+1}}\left(\frac{1}{3n+1} + \frac{(2n+1)\cdot 3^3}{(n+2)\cdot 2\cdot (3n+4)\cdot 4^3} +\right.$$

$$\left. + \frac{(2n+1)(2n+3)\cdot 3^6}{(n+2)(n+3)\cdot 2^2\cdot (3n+7)\cdot 4^6} + \ldots\right) < \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)\cdot 3^{3n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot 4^{3n+1}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{3n+1} + \frac{3^3}{(3n+1)\cdot 4^3} + \frac{3^6}{(3n+1)\cdot 4^6} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)\cdot 3^{3n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot (3n+1)\cdot 4^{3n+1}}\left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)\cdot 3^{3n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot (3n+1)\cdot 4^{3n+1}} \times \frac{1}{1-(3/4)^3} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)\cdot 3^{3n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot (3n+1)\cdot 4^{3n-2}\cdot 37}.$$

Тут у кінці скористалися формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником $q = (3/4)^3$.

Підберемо n так, щоб виконувалася умова

$$R_n < \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots \cdot (2n-1)\cdot 3^{3n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}\cdot (3n+1)\cdot 4^{3n-2}\cdot 37} \le \varepsilon_1 = 0{,}00005:$$

$$n=3: \quad R_3 < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 3^{10}}{4!\cdot 2^4\cdot 10\cdot 4^7\cdot 37} = 0{,}0004 > \varepsilon_1 = 0{,}00005;$$

$$n=4: \quad R_4 < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 3^{13}}{5!\cdot 2^5\cdot 13\cdot 4^{10}\cdot 37} = 0{,}00009 > \varepsilon_1 = 0{,}00005;$$

$$n=5: \quad R_5 < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 3^{16}}{6!\cdot 2^6\cdot 16\cdot 4^{13}\cdot 37} = 0{,}00002 < \varepsilon_1 = 0{,}00005.$$

Отже, досить взяти часткову суму до п’ятого члена включно.

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5\cdot 10^{-k}\cdot n = 0{,}5\cdot 10^{-k}\cdot 5 \le \varepsilon_2 = 0{,}00005;\ 10^{-k} \le 0{,}00002;$$

$$-k \le \lg 0{,}00002; \ -k \le \lg 2 - 5; \quad k \ge 5 - \lg 2; \ k = 5.$$

$$0{,}5\cdot 10^{-k}\cdot 2 \le \varepsilon_2 = 0{,}00005;\ 10^{-k} \le 0{,}00005; \ k \ge \lg 20000; \ k = 5.$$

Таким чином

$$I \approx S_5 = \frac{3}{2\cdot 4} + \frac{3^4}{2!\cdot 2^2\cdot 4\cdot 4^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 3^7}{3!\cdot 2^3\cdot 7\cdot 4^7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 3^{10}}{4!\cdot 2^4\cdot 10\cdot 4^{10}} +$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 3^{13}}{5!\cdot 2^5\cdot 13\cdot 4^{13}} = 0{,}37500 + 0{,}00989 + 0{,}00119 + 0{,}00022 +$$

$$+ 0{,}00005 = 0{,}38635. \quad \text{Остаточно} \quad I \approx 0{,}3864. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 4</u>. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших п’яти членів включно частинний розв’язок диференціального рівняння $y' = y^3 - y\ln x$, що задовольняє початковій умові $y(1) = -1$.

□ Шукаємо розв’язок $y = y(x)$ у вигляді ряду Тейлора з центром розвинення у початковій точці $x = 1$:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 +$$

$$+ \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \ldots,$$

де згідно умови задачі явно виписані перші п’ять членів.

