<u>Фізичний зміст потрійного інтеграла</u>:

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z)\, dV,$$

де μ (x, y, z) – об'ємна густина; m – маса.

<u>Геометричний зміст потрійного інтеграла</u>: Якщо в потрійному інтегралі підінтегральну функцію покласти тотожно рівною одиниці $f(x,y,z) \equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме об'єму області інтегрування V:

$$V = \iiint_V dV.$$

<u>Зауваження</u>. *Умови існування та основні властивості потрійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям подвійного і звичайного визначеного інтеграла.*

На початок розділу

2.1.2 Обчислення потрійного інтеграла в прямокутній системі координат

У прямокутній системі координат диференціал об'єму має вигляд $dV = dx\,dy\,dz$ і потрійний інтеграл можна подати у формі

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Нехай тривимірна область V – правильна в напрямі осі Oz і обмежена знизу і зверху поверхнями відповідно $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$.

Тоді справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\;dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

за якою спочатку обчислюється внутрішній одновимірний інтеграл по z, а потім зовнішній подвійний інтеграл по x, y.

Якщо при цьому плоска область D_{xy}, що служить проекцією тіла V на площину Oxy, є правильною в напрямі осі Oy, то приходимо до формули

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\;dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

яка зводить потрійний інтеграл до трикратного повторного інтеграла.

Зауваження 1. За цією формулою спочатку обчислюється самий внутрішній інтеграл по внутрішній змінній z при фіксованих зовнішніх змінних x і y. Потім знаходиться проміжний інтеграл по y при фіксованому x. В останню чергу обчислюється зовнішній інтеграл по x.

Зауваження 2. Можна одержати повторний інтеграл з іншим порядком інтегрування. Його доцільність залежить як від розташування області V відносно прийнятої системи координат $Oxyz$ та форми області V, так і від вигляду підінтегральної функції $f(x, y, z)$.

Приклад

Для потрійного інтеграла $I = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$ вказано підінтегральну функцію $f\ (x,\ y,\ z)$ й область інтегрування V, яка задана рівняннями поверхонь, що її обмежують, або системою нерівностей.

Необхідно:

1) Зобразити тіло V у прямокутній системі координат $Oxyz$ як правильну в напрямі осі Oz просторову область.

2) Подати його проекцію D_{xy} як правильну в напрямі осі Ox плоску область, при необхідності розбиваючи на частини, і зробити відповідний рисунок.

3) За результатами пунктів 1) і 2) перейти до повторного інтеграла і обчислити його значення.

а) $f(x, y, z) = z$;
V: $x^2 = 2y$; $z = 0$; $2y + z = 2$;

б) $f(x, y, z) = x + z$;
V: $x = 0$; $y = 0$; $z = 1$; $x + y + z = 2$.

б) виконати самостійно.

а) $f(x, y, z) = z$;

V: $x^2 = 2y$; $z = 0$; $2y + z = 2$; $y = 1$.

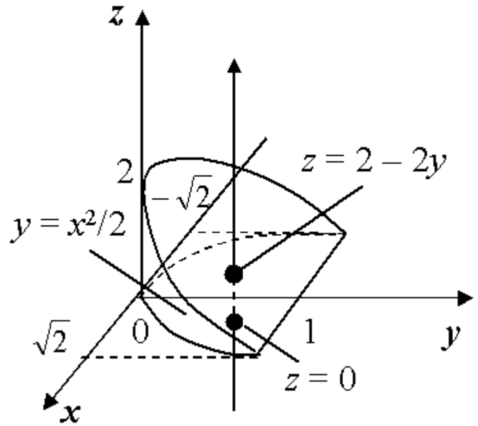


Рис. 34

Дана область інтегрування V є вертикальним циліндричним тілом, а його проекцією на координатну площину Oxy є плоска область D_{xy}. На рис. 34 це тіло V подано як правильну в напрямі осі Oz просторову область, що обмежена знизу координатною площиною $z = 0$ (поверхня входу), зверху – площиною $z = 2 - 2y$ (поверхня виходу), а з боків – параболічним циліндром $x^2 = 2y$. Відповідно на рис. 35 проекцію D_{xy} відтворено як правильну в напрямі осі Ox плоску область. Тоді потрійний інтеграл переходом до повторного обчислюється так:

