а потім поширимо її періодичним способом з періодом $T = 2l$ на всю числову пряму. Одержимо розвинення в ряд синусів:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \ x \in [0; l];$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_*(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \ n = 1, 2, \ldots .$$

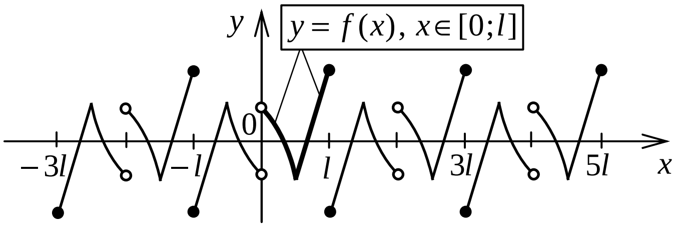

Рис. 36

<u>Приклад</u>. Кожну з даних функцій, визначених на відповідному відрізку $[0; l]$, розвинути в ряд косинусів і ряд синусів:

а) $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1; \\ 2, & 1 \le x \le 2; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 4 - x, & 0 < x < 2; \\ x, & 2 < x < 3. \end{cases}$

□ Задані функції задовольняють умовам теореми Діріхле, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Маємо $l = 2$. При парному продовженні дана функція $f(x)$ розкладається в ряд косинусів:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{2}\left(\int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 2\,dx\right) = x^2\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 = 3;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{2}\left(\int_0^1 2x\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 2\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) =$$

$$= 2 \cdot x\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1 - 2 \cdot \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}dx + 2 \cdot \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2 =$$

$$=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{8}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right);$$

$$f(x)=\frac{3}{2}+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}.$$

При непарному продовженні дана функція $f(x)$ розкладається в ряд синусів:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{2}\left(\int_0^1 2x\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2 2\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=2\cdot x\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1-2\cdot\frac{-2}{n\pi}\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}dx+2\cdot\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n\pi}\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1-\frac{4}{n\pi}(-1)^n+\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}=$$

$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2m,\ m=1,2,...;\\ \dfrac{8(-1)^{m+1}}{\pi^2(2m-1)^2}, & n=2m-1,\ m=1,2,...;\end{cases}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2}.$$

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь:

$$f(x)=\frac{17}{6}+\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1+(-1)^n-2\cos\frac{2n\pi}{3}\right)\cos\frac{n\pi x}{3};$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(4n\pi-3n\pi(-1)^n-6\sin\frac{2n\pi}{3}\right)\sin\frac{n\pi x}{3}.\ \blacksquare$$

1.5. Контрольні запитання

1. Наведіть означення подвійного інтеграла.
2. У чому полягає геометричний зміст подвійного інтеграла?
3. Яка плоска область D називається правильною (стандартною) у напрямі осі Ox? У напрямі осі Oy?
4. Задати аналітично як множину точок плоску область D, що правильна у напрямі осі Ox? У напрямі осі Oy?
5. Як обчислюється подвійний інтеграл у прямокутних координатах? Наведіть приклад області інтегрування D, якій відповідають сталі як зовнішні, так і внутрішні межі інтегрування у прямокутних координатах.
6. Як знайти межі інтегрування при переході від подвійного до двократного повторного інтеграла?
7. Наведіть означення потрійного інтеграла.
8. У чому полягає фізичний зміст потрійного інтеграла?
9. Яка тривимірна область V називається правильною (стандартною) у напрямі осі Oz? Осі Oy? Осі Ox?
10. Як обчислюється потрійний інтеграл у прямокутних координатах?
11. Як обчислити площу замкненої обмеженої плоскої області D за допомогою подвійного інтеграла?
12. Як обчислити об'єм правильного в напрямі осі Oz просторового тіла V за допомогою подвійного інтеграла?
13. Як за допомогою подвійного інтеграла обчислити масу плоскої пластини D з відомою поверхневою густиною $\mu = \mu(x, y)$?
14. Як обчислити об'єм просторового тіла V за допомогою потрійного інтеграла?
15. Що називається функціональним рядом? Що таке його точка збіжності і точка розбіжності? Область збіжності?
16. Який функціональний ряд називається абсолютно збіжним?
17. Який функціональний ряд називається рівномірно збіжним?
18. У чому полягає ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду?
19. Який функціональний ряд називається степеневим?
20. У чому полягає теорема Абеля про збіжність степеневого ряду?

21. Що таке інтервал збіжності степеневого ряду? Чим область збіжності може відрізнятися від інтервалу збіжності?
22. Яким може бути радіус збіжності степеневого ряду?
23. Як досліджується збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності?
24. Сформулюйте властивості степеневих рядів.
25. Який вигляд мають ряди Тейлора і Маклорена?
26. У чому полягає теорема про єдиність розвинення функції в ряд Тейлора?
27. Які основні способи побудови розкладу функцій у ряди Тейлора і Маклорена?
28. Наведіть приклади застосування степеневих рядів до наближених обчислень значень функцій, визначених інтегралів і розв'язування диференціальних рівнянь.
29. Які недоліки розвинення функцій у степеневі ряди?
30. Яка пара функцій називається ортогональною на відрізку?
31. Яка система функцій називається ортогональною на відрізку?
32. Що називається рядом Фур'є за тригонометричною системою функцій?
33. Як обчислюються коефіцієнти Фур'є для 2π-періодичної функції?
34. Сформулюйте теорему Діріхле, що виражає достатню ознаку розвинення функції в ряд Фур'є.
35. Як записується неповний ряд Фур'є для 2π-періодичної парної функції? Для 2π-періодичної непарної функції? За якими формулами обчислюються коефіцієнти Фур'є в цих випадках?
36. Як записується ряд Фур'є для періодичної функції з довільним періодом $T = 2l$, $l > 0$? За якими формулами обчислюються коефіцієнти Фур'є в цьому випадку?
37. Як будується періодичне продовження функції, що задана на скінченному проміжку?
38. Як будується парне (непарне) періодичне продовження функції, що задана на відрізку $[0;l]$? Як записується відповідний ряд косинусів (ряд синусів)? За якими формулами обчислюються коефіцієнти отриманого розвинення?

Змістовий модуль 2.

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

2.1. Загальне поняття про чисельні методи. Наближені числа. Похибки та їх обчислення

2.1.1. Загальне поняття про чисельні методи

Дослідження того чи іншого соціально-економічного процесу математичними методами розпочинається з побудови відповідної математичної моделі – його формалізованого опису мовою математики.

Під ***математичною моделлю*** процесу розуміють систему математичних співвідношень (алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь і нерівностей і т.п.), які визначають характеристики стану і властивості цього об'єкта і його функціонування залежно від параметрів компонентів, вхідних збуджень і часу.

Для кожної математичної моделі формулюється ***математична задача***: встановлюють, які характеристики моделі є вхідними змінними, які – параметрами, а які – вихідними змінними. Проводиться аналіз поставленої задачі з точки зору існування , єдиності та стійкості розв'язку.

Розв'язок задачі називається ***стійким*** за вхідними даними, якщо він неперервно залежить від них, тобто, малій зміні вхідних даних відповідає мала зміна розв'язку.

Математична задача поставлена ***коректно*** (***правильно***), якщо виконано наступні три умови: 1) розв'язок існує при довільних допустимих вхідних даних; 2) розв'язок єдиний; 3) розв'язок стійкий по відношенню до малих змін вхідних даних.

Якщо хоча б одна з цих умов не справджується, то задача називається ***некоректною***.

Наприклад, задача обчислення визначеного інтеграла – коректна, а задача обчислення похідної – некоректна (не виконується третя умова).

Для поставленої математичної задачі вибирається метод її розв'язування. У багатьох випадках знайти її точний розв'язок досить важко або взагалі не вдається, що вимагає застосування наближених методів.

Під ***чисельними*** (***числовими***, ***обчислювальними***) ***методами*** розуміють наближені процедури, що дозволяють одержувати розв'язок у вигляді набору конкретних числових значень.

Розрізняють прямі та ітераційні обчислювальні методи.

