Векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна подати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно поверхневий інтеграл можна розбити на три інтеграли-доданки:

$$\iint\limits_{\sigma^\pm} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^\pm} P\vec{i}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma^\pm} Q\vec{j}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma^\pm} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma.$$

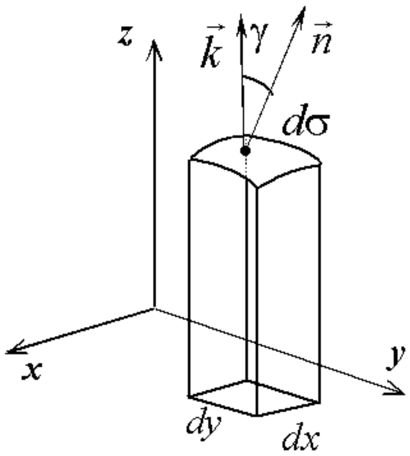


Рис. 48

Розглянемо останній з інтегралів $\iint\limits_{\sigma^\pm} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma$.

Обчислимо скалярний добуток $\vec{k}\cdot\vec{n} = |\vec{k}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\gamma = \cos\gamma$ (рис. 48). Далі $\cos\gamma\,d\sigma$ є проекція елементарного майданчика на площину Oxy: $\cos\gamma\,d\sigma = dxdy$, тому

$$\iint\limits_{\sigma^\pm} R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^\pm} R\,dxdy.$$

Аналогічно $\cos\alpha\,d\sigma = dydz$, $\cos\beta\,d\sigma = dxdz$.

Тоді $\iint\limits_{\sigma^\pm} P\vec{i}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^\pm} P\,dydz$; $\iint\limits_{\sigma^\pm} Q\vec{j}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^\pm} Q\,dxdz$.

Отримані три інтеграли $I_x = \iint\limits_{\sigma^\pm} P\,dydz$; $I_y = \iint\limits_{\sigma^\pm} Q\,dxdz$; $I_z = \iint\limits_{\sigma^\pm} R\,dxdy$

називаються ***поверхневими інтегралами за відповідною парою координат*** (y, z) або (x, z), або (x, y).

Повний поверхневий інтеграл за координатами записується так

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy,$$

де для скорочення запису в підінтегральному виразі опущені зовнішні дужки.

Зауваження 2. Виділимо два важливі випадки, коли поверхневий інтеграл $I_z = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} R\,dxdy$ за парою координат (x, y) дорівнює нулю:

а) якщо $R = 0$ всюди на поверхні σ, тобто векторне поле

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + 0\vec{k}$$

є ***плоскопаралельним*** (вектор $\vec{F}$ паралельний одній площині Oxy), при цьому $\vec{F}\perp\vec{k}$;

б) якщо $\vec{k}\perp\vec{n}$ всюди на поверхні σ, тобто σ є циліндричною поверхнею з твірними, що паралельні осі Oz, при цьому її проекцією D_{xy} на площину Oxy служить деяка лінія – фігура нульової площі. Аналогічні твердження справедливі для поверхневих інтегралів

$$I_x = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz \quad \text{і} \quad I_y = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz.$$

На початок розділу

3.2.2 Обчислення поверхневого інтеграла за координатами

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$$

зводиться до обчислення подвійних інтегралів по плоских областях.

Можна спочатку перейти до поверхневого інтеграла першого роду

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma,$$

а потім спроектувати поверхню σ на <u>одну</u> з координатних площин і перейти до подвійного інтеграла.

Але, як правило, зручніше спроектувати поверхню на всі <u>три</u> координатні площини і безпосередньо перейти до відповідних подвійних інтегралів. Для цього треба розбити повний інтеграл на складові частини і кожну з них розглянути окремо.

Метод проектування на одну з координатних площин.

Нехай поверхня σ правильна в напрямі осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 49). Тоді для напрямних косинусів одиничного вектора нормалі $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ справедливі співвідношення:

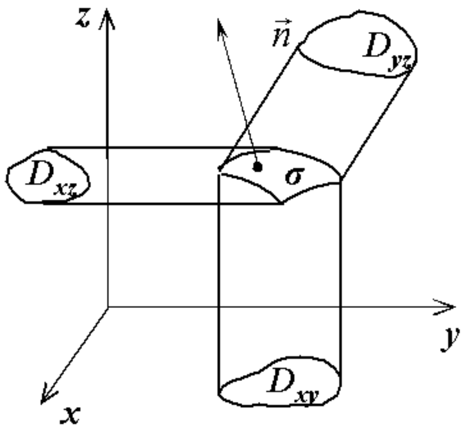


Рис. 49

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}; \quad \cos\beta = \frac{-z'_y}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}};$$

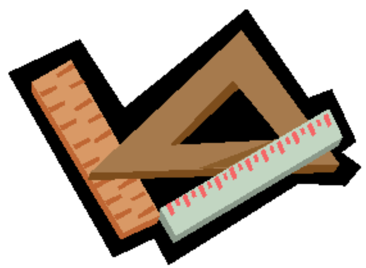
$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}},$$

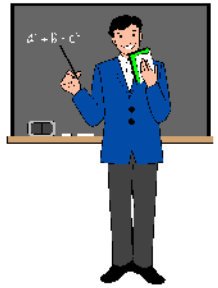
де перед квадратним коренем береться один певний знак «+» чи «–» у залежності від орієнтації поверхні.