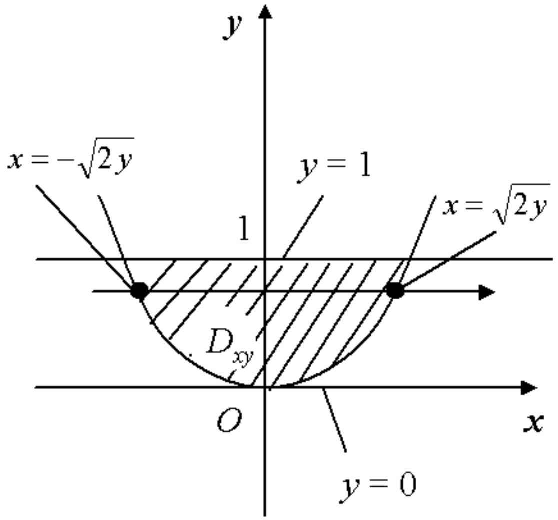


Рис. 35

$$I = \iiint_V z\,dxdydz = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx \int_0^{2-2y} z\,dz = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} (z^2/2)\Big|_0^{2-2y} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} (2-2y)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2-2y)^2 \cdot x\Big|_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dy = 4\int_0^1 (1-y)^2\sqrt{2y}\,dy =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^1 (y^{1/2} - 2y^{3/2} + y^{5/2})\,dy = 4\sqrt{2}\left(\frac{y^{3/2}}{3/2} - 2\frac{y^{5/2}}{5/2} + \frac{y^{7/2}}{7/2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{64}{105}\sqrt{2}.$$

На початок розділу

б) $f(x, y, z) = x + z$;
V: $x = 0$; $y = 0$; $z = 1$;
$x + y + z = 2$.

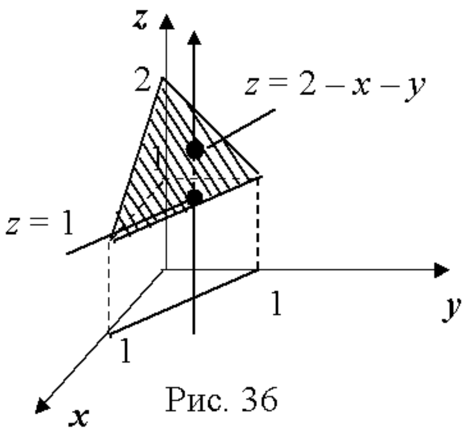


Рис. 36

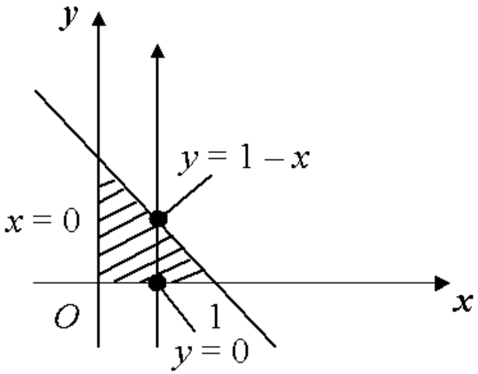


Рис. 37

$$I = \iiint\limits_V (x+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_1^{2-x-y} (x+z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(xz + z^2/2\right)\Big|_1^{2-x-y} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(2x - x^2 - xy + \frac{(2-x-y)^2}{2} - x - \frac{1}{2}\right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(xy - x^2 y - x\frac{y^2}{2} - \frac{(2-x-y)^3}{6} - \frac{1}{2}y\right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x(1-x)^2}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{(2-x)^3}{6}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) - \frac{x}{6} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{(2-x)^4}{24}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}.$$

2.1.3 Обчислення потрійного інтеграла в циліндричній та сферичній системах координат

Нехай функція $f\ (x,\ y,\ z)$ неперервна в обмеженій замкненій області V простору (x, y, z), а функції $x = x\ (u, v, w)$, $y = y\ (u, v, w)$ і $z = z\ (u, v, w)$ разом з частинними похідними неперервні в обмеженій замкненій області V^* простору (u, v, w) і взаємно однозначно відображають цю область на область V, причому якобіан відображення $J\ (u, v, w)$ відмінний від нуля:

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді має місце ***формула заміни змінних у потрійному інтегралі***

$$\iiint_V f(x,y,z)\ dxdydz = \iiint_{V^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|J(u,v,w)\right|\ dudvdw.$$

Змінні u, v і w служать криволінійними координатами точки, а вираз $dV^* = \left|J(u,v,w)\right| dudvdw$ задає ***елемент об'єму*** у криволінійному просторі. Модуль якобіана $\left|J(u,v,w)\right|$ визначає коефіцієнт зміни нескінченно малого об'єму при відповідному перетворенні координат.

