Приклад 1

Обчислити $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy$, де область D обмежена лініями $y = x^2$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$.

Побудуємо область інтегрування (рис. 10).

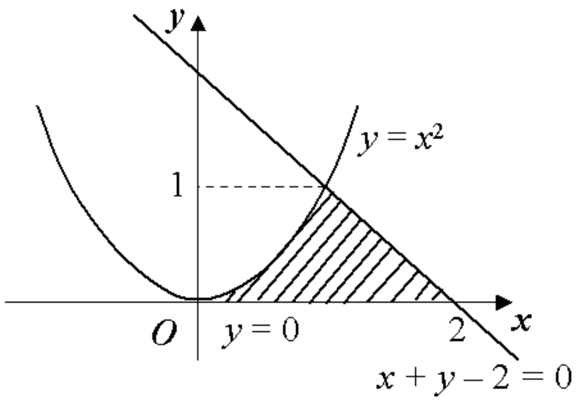


Рис. 10

І спосіб.

Область D правильна в напрямку осі Ox (рис.11) $D:\{0 \le y \le 1;\ \sqrt{y} \le x \le 2 - y\}$.

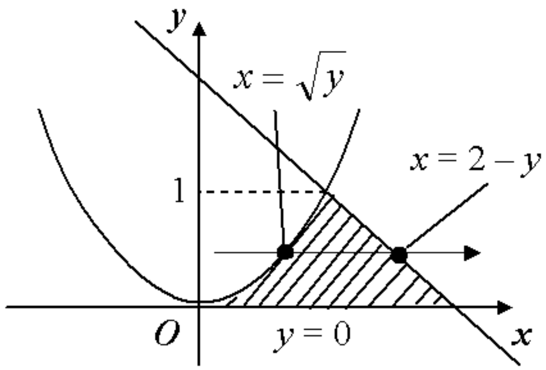


Рис. 11

Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 2xy \right)\Bigg|_{\sqrt{y}}^{2-y} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + 4y - 2y^2 - \frac{y}{2} - 2y^{3/2} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{(y-2)^3}{6} + \frac{7 \cdot y^2}{2 \cdot 2} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{y^{5/2}}{5} \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{7}{4} - \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{29}{20} = 1{,}45.$$

II спосіб.

Область D неправильна в напрямку осі Oy. Прямою $x = 1$ розіб'ємо її на дві правильні області D_1 і D_2 (рис. 12):

$$D_1 : \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le x^2\}; \quad D_2 : \{1 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2 - x\}.$$

Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

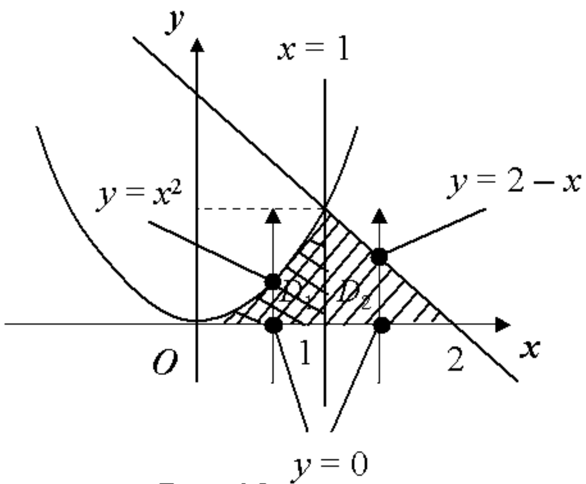


Рис. 12

$$\iint\limits_{D} (x+2y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} (x+2y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (x+2y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} (x+2y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-y} (x+2y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(xy + y^2\right)\Big|_0^{x^2} dx + \int\limits_1^2 \left(xy + y^2\right)\Big|_0^{2-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^3 + x^4\right) dx + \int\limits_1^2 \left(2x - x^2 + (2-x)^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{(x-2)^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{20} + 3 - 2 = 1{,}45.$$

Приклад 2

У заданих повторних інтегралах змінити порядок інтегрування:

а) $$I=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}f(x,y)\,dy,$$

б) $$I=\int_{-2}^{-1}dy\int_{-\sqrt{2+y}}^{0}f(x,y)\,dx+\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{-y}}^{0}f(x,y)\,dx$$

(розв’язати самостійно).

а) Використовуючи зазначені межі інтегрування запишемо рівняння ліній, що обмежують відповідну область, та зобразимо їх в одній системі координат (рис. 13):

$$D\ :\ x=-1;\ x=1;\ \ y=-\sqrt{1-x^2};\ y=1-x^2.$$

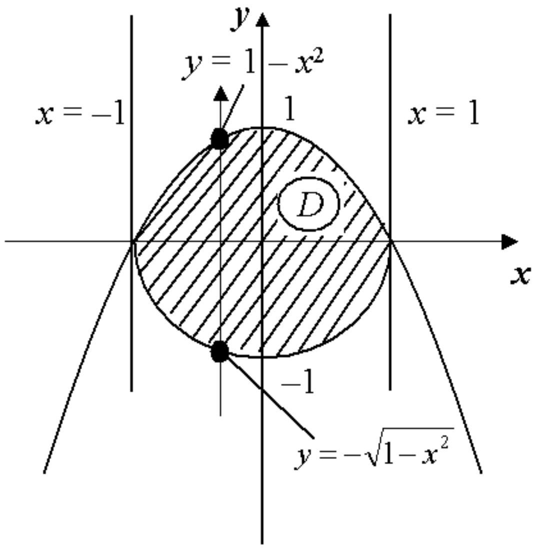


Рис. 13

Область D правильна в напрямі осі Oy (рис.13). Для зміни порядку інтегрування область D треба подати як правильну в напрямі осі Ox, при необхідності розбиваючи на правильні у вибраному напрямі частини. У даному випадку область D – неправильна в напрямі осі Ox, тому прямою $y = 0$ розіб'ємо її на дві правильні області D_1 і D_2 (рис. 14):