Метод називається ***прямим***, якщо він дозволяє одержувати розв'язок після виконання скінченного числа елементарних операцій. Інколи прямі методи називають ***точними***, маючи на увазі, що при відсутності похибок у вхідних даних і при виконанні елементарних операцій результат буде точним. Проте при комп'ютерній реалізації методу неминучі похибки заокруглення і, як наслідок, наявність обчислювальної похибки.

Далі розглядатимемо ***ітераційні методи***, суть яких полягає в побудові послідовних наближень до розв'язку задачі. Спочатку вибирають одно чи декілька початкових наближень, а потім послідовно, використовуючи знайдені раніше наближення і однотипну процедуру розрахунку, будують нові наближення. У результаті такого ітераційного процесу теоретично можна побудувати нескінченну послідовність наближень. Якщо ця послідовність збігається (що не гарантовано), то говорять, що ітераційний метод ***збіжний***. Окремий крок ітераційного процесу називається ***ітерацією***.

Проте практичні обчислення не можуть тривати нескінченно довго. Тому необхідно задати ***критерій закінчення*** ітераційного процесу, що зв'язаний з вимогами точності наближення.

Для вибраного обчислювального методу складається ***алгоритм*** – послідовність виконання необхідних арифметичних і логічних операцій. Алгоритм, що реалізує ітераційний метод, повинен бути рекурсивним і складатися з відносно невеликих блоків, які багаторазово виконуються для різних вхідних даних.

Правильність вибору методу безпосередньо залежить від знання і розуміння особливостей і обмежень, властивих чисельним методам, що реалізовані у відповідному програмному пакеті.

Ітераційний процес називається ***однокроковим***, якщо для обчислення чергового наближення x_k використовується тільки одне попереднє наближення x_{k-1}, і m***-кроковим***, якщо для обчислення чергового наближення x_k використовуються m попередніх наближень x_{k-m}, x_{k-m+1}, …, x_{k-1}.

Чисельні методи характеризуються:

– різною ***швидкістю збіжності***, тобто числом ітерацій, виконання яких необхідне для отримання заданої точності розв'язку;

– різною ***стійкістю***, тобто збереженням достовірності розв'язку під час подальших ітерацій (при цьому чим точніше задаються числа для обробки, тим точніший одержується результат, і для довільної точності результату можна вказати таку точність вхідних і проміжних даних, що метод приведе до результату саме з цією заданою точністю;

– різною ***точністю*** одержуваного розв'язку в разі виконання однакового числа ітерацій або циклів обчислень.

Говорять, що ***метод має p-й порядок збіжності***, якщо $|x_k - X| \le C|x_{k-1} - X|^p$, де x_{k-1} і x_k – послідовні наближення, отримані в ході ітераційного процесу, X – точний розв'язок, C – додатна константа, що не залежить від номера ітерації k.

Говорять, що ***метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником*** $q < 1$, якщо для всіх k справедлива оцінка $|x_k - X| \le Cq^k$.

2.1.2. Наближені числа. Похибки та їх класифікація. Абсолютна та відносна похибки

Наближеним числом x називається таке, що несуттєво відрізняється від точного числа X і замінює останнє в обчисленнях.

При розв'язанні прикладних задач, в основному, використовуються дійсні числа. У пам'яті комп'ютера вони зберігаються у ***формі з плаваючою точкою***. Десяткове число x у цій формі записується так $x = \pm m \cdot 10^n$, де m і n – відповідно ***мантиса*** числа і його ***порядок***. Наприклад, число $x = 358{,}5$ можна записати в одному з таких виглядів: $3585 \cdot 10^{-1}$, $3.585 \cdot 10^2$ чи $0.3585 \cdot 10^3$. Останній запис, де мантиса подана у вигляді $m = 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_k$, $\alpha_1 \ne 0$, називається ***нормалізованою формою числа з плаваючою точкою***. Звичайний запис числа у вигляді 358.5 називається ***формою з фіксованою точкою*** і в комп'ютерах використовується тільки на етапах введення і виведення. Зберігання й обробка дійсних чисел здійснюється саме у формі з плаваючою точкою.

Відхилення дійсного X значення від наближеного x називається ***похибкою***.

Основна задача теорії похибок – знаходження області невизначеності результату.

Чисельне розв'язування задач супроводжується похибками, викликаними наступними причинами:

1) створенням математичної моделі (будь-яка модель має свій ступінь адекватності об'єкту дослідження);

2) отриманням вхідних даних, оскільки вони є результатом або вимірювань (отже, виникають вимірювальні похибки), або розв'язування деяких допоміжних задач;

3) застосуванням наближеного методу, оскільки отримання точного розв'язку вимагає необмеженої або неприйнятно великої кількості елементарних операцій, а в багатьох випадках і просто неможливо;

4) використанням обчислювальної техніки (неточності при вводі-виводі даних до комп'ютера і при виконанні математичних операцій, що обумовлено обмеженістю його розрядної сітки).

Відповідно до цих джерел похибки можна поділити на три групи:

1) ***неусувні похибки***, що включають ***похибки моделі*** та ***вхідних даних***;

2) ***похибки методу*** (наприклад, заміняють інтеграл сумою, затратну для оперування функцію – многочленом, похідну – скінченною різницею і т.п., обмежують максимальну кількість ітерацій);

3) ***похибки обчислень*** (заокруглювання під час обчислень, локальні відсікання, похибки зображення чисел у комп'ютері).

<u>Зауваження 1</u>. Неусувну похибку і похибку методу необхідно контролювати, щоб не здійснювати розрахунки з надмірною точністю. Похибку методу треба вибирати так, щоб вона була не більш, ніж на порядок менша неусувних, оскільки велика похибка методу знижує точність розв'язку, а мала вимагає значного збільшення об'єму обчислень.

<u>Зауваження 2</u>. Обчислювальні похибки тільки накопичуються, незалежно від типу виконуваної операції. При цьому частково взаємно компенсуються, оскільки мають різні знаки. Точність проведення розрахунків на комп'ютері можна регулювати програмно.

Нехай X – точне значення деякої величини, а x – її відоме наближене значення.

Під ***похибкою*** наближеного числа x розуміють величину, що характеризує точність наближення і дорівнює різниці між відповідним точним числом X та його наближенням x: $\Delta x = X - x$.

У більшості випадків знак похибки Δx невідомий, тому вводиться поняття ***абсолютної похибки*** Δ_x як модуля похибки Δx: $\Delta_x = |\Delta x| = |X - x|$.

Як правило, точне значення X невідоме й абсолютну похибку Δ_x знайти неможливо. Тому для оцінки зверху Δ_x використовується поняття ***граничної абсолютної похибки*** Δ_x^*, яка визначається з нерівності $\Delta_x \le \Delta_x^*$.

Нехай $X \ne 0$. Важливою характеристикою точності наближення є абсолютна похибка, що припадає на одиницю величини числа X, – ***відносна похибка*** δ_x. Вона дорівнює відношенню абсолютної похибки Δ_x до модуля точного числа X: $\delta_x = \Delta_x / |X|$.

Зауваження 3. Для $X = 0$ відносна похибка невизначена.

Верхньою оцінкою для δ_x служить ***гранична відносна похибка*** δ_x^*, що визначається з нерівності $\delta_x \le \delta_x^*$.

Звідси $\Delta_x / |X| \le \delta_x^*$; $\Delta_x \le |X|\,\delta_x^*$. Отже, можна покласти $\Delta_x^* = |X|\,\delta_x^*$. Оскільки $X = x$ з достатньою для практики точністю, то звичайно приймають $\boxed{\Delta_x^* = |x|\,\delta_x^*}$. Аналогічно $\boxed{\Delta_x = |x|\,\delta_x}$.

