МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

А.І. Колосов, А.В. Якунін, С.М. Ламтюгова

КРАТНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ В ПРЕЗЕНТАЦІЯХ

Харків – ХНАМГ – 2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ , МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

До друку дозволяю
Проректор
_______________М.П. Пан

А.І. Колосов, А.В. Якунін, С.М. Ламтюгова

КРАТНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ В ПРЕЗЕНТАЦІЯХ

Електронний альбом дидактичних матеріалів
для студентів 2 курсу денної та заочної форм навчання
за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології”,
спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”

Харків – ХНАМГ – 2011

УДК 514.123

Колосов А.І., Якунін А.В., Ламтюгова С.М.

Кратні та поверхневі інтеграли в презентаціях: Електронний альбом дидактичних матеріалів до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів 2 курсу денної та заочної форм навчання за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології”, спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”. – Х: ХНАМГ, 2011. – 96 с.

Рецензент:

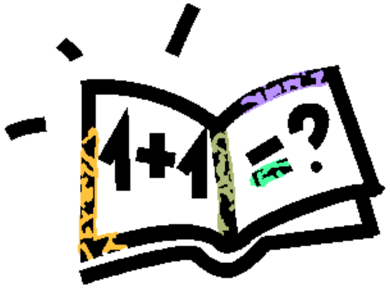
Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № від р.

Зміст

Передмова

У цьому альбомі стисло викладено навчальні елементи розділу “Кратні та поверхневі інтеграли”, що відповідають діючим програмам курсу вищої математики для студентів електротехнічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв’язків без надмірної строгості викладу з об’єднуючою прикладною спрямованістю. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах, частина з яких розрахована на самостійне опрацювання.

Зібрані в альбомі дидактичні матеріали призначені для студентів електротехнічних спеціальностей.



Інструкція по застосуванню

Альбом дидактичних матеріалів «Кратні та поверхневі інтеграли в презентаціях» створено в програмі Power Point у вигляді слайд-шоу.

Презентація подана в режимі «Тільки для читання», тому редагування слайдів не можливе.

Гіперпосилання в змісті та спеціальні кнопки на початку кожного розділу задають перехід на потрібну сторінку (розділ чи пункт). У кінці кожного пункту є кнопка «на початок розділу», де в свою чергу є кнопка «зміст». Далі зі змісту можна перейти в будь-який розділ чи пункт, який цікавить. У презентації є приховані слайди, що уточнюють окремі поняття, на які можна перейти по гіперпосиланням, що розміщені по тексту.

Кнопка містить посилання на інформацію, що розрахована на самостійне опрацювання.

Можна вийти з презентації в будь-який момент. Для цього потрібно натиснути на клавіатурі клавішу Esc або клікнути правою кнопкою миші, після чого з'явиться керуюче меню, де останнім пунктом буде режим "Закінчити показ". Із цього ж меню можна перейти на будь-який вибраний слайд (не обов'язково в тому порядку, що пропонує презентація).

У друкованому варіанті – неповна демонстраційна збірка пропонованих матеріалів. Повна версія посібника з анімацією, рисунками та опрацьованими самостійними завданнями – тільки в електронному вигляді.

Побажання та пропозиції для покращення приймаються за електронною адресою: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

зміст

1 Подвійний інтеграл та його застосування

1.1 Подвійний інтеграл

1.1.1 Означення та властивості

Нехай у замкненій області D площини Oxy задана неперервна функція $z = f(x, y)$. Розіб'ємо область D на n елементарних частин D_i ($i = \overline{1,n}$), площі яких позначимо через ΔS_i , а діаметри (найбільшу відстань між точками межі області) – через d_i (рис. 1).