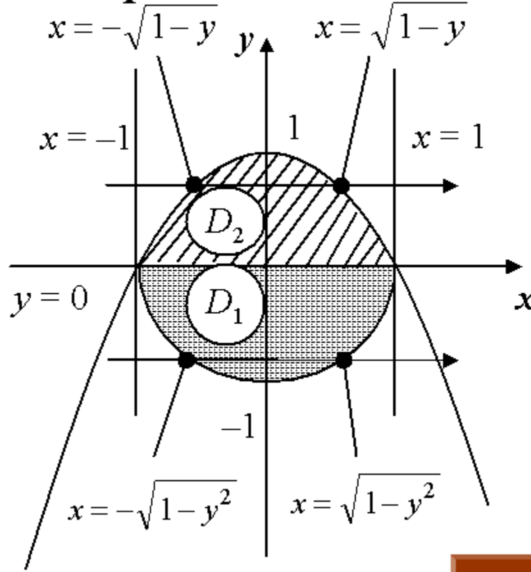


Рис. 14

$$D_1:\ \ y=-1;\ y=0;\ x=-\sqrt{1-y^2};\ \ x=\sqrt{1-y^2},$$

$$D_2:\ \ y=0;\ y=1;\ x=-\sqrt{1-y};\ \ x=\sqrt{1-y};\ D=D_1\bigcup D_2.$$

Тоді $\displaystyle I=\int_{-1}^{0}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx+\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}f(x,y)\,dx.$

На початок розділу

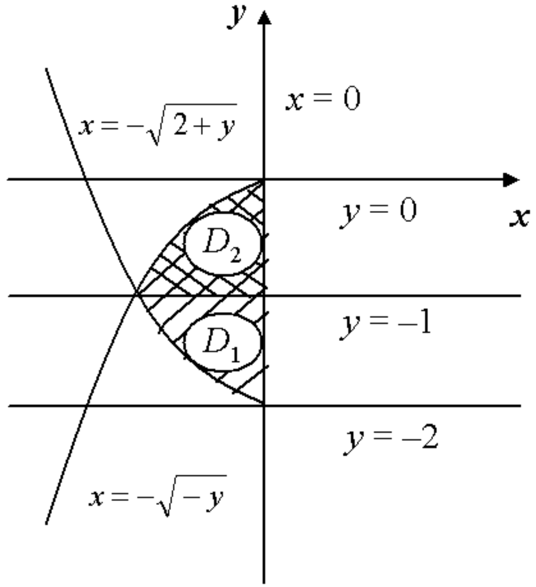


Рис. 15

б) $D_1: \; y = -2; \; y = -1; \; x = -\sqrt{2+y}; \;\; x = 0,$

$D_2: \; y = -1; \; y = 0; \; x = -\sqrt{-y}; \;\; x = 0.$

$$D = D_1 \bigcup D_2.$$

Область D зображена на рис. 15.

Вона правильна в напрямі осі Oy (рис. 16):

$D: \; x = -1; \; x = 0; \;\; y = x^2 - 2; \;\; y = -x^2.$

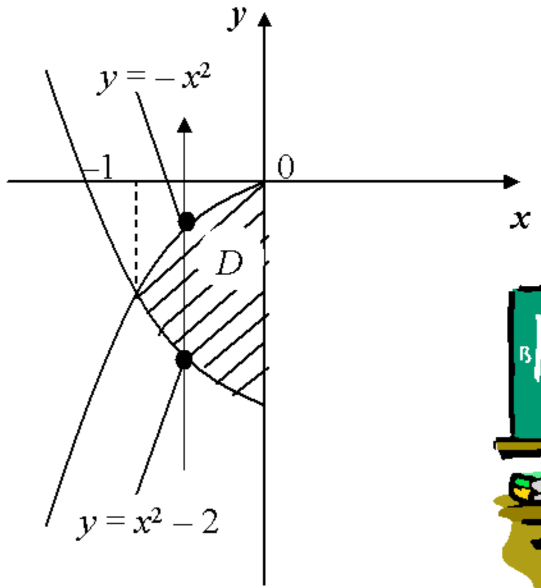
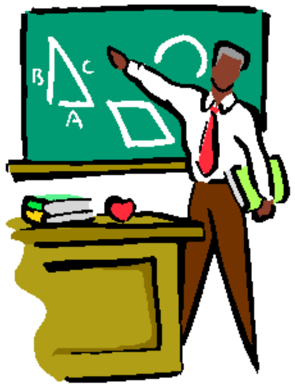


Рис. 16



Тому $\quad I = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2-2}^{-x^2} f(x,y)\,dy.$

1.1.3 Подвійний інтеграл у полярній системі координат

Обчислення подвійних інтегралів іноді вдається спростити, зробивши заміну змінних. Нехай формули $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками $M(x,y)$ області D координатної площини Oxy і точками $M^*(u,v)$ деякої області D^* іншої координатної площини Ouv. Тоді, в припущенні неперервності частинних похідних функцій $x(u, v)$ і $y(u, v)$ по u і по v, має місце формула