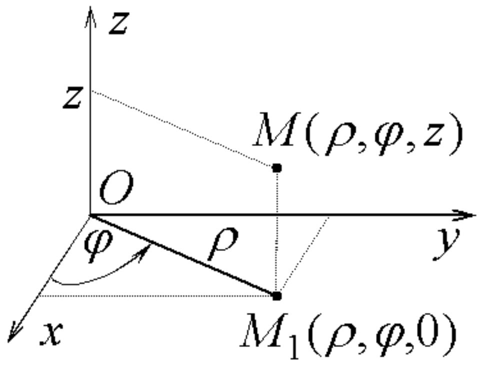


Рис. 38

У ***циліндричній*** системі координат положення точки визначається полярними координатами φ, ρ та аплікатою z (рис. 38), а формули, що зв'язують прямокутні і циліндричні координати мають вигляд: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $z = z$ $(0 \le \rho < +\infty; 0 \le \varphi < 2\pi)$, звідки $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Модуль якобіана дорівнює $|J(\rho,\varphi,z)| = \rho$, тоді

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho d\varphi dz.$$

Зауваження 1. Перехід до циліндричних координат доцільно застосовувати, коли: 1) область інтегрування V задана у циліндричній системі; 2) область інтегрування V проектується в круг або його частину; 3) підінтегральна функція $f(x, y, z)$ містить суму квадратів хоча б двох декартових координат.

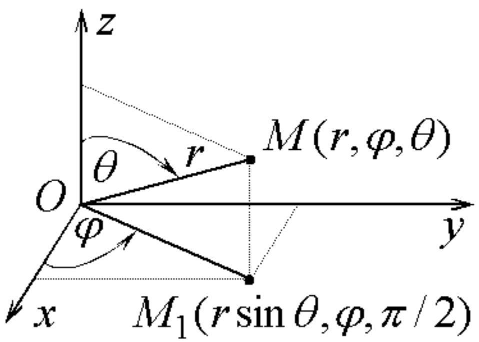


Рис. 39

У ***сферичній*** системі координат положення точки визначається координатами r, φ, θ (рис. 39), а формули, що зв'язують прямокутні і циліндричні координати, мають вигляд: $x = r\cos\varphi\sin\theta$; $y = r\sin\varphi\sin\theta$; $z = r\cos\theta$, звідки $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $(0 \le r < +\infty;\ 0 \le \varphi < 2\pi;\ 0 \le \theta \le \pi)$.

Модуль якобіана дорівнює $|J(\rho,\varphi,z)| = r^2\sin\theta$, тоді

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{V^*} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta.$$

Зауваження 2. До сферичних координат зручно переходити, коли: 1) область інтегрування V задана у сферичній системі; 2) областю інтегрування V є куля чи її частина; 3) підінтегральна функція $f(x, y, z)$ містить суму квадратів всіх трьох декартових координат $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Приклад 1

Обчислити $\iiint_V xyz\,dxdydz$, де V – частина простору, яка обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=4$ і параболоїдом $x^2+y^2=3z$, що розташована в першому октанті (рис. 40).

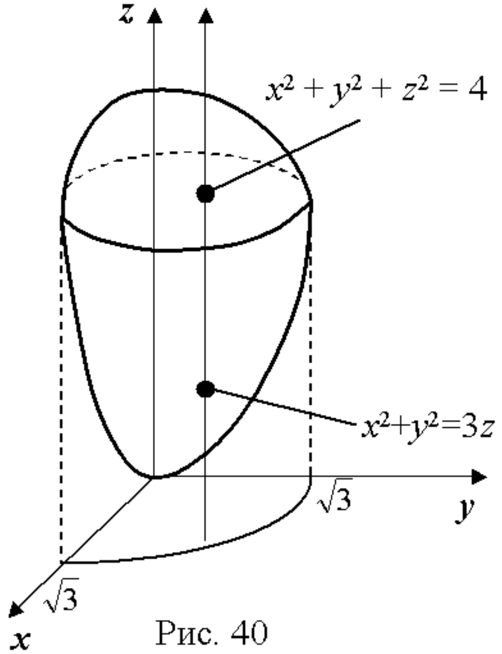


Рис. 40

Знайдемо лінію перетину параболоїда і сфери:

$$\begin{cases} x^2+y^2=3z; \\ x^2+y^2+z^2=4; \end{cases} \quad 3z+z^2=4;\ z^2+3z-4=0;\ z_1=-4;\ z_2=1; \quad \begin{cases} x^2+y^2=3; \\ z=1. \end{cases}$$

На рис. 40 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz. Його проекція зображена на рис. 41.