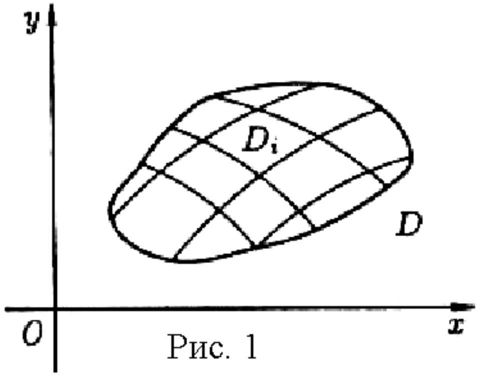


Рис. 1

У кожній точці області D_i візьмемо довільну точку $M_i(x_i, y_i)$, помножимо значення функції $f(x_i, y_i)$ в цій точці на ΔS_i і складемо суму всіх таких добутків

$$f(x_1, y_1)\Delta S_1 + \cdots + f(x_n, y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Вираз $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$ називається ***інтегральною сумою функції*** $f(x, y)$ ***по області*** D.

Границя інтегральної суми, коли максимальний діаметр $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$ частинних областей D_i прямує до нуля (при цьому n прямує до нескінченності), якщо вона існує та не залежить від способу поділу на елементарні частини D_i і від вибору точок $M_i(x_i, y_i)$ на них, називається ***подвійним інтегралом від функції*** $f(x,y)$ ***по області*** D і позначається

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dS \quad \text{або} \quad \iint\limits_D f(M)\,dS.$$

Отже, за означенням $\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i,$

де x і y – ***змінні інтегрування***; $f(x,y)$ – ***підінтегральна функція***; dS – ***елемент*** (***диференціал***) ***площі***; $f(x,y)dS$ – ***підінтегральний вираз***; D – ***область інтегрування***; $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$.

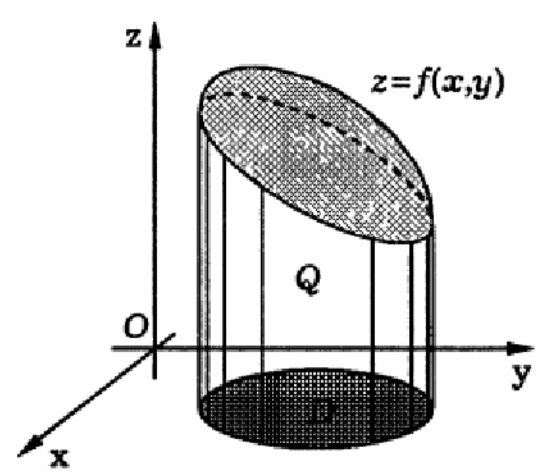


Рис. 2

Геометричний зміст: якщо функція $z = f(x, y)$ невід'ємна, то подвійний інтеграл від неї чисельно дорівнює об'єму V циліндричного тіла, нижньою основою якого є область D, верхньою – частина поверхні $z = f(x,y) \ge 0$, що проектується в D, а бічна поверхня – циліндрична з твірними, паралельними осі Oz, і напрямною L – межею області D (рис. 2): $V = \iint_D f(x,y)\,dS.$

Фізичний зміст: якщо матеріальна пластина лежить у координатній площині Oxy і має форму замкненої області D, в кожній точці якої задана поверхнева густина $\mu = \mu(x,y)$, то маса m пластини обчислюється за формулою $m = \iint_D \mu(x,y)\,dS.$

Теорема (***достатня умова інтегровності***). *Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, то вона інтегровна в цій області.*

Властивості подвійного інтеграла:

1) Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_D C\, f(x,y)\, dS = C \iint\limits_D f(x,y)\, dS, \qquad \text{де } C = const.$$

2) Подвійний інтеграл від скінченної алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же сумі подвійних інтегралів від кожного доданка окремо:

$$\iint\limits_D \big(f(x,y) + g(x,y) - h(x,y)\big)\, dS = \iint\limits_D f(x,y)\, dS + \iint\limits_D g(x,y)\, dS - \iint\limits_D h(x,y)\, dS.$$

3) Якщо функція $f(x,y) \geq 0$ в області D, то $\iint\limits_D f(x,y)\, dS \geq 0$.