Площі елементарного майданчика $d\sigma$ та його проекції $dS = dxdy$ зв'язані рівністю: $d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy.$

Відповідно для поверхневого інтеграла маємо:
у векторній формі

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \left[\left(\vec{F},\vec{n}\right)/|\cos\gamma|\right]\Big|_{z=z(x,y)} dxdy$$





або в координатній формі

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{-z'_x\,P}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} + \frac{-z'_y\,Q}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} + \frac{R}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} \right) \times$$

$$\times \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{xy}} \left(-z'_x(x,y)P(x,y,z(x,y)) - z'_y(x,y)Q(x,y,z(x,y)) + R(x,y,z(x,y))\right) dx\,dy.$$

Таким чином, обчислення поверхневого інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \geq 0$ (кут γ між нормаллю $\vec{n}$ і вибраною віссю Oz – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma \leq 0$ (кут γ – тупий).

Зауваження 1. Аналогічно розглядаються випадки поверхонь, що правильні в напрямі осей Ox чи Oy. При цьому змінні x, y і z міняються ролями. (Відповідні формули переходу до подвійного інтеграла запишіть самостійно).

Метод проектування на всі три координатні площини.

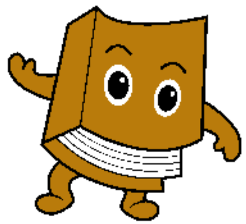
Нехай поверхня σ правильна в усіх трьох напрямах Ox, Oy, Oz. Її, зокрема, можна задати явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функцію $z(x, y)$ будемо вважати неперервною зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 49).

Якщо $dS = dxdy$ – площа проекції елементарного майданчика $d\sigma$ на площину Oxy, то площа самого майданчика

$$d\sigma = dxdy/|\cos\gamma| = \pm dxdy/\cos\gamma,$$

де береться один певний знак «+» чи «–» у залежності від орієнтації поверхні.

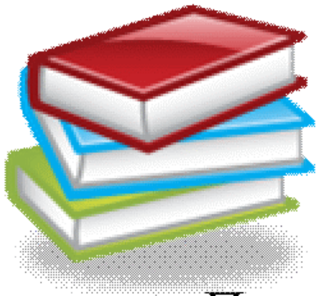
Тоді для поверхневого інтеграла $I_z = \iint\limits_{\sigma^\pm} R\,dxdy$ маємо:



$$I_z = \iint\limits_{\sigma^\pm} R\,dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,dxdy,$$

тобто обчислення поверхневого інтеграла $I_z = \iint_{\sigma^\pm} R\,dxdy$ за парою координат (x, y) зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \geq 0$ (кут γ – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma \leq 0$ (кут γ – тупий).

Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли $I_x = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz$ і $I_y = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz$ за відповідною парою координат (y, z) і (x, z):



$$I_x = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z), y, z)\,dydz;$$

$$I_y = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz = \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x, y(x,z), z)\,dxdz,$$

де D_{yz} і D_{xz} – проекції поверхні σ на відповідні координатні площини. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо кут між нормаллю $\vec{n}$ і вибраною координатною віссю – гострий, чи знак мінус, якщо цей кут – тупий.

Повний поверхневий інтеграл по координатах знаходиться як сума отриманих подвійних інтегралів

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = I_x + I_y + I_z.$$

Зауваження 2. У загальному випадку поверхню σ доводиться розбивати на правильні у вибраному напрямі частини.

Приклад 1

Обчислити поверхневий інтеграл за координатами

$$I = \iint\limits_{\sigma^-} z\,dydz - 4y\,dxdz + 8x^2\,dxdy$$

методом проектування на одну координатну площину. Тут σ^- – внутрішня сторона частини параболоїда обертання $z = x^2 + y^2 + 1$, що відсікається площиною $z = 2$, відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ утворює з віссю Oz тупий кут γ.

Задана поверхня зображена на рис. 50. Вона правильна в напрямі осі Oz і задається явно рівнянням $z = x^2 + y^2 + 1$. Коло D_{xy} - її проекція на площину Oxy. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак мінус, оскільки кут γ – тупий. Тоді