Нехай для визначеності $\Delta_x^* < |X|$. Тоді $\delta_x = \Delta_x / |X| \le$ $\le \Delta_x^* / (|x| - \Delta_x^*)$. Тобто можна покласти $\delta_x^* = \Delta_x^* / (|x| - \Delta_x^*)$. Як правило, $\Delta_x^* << |x|$, тому на практиці звичайно користуються формулою $\boxed{\delta_x^* = \Delta_x^* / |x|}$. Аналогічно $\boxed{\delta_x = \Delta_x / |x|}$.

Зауваження 4. Абсолютна похибка є розмірною величиною, а відносна – безрозмірною, її часто виражають у відсотках.

2.1.3. Форми запису наближених даних

Будь-яке додатне число x можна подати у вигляді скінченного чи нескінченного десяткового дробу

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots,$$

де α_i, $i = 1, 2, \ldots$ – цифри у запису числа x, причому $\alpha_1 \neq 0$; m – старший десятковий розряд числа x.

Усі десяткові знаки α_i, $i = 1, 2, \ldots$ такого подання наближеного числа x називаються його ***значущими цифрами***. Іншими словами, ***значущими цифрами*** наближеного числа називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва, включаючи всі нулі справа, що є представниками збережених розрядів. Решта нулів, що входять у його запис та служать лише для позначення його десяткових розрядів, не зараховуються до значущих цифр.

Наприклад, у числах $\underline{4{,}570315}$, $0{,}00\underline{7214}$, $0{,}0\underline{3105800}$, $\underline{2730000}$, $0{,}\underline{30400}\cdot 10^6$ тільки підкреслені цифри є значущими.

Точність подання наближеного числа x залежить від кількості його значущих цифр.

Значуща цифра α_i називається ***вірною*** (***правильною***) ***у вузькому сенсі***, якщо абсолютна похибка Δ_x^* числа x не перевищує половини одиниці $(m - i + 1)$-го розряду, що відповідає цій цифрі. У противному разі цифра α_i називається ***сумнівною***.

Якщо цифра α_n вірна, то усі попередні до неї цифри теж вірні. Отже, при умові

$$\boxed{0{,}5 \cdot 10^{m-n} < \Delta_x^* \leq 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}},$$

за визначенням, перші n значущих цифр α_i, $i = \overline{1, n}$ є вірними у вузькому сенсі, а всі інші – сумнівними. При цьому можна покласти

$$\boxed{\Delta_x^* = 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}}.$$

<u>Зауваження</u>. Якщо додатне наближене число x має n вірних значущих цифр у вузькому сенсі α_i, $i = \overline{1, n}$, то за граничну відносну похибку δ_x^* можна взяти $\boxed{\delta_x^* = 0{,}5 \cdot 10^{1-n} / \alpha_1}$.

Точне число X через його наближення x можна записати у різному вигляді:

– з використанням межових значень $x_1 \le X \le x_2$, де $x_1 = x - \Delta_x^*$ і $x_2 = x + \Delta_x^*$, наприклад, $1{,}351 \le X \le 1{,}357$;

– з використанням абсолютної похибки $X = x \pm \Delta_x^*$, наприклад, $X = 1{,}354 \pm 0{,}003$, тобто $1{,}354 - 0{,}003 \le X \le 1{,}354 + 0{,}003$;

– з використанням відносної похибки $X = x(1 \pm \delta_x^*)$, наприклад, $X = 1{,}354(1 \pm 0{,}002)$ або $X = 1{,}354(1 \pm 0{,}2\%)$.

<u>Приклад</u>. Скільки вірних значущих цифр у вузькому сенсі має дане число x, якщо:

а) $x = 14{,}3820$ і $\Delta_x^* = 0{,}06$; б) $x = 8{,}677193$ і $\Delta_x^* = 3 \cdot 10^{-4}$;

в) $x = 0{,}046719$ і $\Delta_x^* = 0{,}008$; г) $x = 103{,}265(1 \pm 0{,}000076)$;

д) $x = 0{,}096027$ і $\Delta_x^* = 0{,}006$; е) $x = 1373{,}174(1 \pm 0{,}00082)$.

□ а) Маємо $0{,}5 \cdot 10^{-1} < \Delta_x^* = 0{,}6 \cdot 10^{-1} \le 0{,}5 \cdot 10^{0}$. Отже, у вузькому сенсі у числа x вірними є дві значущі цифри $1, 4$, а цифри $3, 8, 2, 0$ – сумнівні.

б) Оскільки $0{,}5 \cdot 10^{-4} < \Delta_x^* = 0{,}3 \cdot 10^{-3} \le 0{,}5 \cdot 10^{-3}$, то x у вузькому сенсі має вірні три значущі цифри після коми, тобто вірними будуть чотири значущі цифри $8, 6, 7, 7$, а цифри $1, 9, 3$ – сумнівні.

в) Маємо $0{,}5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0{,}8 \cdot 10^{-2} \le 0{,}5 \cdot 10^{-1}$. Отже, у вузькому сенсі у числа x немає ні однієї вірної значущої цифри, всі вони сумнівні.

г) Гранична відносна похибка $\delta_x^* = 0{,}000076$, тоді гранична абсолютна похибка $\Delta_x^* = |x|\,\delta_x^* = 103{,}265 \cdot 0{,}000076 = 0{,}0078$. Оскільки $0{,}5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0{,}78 \cdot 10^{-2} \le 0{,}5 \cdot 10^{-1}$, то у вузькому сенсі $x = 103{,}265$ має чотири вірні значущі цифри $1, 0, 3, 2$, а цифри $6, 5$ – сумнівні.

(Завдання д) і е) розв’язати самостійно). ■

2.1.4. Похибки округлення

В обчислювальному пристрої числа наводять з обмеженою кількістю розрядів, максимальне число яких визначається довжиною його розрядної сітки.

Заокруглюванням називається заміна числа наближеним числом з меншою кількістю значущих цифр. При цьому виникає ***похибка округлення***. Щоб вона була мінімальною, треба застосовувати наступне правило симетричного заокруглювання:

якщо цифра старшого розряду, що відкидається, менше 5, то попередня до нього цифра не змінюється;

якщо цифра старшого розряду, що відкидається, дорівнює або більше 5, то попередня до нього цифра збільшується на 1.

При використанні цього правила ***абсолютна похибка округлення*** $\Delta_{x\,окр}$ числа

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + ... + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + ...$$

до p значущих цифр не перевищує половини одиниці розряду останньої залишеної цифри α_p, тобто за ***граничну абсолютну похибку округлення*** $\Delta^*_{x\,окр}$ можна взяти $\Delta^*_{x\,окр} = 0{,}5 \cdot 10^{m-p+1}$.

Під час заокруглювання наближеного числа x_1 отримуємо нове наближене число x_2, абсолютна похибка Δ_{x_2} якого визначається за формулою:

$$\boxed{\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2\,окр}},$$

де Δ_{x_1} – абсолютна похибка числа x_1; $\Delta_{x_2\,окр} = |\,x_1 - x_2\,|$ – абсолютна похибка округлення числа x_2.

Аналогічною формулою зв'язані граничні значення цих похибок:

$$\boxed{\Delta^*_{x_2} = \Delta^*_{x_1} + \Delta^*_{x_2\,окр}}.$$

Зауваження 1. При заокруглюванні цілого числа відкинуті знаки не можна заміняти нулями, а потрібно застосовувати множення на відповідний степінь 10.

Зауваження 2. У деяких випадках також застосовують заокруглювання з недостачею, коли зайві цифри просто відкидаються, і заокруглювання з надлишком, коли остання справа залишена цифра збільшується на одиницю.

Приклад 1. Нехай а) $x_1 = 7{,}8497621$ і б) $x_1 = 348{,}453275$.

Заокруглити ці числа, відкидаючи послідовно t ($t = 1, 2, 3, \ldots$) останні цифри.