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|du\,dv,$$

яка називається ***формулою заміни змінних у подвійному інтегралі***. Якобіан перетворення має вигляд

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix}.$$

На практиці часто застосовують перехід до полярних координат. Прямокутні x, y і полярні ρ, φ координати зв'язані співвідношеннями:

$$x = \rho\cos\varphi;\;\; y = \rho\sin\varphi \;\; (0 \le \rho < +\infty;\, 0 \le \varphi < 2\pi), \;\; \text{звідки} \;\; x^2 + y^2 = \rho^2.$$

У цьому випадку якобіан $J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$

Формула переходу до полярних координат у подвійному інтегралі набуває вигляду $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$

Перехід до полярних координат доцільно застосовувати тоді, коли:

1) область інтегрування D задана у полярній системі;

2) область інтегрування D – круг або його частина (сектор, сегмент, кільце і т.п.), оскільки при цьому рівняння межі області містять суму $x^2+y^2=\rho^2$;

3) сама підінтегральна функція містить цей вираз $x^2+y^2=\rho^2$.

Визначення меж при обчисленні подвійного інтеграла в полярних координатах можна робити, використовуючи зображення області D на площині Oxy. Якщо область D обмежена двома кривими, полярні рівняння яких $\rho=\rho_1(\varphi)$ і $\rho=\rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi))$ і променями $\varphi=\varphi_1$ і $\varphi=\varphi_2$ (така область D називається ***правильною у напрямі координатних променів*** $\varphi = C$ (рис. 17)), то

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho.$$

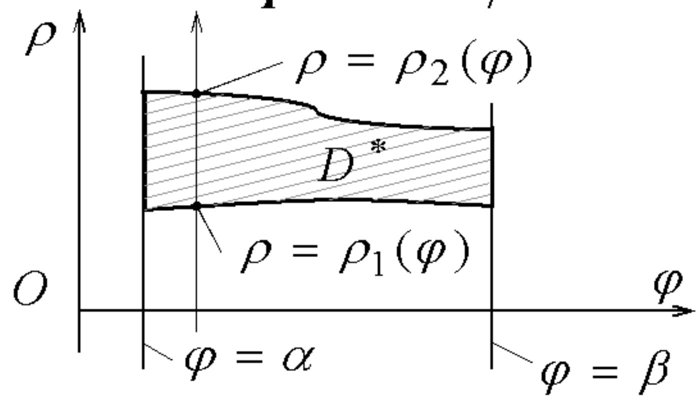


Рис. 17

Зокрема, якщо область D містить усередині початок координат, тоді

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho,$$

де $\rho=\rho(\varphi)$ – полярне рівняння кривої, що обмежує область D.

Приклад і

Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл:

$$\iint_D x\,dx\,dy,\ D:\ x^2+(y-2)^2=4;\ x^2+(y-4)^2=16;\ y=\frac{x}{\sqrt{3}};\ x=0.$$

Перейдемо в підінтегральному виразі та в рівняннях указаних ліній до полярних координат:

$$f(x,y)=\rho\cos\varphi \qquad dS=dxdy=\rho d\rho d\varphi$$

1) $\rho^2\cos^2\varphi+(\rho\sin\varphi-2)^2=4;$

$$\rho=4\sin\varphi.$$

2) $\rho^2\cos^2\varphi+(\rho\sin\varphi-4)^2=16;$

$$\rho=8\sin\varphi.$$

3) $\rho\sin\varphi=\dfrac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{3}};\quad tg\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}};\quad \varphi=\dfrac{\pi}{6}.$

4) $\rho\cos\varphi=0;\quad \varphi=\dfrac{\pi}{2}.$

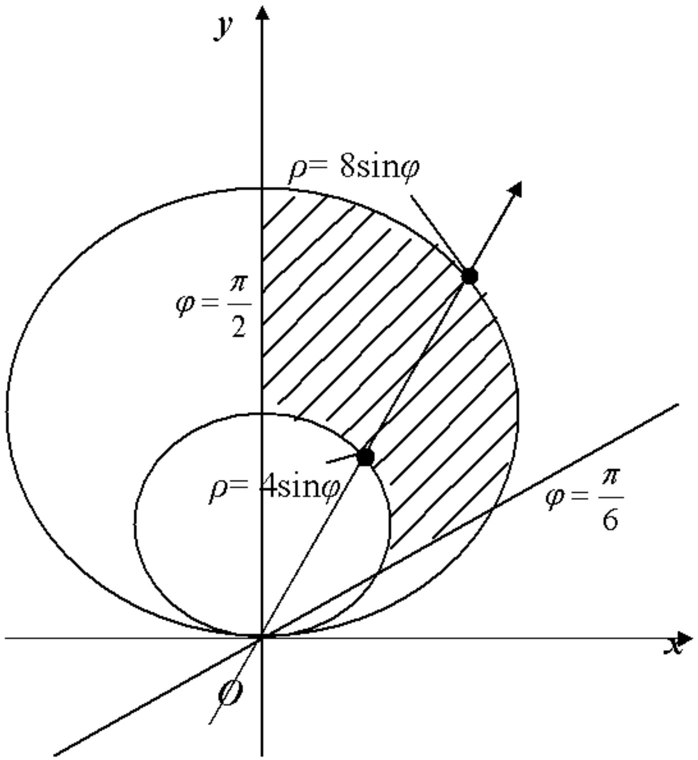


Рис. 18

Область D як правильна в напрямі координатних променів зображена на рис. 18.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} \rho\cos\varphi\cdot\rho\, d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi\cdot\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\varphi\cdot(512\sin^3\varphi - 64\sin^3\varphi)d\varphi = \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 448\sin^3\varphi\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{448}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \begin{vmatrix} \sin\varphi = u & u_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ du = \cos\varphi\, d\varphi & u_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{448}{3}\int_{1/2}^{1} u^3 du = \frac{448}{3}\cdot\left.\frac{u^4}{4}\right|_{1/2}^{1} = \frac{112}{3}\cdot\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{112}{3}\cdot\frac{15}{16} = 35.$$