За умовою $y(1)=-1$. Підставляючи $x=1$ і $y=y(1)=-1$ у диференціальне рівняння, знаходимо

$$y'(1)=(-1)^3\sqrt{4}-4\ln 1=-1.$$

Далі диференціюємо послідовно диференціальне рівняння по x і в отримані вирази підставляємо відомі на даному кроці величини. Одержуємо похідні $y''(1)$, $y'''(1)$ і $y^{(4)}(1)$:

$$y''=3y^2y'-y'\ln x-\frac{y}{x};\quad y''(1)=3(-1)^2(-1)-(-1)\ln 1-\frac{-1}{1}=-2;$$

$$y'''=3(2y(y')^2+y^2y'')-y''\ln x-\frac{y'}{x}-\frac{y'x-y}{x^2}=6y(y')^2+$$

$$+3y^2y''-y''\ln x-\frac{2y'x-y}{x^2};\quad y'''(1)=6(-1)(-1)^2+3(-1)^2(-2)-$$

$$-(-2)\cdot\ln 1-\frac{2\cdot(-1)\cdot 1-(-1)}{1^2}=-11;$$

$$y^{(4)}=6((y')^3+y\cdot 2y'y'')+3(2yy'y''+y^2y''')-y'''\ln x-\frac{y''}{x}-$$

$$-\frac{(2y''x+y')x^2-2x(2y'x-y)}{x^4}=6(y')^3+18yy'y''+3y^2y'''-$$

$$-y'''\ln x-\frac{3y''x^2-3y'x+2y}{x^3};\quad y^{(4)}(1)=6(-1)^3+18(-1)(-1)\times$$

$$\times(-2)+3(-1)^2(-11)-(-11)\ln 1-\frac{3(-2)1^2-3(-1)1+2(-1)}{1^3}=-58.$$

Отже, $$y(x)=-1+\frac{-1}{1!}(x-1)+\frac{-2}{2!}(x-1)^2+\frac{-11}{3!}(x-1)^3+$$

$$+\frac{-58}{4!}(x-1)^4+\ldots=$$

$$=-1-(x-1)-(x-1)^2-\frac{11}{6}(x-1)^3-\frac{29}{12}(x-1)^4+\ldots.\ \blacksquare$$

1.4. Ряди Фур'є

1.4.1. Розкладання періодичних функцій у ряди Фур'є. Достатні умови збіжності ряду Фур'є

Функції $f(x)$ і $g(x)$, що неперервні на відрізку $[a;b]$, називають ***ортогональними*** на цьому відрізку, якщо виконується умова

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 .$$

Скінченну чи нескінченну систему функцій $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, …, які неперервні на відрізку $[a;b]$ і не дорівнюють тотожно нулю, називають ***ортогональною*** на цьому відрізку, якщо всі зазначені функції попарно ортогональні, тобто

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ A_n \neq 0, & m = n \end{cases} \qquad (m = 0,1,\ldots;\ n = 0,1,\ldots).$$

Оскільки базисні тригонометричні функції мають спільний період $T = 2\pi$, то сума ряду теж періодична з періодом $T = 2\pi$.

Нехай $f(x)$ – задана періодична функція з періодом $T = 2\pi$. Тригонометричний ряд

$$\boxed{f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)},$$

де a_0, a_n, b_n ($n = 1,2,\ldots$) – ***коефіцієнти Фур'є***, які обчислюються за формулами

$$\boxed{a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}; \quad \boxed{a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad n = 1,2,\ldots};$$

$$\boxed{b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\quad n = 1,2,\ldots},$$

називають ***рядом Фур'є*** функції $f(x)$.

<u>Зауваження 1</u>. Інтеграли у формулах для коефіцієнтів Фур'є можна обчислювати на довільному проміжку $[a; a + 2\pi]$, довжина якого дорівнює періоду $T = 2\pi$ функції $f(x)$.