□ Відповідно дістанемо:

а) $x_2 = 7{,}849762$ і б) $x_2 = 348{,}45328$ ($t = 1$); а) $x_2 = 7{,}84976$ і б) $x_2 = 348{,}4533$ ($t = 2$); а) $x_2 = 7{,}8498$ і б) $x_2 = 348{,}453$ ($t = 3$); а) $x_2 = 7{,}850$ і б) $x_2 = 348{,}45$ ($t = 4$); а) $x_2 = 7{,}85$ і б) $x_2 = 348{,}5$ ($t = 5$); а) $x_2 = 7{,}8$ і б) $x_2 = 348$ ($t = 6$); а) $x_2 = 8$ і б) $x_2 = 3{,}5 \cdot 10^2$ ($t = 7$); а) $x_2 = 1 \cdot 10^1$ і б) $x_2 = 3 \cdot 10^2$ ($t = 8$). ■

Приклад 2. Округлити сумнівні цифри даного числа x_1 і знайти абсолютну Δ_{x_2} і відносну δ_{x_2} похибки результату x_2:

а) $x_1 = 34{,}124 \pm 0{,}021$; б) $x_1 = 91{,}735(1 \pm 0{,}0000082)$.

□ а) Наближене число x_1 має три вірні цифри: 3, 4, 1, тому що $0{,}005 < \Delta_{x_1} = 0{,}021 \le 0{,}05$. Використовуючи правило заокруглювання, знайдемо наближене значення x_2, зберігаючи вірні десяткові знаки: $x_2 = 34{,}1$. Обчислимо похибку округлення $\Delta_{x_2\,окр}$, абсолютну Δ_{x_2} і відносну δ_{x_2} похибки числа x_2:

$$\Delta_{x_2\,окр} = |x_1 - x_2| = |34{,}124 - 34{,}1| = 0{,}024; \quad \Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2\,окр} = 0{,}021 + 0{,}024 = 0{,}045; \quad \delta_{x_2} = \Delta_{x_2} / |x_2| = 0{,}045 / |34{,}1| = 0{,}0013.$$

Оскільки $0{,}005 < \Delta_{x_2} = 0{,}045 \le 0{,}05$, то всі значущі цифри числа x_2 вірні. Отже, $x_1 = 34{,}1 \pm 0{,}045$.

б) Оскільки відносна похибка $\delta_{x_1} = 0{,}0000082$, то абсолютна похибка $\Delta_{x_1} = |x_1|\,\delta_{x_1} = 91{,}735 \cdot 0{,}0000082 = 0{,}00075$. Значить, число $x_1 = 91{,}735$ має чотири вірні значущі цифри: 9, 1, 7 і 3, тому що $0{,}5 \cdot 10^{-3} < \Delta_{x_1} = 0{,}00075 \le 0{,}5 \cdot 10^{-2}$. Знайдемо наближене значення x_2 з чотирма десятковими знаками, використовуючи правило заокруглювання: $x_2 = 91{,}74$. Обчислимо похибку округлення $\Delta_{x_2\,окр}$, абсолютну Δ_{x_2} і відносну δ_{x_2} похибки числа x_2:

$$\Delta_{x_2\,окр} = |x_1 - x_2| = |91{,}735 - 91{,}74| = 0{,}005;$$

$$\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2\,окр} = 0{,}00075 + 0{,}005 = 0{,}006;$$

$$\delta_{x_2} = \Delta_{x_2} \big/ |x_2| = 0{,}006 / |91{,}74| = 0{,}7 \cdot 10^{-4}.$$

Оскільки $0{,}5 \cdot 10^{-2} < \Delta_{x_2} = 0{,}006 \le 0{,}5 \cdot 10^{-1}$, то вірними значущими цифрами числа x_2 є тільки перші три 9, 1 і 7, а остання цифра 4 – сумнівна. Отже, $x_1 = 91{,}74 \pm 0{,}006$. ■

2.1.5. Похибка функції. Похибки арифметичних операцій

Розглянемо неперервно диференційовну на відрізку $[a;b]$ функцію однієї змінної $y = f(x)$. Припустимо, що потрібно знайти наближення y для її точного значення Y при $X \in [a;b]$, що задане наближеним числом $x \in [a;b]$ з абсолютною похибкою Δ_x, і оцінити відповідну абсолютну похибку функції $\Delta_y = |Y - y|$.

За наближене значення функції $Y = f(X)$ можна взяти $\boxed{y = f(x)}$. При цьому абсолютну похибку Δ_y можна розглядати як модуль її приросту, викликаного приростом аргументу $\pm\Delta_x$. Оскільки приріст аргументу відносно невеликий, то при практичних розрахунках з достатньою точністю можна використовувати ***лінійні оцінки***:

$$\boxed{\Delta_y = |f'(x)| \cdot \Delta_x} \quad і \quad \boxed{\Delta_y^* = |f'(x)| \cdot \Delta_x^*},$$

що рівносильне заміні приросту функції диференціалом.

Ці формули безпосередньо узагальнюються на випадок неперервно диференційовної функції n змінних $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$:

$$\boxed{y = f(x_1, x_2,..., x_n)}\ ;$$

$$\boxed{\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2,..., x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i}}\ ; \quad \boxed{\Delta_y^* = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2,..., x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i}^*}\ .$$

На основі одержаного наближеного значення функції та лінійної оцінки її абсолютної похибки дістанемо лінійні оцінки відносної похибки δ_y та її граничного значення δ_y^*.

а) У випадку функції однієї змінної $y = f(x)$:

$$\boxed{\delta_y = \left| x \frac{d \ln f(x)}{dx} \right| \delta_x} \quad \text{і} \quad \boxed{\delta_y^* = \left| x \frac{d \ln f(x)}{dx} \right| \delta_y^*}\ .$$

б) У випадку функції n змінних $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$:

$$\boxed{\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i \frac{\partial \ln f(x_1, x_2,..., x_n)}{\partial x_i} \right| \delta_{x_i}}$$

$$\text{і} \quad \boxed{\delta_y^* = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i \frac{\partial \ln f(x_1, x_2,..., x_n)}{\partial x_i} \right| \delta_{x_i}^*}\ .$$

<u>Зауваження</u>. За одержаними формулами знаходяться неусувні похибки обчислення функції, породжені похибками аргументів. Похибки заокруглювання тут не враховуються.

Використовуючи одержані формули, можна визначити лінійні оцінки похибок результатів арифметичних операцій як окремих випадків функції двох змінних.

а) <u>Похибка суми</u>. Нехай $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Оскільки $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_i = 1$ і $\partial \ln f(x_1, x_2)/\partial x_i = 1/(x_1 + x_2)$, $i = 1,2$, то дістанемо

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right| \delta_{x_2}\ .$$

Абсолютна похибка суми дорівнює сумі абсолютних похибок доданків.

Аналогічно знаходяться похибки для інших результатів арифметичних операцій.

б) <u>Похибка різниці</u>. $y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \left| \frac{x_1}{x_1 - x_2} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{x_2}{x_1 - x_2} \right| \delta_{x_2} \ .$$

Абсолютна похибка різниці дорівнює сумі абсолютних похибок зменшуваного і від'ємника.

в) <u>Похибка добутку</u>. $y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.

$$\Delta_y = |x_2| \Delta_{x_1} + |x_1| \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} \ .$$

Відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок співмножників.

г) <u>Похибка частки</u>. $y = f(x_1, x_2) = x_1 / x_2$.

$$\Delta_y = \frac{|x_2| \Delta_{x_1} + |x_1| \Delta_{x_2}}{(x_2)^2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} \ .$$

Відносна похибка частки дорівнює сумі відносних похибок діленого і дільника.

<u>Правила підрахунку цифр</u>:

1) *При знаходженні суми й різниці наближених чисел у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх моє компонент операції з найменшим числом десяткових знаків.*

2) *При знаходженні добутку й частки наближених чисел у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх моє компонент операції з найменшим числом значущих цифр.*

<u>Приклад</u>. Знайти абсолютну Δ_u і відносну δ_u похибки обчислення значення функції $u = x^2 z / y^3$, якщо $x = 0{,}15 \pm 0{,}005$, $y = 2{,}12 \pm 0{,}01$, $z = 1{,}16 \pm 0{,}007$.