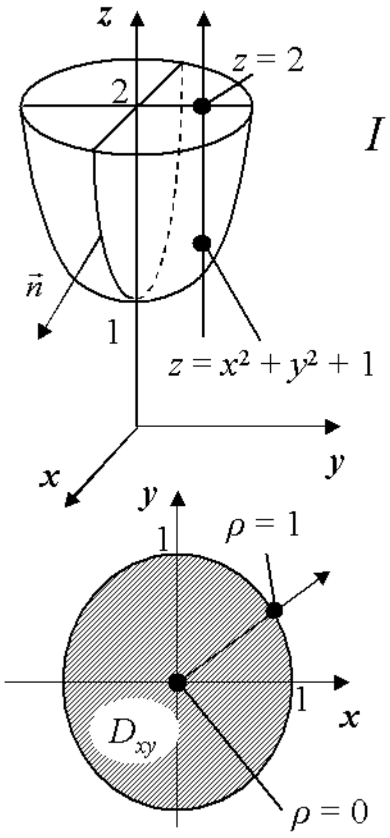


Рис. 50

$$\sigma^- :\ z = x^2 + y^2 + 1,\ z'_x = 2x,\ z'_y = 2y.$$

$$I = \iint\limits_{\sigma^-} zdydz - 4ydzdx + 8x^2dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} \left(-2x(x^2+y^2+1) + 2y\cdot 4y + 8x^2\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left(2x(x^2+y^2+1) - 8(x^2+y^2)\right)dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi;\ x^2+y^2 = \rho^2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le \rho \le 1;\ dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(2\rho\cos\varphi(\rho^2+1) - 8\rho^2\right)\rho\, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(2\rho^4\cos\varphi + 2\rho^2\cos\varphi - 8\rho^3\right)d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2\cos\varphi\cdot\frac{\rho^5}{5} + 2\cos\varphi\cdot\frac{\rho^3}{3} - 8\cdot\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{5}\cos\varphi + \frac{2}{3}\cos\varphi - 2\right)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{16}{15}\cos\varphi - 2\right)d\varphi = \left(\frac{16}{15}\sin\varphi - 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -4\pi.$$

Приклад 2

Методом проектування на всі три координатні площини обчислити $I = \iint\limits_{\sigma^+} xdydz + dxdz + xz^2dxdy$, де σ^+ – зовнішня сторона частини сфери σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, яка лежить в першому октанті. Відповідний вектор нормалі якої $\vec{n}$ утворює з віссю Oz гострий кут γ.

Поверхня є восьмою частиною сфери одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 51). Вона правильна в усіх трьох напрямах Ox, Oy і Oz.

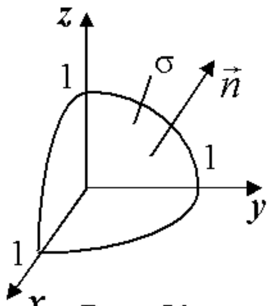


Рис. 51

При цьому нормаль $\vec{n}$ до вибраної сторони σ^+ з осями Oy і Oz утворює гострі кути β і γ, а з віссю Ox – тупий кут α.

Позначимо проекції σ на координатні площини відповідно D_{yz}, D_{xz} і D_{xy}, які будуть чвертями кругів радіуса 1. Поверхню σ можна задати явно відповідно одним з рівнянь

$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}, \quad y = \sqrt{1 - x^2 - z^2} \quad \text{чи} \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три складові частини по відповідній парі координат (y, z) і (x, z), і (x, y):

$$\iint\limits_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma^+} x\,dydz + xy^2dxdz + dxdy = I_x + I_y + I_z$$

і обчислимо окремо кожний з інтегралів-доданків:

Подвійні інтеграли обчисліть самостійно.

$$I_x = \iint\limits_{\sigma^+} x\,dydz = -\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\, dydz = -\frac{\pi}{6}; \quad I_z = \iint\limits_{\sigma^+} xz^2dxdy = +\iint\limits_{D_{xy}} x(1 - x^2 - y^2)dxdy = \frac{2}{15};$$

$$I_y = \iint\limits_{\sigma^+} dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} dxdz = \frac{\pi}{4}; \quad I = I_x + I_y + I_z = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{15}.$$

На початок розділу

$$I_x = \iint_{\sigma^+} x\,dydz = -\iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz = \left| \begin{array}{c} y=\rho\cos\varphi;\ \ z=\rho\sin\varphi; \\ y^2+z^2=\rho^2;\ \ dydz=\rho\,d\rho\,d\varphi \end{array}\right| =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{2}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}(-d\varphi) = -\frac{1}{3}\varphi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{6}.$$

$$I_y = \iint_{\sigma^+} dxdz = +\iint_{D_{xz}} dxdz = \frac{\pi}{4}.$$

$$I_z = \iint_{\sigma^+} xz^2dxdy = +\iint_{D_{xy}} x\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2 dxdy = \iint_{D_{xy}} x\left(1-x^2-y^2\right)dxdy =$$

$$= \left|\begin{array}{c} x=\rho\cos\varphi;\ \ y=\rho\sin\varphi; \\ x^2+y^2=\rho^2;\ \ dxdy=\rho\,d\rho\,d\varphi\end{array}\right| = \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho\left(1-\rho^2\right)\rho\,d\rho = \int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1\left(\rho^2-\rho^4\right)d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{3}\rho^3-\frac{1}{5}\rho^5\right)\Big|_0^1\cos\varphi\,d\varphi = \frac{2}{15}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{2}{15}\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{15}.$$

3.2.3 Застосування поверхневого інтеграла за координатами

Поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ також називають ***потоком векторного поля*** $\vec{F}$ через вибрану сторону $\sigma^{\pm}$ поверхні σ:

$$\Pi^{\pm} = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

(***фізичний зміст*** поверхневого інтеграла за координатами).