Теорема Діріхле (***достатня ознака розвинення функції в ряд Фур'є***). *Якщо функція* $f(x)$ *має період* $T=2\pi$ *і на відрізку* $[-\pi;\pi]$ *неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду і відрізок* $[-\pi;\pi]$ *можна розбити на скінченне число частин так, що всередині кожної з них функція монотонна, то її ряд Фур'є збігається на всій числовій осі, причому сума ряду* $S(x)$ *в точках неперервності функції* $f(x)$ *дорівнює їй самій* $S(x)=f(x)$, *а у кожній точці розриву* x_0 *функції* $f(x)$ *– середньому арифметичному односторонніх границь при* $x \to x_0$ *зліва та справа*

$$S(x_0)=(1/2)\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)+\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right).$$

При цьому збіжність ряду Фур'є рівномірна на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

Приклад 1. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi<x<0; \\ x^2/\pi, & 0\le x\le \pi. \end{cases}$$

□ Задана функція задовольняє умовам теореми Діріхле (рис. 21), тому її можна розкласти в ряд Фур'є. Отже, задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є:

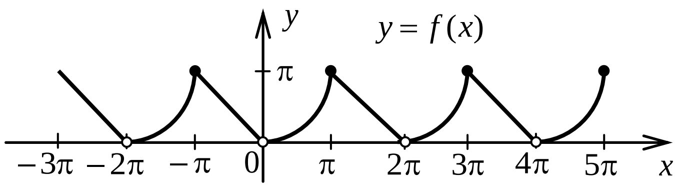

Рис. 21

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\,dx+\int_{0}^{\pi}(x^2/\pi)\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left.x\right|_{-\pi}^{0}+$$

$$+(1/\pi^2)(x^3/3)\Big|_0^{\pi}=4\pi/3;\quad a_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\cdot\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}(x^2/\pi)\cos nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cdot\cos nx\,dx+$$

$$+\left|\begin{matrix}u=x; \quad dv=\cos nx\,dx;\\ du=dx;\ v=(1/n)\sin nx\end{matrix}\right|+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x^2;\\ dv=\cos nx\,dx;\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}du=2xdx;\\ v=(1/n)\sin nx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx\right)+\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\right)=-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx-\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix}u-x;\\ du=dx;\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}dv=\sin nx\,dx;\\ v=-(1/n)\cos nx\end{matrix}\right|=\frac{\cos nx}{\pi n^2}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{\pi^2 n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}-\frac{2}{\pi^2 n}\left(-\pi(-1)^n/n+(1/n^2)\sin nx\,\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1+(-1)^n}{\pi n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}x\cdot\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}(x^2/\pi)\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\,dx+\left|\begin{matrix}u=x; \quad dv=\sin nx\,dx;\\ du=dx;\ v=-(1/n)\cos nx\end{matrix}\right|+\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x^2; \quad du=2xdx;\\ dv=\sin nx\,dx;\ v=-(1/n)\cos nx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx\right)+\frac{1}{\pi^2}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\right)=-\frac{(-1)^n}{n}-$$

$$-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x;\ dv=\cos nx\,dx;\\ du=dx;\ v=(1/n)\sin nx\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{(-1)^n 2}{n}+\frac{2}{\pi^2 n}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=-\frac{(-1)^n 2}{n}+\frac{2}{\pi^2 n^2}\times$$

$$\times\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=-\frac{2(-1)^n}{n}+\frac{2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^3}=\frac{2((-1)^n-1)-2(-1)^n\pi^2 n^2}{\pi^2 n^3}.$$

Розвинення заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{2\pi}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\right.$$

$$\left.+\frac{2((-1)^n-1)-2(-1)^n\pi^2 n^2}{\pi^2 n^3}\sin nx\right). \blacksquare$$

Зауваження 2. Ряд Фур'є для 2π-періодичної парної функції $f(x)$ набуває вигляду ***ряду косинусів***:

$\boxed{f(x)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx}$, де $\boxed{a_n=(2/\pi)\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx}$.

Аналогічно, ряд Фур'є для 2π-періодичної непарної функції $f(x)$ набуває вигляду ***ряду синусів***:

$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx}$, де $\boxed{b_n=(2/\pi)\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx}$.