□ За формулою для лінійної оцінки абсолютної похибки результату отримаємо:

$$\Delta_u = \left|\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\right|\Delta_y + \left|\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right|\Delta_z =$$

$$= \left|\frac{2xz}{y^3}\right|\Delta_x + \left|\frac{3x^2z}{y^4}\right|\Delta_y + \left|\frac{x^2}{y^3}\right|\Delta_z = \frac{2\cdot 0{,}15\cdot 1{,}16}{2{,}12^3}\cdot 0{,}005 +$$

$$+ \frac{3\cdot 0{,}15^2\cdot 1{,}16}{2{,}12^4}\cdot 0{,}01 + \frac{0{,}15^2}{2{,}12^3}\cdot 0{,}007 = 0{,}0001826 +$$

$$+ 0{,}0001163 + 0{,}00001653 = 0{,}00032 = 0{,}32\cdot 10^{-3}.$$

Знайдемо наближене значення функції:

$$u = 0{,}15^2\cdot 1{,}16 \big/ 2{,}12^3 = 0{,}00274 = 0{,}0027\,.$$

Тоді $\delta_u = \Delta_u / |u| = 0{,}32\cdot 10^{-3} \big/ 0{,}00274 = 0{,}12$. ■

2.2. Чисельні методи знаходження дійсних коренів скінченних рівнянь

Рівнянням з однією змінною x називається рівність

$$\boxed{f(x)=0}\,,$$

яка справджується при певних значеннях x, що називаються ***коренями*** рівняння. Вважають, що корінь x^* має кратність k, якщо

$$f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = \ldots = f^{(k-1)}(x^*) = 0\text{, але } f^{(k)}(x^*) \neq 0\,.$$

Розв'язування рівняння полягає в знаходженні його коренів.

Зауваження 1. Рівносильними перетвореннями рівняння $f(x)=0$ можна звести до вигляду $\boxed{x=\varphi(x)}$. Тим самим знаходження кореня рівняння $f(x)=0$ (***нуля функції*** $f(x)$) зводиться до пошуку ***нерухомої точки*** відображення φ − такого значення x, яке відображенням φ переводиться само в себе.

Зауваження 2. Надалі обмежимося розглядом тільки дійсних коренів дійсних рівнянь.

2.2.1. Дослідження рівняння і відокремлення коренів

Наближене обчислення кожного з дійсних коренів складається з наступних етапів:

а) дослідження кількості й розташування коренів на числовій прямій, з'ясування їх кратності; виділення області пошуку D коренів, яка відповідає умовам поставленої задачі;

б) ***відокремлення*** (***ізоляція***, ***локалізація***) кореня x^*, тобто знаходження як можна меншого відрізку $[a;b]$ з області пошуку D, в межах якого лежить один і тільки один цей корінь, і вибір його початкового наближення x_0;

в) ***уточнення*** значення кореня x^*, тобто обчислення його з необхідною точністю.

Найчастіше відокремлення коренів здійснюється аналітичним чи графічним способами.

Основою ***аналітичного способу*** служить наступна

теорема. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і приймає значення різних знаків на його кінцях, тобто* $f(a)\cdot f(b)<0$, *то усередині цього відрізка міститься хоча б один корінь* x^* *рівняння* $f(x)=0$. *Цей корінь буде єдиним, якщо на інтервалі* $(a;b)$ *похідна* $f'(x)$ *зберігає постійний знак.*

У найпростішому випадку формують таблицю, в яку заносять послідовно розміщенні на осі Ox точки x_i, $i=1,2,\ldots$ з досить малим кроком $\Delta x_i = x_{i+1}-x_i$ і обчислені в них значення $f(x_i)$ лівої частини рівняння $f(x)=0$. Потім у таблиці вибирають ті пари сусідніх значень аргументу x_i і x_{i+1}, між якими функція $f(x)$ змінює знак.

При ***графічному способі*** будують графік функції $y=f(x)$ і приблизно виявляють ділянки його перетину з віссю Ox. Або, перетворивши вхідне рівняння $f(x)=0$ до вигляду $f_1(x)=f_2(x)$, будують графіки двох функцій $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ і приблизно визначають проміжки, яким належать абсциси їх точок перетину між собою.

Приклад 1. Для рівняння $2^x + x^2 - 2 = 0$ знайти інтервали ізоляції його коренів, що лежать на проміжку $[-2;2]$, аналітичним способом, а потім проконтролювати результат графічним методом.

□ Побудуємо таблицю значень, де $y = f(x) = 2^x + x^2 - 2$.

x	-2	-1	0	1	2
y	2,25	- 0,5	-1	1	6

З таблиці значень видно, що відрізку $[-2;2]$ функція $y = f(x)$ двічі змінює знак, тому можна припустити, що рівняння має два корені, проміжки локалізації яких $[-2;-1]$ і $[0;1]$.

Для контролю розв'яжемо задачу графічно. Подамо рівняння у вигляді $2^x = 2 - x^2$ і побудуємо графіки лівої $y = 2^x$ та правої $y = 2 - x^2$ частин (рис. 37). Перетин графіків на рис. 37 показує, що коренів два і вони розміщені на відрізках $[-2;-1]$ і $[0;1]$. ■

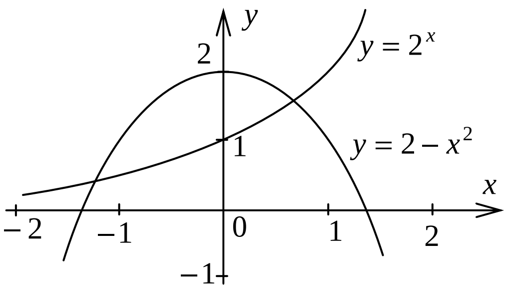

Рис. 37

2.2.2. Методи уточнення наближених значень коренів

На етапі уточнення кореня x^* рівняння $f(x) = 0$ обчислюють його наближене значення з заданою точністю.

Для цього використовують різні ітераційні методи (методи послідовних наближень), суть яких полягає у послідовному обчисленні, виходячи з початкового наближення x_0, за однією й тією ж схемою (за допомогою відповідного рекурентного співвідношення

$$x_k = \varphi_k(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots$$

значень $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, що наближаються до кореня x^*: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$ (це забезпечується вибором φ_k).

Критеріями закінчення ітераційного процесу служать:

а) досягнення заданої точності за аргументом: $\left|x_k - x^*\right| < \delta$, де $\delta > 0$ – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного значення x_k кореня x^*;

б) досягнення заданої точності за функцією: $\left|f(x_k)\right| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного нульового значення $f(x_k)$ функції $f(x)$;

в) досягнення заданого максимально допустимого числа ітерацій $k_{\max}$: $k = k_{\max}$.

Зауваження. Позитивною стороною всіх ітераційних методів є відсутність накопичення похибок обчислень.

Далі розглянемо деякі найпоширеніші ітераційні методи уточнення наближеного значення кореня.

2.2.3. Метод поділу навпіл (дихотомії, бісекції)

Метод дихотомії (***бісекції***, ***поділу навпіл***) є досить простим і надійним способом розв'язування нелінійних рівнянь.

Нехай з попереднього аналізу відомо, що корінь x^* рівняння $f(x) = 0$ належить відрізку $[a_0; b_0]$: $x^* \in [a_0; b_0]$, причому функція $f(x)$ неперервна на цьому відрізку і приймає на його кінцях різні за знаком значення, тобто $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

На першому кроці ($k = 1$) розділимо відрізок $[a_0; b_0]$ навпіл точкою $x_1 = (a_0 + b_0)/2$ (рис. 38). Якщо $f(x_1) = 0$, то x_1 – шуканий корінь і задача розв'язана: $x^* = x_1$. Якщо $f(x_1) \neq 0$, то треба визначити, на кінцях якого з відрізків $[a_0; x_1]$ чи $[x_1; b_0]$ функція приймає різні за знаком значення. Позначимо цей відрізок $[a_1; b_1]$.