Зауваження 1. Якщо всюди на поверхні σ векторне поле $\vec{F}$ дотичне до неї ($\vec{F}\perp\vec{n}$), тобто σ є векторною поверхнею, то потік через неї дорівнює нулю:

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} 0\,d\sigma = 0.$$

Приклад

Знайти потік векторного поля $\vec F = x^2\,\vec i + y^2\,\vec j + 2z^2\,\vec k$ через частину площини σ: $2x + y + 2z = 1$, яка обмежена координатними площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (відповідний вектор нормалі $\vec n$ утворює з віссю Oz гострий кут γ) (рис. 52)

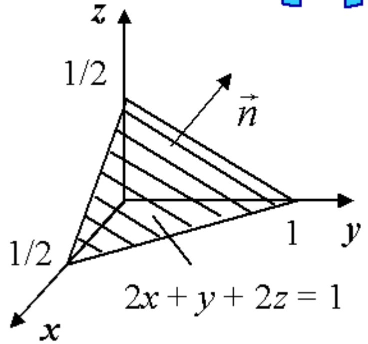


Рис. 52

Проекція D_{xy} поверхні σ на площину Oxy зображена на рис. 53.

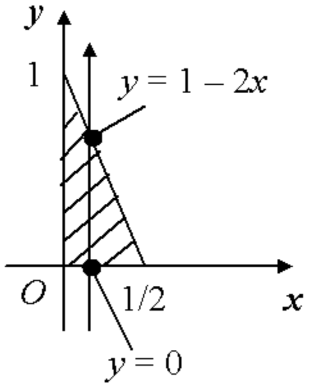


Рис. 53

Знайдемо координати одиничної нормалі до площини:

$$\vec N = \{2;1;2\};\quad |\vec N| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3;\quad \vec n = \left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}.$$

$$\vec F\cdot\vec n = \frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2+\frac{2}{3}\cdot 2z^2;\quad z=\frac{1-2x-y}{2};\quad z'_x=-1;\quad z'_y=-1/2.$$

Тоді
$$\Pi = \iint_{\sigma^+}\vec F\cdot\vec n\,d\sigma = \iint_{\sigma^+}\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2+\frac{2}{3}\cdot 2z^2\right)d\sigma =$$

$$=\frac{1}{3}\iint_D\left(2x^2+y^2+4\left(\frac{1-2x-y}{2}\right)^2\right)\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\iint_D\left(2x^2+y^2+(1-2x-y)^2\right)dxdy = \frac{1}{2}\iint_D(6x^2+2y^2-4x-2y+4xy+1)\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}dx\int_0^{1-2x}(6x^2+2y^2-4x-2y+4xy+1)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(6x^2y+2\frac{y^3}{3}-4xy-2\frac{y^2}{2}+4x\frac{y^2}{2}+y\right)\Bigg|_0^{1-2x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(6x^2(1-2x)+\frac{2}{3}(1-2x)^3-4x(1-2x)-(1-2x)^2+2x(1-2x)^2+(1-2x)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(-\frac{28}{3}x^3+10x^2-4x+\frac{2}{3}\right)dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{28}{3}\cdot\frac{x^4}{4}+10\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x\right)\Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{16}+\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{8}-2\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{96}.$$

На початок розділу

3.2.4 Формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між криволінійним і поверхневим інтегралами (другого роду):

$$\oint\limits_{L} \vec{F}\, d\vec{l} = \iint\limits_{\sigma^+} rot\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma, \quad \text{або}$$

$$\oint\limits_{L} P dx + Q dy + R dz = \iint\limits_{\sigma^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

при цьому вибирається додатний напрям обходу контуру L: якщо дивитися з кінця вектора нормалі $\vec{n}$ до відповідної сторони σ^+ поверхні σ, то цей обхід здійснюється проти ходу годинникової стрілки.

Зауваження 1. Коли векторне поле безвихрове, тобто $rot\, \vec{F} = \vec{0}$, то для довільного замкненого контуру L, який цілком лежить у цьому полі, за формулою Стокса маємо $\oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = \iint_{\sigma^\pm} rot\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$. Це означає, що безвихрове поле є потенціальним. Навпаки, якщо поле потенціальне, то $rot\, \vec{F} = \vec{0}$. Це означає, що потенціальне поле є безвихровим.

Зауваження 2. Із формули Стокса випливає, що потік вихору векторного поля $\vec{F}$ не залежить від виду поверхні σ, що натягнута на замкнений контур L. Тому *потік вихору векторного поля через замкнену поверхню дорівнює нулю.*

Приклад 1

Дано просторове векторне поле

$$\vec{F} = (2x + z)\vec{i} + 3xy\,\vec{j} + (2y - 3z)\vec{k}$$

і поверхня σ – частина площини $p:\ 4x + 2y - 3z - 12 = 0$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Знайти циркуляцію векторного поля вздовж замкненого контуру L, що обмежує поверхню σ, при додатному напрямі обходу відносно нормального вектора $\vec{N} = (A, B, C)$ цієї площини p. Обчислення провести за допомогою формули Стокса.

Поверхня σ – це $\Delta M_x M_y M_z$ (рис. 54) з вектором нормалі $\vec{N} = (3, 4, -2)$.