Приклад 2

Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл (виконати самостійно):

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy, \quad D: x^2 + y^2 - 2x \le 0,\ y \le 0.$$

На початок розділу

Область інтегрування зображена на рис. 19.

$$\int_{-\pi/2}^{0} d\varphi \int_{0}^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \int_{-\pi/2}^{0} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{0}^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{0} 8\cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{0} \cos^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{0} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \left| \begin{matrix} \sin\varphi = t & t_1 = -1 \\ dt = \cos\varphi\; d\varphi & t_2 = 0 \end{matrix} \right| = \frac{8}{3}\int_{-1}^{0}(1-t^2)dt = \frac{8}{3}\left.\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\right|_{-1}^{0} =$$

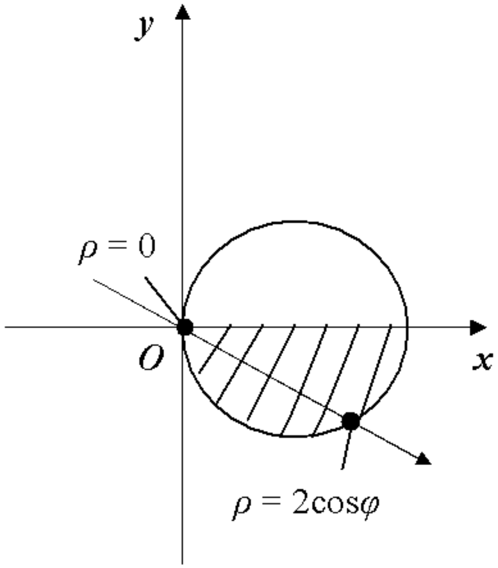


Рис. 19

$$= \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{9}.$$

1.2 Застосування подвійного інтеграла в геометрії та фізиці

1.2.1 Геометричні застосування

1) Площа плоскої фігури

Якщо в подвійному інтегралі $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ підінтегральну функцію покласти тотожно рівною одиниці $f(x,y)\equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме площі області інтегрування D:

$$S=\iint_D dx\,dy,$$

а в полярній системі координат – $S=\iint_{D^*}\rho\,d\rho\,d\varphi.$

2) Об'єм тіла

Нехай правильне у напрямі осі Oz просторове тіло V, яке обмежене знизу і зверху поверхнями входу $z = z_1(x, y)$ і виходу $z = z_2(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D_{xy}. Тоді його об'єм обчислюється за формулою

$$V=\iint_{D_{xy}}\left(z_2(x,y)-z_1(x,y)\right)dxdy.$$

Зауваження 1. Якщо тіло V – правильне в напрямі осі Ox чи Oy, то його об'єм обчислюється за аналогічною формулою відповідно

$$V=\iint\limits_{D_{yz}}\left(x_2(y,z)-x_1(y,z)\right)dydz \quad \text{і} \quad V=\iint\limits_{D_{xz}}\left(y_2(x,z)-y_1(x,z)\right)dxdz.$$