Перейдемо до циліндричних координат:

$$z=\frac{x^2+y^2}{3}\Rightarrow z=\frac{\rho^2}{3};\quad z=\sqrt{4-x^2-y^2}\Rightarrow z=\sqrt{4-\rho^2};$$

$$f(x,y,z)=xyz=\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi\cdot z=\rho^2 z\cos\varphi\sin\varphi.$$

Тоді $\iiint_V xyz\,dxdydz=\iiint_{V^*} z\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$

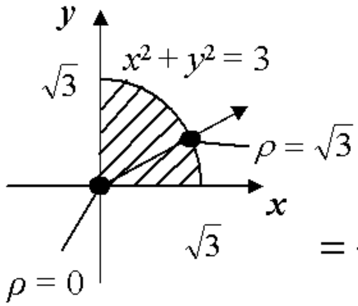


Рис. 41

$$=\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt3}\rho^3 d\rho\int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}} z dz=\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt3}\rho^3\left(z^2/2\right)\Big|_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}}d\rho=$$

$$=\frac12\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\sqrt3}\rho^3\left(4-\rho^2-\frac{\rho^4}{9}\right)d\rho=\frac14\int_0^{\pi/2}\sin2\varphi\,d\varphi\int_0^{\sqrt3}\left(4\rho^3-\rho^5-\frac{\rho^7}{9}\right)d\rho=$$

$$=\frac14\int_0^{\pi/2}\sin2\varphi\left(\rho^4-\frac{\rho^6}{6}-\frac{\rho^8}{72}\right)\Big|_0^{\sqrt3}d\varphi=\frac14\cdot\frac{27}{8}\left(-\frac12\cos2\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{27}{32}.$$

Обчислити $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, де V - куля $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

Приклад 2

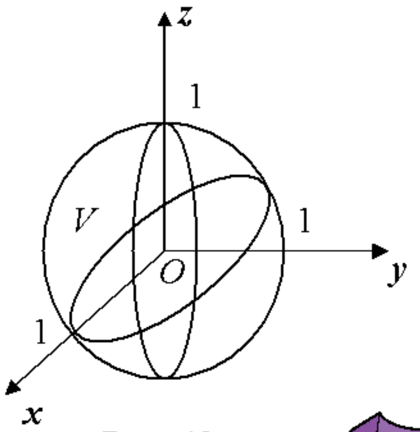
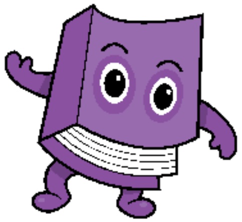


Рис. 42

Тіло V зображене на рис. 42. Його проекція на площину Oxy – на рис. 43. Перейдемо до сферичних координат:

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow r=1;$$

$$f(x,y,z)=\frac{1}{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{1}{1+(r^2)^{3/2}}=\frac{1}{1+r^3}.$$



Тоді $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\iiint\limits_V \frac{r^2\sin\theta\, dr d\varphi d\theta}{1+r^3}=$

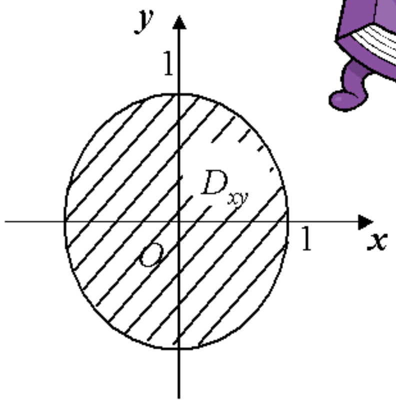


Рис. 43

$$=\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\frac{r^2}{1+r^3}dr=\left|\begin{matrix}1+r^3=u\\ du=3r^2dr\\ u_1=1;u_2=2\end{matrix}\right|=\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2\frac{1}{3}\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int\limits_0^{2\pi}\ln|u|\Big|_1^2 d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int\limits_0^{2\pi}\ln 2\, d\varphi=\frac{1}{3}\ln 2\int\limits_0^{\pi}\sin\theta(\varphi)\Big|_0^{2\pi}d\theta=$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\cdot 2\pi\, d\theta=\frac{2\pi}{3}\ln 2\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi}{3}\ln 2(1+1)=\frac{4\pi}{3}\ln 2.$$

На початок розділу

2.2 Застосування потрійного інтеграла

1) Згідно геометричного змісту потрійного інтеграла об'єм просторової області обчислюється за формулою $V = \iiint_V dV = \iiint_V dxdydz$.

2) Якщо матеріальне тіло V має густину $\mu = \mu(x, y, z)$, то за фізичним змістом потрійного інтеграла маса m тіла обчислюється за формулою

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z)\, dxdydz.$$

3) Середня густина $\mu_{\text{сер}}$ тіла V є відношенням маси m тіла до його об'єму V, тобто $\mu_{\text{сер}} = m / V$.