Приклад 2. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну непарну функцію $f(x)=\begin{cases}\pi-x, & -\pi\le x<0;\\ -\pi-x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

□ Задана функція задовольняє умовам теореми Діріхле, тому може бути розвинена в ряд Фур’є. Графік функції подано на рис. 22. Оскільки ця функція непарна, то одержимо ряд синусів. Обчислимо його коефіцієнти і запишемо шуканий ряд:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nxdx=\left|\begin{array}{l}u=\pi-x;\\ dv=\sin nx\,dx;\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}du=-dx;\\ v=-(1/n)\cos nx\end{array}\right|=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi-x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=\frac{2}{n}-$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{2}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n}; \qquad f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}. \quad ■$$

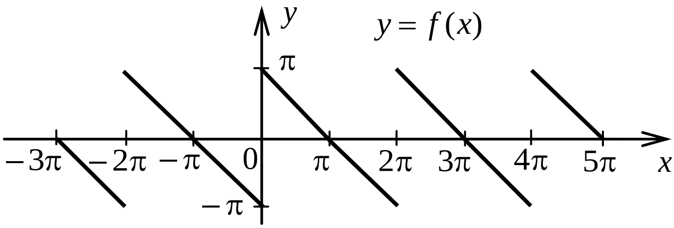

Рис. 22

Зауваження 3. Нехай функція $f(x)$ є періодичною з довільним періодом $T = 2l$, $l > 0$ і на цьому відрізку задовольняє умовам теореми Діріхле. Розвинення цієї функції в ряд Фур'є має вигляд:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)},$$

де

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx;\; a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;\; b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx}.$$

Зокрема, розвинення парних та непарних періодичних функцій з періодом $T = 2l$, $l > 0$ відповідно у ряди косинусів і синусів набувають наступного вигляду:

а) для парної $2l$-періодичної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}};$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, \ldots;}$$

б) для непарної $2l$-періодичної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}; \;\; b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \;\; n = 1, 2, \ldots}.$$

Приклад 3. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)$, що задана на відповідному відрізку $[-l;l]$ довжиною в період $T=2l$, $l>0$. Знайти значення суми ряду $S(0)$ і $S(l/2)$:

$$f(x)=\begin{cases}-1, \ -\pi/2<x<0;\\ \cos x, \quad 0<x<\pi/2.\end{cases}$$

□ Задана функція задовольняє умовам теореми Діріхле, тому може бути розвинена в ряд Фур’є. Графік функції подано на рис. 23.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є і запишемо шуканий ряд:

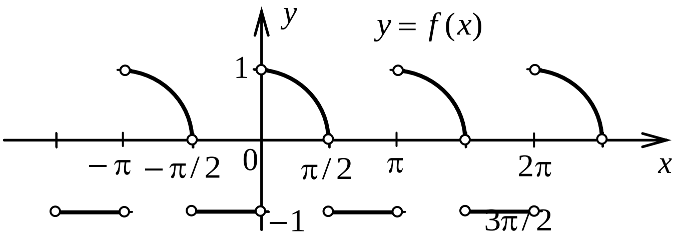

Рис. 23

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{\pi/2}\left(\int_{-\pi/2}^{0}(-1)\,dx+\int_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx\right)=-\frac{2}{\pi}x\Big|_{-\pi/2}^{0}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sin x\Big|_{0}^{\pi/2}=-1+\frac{2}{\pi}=\frac{2-\pi}{\pi};\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{\pi/2}\times$$

$$\times\left(\int_{-\pi/2}^{0}(-1)\cos\frac{n\pi x}{\pi/2}dx+\int_{0}^{\pi/2}\cos x\cos\frac{n\pi x}{\pi/2}dx\right)=-\frac{2}{\pi}\times$$

$$\times\int_{-\pi/2}^{0}\cos 2nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\cos x\cos 2nx\,dx=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\cdot\sin 2nx\Big|_{-\pi/2}^{0}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left(\cos(1+2n)x+\cos(1-2n)x\right)dx=0+\frac{1}{\pi(1+2n)}\times$$

$$\times\sin(1+2n)x\Big|_{0}^{\pi/2}+\frac{1}{\pi(1-2n)}\cdot\sin(1-2n)x\Big|_{0}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{\sin(\pi/2+n\pi)-\sin 0}{\pi(1+2n)}+\frac{\sin(\pi/2-n\pi)-\sin 0}{\pi(1-2n)}=\frac{(-1)^n}{\pi(1+2n)}+$$