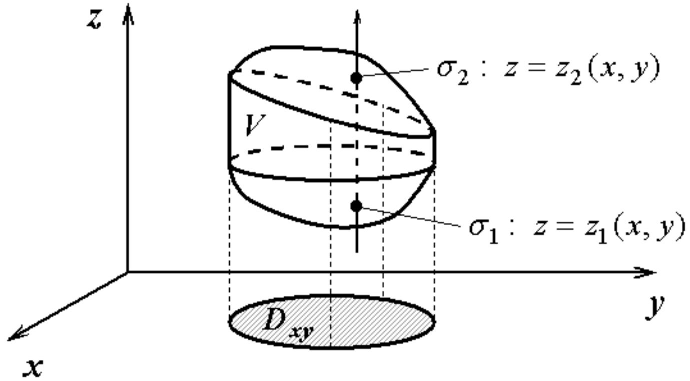


Рис.20

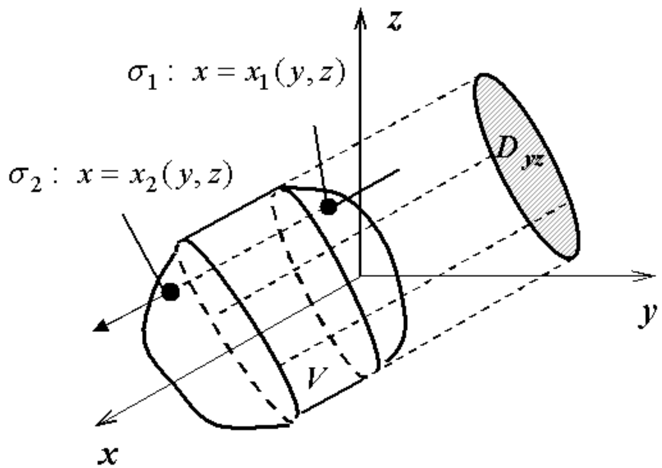


Рис. 21

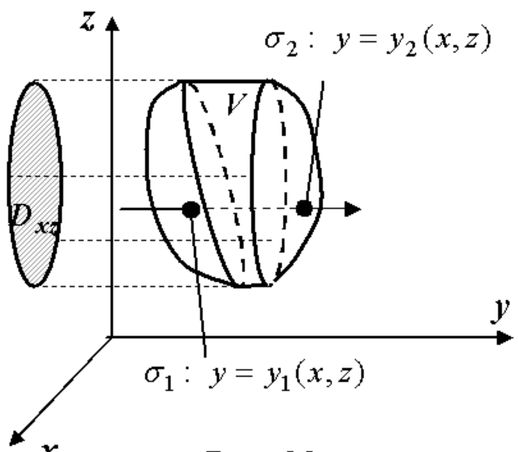


Рис. 22

Область V називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямі осі*** Oz, якщо виконуються наступні умови:

1) межа її проекції D_{xy} складається зі скінченного числа неперервних кривих;

2) довільна пробна пряма, що проходить хоча б через одну внутрішню точку області V паралельно осі Oz і в тому ж напрямі, перетинає її межу тільки у двох точках – по одній на ближній ***поверхні входу*** σ_1 і дальній ***поверхні виходу*** σ_2;

3) рівняння кожної з поверхонь задається в явному вигляді, розв'язаному відносно z, причому тільки однією формулою відповідно $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, де функції $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ неперервні в D_{xy} $\left(z_1(x, y) \le z_2(x, y)\right)$ (рис. 20).

Аналогічно вводиться означення просторової області V, що ***правильна*** (***стандартна***) ***в напрямі осі*** Ox (рис. 21) ***чи*** Oy (рис. 22).

Якщо просторова область V правильна в напрямі кожної з координатних осей Ox, Oy і Oz, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Зауваження 1. Якщо область V – неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Для цього, звичайно, застосовують координатні чи їм паралельні площини.

3) <u>Площа поверхні</u>

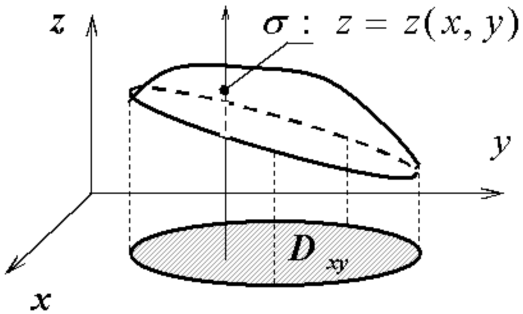


Рис. 23

Нехай σ – деяка поверхня, плоска область D_{xy} – її проекція паралельно осі *Oz* на координатну площину *Oxy* (рис. 23).

Поверхня σ називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямі осі*** *Oz*, якщо виконуються наступні умови: 1) довільна пробна пряма, що проходить через область D_{xy} паралельно осі *Oz* і в тому ж напрямі, перетинає поверхню σ лише в одній точці, тобто поверхня взаємно однозначно проектується в область D_{xy}; 2) рівняння поверхні σ задається в явному вигляді, розв'язаному відносно *z*, причому тільки однією формулою $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна в D_{xy}.

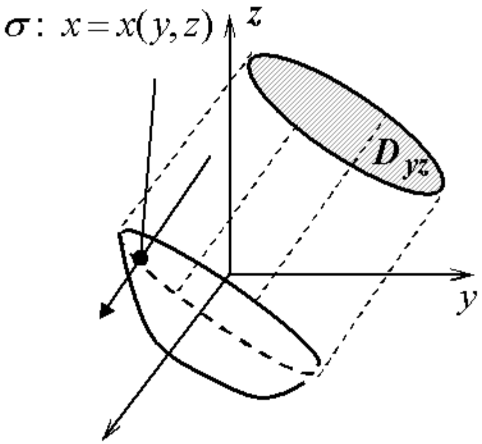


Рис. 24

Аналогічно розглядаються поверхні, що правильні в напрямі осей *Ox* (рис. 24) і *Oy* (рис. 25).

Якщо поверхня σ правильна у всіх трьох напрямах *Ox*, *Oy* і *Oz*, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Якщо поверхня σ – неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Як правило, для цього застосовують координатні чи їм паралельні площини.

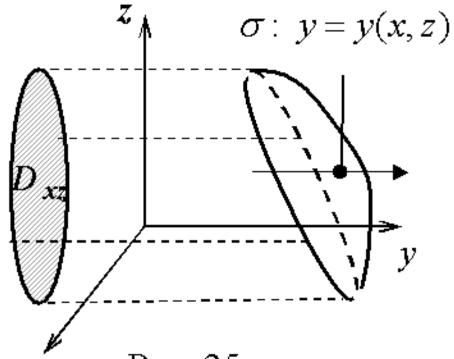


Рис. 25

Якщо поверхня σ правильна у напрямі осі *Ox*, *Oy* чи *Oz*, то її площа обчислюється відповідно за формулою

$$S_\sigma = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + x'^2_y + x'^2_z}\, dy\, dz; \qquad S_\sigma = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + y'^2_x + y'^2_z}\, dx\, dz;$$

$$S_\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dx\, dy.$$

Приклад 1

Обчислити площу плоскої області D, що обмежена лініями: $y=3\sqrt{x},\ y=\dfrac{3}{x},\ x=4.$