4) Статичні моменти M_{yz}, M_{xz} і M_{xy} відносно координатних площин і координати центра маси $C(x_c, y_c, z_c)$ тіла V знаходяться відповідно за співвідношеннями:

$$M_{yz} = \iiint_V x\mu(x, y, z)\, dxdydz; \quad M_{xz} = \iiint_V y\mu(x, y, z)\, dxdydz;$$

$$M_{xy} = \iiint_V z\mu(x, y, z)\, dxdydz; \; x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \; y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \; z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

5) Моменти інерції I_x, I_y, I_z і I_o тіла V відносно осей і початку координат визначаються відповідно за формулами:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\mu\, dxdydz; \; I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\mu\, dxdydz;$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\mu\, dxdydz; \quad I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\mu\, dxdydz.$$

Приклад

Знайти координати центра маси тіла V, що обмежене площинами $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x + 2z = 3$, якщо його густина $\mu(x, y, z) = 1$.

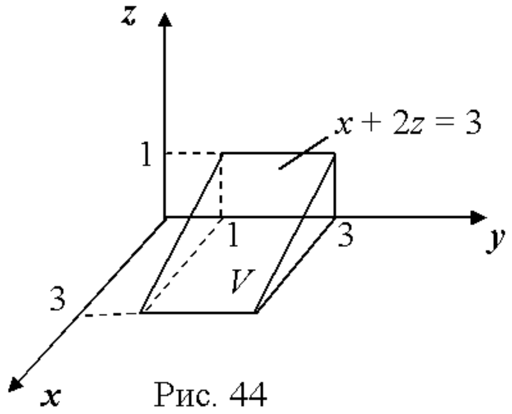


Рис. 44

$$M = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^3 dx \int_1^3 dy \int_0^{(3-x)/2} dz = \int_0^3 dx \int_1^3 z\Big|_0^{(3-x)/2} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 dx \int_1^3 (3-x)dy = \frac{1}{2}\int_0^3 (3-x)\cdot y\Big|_1^3 dx = \int_0^3 (3-x)dx =$$

$$= \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$

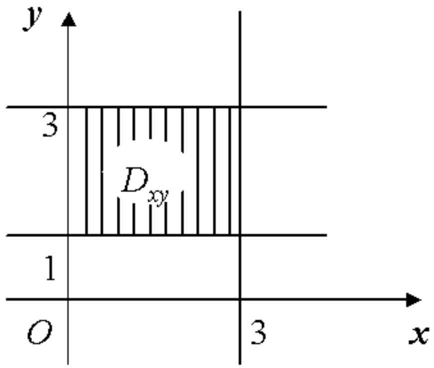


Рис. 45

$$M_{yz} = \iiint\limits_V xdxdydz = \int_0^3 xdx \int_1^3 dy \int_0^{(3-x)/2} dz = \int_0^3 xdx \int_1^3 z\Big|_0^{(3-x)/2} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 xdx \int_1^3 (3-x)dy = \frac{1}{2}\int_0^3 x(3-x)\cdot y\Big|_1^3 dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx =$$

$$= \left(3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}.$$

Тоді $x_c = 1$.

y_c і z_c знайдіть самостійно.

$y_c = 2$; $z_c = 1/2$.

На початок розділу

3 Поверхневі інтеграли та їх застосування

зміст

3.1 Поверхневий інтеграл за площею (I роду)

3.1.1 Означення та властивості поверхневого інтеграла за площею

Будемо розглядати тільки двосторонні поверхні, тобто такі поверхні, для яких вектор нормалі не змінює свого напряму при повному обході довільного замкненого контуру, що лежить на ній. Вибір певної сторони такої поверхні називається її ***орієнтацією***.

Нехай у просторі задано деяку область V і в цій області – поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Нехай на поверхні σ визначено деяку неперервну скалярну функцію $u = u(x, y, z)$. Інакше кажучи, розглянемо скалярне поле $u = u(x, y, z)$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожного майданчика $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i) \in \Delta\sigma_i$, обчислимо значення заданої функції в цій точці $u(\overline{M}_i) = u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)$ і помножимо це значення на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} u(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta\sigma_i .$$

Одержаний вираз називається ***інтегральною сумою*** для функції $u = u\ (x, y, z)$ по поверхні σ.

Скінченна границя інтегральної суми, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок $\overline{M}_i$, за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається ***поверхневим інтегралом за площею*** (***поверхневим інтегралом першого роду***) *від функції $u = u(x, y, z)$ по поверхні σ:*

$$\iint_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} u\left(\overline{M}_i\right)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} u\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i\right)\Delta\sigma_i,$$

де $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$; d_i – діаметр частинної поверхні $\Delta\sigma_i$ (найбільша відстань між двома зовнішніми точками межі області $\Delta\sigma_i$).