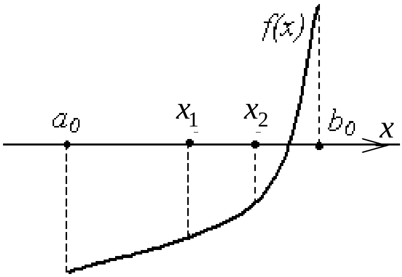

Рис. 38

Оскільки $f(a_1)\cdot f(b_1)<0$, то $x^*\in[a_1;b_1]$ і довжина відрізка $[a_1;b_1]$ удвічі менша, ніж довжина попереднього відрізка $[a_0;b_0]$.

Далі ($k=2$) зробимо аналогічні дії на відрізку $[a_1;b_1]$ (поділимо його навпіл і т.д.). У результаті отримаємо корінь x^* або його відповідне наближення

$$x_2=(a_1+b_1)/2$$

і новий відрізок ізоляції $[a_2;b_2]$ і т.д. На k-му кроці обчислення проводяться за схемою:

$$\boxed{x_k=(a_{k-1}+b_{k-1})/2;\quad f(a_{k-1})\ f(b_{k-1})<0\quad (k=1,2,...)},$$

де x_k – наближення до шуканого кореня x^*; $[a_{k-1};b_{k-1}]$ – попередній проміжок ізоляції кореня. Якщо $k=k_{\max}$, то покласти $x^*=x_k$ і закінчити обчислення. Якщо $f(x_k)=0$, то покласти $x^*=x_k$ і закінчити обчислення. Якщо $f(x_k)\cdot f(a_{k-1})>0$, то покласти $a_k=x_k$; $b_k=b_{k-1}$, інакше – $a_k=a_{k-1}$; $b_k=x_k$. Далі присвоїти $k:=k+1$ і продовжити обчислення.

На k-му кроці довжина одержаного відрізка ізоляції $[a_k;b_k]$ дорівнює $(b_0-a_0)/2^k$. Оскільки $x^*\in[a_k;b_k]$, то маємо оцінку

$$\boxed{\left|x_k-x^*\right|\le b_k-a_k=(b_0-a_0)/2^k},$$

яка характеризує похибку методу ділення відрізка навпіл і вказує на швидкість збіжності: *метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії, знаменник якої* $q=1/2$.

Оскільки $|x_k-x^*|\le b_k-a_k=|x_k-x_{k-1}|$, то обчислення закінчують, коли буде виконана нерівність $|x_k-x_{k-1}|<\delta$, де $\delta>0$ – задана точність.

Зауваження. Метод дихотомії застосовують тоді, коли вимагається висока надійність, а швидкість збіжності несуттєва.

Приклад. Знайти наближено $x=\sqrt[8]{2}$ з точністю $\delta=0{,}01$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max}=10$.

□ Задача еквівалентна відшуканню додатного кореня рівняння $x^8-2=0$ (знаходженню додатного нуля функції $f(x)=x^8-2$). За початковий проміжок локалізації $[a_0;b_0]$ можна взяти відрізок $[1;2]$, оскільки на кінцях цього відрізка функція $f(x)$ приймає значення з різними знаками: $f(1)<0$ і $f(2)>0$.

Для уточнення кореня застосуємо метод дихотомії.

Оцінимо число k поділів відрізка $[1;2]$, що необхідні для досягнення заданої точності $\delta=0{,}01$:

$$k>\log_2\left((b_0-a_0)/\delta\right)=\log_2\left((2-1)/0{,}01\right)=\log_2 100\,;\;\; k\geq 7$$

Очікуємо, що після сьомої ітерації знайдемо $\sqrt[8]{2}$ з потрібною точністю.

Оскільки $\delta=0{,}01$, тобто результат треба знайти з двома вірними значущими десятковими цифрами після коми, то проміжні обчислення виконуємо з чотирма десятковими знаками після коми (дві цифри запасні).

Результати обчислень подані у наступній таблиці:

k	1	2	3	4	5	6	7
a_k	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0625	1,0625	1,0781
b_k	2,0000	1,5000	1,2500	1,1250	1,1250	1,0937	1,0937
x_k	1,5000	1,2500	1,1250	1,0625	1,0937	1,0781	1,0859
Знак $f(a_k)$	-	-	-	-	-	-	-
Знак $f(b_k)$	+	+	+	+	+	+	+
Знак $f(x_k)$	+	+	+	-	+	-	-
$\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$	—	0,2500	0,1250	0,0625	0,0312	0,0156	0,0078

Отже, $x=\sqrt[8]{2}=x_7=1{,}09\pm 0{,}01$. ■

2.2.4. Метод простих ітерацій

Метод простих ітерацій застосовується до розв'язування рівняння вигляду $x = \varphi(x)$.

Виберемо довільно початкове наближення $x_0 \in [a;b]$ кореня x^* рівняння $x = \varphi(x)$ й обчислимо послідовно наступні наближення за схемою: $\boxed{x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots}$.

<u>Достатню умову збіжності</u> методу простих ітерацій установлює наступна

<u>теорема</u>. *Якщо в інтервалі, який містить корінь* x^* *рівняння* $x = \varphi(x)$ *і його послідовні наближення* $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots,$ *які обчислюються за формулою* $x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots,$ *виконується умова* $\boxed{|\varphi'(x)| \le q < 1}$, *то* $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x^*$, *тобто ітераційний процес збігається, і справджується нерівність* $\boxed{\left|x_k - x^*\right| \le q^k \left|x_0 - x^*\right|}$.

Оцінка похибки $\left|x_k - x^*\right| \le q^k \left|x_0 - x^*\right|$ показує, що *метод простих ітерацій збігається зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником* q. *Швидкість збіжності тим більша, чим менше* q.

Умова $|\varphi'(x)| < 1$ є достатньою для збіжності методу простих ітерацій: її виконання гарантує збіжність. Але ця умова не є необхідною: якщо вона не виконується, то це не означає, що ітераційний процес обов'язково буде розбігатись.

Метод простих ітерацій має прозору геометричну інтерпретацію. Побудуємо графіки функцій $y = x$ і $y = \varphi(x)$. Коренем рівняння $x = \varphi(x)$ є абсциса точки їх перетину. Від початкового наближення x_0 будуємо ламану, абсциси вершин якої є послідовними наближеннями $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ до кореня x^*.

На рис. 39 – 42 показано чотири випадки взаємного розташування ліній $y = x$, $y = \varphi(x)$ і відповідної ламаної, що описує ітераційний процес. Рис. 39 і 40 відповідають випадку $|\varphi'(x)| \le q < 1$, коли ітераційний процес збігається. Рис. 41 і 42 відповідають випадку $|\varphi'(x)|>1$, коли ітераційний процес розбігається.

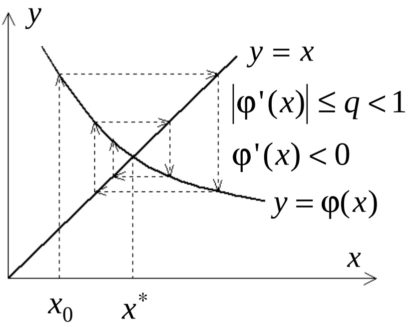

Рис. 39

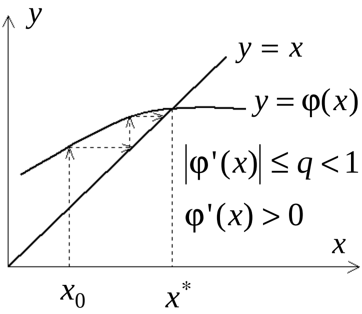

Рис. 40

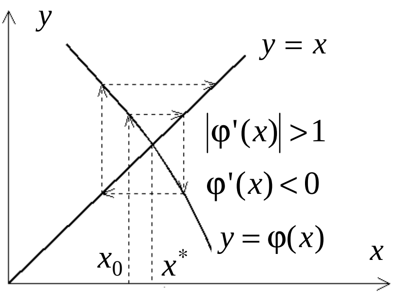

Рис. 41

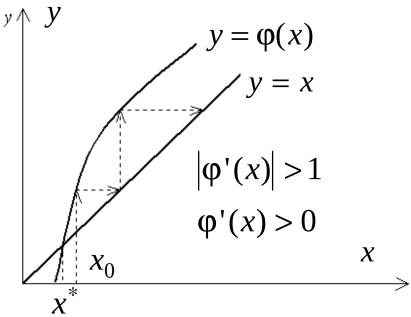

Рис. 42

Зауваження 1. Якщо не виконана ні одна з умов $|\varphi'(x)|<1$ чи $|\varphi'(x)|>1$, то ітераційний процес може зациклюватися.