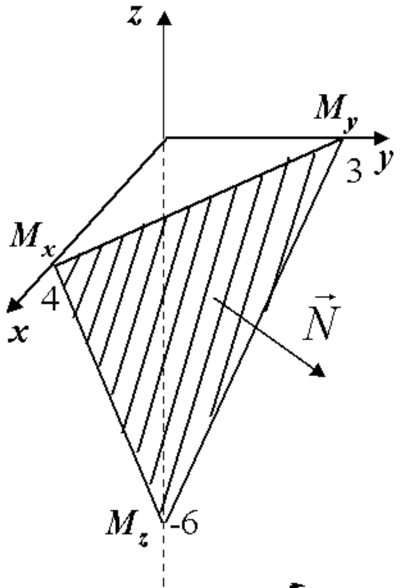


Рис. 54

Поверхня σ правильна в усіх трьох напрямах Ox, Oy і Oz. Для обчислення поверхневого інтеграла використаємо метод проектування на одну координатну площину, за яку виберемо Oxy. При цьому нормаль до вибраної сторони σ^+ з віссю Oz утворює тупий кут γ. Проекцією D_{xy} поверхні σ на площину Oxy є $\Delta OM_x M_y$ (рис. 55). Тоді

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

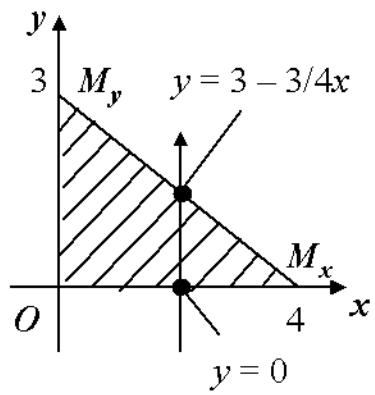


Рис. 55

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x+z & 3xy & 2y-3z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(2y-3z) - \frac{\partial}{\partial z}3xy\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(2y-3z) - \frac{\partial}{\partial z}(2x+z)\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}3xy - \frac{\partial}{\partial y}(2x+z)\right)\vec{k} = (2-0)\vec{i} - (0-1)\vec{j} + (3y-0)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3y\vec{k}.$$

$$\sigma: \ z = 3x/2 + 2y - 6; \quad z'_x = 3/2; \quad z'_y = 2; \ \cos\gamma < 0 \Rightarrow "-"$$

$$\sigma \xrightarrow{Oz} D_{xy} = \Delta OM_xM_y: \ 0 \le x \le 4; \quad 0 \le y \le 3 - 3x/4$$

$$\Gamma = \oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = \iint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^+} 2\,dydz + dxdz + 3y\,dxdy = -\iint_{D_{xy}}\left(-\frac{3}{2}\cdot 2 - 2\cdot 1 + 3y\right)dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}}(3y-5)\,dxdy = \int_0^4 dx \int_0^{3-3x/4}(3y-5)\,dy = \int_0^4 \left(3\frac{y^2}{2} - 5y\right)\Bigg|_0^{3-3x/4} dx =$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{3}{2}\left(9 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{16}x^2\right) - 5\left(3 - \frac{3}{4}x\right)\right)dx = \left(\frac{3}{2}\left(9x - \frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{16}x^3\right) - 5\left(3x - \frac{3}{8}x^2\right)\right)\Bigg|_0^4 = -12.$$

На початок розділу

3.2.5 Формула Остроградського – Гауса

Формула Остроградського – Гауса
в координатній формі

$$\oiint\limits_{\sigma^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz$$

або у векторній формі $\oiint\limits_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iiint\limits_V div\,\vec{F}\, dV$.

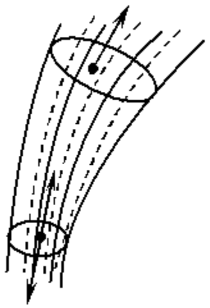


Рис. 56

Зауваження 1. *Дивергенція* $div\,\vec{F}$ *не залежить від вибору системи координат (є інваріантною скалярною характеристикою поля).*

Зауваження 2. *В соленоїдальному полі потік вектора в напрямі векторних ліній через кожний переріз векторної трубки один і той же.*

Векторна трубка – сукупність всіх векторних ліній векторного поля, що проходять через деяку замкнену лінію (рис. 56).

Якщо $\vec{F}$ – поле швидкостей текучої рідини, то в полі без джерел через кожний переріз векторної трубки протікає одна й та ж кількість рідини.

Зауваження 3. *Інколи зручно доповняти задану поверхню до замкненої, додаючи довільні прості поверхні. Далі потрібно обчислити за формулою Остроградського-Гауса потік через всю замкнену поверхню, а потім відняти потоки через додаткові поверхні.*

Приклад 1

Обчислити потік векторного поля

$$\vec{F}=\left(\frac{1}{3}x^3-2yz\right)\vec{i}+yz^2\vec{j}+(y^2z-x)\vec{k}$$

через зовнішню сторону σ⁺ поверхні сфери σ: $x^2+y^2+z^2=1$.