4) Якщо дві функції в області D задовольняють нерівності

$$f(x,y) \geq g(x,y) \text{ , то } \iint\limits_D f(x,y)\, dS \geq \iint\limits_D g(x,y)\, dS.$$

5) (***Адитивність***). Якщо область інтегрування D функції $f(x, y)$ розбити на дві частини D_1 *і* D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dS.$$

6) (***Оцінка подвійного інтеграла***). Якщо функція $f\,(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D площею S, то

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)\,dS \le M\,S,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f\,(x,y)$ в області D.

7) Теорема ***(про середнє значення функції)***. Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D площею S.

Величина $\mu = \dfrac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dS$ називається ***середнім значенням*** функції $f(x,y)$ в області D. *В області D існує хоча б одна точка $P(\bar{x},\bar{y})$, в якій середнє значення функції досягається*:

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \mu = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dS.$$

Зауваження. Надалі будемо розглядати лише функції, які неперервні в області інтегрування, що гарантує існування подвійного інтеграла. (Хоча подвійний інтеграл може існувати не тільки для неперервних функцій).

На початок розділу

1.1.2 Обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах зведенням до повторного

Безпосереднє знаходження подвійного інтеграла як границі інтегральної суми пов'язане зі значними труднощами. Набагато простіше перейти до обчислення так званого двократного повторного інтеграла – послідовного знаходження двох звичайних визначених інтегралів.

Зауваження 1. Оскільки подвійний інтеграл не залежить від способу розбиття, то в декартовій прямокутній системі координат Oxy зручно розбивати область D координатною сіткою, утвореною прямими, які паралельні осям Ox і Oy (рис. 3).

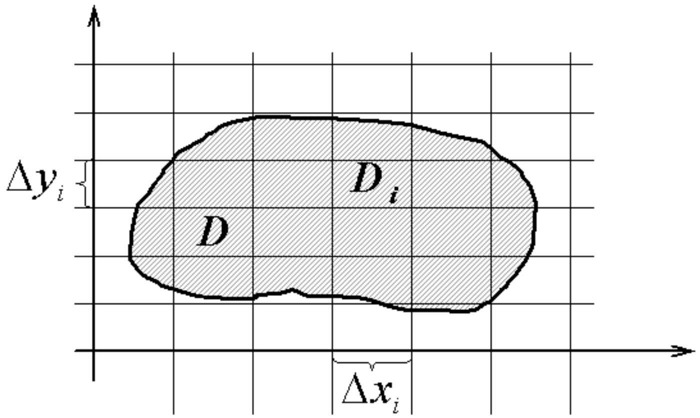


Рис. 3

Тоді внутрішній елементарний майданчик D_i є прямокутником зі сторонами Δx_i, Δy_i і його площа $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Відповідно диференціал площі набуває вигляду $dS{=}dxdy$ і подвійний інтеграл можна подати у формі

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

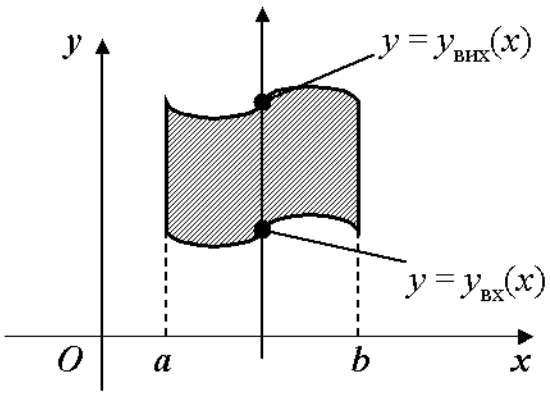


Рис. 4

Область D називається ***правильною в напрямку осі Oy*** (рис. 4), якщо:

1) довільна пробна пряма, що паралельна осі Oy і проходить через область D, перетинає межу області тільки в двох точках: на лінії входу і лінії виходу;

2) лінії входу та виходу задаються в явній формі одним рівнянням відповідно $y = y_{\text{вх}}(x)$, $y = y_{\text{вих}}(x)$.