Похибка методу і критерій закінчення. Якщо відома величина q в умові $|\varphi'(x)|\le q<1$, то застосовують оцінку похибки

$$\left|x_k - x^*\right| \le \left(q/(1-q)\right)\left|x_k - x_{k-1}\right|,\ k \ge 1,$$

з якої витікає наступний критерій закінчення ітераційного процесу: обчислення необхідно продовжувати до виконання нерівності

$\left|x_k - x_{k-1}\right| < \delta q/(1-q)$, , де $\delta > 0$ – задана точність.

Зауваження 2. Якщо $q \le 0{,}5$, то можна користуватись більш простим критерієм закінчення: $\left|x_k - x_{k-1}\right| < \delta$.

Зауваження 3. Надати рівнянню $f(x) = 0$ вигляду $x = \varphi(x)$ можна багатьма способами. Найпростіше безпосередньо додати x до обох частин рівняння $f(x) = 0$: $x = x + f(x)$. Часто застосовується ***модифікація методу простих ітерацій***: $\boxed{x = x + \alpha\, f(x)}$, де α – параметр, значення якого підбирається експериментально так, щоб справджувалася умова збіжності $|\,\varphi'(x)\,| < 1$.

Приклад. Методом простих ітерацій розв'язати рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = 2x^2\sqrt{x} + x^2 - 4$, з точністю $\delta = 0{,}001$ з додатковою вимогою $\left|f(x_k)\right| < \varepsilon$, де $\varepsilon = 0{,}01$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$.

□ Областю допустимих значень даного рівняння є закритий промінь $[0; +\infty)$.

Оскільки $f(1) = -1 < 0$, а $f(2) = 11{,}3 > 0$, тобто функція $f(x)$ на кінцях відрізка $[1; 2]$ має різні знаки, то всередині цього відрізка є корінь x^*. Так як для всіх $x \in (0; +\infty)$ похідна $f'(x)$ зберігає знак $f'(x) = 5x\sqrt{x} + 2x > 0$, то на відрізку $[1; 2]$ знаходиться єдиний корінь x^* рівняння.

Проведемо уточнення кореня методом простих ітерацій.

Перетворимо рівняння до вигляду $x = \varphi(x)$:

$$x^2 = 4\Big/\left(2\sqrt{x} + 1\right);\quad x = 2\Big/\sqrt{2\sqrt{x} + 1}.\ \text{Отже,}\ \ \varphi(x) = 2\Big/\sqrt{2\sqrt{x} + 1}.$$

На рис. 43 показано розташування кореня x^*. Видно, що корінь розміщений значно ближче до лівого кінця відрізка $[1; 2]$, ніж до правого. Тому за початкове наближення оберемо $x_0 = 1{,}1$.

Обчислимо першу та другу похідні функції $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)^{3/2}}; \quad \varphi''(x) = \frac{3\left(5\sqrt{x}+1\right)}{4x\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)^{5/2}}.$$

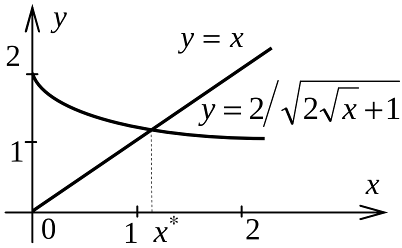

Рис. 43

Оскільки на відрізку $[1;2]$ друга похідна $\varphi''(x)$ додатна, то перша похідна $\varphi'(x)$ монотонно зростає на цьому відрізку і приймає найменше та найбільше значення на його кінцях:

$$\min_{x\in[a_0;b_0]} \varphi'(x) = \varphi'(1) = -0{,}192;$$

$$\max_{x\in[a_0;b_0]} \varphi'(x) = \varphi'(2) = -0{,}094.$$

Тоді справедлива оцінка $\left|\varphi'(x)\right| \le \max_{x\in[a_0;b_0]} \left|\varphi'(x)\right| = 0{,}192 < 1$.

Таким чином, умова збіжності $\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1$ справджується, причому $q = 0{,}192 \le 0{,}5$. Обчислення зупинимо, коли буде задовольнятися система нерівностей $|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0{,}001$ і $\left|f(x_k)\right| < \varepsilon = 0{,}01$ або досягнуто максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$. Отримані за формулою $x_k = \varphi(x_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots$ наближення показані у наступній таблиці:

k	1	2	3	4	5
x_k	1,13636	1,13011	1,13117	1,13099	
$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	0,03636	0,00625	0,00106	0,00018	
$\lvert f(x_k)\rvert$	0,0444	0,0075	0,0013	0,0002	

Оскільки $\delta = 0{,}001$ і $\varepsilon = 0{,}01$, то проміжні обчислення виконані з п’ятьма десятковими знаками після коми (дві-три цифри запасні). Характер збіжності відповідає рис. 39.

Отже, шукане значення кореня $x^* = x_4 = 1{,}131 \pm 0{,}001$ досягнуто після чотирьох ітерацій. ■

2.2.5. Метод Ньютона (метод дотичних, метод лінеаризації)

Найбільш ефективним методом розв'язування нелінійних рівнянь є ***метод Ньютона*** (***метод дотичних*** або ***метод лінеаризації***).

Нехай корінь $x^* \in [a;b]$, причому $f(a)\cdot f(b) < 0$, а функція $f(x)$ неперервна на відрізку локалізації $[a;b]$ і двічі неперервно диференційовна на інтервалі $(a;b)$, де друга похідна $f''(x)$ зберігає знак. За початкове наближення x_0 візьмемо той кінець відрізка $[a;b]$, для якого $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$ (знаки функції та другої похідної співпадають).

Покладемо, для визначеності, $f''(x) > 0$ і $f(b) > 0$. Тоді $x_0 = b$. Проведемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$ у точці $B_0(x_0; f(x_0))$ (рис. 44). Рівняння цієї дотичної:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Знайдемо точку перетину дотичної з віссю Ox, абсциса якої буде першим наближенням до кореня: $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

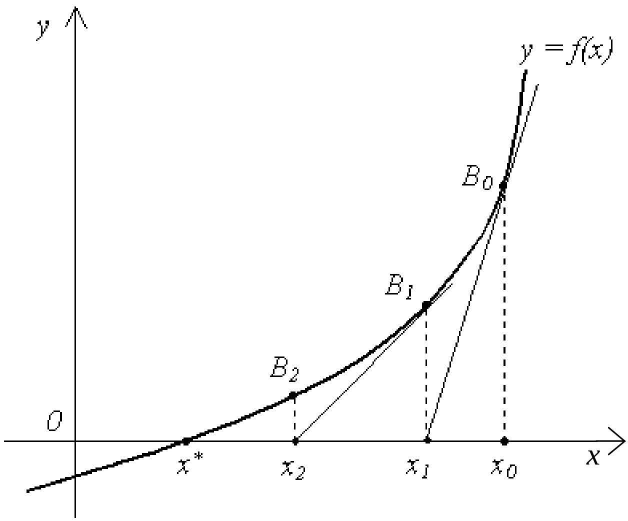

Рис. 44

У точці $B_1(x_1; f(x_2))$ знову проведемо дотичну до кривої й отримаємо наступне наближення. Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність наближень $x_0, x_1, ..., x_k, ...,$ де

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) / f'(x_{k-1})\,;\ k = 1, 2, ...}.$$

Це співвідношення є ***ітераційною формулою*** методу Ньютона.