Якщо $u = u(x, y, z) \geq 0$ і функцію $u = u(x, y, z)$ розглядати як поверхневу густину маси, розподілену по поверхні σ, то поверхневий інтеграл виражає масу всієї поверхні:

$$m = \iint_{\sigma} u(x, y, z)\, d\sigma$$

(***фізичний зміст*** поверхневого інтеграла за площею).

Якщо $u = u(x, y, z)$ є густиною розподілу елементарних зарядів по поверхні, то інтеграл виражає сумарний заряд поверхні.

Коли $u = u(x, y, z) = 1$, то маємо площу поверхні σ $S = \iint_{\sigma} d\sigma$.

Зауваження. *Поверхневий інтеграл за площею не залежить від вибору сторони поверхні σ:*

$$\iint_{\sigma^-} u(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{\sigma^+} u(x, y, z)\, d\sigma.$$

Інші властивості поверхневого інтеграла першого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

На початок розділу

3.1.2 Обчислення поверхневого інтеграла за площею

Якщо поверхня σ правильна в напрямі осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} – проекції σ на площину Oxy, то

$$\iint\limits_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} u\,(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy.$$

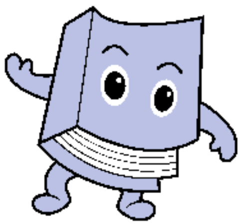
Зауваження 1. Поклавши $u = u(x, y, z) \equiv 1$, для площі поверхні σ маємо формулу

$$S = \iint\limits_{\sigma} d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy.$$

Зауваження 2. Може статися, що поверхня σ неправильна в напрямі осі Oz, але правильна в напрямі осі Oy чи Ox, тобто може бути подана явно у вигляді $y = y(x, z)$ чи $x = x(y, z)$. Тоді хід міркувань зберігається з тією лише різницею, що поверхню σ будемо проектувати на площину Oxz чи Oyz. При цьому змінні x, y і z міняються ролями. У загальному випадку поверхню σ треба розбити на правильні у вибраному напрямі частини.

Якщо поверхня – правильна в напрямі осі Oy чи Ox, то

$$\iint\limits_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} u\,(x,y(x,z),z)\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz;$$



$$\iint\limits_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_{yz}} u\,(x(y,z),y,z)\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz.$$

Приклад 1

Обчислити поверхневий інтеграл за площею $I = \iint_{\sigma} (x - 3y + 2z)d\sigma$,

де σ_p – частина площини p: $4x+3y+2z-4=0$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Задачу розв'язати трьома способами, проектуючи поверхню на одну з координатних площин відповідно: а) Oxy, б) Oxz, в) Oyz.

а) Поверхню σ будемо розглядати як правильну в напрямі осі Oz, а її проекцію D_{xy} – як правильну в напрямі осі Oy плоску область (рис. 46). Тоді

$$z = \frac{1}{2}(4 - 4x - 3y);\ z'_x = -2;\ z'_y = -\frac{3}{2};\ D_{xy}: 0 \le x \le 1; 0 \le y \le \frac{4-4x}{3}.$$

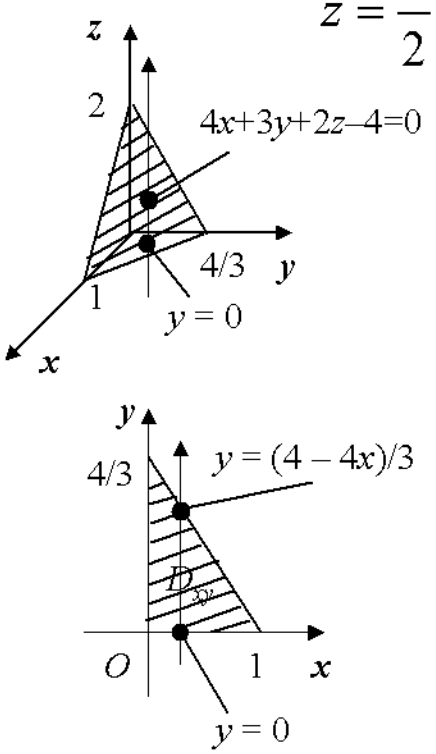


Рис. 46

$$\iint_{\sigma} (x - 3y + 2z)d\sigma = \iint_{D_{xy}} (x - 3y + 4 - 4x - 3y)\sqrt{1 + 4 + 9/4}\,dxdy =$$