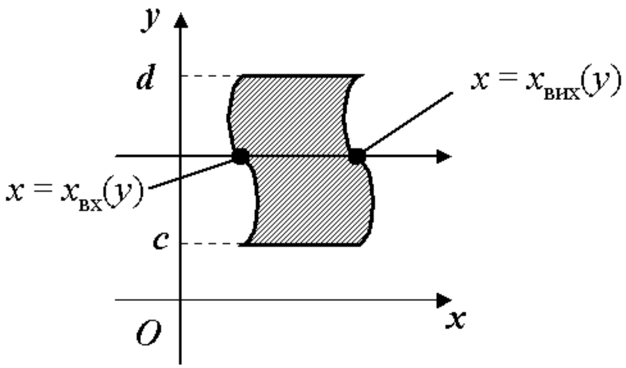


Рис. 5

Аналогічно визначається область ***правильна в напрямку осі Ox*** (рис. 5).

Якщо область D правильна і в напрямку осі Oy і в напрямку осі Ox, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Формула, що зводить подвійний інтеграл до двократного повторного інтеграла має вигляд:

$$a)\ \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy,\ x=a; x=b\ (a \le x \le b)$$ – для правильної в напрямі осі Oy області D.

$$á)\ \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{ñ}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx,\ \ y=c; y=d\ (c \le y \le d)$$ – для правильної в напрямі осі Ox області D.

Зауваження 2. Спочатку обчислюється ***внутрішній інтеграл*** за ***внутрішньою змінною*** y $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ у припущенні, що ***зовнішня змінна*** x фіксована. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла в межах від $y_1(x)$ до $y_2(x)$ одержуємо певну функцію $S(x)$ однієї змінної x.

Зауваження 3. ***Зовнішні межі інтегрування*** a і b – завжди сталі. Обчислюючи ***зовнішній інтеграл*** $\int_a^b S(x)\,dx$, дістаємо деяке число I – значення подвійного інтеграла.

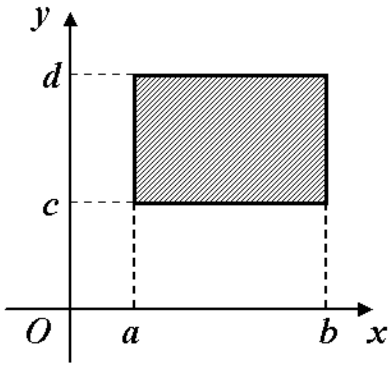


Рис. 6

Зауваження 4. ***Внутрішні межі інтегрування*** $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є функціями зовнішньої змінної x. В окремих випадках вони також можуть бути сталими. Наприклад, коли область інтегрування D – прямокутник зі сторонами $x = a$, $x = b$, $y = c$ і $y = d$, що паралельні осям координат (рис. 6), то всі межі інтегрування є сталими і подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

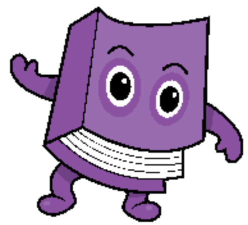
Приклад 1

На координатній площині Oxy задано замкнену обмежену область D, утворену точками, що лежать у півплощині $x - y - 4 \leq 0$ між еліпсом $x^2/48 + y^2/16 = 1$ і колом $x^2 + (y + 2)^2 = 4$. Виконати наступне:

1) Знайти кутові точки області D і зробити її рисунок на координатній площині Oxy (область D заштрихувати і вказати рівняння ділянок її меж).

2) Розбити область D на правильні в напрямі осі Oy частини і зробити відповідний рисунок на координатній площині Oxy (кожну правильну частину виділити оригінальним штрихуванням і вказати у відповідному вигляді рівняння ділянок її меж). Навести аналітичне подання кожної правильної в напрямі осі Oy частини.

3) Розбити область D на правильні в напрямі осі Ox частини і зробити відповідний рисунок на координатній площині Oxy (кожну правильну частину виділити оригінальним штрихуванням і вказати у відповідному вигляді рівняння ділянок її меж). Навести аналітичне подання кожної правильної в напрямі осі Ox частини.