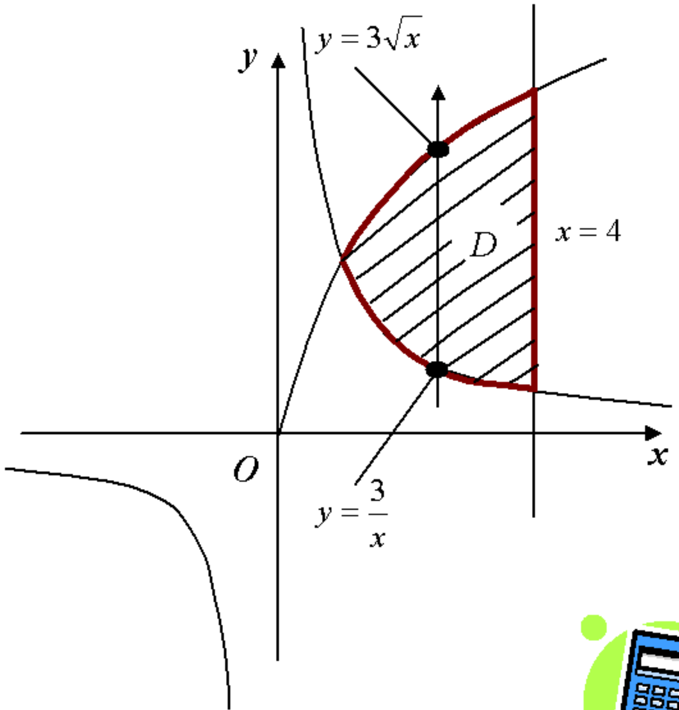


Рис. 26

Область D – правильна в напрямі осі Oy (рис. 26). Тоді

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_1^4 dx\int\limits_{3/x}^{3\sqrt{x}}dy=\int\limits_1^4 y\Big|_{3/x}^{3\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int\limits_1^4\left(3\sqrt{x}-3/x\right)dx=\left(3\frac{x^{3/2}}{3/2}-3\ln|x|\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=\left(2\sqrt{x^3}-3\ln|x|\right)\Bigg|_1^4=16-3\ln 4-2=14-3\ln 4$$

(кв. од.)

Приклад 2

Обчислити площу плоскої області D, що обмежена лініями (розв’язати самостійно):

$$x=8-y^2,\ x=-2y.$$

Область D – правильна в напрямку осі Ox (рис. 27). Тоді

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{4} dy \int\limits_{-2y}^{8-y^2} dx = \int\limits_{-2}^{4} x\Big|_{-2y}^{8-y^2} dy = \int\limits_{-2}^{4} (8 - y^2 + 2y)dy =$$

$$= \left(8y - \frac{y^3}{3} + 2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{4} = 32 - \frac{64}{3} + 16 + 16 - \frac{8}{3} - 4 = 60 - 24 = 36 \text{ (кв. од.)}$$

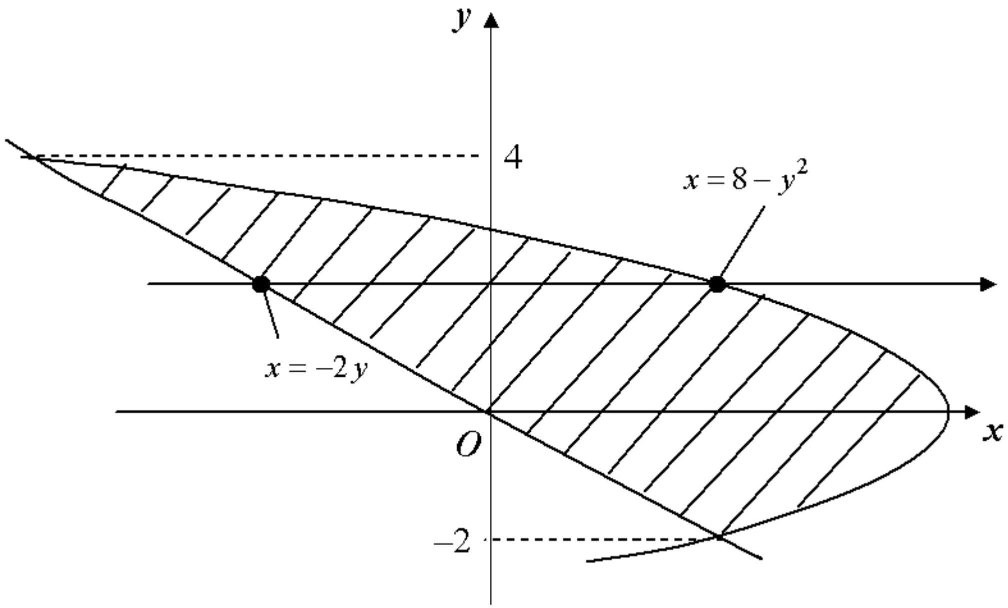


Рис. 27

Приклад 3

Обчислити площу області, що обмежена лінією

$$\rho = 2 - \sin\varphi .$$

Побудуємо область у полярних координатах (рис. 28) за точками з таблиці 1.