Оскільки поверхня σ замкнена, то для обчислення потоку можна застосувати формулу Остроградського – Гауса. Знайдемо дивергенцію

$$div\,\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}x^3-2yz\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(yz^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(zy^2-x\right)=x^2+z^2+y^2.$$

Тоді $$\Pi=\underset{\sigma^+}{\iint\!\!\!\!\!\!\bigcirc}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint\limits_V div\,\vec{F}\,dV=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\left|\begin{array}{c} x=\rho\sin\theta\cos\varphi;\;\; y=\rho\sin\theta\sin\varphi;\;\; z=\rho\cos\theta;\\ \sigma:\rho=1;\;\; dx\,dy\,dz=\rho^2\sin\theta\;d\rho\,d\varphi\,d\theta;\;\; x^2+y^2+z^2=\rho^2\end{array}\right|=\iiint\limits_V\rho^4\;\sin\theta\;d\rho\,d\varphi\,d\theta=$$

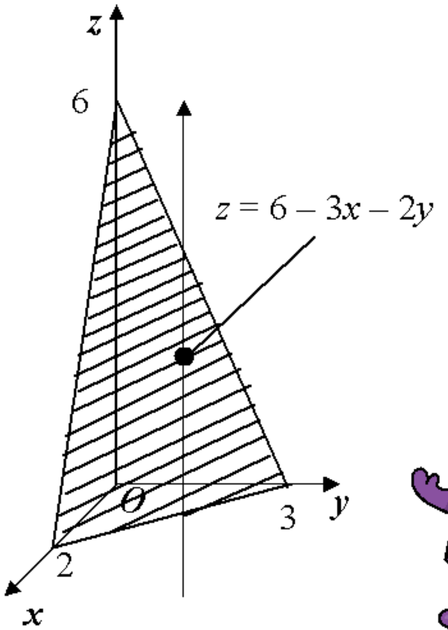
$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^1\rho^4\,d\rho=\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{5}\int_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}d\varphi=\frac{2}{5}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4\pi}{5}.$$

Приклад 2

Обчислити потік векторного поля (самостійно)

$$\vec{F}=(3x+2y)\vec{i}+(3-5y)\vec{j}+(x-2y+6z)\vec{k}$$

через зовнішню сторону σ⁺ замкненої повної поверхні σ піраміди V, утвореної при перетині площини p: $3x+2y+z-6=0$ з координатними площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$. Обчислення провести за допомогою формули Остроградського – Гауса.



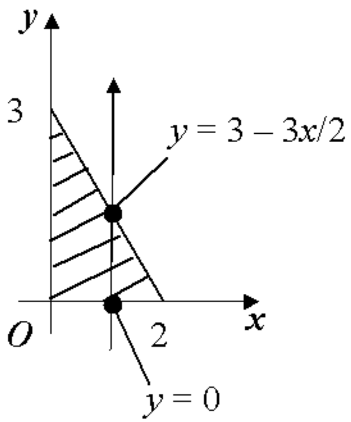
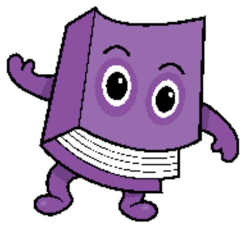


Рис. 57



$$div\,\vec{F} = (3x+2y)'_x + (3-5y)'_y + (x-2y+6z)'_z = 4.$$

$$\Pi = \oiint\limits_{\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint\limits_V div\,\vec{F}\,dV = 4\iiint\limits_V dxdydz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} V:\ 0 \le z \le 6-3x-2y;\ V \xrightarrow{Oz} D_{xy}; \\ D_{xy}:\ 0 \le x \le 2;\ \ 0 \le y \le 3-3x/2 \end{array} \right| =$$

$$= 4\iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_0^{6-3x-2y} dz = 4\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-3x/2} (6-3x-2y)\,dy =$$

$$= 4\int\limits_0^2 \left(6y-3xy-y^2\right)\Big|_0^{3-3x/2} dx = 4\int\limits_0^2 \left(\frac{9}{4}x^2 - 9x + 9\right)dx =$$

$$= 4\left(\frac{9}{4}\frac{x^3}{3} - \frac{9}{2}x^2 + 9x\right)\Bigg|_0^2 = 24.$$

Приклад 3

Обчислити поверхневий інтеграл за координатами

$$I = \iint\limits_{\sigma^+} y(x^2 - z^2)dydz + x(x^2 + y^2 - z^2)dxdz + (x^2 + y^2)z^2dxdy,$$

де σ^+ – зовнішня сторона частини однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, що лежить між площинами $z = 0$, $z = 1$.

Задачу розв'язати двома способами:

1) Застосувати метод проектування на всі три координатні площини.

2) Доповнити поверхню σ до замкненої, додаючи круги

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \le 2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Застосувати формулу Остроградського-Гауса і від результату відняти відповідні поверхневі інтеграли по додаткових поверхнях.