1) Кутові точки області D є точками перетину ліній, які її обмежують. Для знаходження останніх складемо і розв'яжемо відповідні системи рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} x-y-4=0; \\ x^2/48+y^2/16=1; \end{cases} \begin{matrix} y=x-4; \\ x^2+3(x-4)^2=48; \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1=0;\ x_2=6; \\ y_1=-4;\ y_2=2; \end{matrix} \quad M_1(0;-4);\ M_2(6;2);$$

$$\begin{cases} x-y-4=0; \\ x^2+(y+2)^2=4; \end{cases} \begin{matrix} y=x-4; \\ x^2+(x-4+2)^2=4; \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1=0;\ x_2=2; \\ y_1=-4;\ y_2=-2; \end{matrix} \quad \begin{matrix} M_1(0;-4)\ \text{–одержана вище;} \\ M_3(2;-2); \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x^2/48+y^2/16=1; \\ x^2+(y+2)^2=4; \end{cases} \begin{matrix} x^2=48-3y^2; \\ 48-3y^2+(y+2)^2=4; \end{matrix} \quad \begin{matrix} y=-4; \\ x=0; \end{matrix} \quad M_1(0;-4)\text{ – одержана вище.}$$

Область D зображена штриховкою на рис. 7.

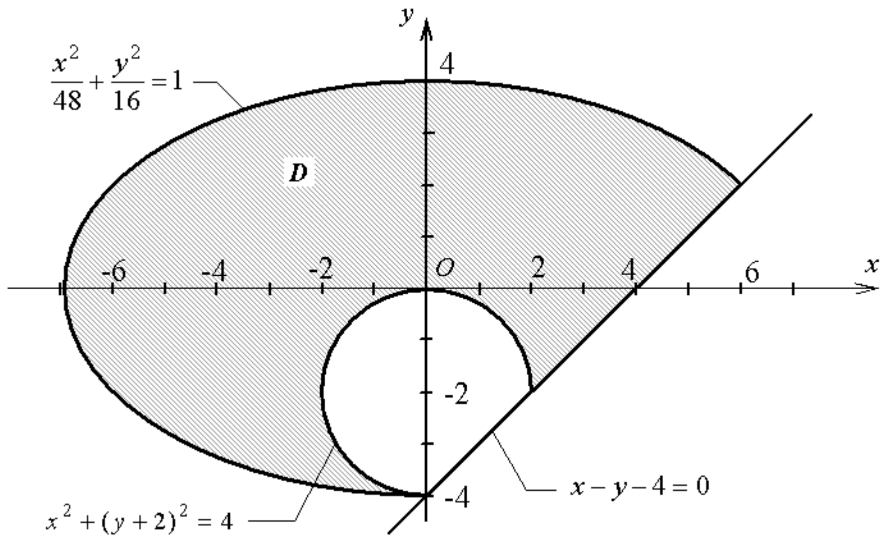
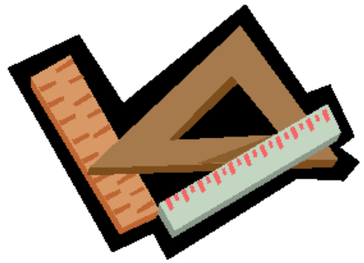


Рис. 7



2) Прямі $x = -2$, $x = 0$ і $x = 2$ розбивають область D на чотири правильні в напрямі осі Oy частини. Відповідне зображення області D відтворено на рис. 8.

Її правильні в напрямі осі Oy частини можна подати аналітично як множини точок наступними виразами:

$$D_1 : \left\{(x, y) \,\middle|\, -4\sqrt{3} \le x \le -2;\ -\sqrt{16 - x^2/3} \le y \le \sqrt{16 - x^2/3}\right\};$$

$$D_2 : \left\{(x, y) \,\middle|\, -2 \le x \le 0;\ -\sqrt{16 - x^2/3} \le y \le -\sqrt{4 - x^2} - 2\right\};$$

$$D_3 : \left\{(x, y) \,\middle|\, -2 \le x \le 2;\ \sqrt{4 - x^2} - 2 \le y \le \sqrt{16 - x^2/3}\right\};$$

$$D_4 : \left\{(x, y) \,\middle|\, 2 \le x \le 6;\ x - 4 \le y \le \sqrt{16 - x^2/3}\right\}.$$