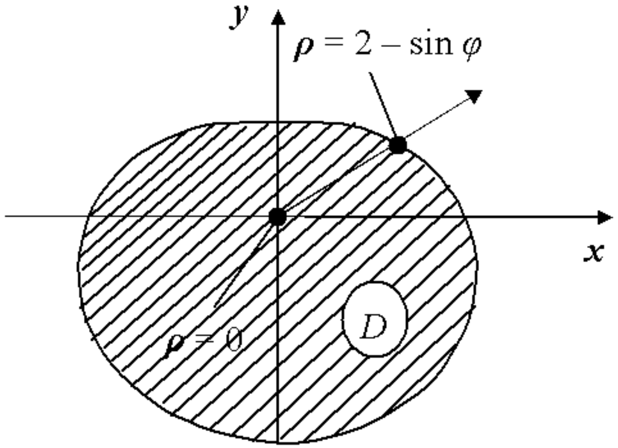


Рис. 28

Таблиця 1

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
ρ	2	1,3	1	1,3	2
φ		$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
ρ		2,7	3	2,7	2

$$S = \iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2-\sin\varphi} \rho\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} \right)\Bigg|_0^{2-\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (2 - \sin\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(4 - 4\sin\varphi + \sin^2\varphi\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(4 - 4\sin\varphi + \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} - 4\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\varphi + 4\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\cdot 2\pi + 4\cos 2\pi - \frac{1}{4}\sin 4\pi \right) - \frac{1}{2}\left(0 + 4\cos 0 - \frac{1}{4}\sin 0 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}(9\pi + 4) - \frac{1}{2}\cdot 4 = \frac{9\pi}{2} \quad \text{(кв. од.)}$$

Приклад 4

Обчислити об'єм тіла V, що обмежене поверхнями

$$z = 4 - x^2, x + y = 2, x = 0, y = 0, z = 0.$$

Тіло обмежене параболічним циліндром $z = 4 - x^2$ і площинами $x + y = 2, x = 0, y = 0, z = 0$ (рис. 29).

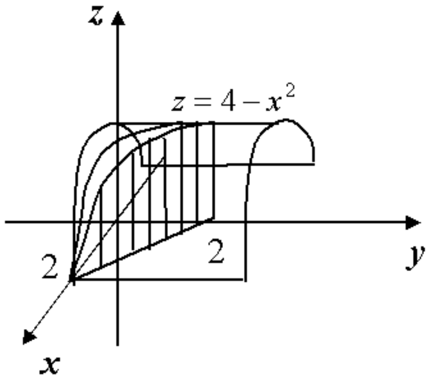


Рис. 29

Його проекцією на площину Oxy служить область D_{xy}, що зображена на рис. 30. Вона є правильною. Тоді

$$V = \iint\limits_D z\,dxdy = \iint\limits_D (4 - x^2)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (4 - x^2)dy =$$

$$= \int\limits_0^2 (4 - x^2)y\Big|_0^{2-x} dx = \int\limits_0^2 (4 - x^2)(2 - x)dx = \int\limits_0^2 (8 - 2x^2 - 4x + x^3)dx =$$

$$= \left(8x - 2\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 16 - 2\cdot\frac{8}{3} - 4\cdot 2 + 4 = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$$

(куб. од.)

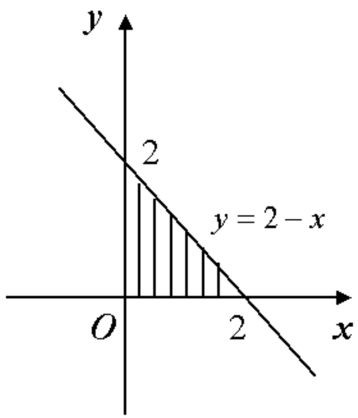


Рис. 30

Приклад 5

Обчислити площу поверхні циліндра $x^2 = 2z$, яка відсічена площинами $x - 2y = 0,\ y = 2x, x = 2\sqrt{2}$ (рис. 31).

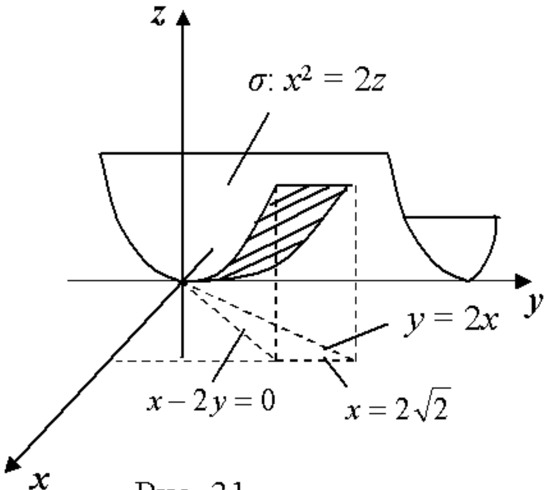


Рис. 31

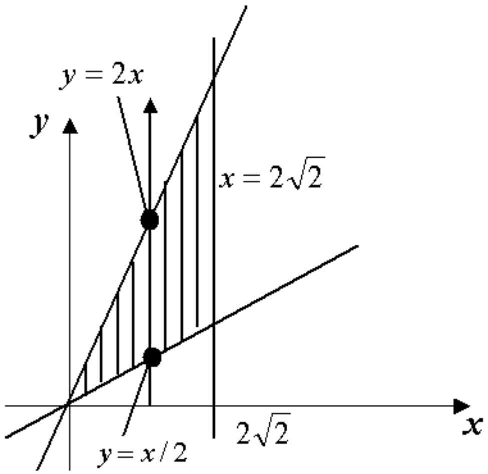


Рис. 32

Область інтегрування зображена на рис. 32.