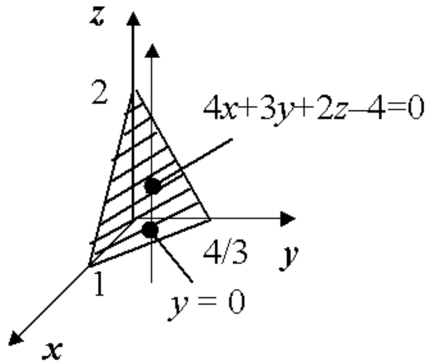
$$= \frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1 dx \int_0^{(4-4x)/3} (4 - 3x - 6y)\,dy = \frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1 \left(4y - 3xy - 3y^2\right)\Big|_0^{(4-4x)/3} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1 \left(\frac{16}{3}(1-x) - (4 - 4x^2) - \frac{16}{3}(1-x)^2\right)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2}\left(\frac{16}{3}\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2x^2 - 4\frac{x^3}{3}\right) + \frac{16}{3}\frac{(1-x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

(Способами б) і в) розв'язати самостійно).

На початок розділу

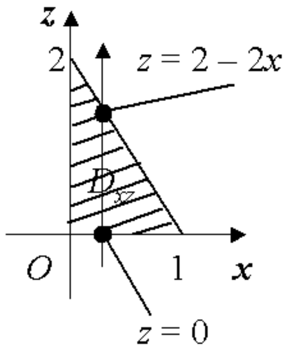


б) $$\iint\limits_{\sigma}(x-3y+2z)d\sigma=\iint\limits_{D_{xz}}(x-4+4x+2z+2z)\sqrt{1+16/9+4/9}\,dxdz=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{3}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2-2x}(5x+4z-4)dz=\frac{\sqrt{29}}{3}\int\limits_0^1\left(5xz+2z^2-4z\right)\Big|_0^{2-2x}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{3}\int\limits_0^1\left(10x-10x^2+2(4-8x+4x^2)-(8-8x)\right)dx=\frac{\sqrt{29}}{3}\int\limits_0^1(-2x^2+2x)\,dx=$$

$$=\frac{2\sqrt{29}}{3}\int\limits_0^1(-x^2+x)dx=\frac{2\sqrt{29}}{3}\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2\sqrt{29}}{3}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{29}}{9}.$$

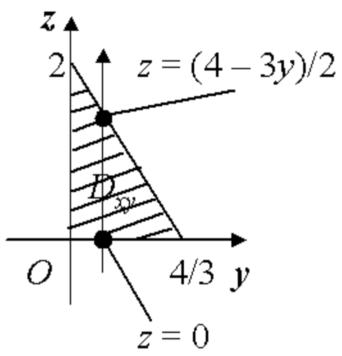


в) $$\iint\limits_{\sigma}(x-3y+2z)d\sigma=\iint\limits_{D_{yz}}\left(1-\frac{3}{4}y-\frac{1}{2}z-3y+2z\right)\sqrt{1+9/16+1/4}\,dydz=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{4}\int\limits_0^{4/3}dy\int\limits_0^{(4-3y)/2}\left(-\frac{15}{4}y+\frac{3}{2}z+1\right)dz=\frac{\sqrt{29}}{4}\int\limits_0^{4/3}\left(-\frac{15}{4}yz+\frac{3}{2}\frac{z^2}{2}+z\right)\Bigg|_0^{2-\frac{2}{3}y}dy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{4}\int\limits_0^{4/3}\left(-\frac{15}{4}\left(2y-\frac{3}{2}y^2\right)+\frac{3}{4}\left(4-6y+\frac{9}{4}y^2\right)+2-\frac{3}{2}y\right)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{4}\left(-\frac{15}{4}\left(y^2-\frac{1}{2}y^3\right)+\frac{3}{4}\left(4y-3y^2+\frac{3}{4}y^3\right)+2y-\frac{3}{4}y^2\right)\Bigg|_0^{4/3}=\frac{\sqrt{29}}{9}.$$



3.1.3 Застосування поверхневого інтеграла за площею

1) Площа поверхні $S = \iint\limits_{\sigma} d\sigma.$

2) Маса поверхні $m = \iint\limits_{\sigma} u(x, y, z)\, d\sigma.$

3) Статичні моменти поверхні:

$$M_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z\mu(x, y, z)d\sigma; \quad M_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x\mu(x, y, z)d\sigma; \quad M_{xz} = \iint\limits_{\sigma} y\mu(x, y, z)d\sigma.$$

4) Моменти інерції поверхні:

$$I_x = \iint\limits_{\sigma} (y^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)d\sigma; \quad I_y = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)d\sigma;$$

$$I_z = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2) \cdot \mu(x, y, z)d\sigma; \quad I_o = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)d\sigma.$$

5) Координати центра маси поверхні:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Приклад1

Знайти масу m частини поверхні σ: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, якщо поверхнева густина $\mu(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2}$.