$$+\frac{(-1)^n}{\pi(1-2n)}=\frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}; \quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{\pi/2}\times$$

$$\times\left(\int_{-\pi/2}^{0}(-1)\sin\frac{n\pi x}{\pi/2}dx+\int_{0}^{\pi/2}\cos x\sin\frac{n\pi x}{\pi/2}dx\right)=-\frac{2}{\pi}\times$$

$$\times\int_{-\pi/2}^{0}\sin 2nx\,dx+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\cos x\sin 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2n}\cdot\cos 2nx\Big|_{-\pi/2}^{0}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left(\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x\right)dx=\frac{\cos 0-\cos(-n\pi)}{n\pi}-$$

$$-\frac{1}{\pi(2n+1)}\cdot\cos(2n+1)x\Big|_{0}^{\pi/2}-\frac{1}{\pi(2n-1)}\cdot\cos(2n-1)x\Big|_{0}^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}-\frac{\cos(n\pi+\pi/2)-\cos 0}{\pi(2n+1)}-\frac{\cos(n\pi-\pi/2)-\cos 0}{\pi(2n-1)}=$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}+\frac{1}{\pi(2n+1)}+\frac{1}{\pi(2n-1)}=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}+\frac{2}{\pi(1-4n^2)};$$

$$f(x)=\frac{2-\pi}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\cos 2nx+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}+\frac{2}{\pi(1-4n^2)}\right)\cos 2nx\right).$$

При $x=0$ дана функція $f(x)$ має скінченний стрибок, тому

$$S(0)=(1/2)\left(\lim_{x\to-0}(-1)+\lim_{x\to+0}\cos x\right)=(1/2)(-1+1)=0.$$

У точці $x=l/2=\pi/4$ дана функція $f(x)$ неперервна, тому

$$S(\pi/4)=f(\pi/4)=\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2. \quad \blacksquare$$

1.4.2. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій

Для розвинення в ряд Фур'є неперіодичної функції $f(x)$, що задана на скінченному проміжку $[a;b]$, треба її продовжити періодичним способом на всю числову вісь, потім отриману періодичну функцію подати рядом Фур'є, сума якого на відрізку $[a;b]$ співпадає з даною функцією $f(x)$ у всіх її точках неперервності, а в точках розриву всередині проміжку $[a;b]$ і на його кінцях вона дорівнює півсумі односторонніх границь функції $f(x)$.

У поширеному випадку, коли неперіодична функція $f(x)$ задана на відрізку $[0;l]$, $l>0$, найчастіше використовують парне чи непарне продовження функції $f(x)$, $x\in[0;l]$ на проміжок $[-l;0]$, яке потім періодично продовжують на всю числову пряму з періодом $T=2l$. У результаті одержують неповний ряд Фур'є, а саме:

а) при парному продовженні – ряд косинусів:

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\ x\in[0;l]},$$

де $$\boxed{a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,...};$$

б) при непарному продовженні – ряд синусів:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\ x\in[0;l]},$$

де $$\boxed{b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n=1,2,...}.$$

<u>Приклад</u>. Дану функцію $f(x)$, визначену на відповідному відрізку $[0;l]$, розвинути: а) в ряд косинусів і б) ряд синусів. Для цього спочатку продовжити її відповідним чином на симетричний відрізок $[-l;l]$, а потім довизначити до періодичної функції з періодом $T=2l$. Побудувати на окремих рисунках в одному масштабі графіки продовжених періодичних парної та непарної функцій на

відрізку $[-l;3l]$.

$$f(x)=\begin{cases}2-x, & 0<x<3;\\ -1, & 3\le x<4.\end{cases}$$

□ Задана функція задовольняє умовам теореми Діріхле, тому може бути розвинена в ряд Фур'є. Маємо $l=4$.