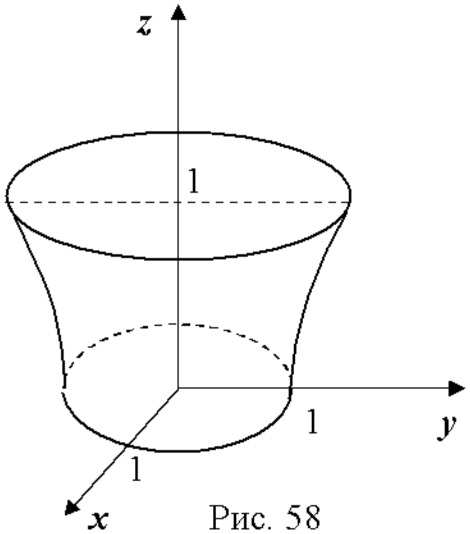


Рис. 58

Спосіб 1.

Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три складові частини по відповідній парі координат (y, z), (x, z), (x, y) і обчислимо окремо кожний з інтегралів.

Поверхня σ зображена на рис. 58. Вона неправильна в напрямах Ox, Oy і правильна в напрямі Oz.

а) Розглянемо інтеграл $I_x = \iint_{\sigma^+} y(x^2 - z^2)dydz.$ Поверхня σ координатною площиною $x = 0$ розбивається на дві правильні в напрямку осі Ox частини: передню $\sigma_{x1} : x = \sqrt{1 - y^2 + z^2}$ і задню $\sigma_{x2} : x = -\sqrt{1 - y^2 + z^2}$ зі спільною проекцією D_{yz} на площину Oyz (рис. 59).

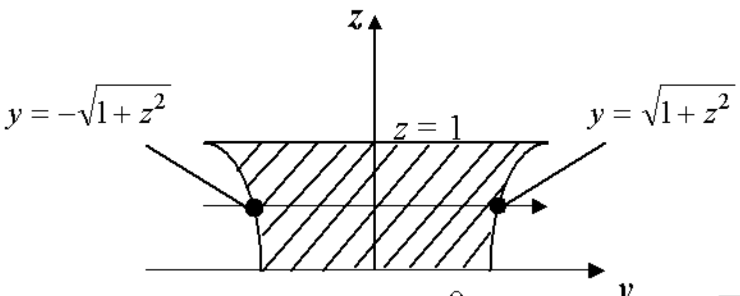
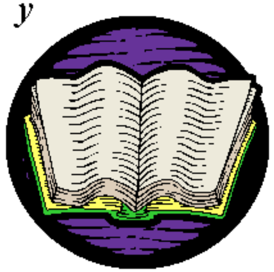


Рис. 59

При цьому нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{x1}^{+} з віссю Ox утворює гострий кут α, а нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{x2}^{+} з віссю Ox утворює тупий кут α. Тоді



$$I_x = \iint\limits_{\sigma^+} y(x^2 - z^2)dydz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_{x1}^+} y(x^2 - z^2)dydz + \iint\limits_{\sigma_{x2}^+} y(x^2 - z^2)dydz =$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} y\left(\left(\sqrt{1 - y^2 + z^2}\right)^2 - z^2\right)dydz - \iint\limits_{D_{yz}} y\left(\left(-\sqrt{1 - y^2 + z^2}\right)^2 - z^2\right)dydz = 0.$$

б) Розглянемо $I_y = \iint_{\sigma^+} x(x^2 + y^2 - z^2)dxdz$. Поверхня σ координатною площиною $y = 0$ розбивається на дві правильні в напрямку осі Oy частини: праву $\sigma_{y1} : y = \sqrt{1 - x^2 + z^2}$ і ліву $\sigma_{y2} : y = -\sqrt{1 - x^2 + z^2}$ зі спільною проекцією D_{xz} на площину Oxz (рис. 60).

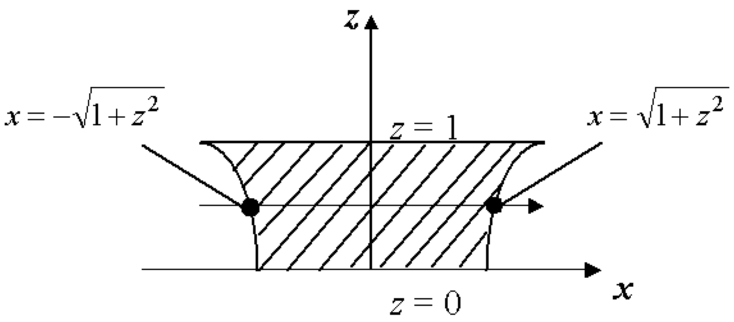


Рис. 60

При цьому нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{y1}^+ з віссю Oy утворює гострий кут β, а нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ_{y2}^+ з віссю Oy утворює тупий кут β. Тоді

$$I_y = \iint_{\sigma^+} x(x^2 + y^2 - z^2)dxdz =$$

$$= \iint_{\sigma_{y1}^+} x(x^2 + y^2 - z^2)dxdz + \iint_{\sigma_{y2}^+} x(x^2 + y^2 - z^2)dxdz =$$

$$= \iint_{D_{yz}} x\left(x^2 + \left(\sqrt{1 - x^2 + z^2}\right)^2 - z^2\right)dxdz - \iint_{D_{yz}} x\left(x^2 + \left(-\sqrt{1 - x^2 + z^2}\right)^2 - z^2\right)dxdz = 0.$$

в) Розглянемо інтеграл $I_z = \iint_{\sigma^+}(x^2+y^2)z^2dxdy$. Поверхня σ – правильна в напрямі осі Oz, її можна задати рівнянням $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$. Проекція D_{xy} поверхні σ на площину Oxy зображена на рис. 61.