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2};\ z'_x=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}};\ z'_y=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

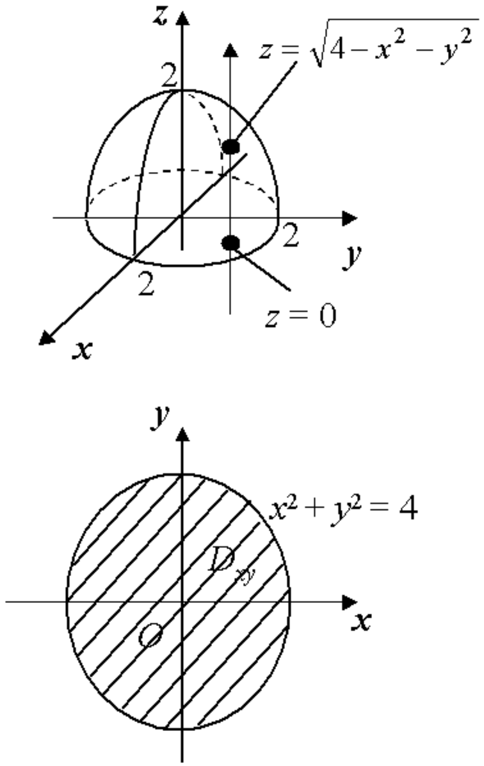


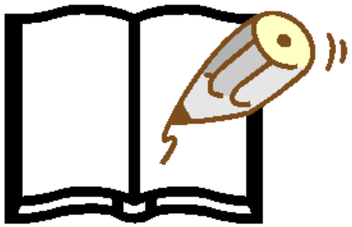
Рис. 47

$$m=\iint\limits_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}\,dxdy=$$

$$=2\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\,dxdy=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{2}\frac{\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\cdot\rho\,d\rho=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\rho=2\sin t;\ d\rho=2\cos t dt\\ t_1=0;\ t_2=\pi/2\\ 4-\rho^2=4-4\sin^2 t=4\cos^2 t\end{array}\right|=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{4\sin^2 t}{2\cos t}\cdot 2\cos t dt=$$

$$=8\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=4\int\limits_0^{2\pi}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}d\varphi=2\pi\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=4\pi^2.$$



На початок розділу

3.2 Поверхневий інтеграл за координатами (II роду)

3.2.1 Означення та властивості поверхневого інтеграла за координатами

Нехай у просторі задано деяку область V і в цій області – поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Нехай вибрана сторона $\sigma^{\pm}$ (фіксується один певний знак «+» чи «–») цієї поверхні характеризується одиничним вектором нормалі $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$.

Нехай на поверхні визначено деяку неперервну векторну функцію

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Інакше кажучи, розглянемо векторне поле $\vec{F}$ на поверхні σ.

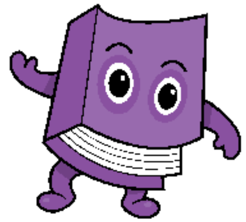
Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожної частини $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i) \in \Delta\sigma_i$, обчислимо в цій точці значення заданої функції $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і нормалі $\vec{n}(\overline{M}_i)$, потім знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і $\vec{n}(\overline{M}_i)$, помножимо цей добуток на площу елементарного майданчика $\Delta\sigma_i$ та складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\overline{M}_i)\cdot\vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i .$$

Одержаний вираз називається ***інтегральною сумою*** для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x,y,z)$ по вибраній стороні $\sigma^{\pm}$ поверхні σ.

Скінченна границя інтегральної суми, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок $\overline{M}_i$ *, за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається* ***поверхневим інтегралом за координатами*** (***поверхневим інтегралом другого роду***) *від вектор-функції* $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x,y,z)$ *по вибраній стороні* $\sigma^{\pm}$ *поверхні σ:*

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}\left(\overline{M}_i\right)\cdot\vec{n}\left(\overline{M}_i\right)\Delta\sigma_i,$$



де $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$; d_i – діаметр частинної поверхні $\Delta\sigma_i$.

Якщо поверхня замкнена, то інтеграл по ній записується так $\oiint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$.

<u>Зауваження 1</u>. *При зміні орієнтації поверхні σ поверхневий інтеграл за координатами тільки змінює знак:* $\iint\limits_{\sigma^{-}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = -\iint\limits_{\sigma^{+}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, оскільки при цьому одиничний вектор нормалі $\vec{n}$ змінює знак. Інші властивості поверхневого інтеграла другого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

Якщо виразити скалярний добуток в координатній формі, то одержимо співвідношення

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma,$$

що відображає ***зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду***.