а) При парному продовженні дана функція $f(x)$ розкладається в ряд косинусів:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{4}\left(\int_0^3(2-x)\,dx+\int_3^4(-1)\,dx\right)=\frac{1}{2}(2x-x^2/2)\Big|_0^3-$$

$$-x\Big|_3^4=-\frac{1}{4};\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{4}\left(\int_0^3(2-x)\cos\frac{n\pi x}{4}dx+\right.$$

$$\left.+\int_3^4(-1)\cos\frac{n\pi x}{4}dx\right)=\left|\begin{matrix}u=2-x; & dv=\cos(n\pi x/4)\,dx;\\ du=-dx; & v=(4/n\pi)\sin(n\pi x/4)\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\times$$

$$\times\left(\frac{(2-x)4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^3+\frac{4}{n\pi}\int_0^3\sin\frac{n\pi x}{4}dx\right)-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_3^4=-\frac{2}{n\pi}\times$$

$$\times\sin\frac{3n\pi}{4}-\frac{8}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^3+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{4}=\frac{8}{n^2\pi^2}\left(1-\cos\frac{3n\pi}{4}\right);$$

$$f(x)=-\frac{1}{8}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1-\cos\frac{3n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi x}{4},\quad x\in[0;4].$$

Графік парного продовження подано на рис. 24.

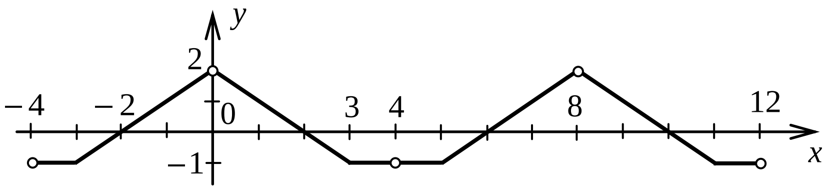

Рис. 24

б) При непарному продовженні дана функція $f(x)$ розкладається в ряд синусів:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{4}\left(\int_0^3 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{4}dx + \right.$$

$$\left. + \int_3^4 (-1)\sin\frac{n\pi x}{4}dx\right) = \begin{vmatrix} u = 2-x; & dv = \sin(n\pi x/4)\,dx; \\ du = -dx; & v = -(4/n\pi)\cos(n\pi x/4) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\times$$

$$\times\left(-\frac{(2-x)4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\Bigg|_0^3 - \frac{4}{n\pi}\int_0^3 \cos\frac{n\pi x}{4}dx\right) + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\Bigg|_3^4 = \frac{2}{n\pi}\times$$

$$\times\cos\frac{3n\pi}{4} - \frac{4}{n\pi} - \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{4}\Bigg|_0^3 + \frac{2}{n\pi}(-1)^n - \frac{2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{4} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}(-1)^n - \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{4};$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{4}\right)\sin\frac{n\pi x}{4}, \quad x\in[0;4].$$

Графік непарного продовження зображено на рис. 25. ■

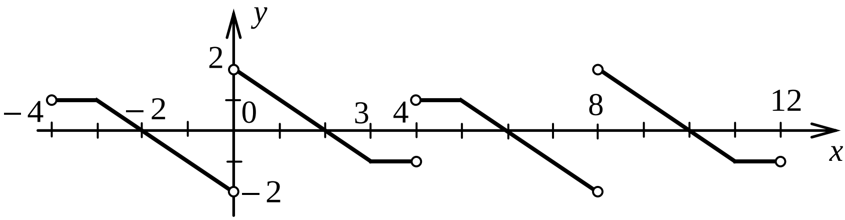

Рис. 25

<u>Зауваження</u>. Розвинення однієї й тієї ж заданої функції $f(x)$, $x\in[0;l]$ при різних продовженнях можуть мати різні характеристики, наприклад, щодо швидкості спадання модулів коефіцієнтів. У наведеному вище прикладі парне продовження, на відміну від непарного, має лише усувні розриви, тому ряд косинусів збігається швидше, ніж ряд синусів.

Змістовий модуль 2.