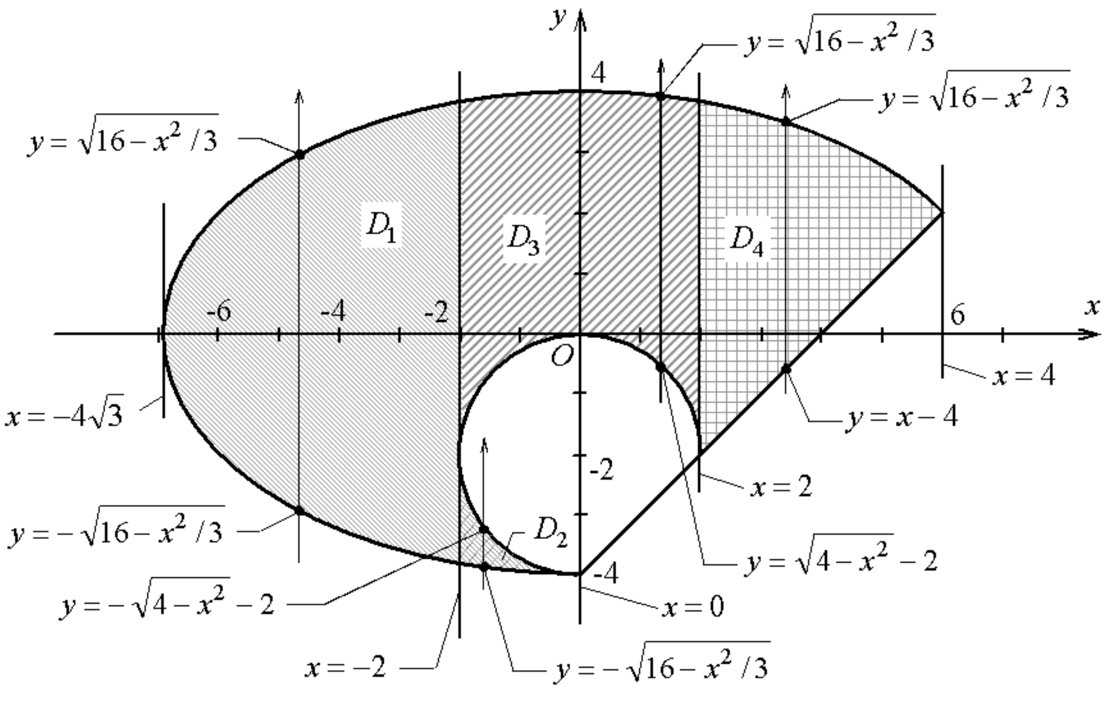


Рис. 8

3) Прямі $y = -2$, $y = 0$ і $y = 2$ розбивають область D на чотири правильні в напрямі осі Ox частин. Відповідне зображення області D відтворено на рис. 9.

Її правильні в напрямі осі Ox частини можна подати аналітично як множини точок наступними виразами:

$$D_1 : \left\{(x,y) \middle| \; -4 \le y \le 0; \; -\sqrt{48-3y^2} \le x \le -\sqrt{4-(y+2)^2} \right\};$$

$$D_2 : \left\{(x,y) \middle| \; 0 \le y \le 2; \; -\sqrt{48-3y^2} \le x \le y+4 \right\};$$

$$D_3 : \left\{(x,y) \middle| \; 2 \le y \le 4; \; -\sqrt{48-3y^2} \le x \le \sqrt{48-3y^2} \right\};$$

$$D_4 : \left\{(x,y) \middle| \; -2 \le y \le 0; \; \sqrt{4-(y+2)^2} \le x \le y+4 \right\}.$$

