

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\sin 2\varphi + \frac{1}{2} \right) \rho^3 d\rho + 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3 \left(\sin 2\varphi \cdot \left(1 - \sqrt{\rho^2 - 1} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - (\rho^2 - 1) \right) \right) d\rho = \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \left(\sin 2\varphi + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 d\varphi + 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3 \left(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi \sqrt{\rho^2 - 1} + 1 - \frac{1}{2} \rho^2 \right) d\rho = \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \left(\sin 2\varphi + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{4} d\varphi + 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{2}} \left(\rho^3 \sin 2\varphi - \rho^3 \sin 2\varphi \sqrt{\rho^2 - 1} + \rho^3 - \frac{1}{2} \rho^5 \right) d\rho = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1}{2} \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} \left(\sin 2\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_1^{\sqrt{2}} - \sin 2\varphi \int_1^{\sqrt{2}} \rho \cdot \rho^2 \sqrt{\rho^2 - 1} d\rho + \frac{\rho^4}{4} \Big|_1^{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \frac{\rho^6}{6} \Big|_1^{\sqrt{2}} \right) d\varphi = \\
&= \left| \begin{array}{l} \rho^2 - 1 = u; \rho^2 = u + 1; du = 2\rho d\rho; \\ \rho d\rho = \frac{du}{2}; u_i = 0; u_a = 1 \end{array} \right| = \frac{\pi}{2} + 2 \int_0^{2\pi} \left(\sin 2\varphi \cdot \frac{3}{4} - \sin 2\varphi \cdot \int_0^1 (u+1) \sqrt{u} \frac{du}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{12} \right) d\varphi = \\
&= \frac{\pi}{2} + 2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} \sin 2\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \cdot \left(\frac{2u^{5/2}}{5} + \frac{2u^{3/2}}{3} \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{6} \right) d\varphi = \frac{\pi}{2} + 2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{13}{60} \sin 2\varphi + \frac{1}{6} \right) d\varphi = \\
&= \frac{\pi}{2} + 2 \left(-\frac{13}{120} \cos 2\varphi + \frac{1}{6} \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}.
\end{aligned}$$



Знайдемо відповідні поверхневі інтеграли по додаткових поверхнях

$$\text{a) } \sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1; \\ z = 0 \end{cases}; \quad I_a = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) z^2 dx dy = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \cdot 0 dx dy = 0.$$

$$\text{б) } \sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2; \\ z = 1 \end{cases};$$

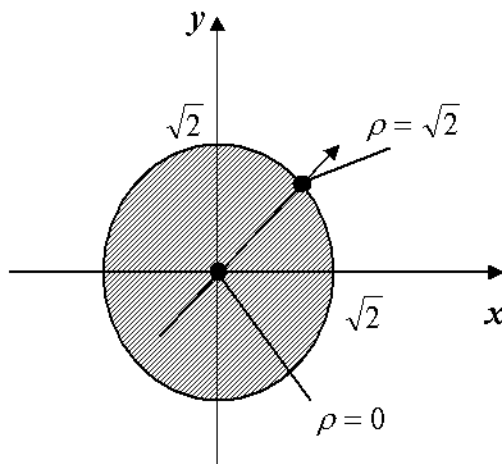


Рис. 63

$$I_a = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) z^2 dx dy = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \cdot 1 dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cdot \rho d\rho = \int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{\sqrt{2}} d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

$$\text{Тоді} \quad I = \Pi - I_a - I_a = \frac{7\pi}{6} - 2\pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

Список літератури

1. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 4. – Х.: Изд-во Харьковского ордена трудового красного знамени государственного университета им. А. М. Горького, 1971. – 133 с.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1986. – 415 с.
3. Бізюк В. В., Якунін А. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків: Навч. пос.– Х.: ХНАМГ, 2008. – 300 с.
4. Архіпова О. С., Протопопова В. П., Пахомова Є. С. Посібник для розв'язання типових завдань з курсу вищої математики. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 205 с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 2: Учебное пособие для втузов. – 13-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.
6. Станішевський С.О. Вища математика. – Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.
7. Станішевський С.О., Якунін А.В., Ситникова В.С. Вища математика для електротехніків. Модуль 3. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 308 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Анатолій Іванович Колосов,
Анатолій Вікторович Якунін,
Світлана Миколаївна Ламтюгова

КРАТНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ В ПРЕЗЕНТАЦІЯХ.

Електронний альбом дидактичних матеріалів до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів 2 курсу денної та заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології”, спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”

Відповідальний за випуск: С.О. Станішевський

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2011, поз. 189 М

Підп. до друку 27.05.09 р.	Формат 60x84 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі.	Умовн.-друк.арк 3,0	Обл.-вид.арк. 3,3
Тираж 10 прим.	Зам. №	

ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ
ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12