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

2.1. Наближені числа. Похибки та їх обчислення

2.1.1. Наближені числа. Абсолютна та відносна похибки. Форми запису наближених даних

Наближеним числом x називається таке, що несуттєво відрізняється від точного числа X і замінює останнє в обчисленнях.

Нехай X – точне значення деякої величини, а x – її відоме наближене значення.

Під ***похибкою*** наближеного числа x розуміють величину, що характеризує точність наближення і дорівнює різниці між відповідним точним числом X та його наближенням x: $\Delta x = X - x$.

У більшості випадків знак похибки Δx невідомий, тому вводиться поняття ***абсолютної похибки*** Δ_x як модуля похибки Δx: $\Delta_x = |\Delta x| = |X - x|$.

Як правило, точне значення X невідоме й абсолютну похибку Δ_x знайти неможливо. Тому для оцінки зверху Δ_x використовується поняття ***граничної абсолютної похибки*** Δ_x^*, яка визначається з нерівності $\Delta_x \le \Delta_x^*$.

Нехай $X \ne 0$. Важливою характеристикою точності наближення є абсолютна похибка, що припадає на одиницю величини числа X, – ***відносна похибка*** δ_x. Вона дорівнює відношенню абсолютної похибки Δ_x до модуля точного числа X: $\delta_x = \Delta_x / |X|$.

Верхньою оцінкою для δ_x служить ***гранична відносна похибка*** δ_x^*, що визначається з нерівності $\delta_x \le \delta_x^*$.

Звідси $\Delta_x / |X| \le \delta_x^*$; $\Delta_x \le |X| \delta_x^*$. Отже, можна покласти $\Delta_x^* = |X| \delta_x^*$. Оскільки $X = x$ з достатньою для практики точністю, то звичайно приймають $\boxed{\Delta_x^* = |x| \delta_x^*}$. Аналогічно $\boxed{\Delta_x = |x| \delta_x}$.

На практиці звичайно користуються формулою $\boxed{\delta_x^* = \Delta_x^* / |x|}$. Аналогічно $\boxed{\delta_x = \Delta_x / |x|}$.

Значущими цифрами наближеного числа

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots$$

називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва, включаючи всі нулі справа, що є представниками збережених розрядів. Решта нулів, що входять у його запис та служать лише для позначення його десяткових розрядів, не зараховуються до значущих цифр.

Наприклад, у числах $\underline{12{,}709314}$, $0{,}000\underline{93217}$, $0{,}00\underline{610426000}$, $\underline{8410000}$, $0{,}\underline{502300} \cdot 10^7$ тільки підкреслені цифри є значущими.

Точність подання наближеного числа x залежить від кількості його значущих цифр.

Значуща цифра α_i називається ***вірною*** (***правильною***) (<u>у вузькому сенсі</u>), якщо абсолютна похибка Δ_x^* числа x не перевищує половини одиниці ($m-i+1$)-го розряду, що відповідає цій цифрі. У противному разі цифра α_i називається ***сумнівною***.

Якщо цифра α_n вірна, то усі попередні до неї цифри теж вірні. Отже, при умові $\boxed{0{,}5 \cdot 10^{m-n} < \Delta_x^* \le 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}}$, за визначенням, перші n значущих цифр α_i, $i = \overline{1,n}$ є вірними, а всі інші – сумнівними. При цьому можна покласти $\boxed{\Delta_x^* = 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}}$.

Точне число X через його наближення x можна записати у різному вигляді:

– з використанням межових значень $x_1 \le X \le x_2$, де $x_1 = x - \Delta_x^*$ і $x_2 = x + \Delta_x^*$, наприклад, $21{,}372 \le X \le 21{,}380$;

– з використанням абсолютної похибки $X = x \pm \Delta_x^*$, наприклад, $X = 21{,}376 \pm 0{,}004$, тобто

$$21{,}376 - 0{,}004 \le X \le 21{,}376 + 0{,}004;$$

– з використанням відносної похибки $X = x(1 \pm \delta_x^*)$, напри-