Із рівняння циліндра маємо $z'_x = x,\ z'_y = 0.$

Тоді

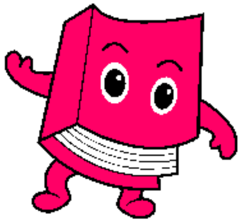
$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+x^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx \int\limits_{x/2}^{2x} dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2} \cdot y\Big|_{x/2}^{2x} dx = \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2} \cdot \left(2x - \frac{x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int\limits_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = u \\ du = 2xdx \\ xdx = \dfrac{du}{2} \\ u_1 = 1;\ u_2 = 9 \end{array} \right| = \frac{3}{2}\int\limits_1^9 \sqrt{u}\,\frac{du}{2} =$$

$$= \frac{3}{4}\int\limits_1^9 \sqrt{u}\,du = \frac{\sqrt{u^3}}{2}\Bigg|_1^9 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{9^3} - 1\right) = 13 \text{ (кв. од.)}$$

На початок розділу



1.2.2 Фізичні застосування

1) Матеріальна пластина, що займає область D у площині Oxy і характеризується поверхневою густиною $\mu(x, y)$, має масу:

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\, dxdy\,.$$

2) Середня густина пластини: $\mu_{\text{сер}} = \dfrac{m}{S} = \iint_D \mu(x, y)\, dxdy \Big/ \iint_D dxdy$.

3) Статичні моменти пластини відносно осей Ox, Oy відповідно

$$M_x = \iint_D y\, \mu(x, y)\, dxdy; \quad M_y = \iint_D x\, \mu(x, y)\, dxdy.$$

4) Координати центра маси пластини відповідно

$$x_c = M_y / m; \quad y_c = M_x / m.$$

5) Моменти інерції пластини відносно осей Ox, Oy та відносно початку координат:

$$I_x = \iint_D y^2\, \mu(x, y)\, dxdy; \;\; I_y = \iint_D x^2\, \mu(x, y)\, dxdy;$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, \mu(x, y)\, dxdy = I_x + I_y.$$

Зауваження. Якщо пластина однорідна, то $\mu = \mu_0 = \text{const}$.

Приклад 1

Знайти координати центра маси пластини D, що обмежена частиною еліпса в першій чверті $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ та координатними осями, якщо поверхнева густина $\mu(x,y)=3xy$.

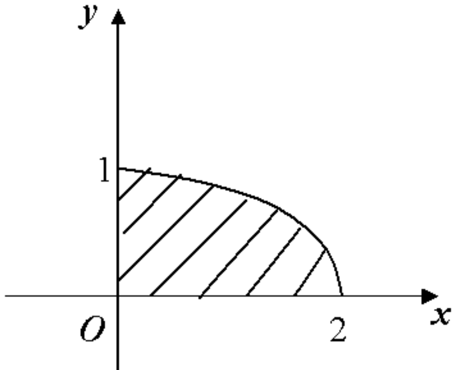


Рис. 33

На рис. 33 зображена задана пластина. Обчислимо її масу:

$$m=\iint_D 3xydxdy=3\int_0^2 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2/4}} ydy=3\int_0^2 x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2/4}}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^2 x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{3}{8}\int_0^2 x(4-x^2)\,dx=\frac{3}{8}\left(4\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{2}.$$

Знайдемо статичні моменти пластини:

$$M_x=\iint_D y\cdot 3xydxdy=3\int_0^2 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2/4}} y^2dy=3\int_0^2 x\left(y^3/3\right)\Big|_0^{\sqrt{1-x^2/4}}dx=\int_0^2 x\sqrt{\left(1-x^2/4\right)^3}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c} 1-x^2/4=u \\ du=-\frac{x}{2}dx;\ xdx=-2du \\ u_1=1; u_2=0 \end{array}\right|=-2\int_1^0\sqrt{u^3}\,du=2\int_0^1 u^{3/2}\,du=2\frac{2u^{5/2}}{5}\Bigg|_0^1=\frac{4}{5}.$$

M_y обчислити самостійно.

Тоді $x_c=\frac{16}{15};\ y_c=\frac{8}{15}.$

На початок розділу

$$M_y = \iint\limits_D x \cdot 3xydxdy = 3\int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2/4}} ydy = 3\int\limits_0^2 x^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{1-x^2/4}} dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_0^2 x^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{3}{2}\int\limits_0^2\left(x^2-\frac{x^4}{4}\right)dx = \frac{3}{2}\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4}\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{4}\frac{32}{5}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{40-24}{15}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{15} = \frac{8}{5}.$$

2 Потрійний інтеграл та його застосування

2.1 Потрійний інтеграл

2.1.1 Означення та властивості

Нехай у замкненій області V простору $Oxyz$ задана неперервна функція $u = f(x, y, z)$.

Розіб'ємо область V сіткою довільних кусково-гладких поверхонь на елементарні частини V_i ($i = \overline{1, n}$), що не мають спільних внутрішніх точок. У кожній комірці V_i візьмемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ і складемо інтегральну суму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$ (ΔV_i – об'єм елементарної області V_i).

Границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття тривимірної області V, якщо вона існує і не залежить від способу поділу на елементарні комірки V_i та від вибору точок $M_i(x_i, y_i, z_i)$ у них, називається ***потрійним інтегралом від функції*** $f(x, y, z)$ ***по області*** V:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i,$$

де x, y і z – ***змінні інтегрування***; $f(x, y, z)$ – ***підінтегральна функція***; dV – ***елемент*** (***диференціал***) ***об'єму***; $f(x, y, z)\,dV$ – ***підінтегральний вираз***; V – ***область інтегрування***, d_i – ***діаметр*** V_i (довжина найбільшої хорди, яка з'єднує дві точки межі області V_i).