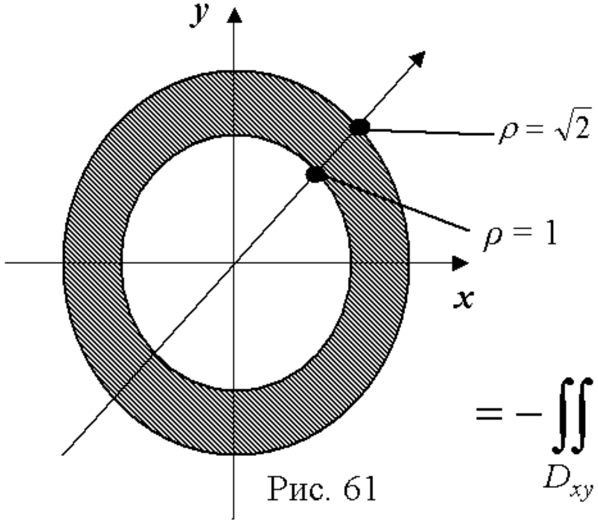


Рис. 61

При цьому нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ^+ з віссю Oz утворює тупий кут γ.

$$I_z = \iint\limits_{\sigma^+}(x^2+y^2)z^2dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2-1}\right)^2dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-1\right)dxdy =$$

$$= \left|\begin{array}{c} x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi \\ 0\le\varphi\le 2\pi;\ 1\le\rho\le\sqrt{2} \\ x^2+y^2=\rho^2;\ dxdy=\rho\,d\varphi\,d\rho \end{array}\right| = -\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^{\sqrt{2}}\rho^2(\rho^2-1)\rho\,d\rho = -\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(\rho^5-\rho^3\right)d\rho =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^6}{6}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}d\varphi = -\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{4}{3}-1-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)d\varphi = -\frac{5}{12}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Тоді $I = I_x + I_y + I_z = -\dfrac{5\pi}{6}.$

Спосіб 2.

Доповнимо поверхню σ до замкненої, додаючи круги

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x^2+y^2\le 2 \\ z=1 \end{cases}.$$

Оскільки поверхня σ (рис. 62) замкнена, то для обчислення потоку можна застосувати формулу Остроградського – Гауса. Знайдемо дивергенцію

$$div\vec{F}=2xy+2xy+2(x^2+y^2)z.$$

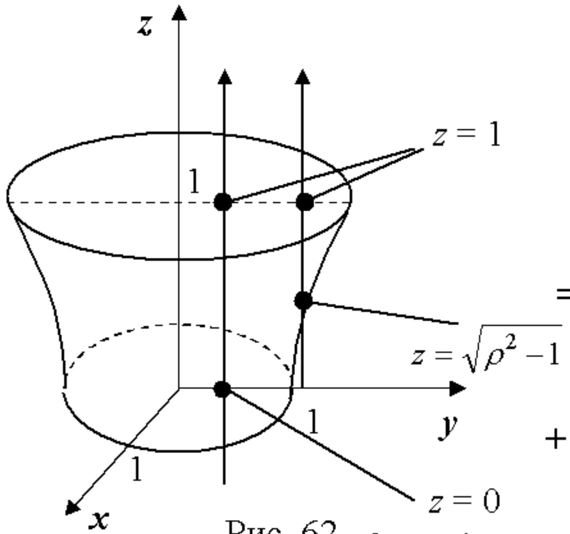


Рис. 62

Тоді

$$\Pi=\iiint\limits_V(4xy+2(x^2+y^2)z)dxdydz=\left|\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ z=z \\ x^2+y^2=\rho^2\end{matrix}\right|=$$

$$=\iiint\limits_V(4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+2\rho^2z)\rho\,d\rho\,dz=\iiint\limits_{V_1}(4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+2\rho^2z)\rho\,d\rho\,dz+$$

$$+\iiint\limits_{V_2}(4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+2\rho^2z)\rho\,d\rho\,dz=\left|\begin{matrix} V_1:0\le\rho\le1;0\le\varphi\le2\pi;0\le z\le1; \\ V_2:1\le\rho\le\sqrt{2};0\le\varphi\le2\pi;\sqrt{\rho^2-1}\le z\le1\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\,d\rho\int\limits_0^1(4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+2\rho^2z)dz+\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^{\sqrt{2}}\rho\,d\rho\int\limits_{\sqrt{\rho^2-1}}^1(4\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+2\rho^2z)dz=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^3d\rho\int\limits_0^1(\sin2\varphi+z)dz+2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^{\sqrt{2}}\rho^3d\rho\int\limits_{\sqrt{\rho^2-1}}^1(\sin2\varphi+z)dz=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(\sin2\varphi\cdot z+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1\rho^3d\rho+2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(\sin2\varphi\cdot z+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{\rho^2-1}}^1\rho^3d\rho=$$