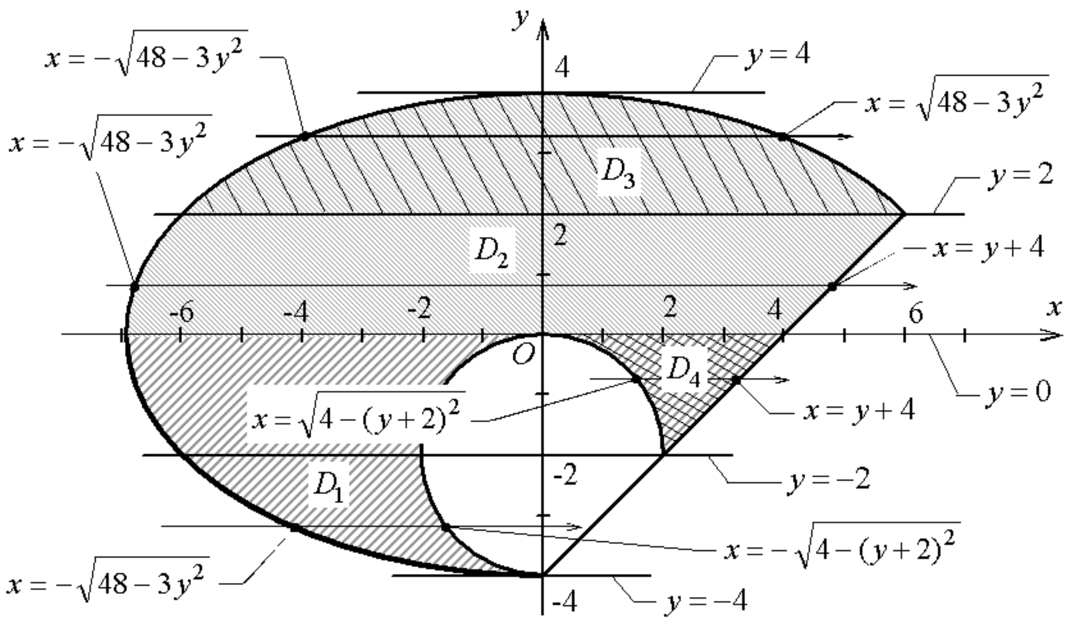
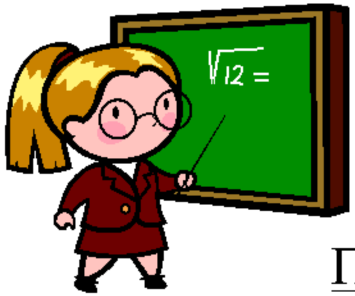


Рис. 9



Правило знаходження меж інтегрування для правильної в напрямі осі Oy (рис. 4) області D:

1) Область D спроектувати паралельно осі Oy на вісь Ox і одержати відрізок $[a; b]$, $a \le x \le b$. Числа a і b – відповідно нижня і верхня межі у зовнішньому інтегралі за x. Вони визначаються крайніми зліва та справа точками області D, які лежать на вертикальних прямих $x = a$ та $x = b$, що обмежують цю область.

2) Провести через будь-яку внутрішню точку x відрізка $[a; b]$ пробну пряму, паралельну осі Oy і в тому ж напрямі. Ця пряма перетинає межу області D у двох точках – входу C_1 і виходу C_2. Щоб визначити внутрішні межі інтегрування за y – ординати вказаних точок, необхідно розв'язати рівняння лінії входу і лінії виходу відносно y: $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$. Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$, що на відрізку $[a; b]$ обмежені і зберігають аналітичний вираз, – відповідно нижня і верхня межі у внутрішньому інтегралі за y.

Зауваження 5. Якщо область D правильна в напрямах обох осей Ox і Oy, то подвійний інтеграл можна звести до повторного будь-яким з указаних способів. Зрозуміло,що результати при цьому однакові, тобто *значення подвійного інтеграла не залежить від порядку інтегрування*:

$$\int_{a}^{b} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_{c}^{d} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Перехід від лівої частини цього співвідношення до правої і навпаки називається ***зміною порядку інтегрування***.

Зауваження 6. У кожному конкретному випадку, залежно від вигляду області D та підінтегральної функції $f\,(x,\,y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Зауваження 7. Якщо область D не є правильною в напрямі жодної з осей Ox чи Oy, то її необхідно розбити на частини без спільних внутрішніх точок, кожна з яких є правильною в напрямі Ox чи Oy.