Зауваження 1. Метод Ньютона можна розглядати як окремий випадок методу простих ітерацій, для якого $\varphi(x) = x - f(x) / f'(x)$. Тоді ***умова збіжності*** $|\varphi'(x)| < 1$ матиме вигляд $\boxed{|f \cdot f''| < (f')^2}$.

Достатню умову збіжності методу дотичних встановлює наступна

теорема. *Нехай* $[a;b]$ *– відрізок, який містить корінь* x^* *рівняння* $f(x) = 0$. *Якщо* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *причому* $f'(x)$ *і* $f''(x)$ *відмінні від нуля та зберігають знак на* $[a;b]$, *то виходячи з довільного початкового наближення* $x_0 \in [a;b]$, *що задовольняє умову* $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, *ітераційний процес методу Ньютона* $x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) / f'(x_{k-1})$ *(*$k = 1, 2, ...$*) монотонно збігається до єдиного на відрізку* $[a;b]$ *кореня* x^*, *який можна обчислити з будь-яким ступенем точності*.

Зауваження 2. Збіжність методу Ньютона суттєво залежить від того, чи достатньо близько до кореня взято початкове наближення.

Похибка методу. Для дослідження швидкості збіжності скористаємося поданням функції $f(x)$ в околі точки x_{k-1} за формулою Тейлора до членів другого порядку включно й отримаємо:

$$f(x^*) = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x^* - x_{k-1}) + (1/2) f''(\xi)(x^* - x_{k-1})^2 = 0,$$

де $\xi \in (x^*;\, x_{k-1})$. Звідси

$$f(x_{k-1}) = -f'(x_{k-1})(x^* - x_{k-1}) - (1/2) f''(\xi)(x^* - x_{k-1})^2.$$

Підставимо цей вираз у формулу методу Ньютона і дістанемо

$$x_{k-1} = x^* + (1/2)\big(f''(\xi) / f'(x_{k-1})\big)(x^* - x_{k-1})^2.$$

Тоді для похибки k -го наближення маємо

$$x_{k-1} - x^* = (1/2)\big(f''(\xi)/f'(x_{k-1})\big)(x^* - x_{k-1})^2 .$$

Позначимо $m = \min\limits_{x\in[a;b]} \left|f'(x)\right| \neq 0;\ M = \max\limits_{x\in[a;b]} \left|f''(x)\right|$. Тоді для абсолютної похибки k -го наближення дістанемо оцінку

$$\boxed{\left|x_k - x^*\right| \le \big(M/(2m)\big)\left|x_{k-1} - x^*\right|^2}.$$

Це означає, що *метод Ньютона має квадратичну швидкість збіжності*, тобто похибка чергового наближення пропорційна до квадрата похибки попереднього наближення.

Зауваження 3. На практиці звичайно користуються такою оцінкою похибки: $\boxed{|x_k - x^*| \le |x_k - x_{k-1}|}$. У кращих випадках число вірних десяткових знаків у черговому наближенні подвоюється, тобто процес збігається дуже швидко.

Критерій закінчення. Попередня оцінка дозволяє сформулювати такий критерій закінчення ітерацій: обчислення треба вести доти, доки не буде виконана нерівність $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, де $\delta > 0$ – задана точність.

Зауваження 4. Для підвищення стійкості ітераційного процесу застосовується наступна ***модифікація методу Ньютона***:

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - \alpha\, f(x_{k-1})/f'(x_{k-1});\ k = 1,2,...},$$

де α – параметр, значення якого підбирається експериментально (звичайно, з діапазону $\alpha = 0{,}1 \div 1$).

Приклад 1. Методом Ньютона з точністю $\delta = 0{,}001$ знайти додатний корінь x^* рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = e^{-x} - 2x^2 + 1$, з додатковою вимогою $\left|f(x_k)\right| < \varepsilon$, де $\varepsilon = 0{,}0001$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$.

□ Подамо дане рівняння у вигляді $e^{-x} = 2x^2 - 1$, дослідимо перетин графіків $y = e^{-x}$ і $y = 2x^2 - 1$ при $x \in [0;+\infty)$. У результаті одержимо, що додатний корінь x^* лежить на відрізку $[0{,}5;1]$.

(Проробіть це самостійно).

На кінцях відрізка $f(0{,}5) = 1{,}11 > 0$ і $f(1) = -0{,}63 < 0$.

Обчислимо першу та другу похідні функції $f(x)$:

$$f'(x) = -e^{-x} - 4x; \quad f''(x) = e^{-x} - 4.$$

На відрізку локалізації $[0{,}5;1]$ справджуються нерівності $f'(x) < 0$ і $f''(x) < 0$. Оскільки похідна $f'(x)$ зберігає знак, то на цьому проміжку функція $f(x)$ монотонна і рівняння має єдиний корінь. Оскільки виконується умова $f(1)f''(1) > 0$, то за початкове наближення візьмемо $x_0 = 1$. Обчислення зупинимо, коли буде задовольнятися система нерівностей $|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0{,}001$ і $|f(x_k)| < \varepsilon = 0{,}0001$ або досягнуто максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$. Виходячи з того, що $\delta = 0{,}001$ і $\varepsilon = 0{,}0001$, проміжні обчислення здійснюємо з п'ятьма десятковими знаками після коми (одна-дві цифри запасні).

Результати обчислень наведені у наступній таблиці.

Отже, шукане значення кореня $x^* = x_3 = 0{,}845 \pm 0{,}001$ досягнуто після трьох ітерацій. ■

k	0	1	2	3	4
x_k	1,00000	0,85528	0,84544	0,84540	
$\|x_k - x_{k-1}\|$	—	0,14472	0,00984	0,00005	
$f(x_k)$	-0,63212	-0,03784	-0,00017	-0,00000	
$f'(x_k)$	-4,36788	-3,84628	-3,81113	—	

<u>Приклад 2</u>. Методом Ньютона з точністю $\delta = 0{,}001$ розв'язати рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = 2/(x^2+1) - x^3 + 1$, з додатковою вимогою $|f(x_k)| < \varepsilon$, де $\varepsilon = 0{,}0001$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$.

(Розв'язати самостійно). Відповідь: $x^* = 1{,}218 \pm 0{,}001$.

2.3. Апроксимація функцій

2.3.1. Загальна постановка задачі апроксимації

Задача ***апроксимації*** (наближення) функцій полягає у тому, щоб для заданої функції $y = f(x)$ побудувати ***апроксимуючу*** (наближену) функцію (модель) $y = F(x)$, значення якої достатньо близькі до значень даної функції. ***Відхилення*** $R(x) = f(x) - F(x)$ характеризує якість наближення.

Наведемо найбільш типові ситуації, коли на практиці виникає така задача:

– функція $y = f(x)$ задана таблицею значень $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …, $y_n = f(x_n)$ для скінченної множини точок $x_0, x_1, ..., x_n$, а обчислення $y = f(x)$ треба зробити в інших точках;

– функція $y = f(x)$ задана аналітично, але обчислювати її за відповідними формулами важко.

Знаходження апроксимуючої функції $y = F(x)$ включає наступні етапи:

1) вибір ***критерію близькості*** вхідної $y = f(x)$ і наближеної $y = F(x)$ функцій (вимога збігу значень обох функцій на заданій сукупності точок $x_0, x_1, ..., x_n$ – ***інтерполяція*** (***колокація***), мінімізація середньоквадратичного відхилення – ***середньоквадратична апроксимація***, мінімізація максимального за модулем відхилення – ***рівномірне наближення*** та ін.);

2) вибір вигляду наближеної функції $y = F(x)$ – ***структурна ідентифікація*** (***параметризація моделі*** – визначення певної параметричної сім'ї функцій $y = F(x, a_0, a_1, ..., a_n)$, де $a_0, a_1, ..., a_n$ – невідомі коефіцієнти);

3) знаходження за вибраним критерієм оптимальних оцінок параметрів $a_0, a_1, ..., a_n$ – ***параметрична ідентифікація*** (вибір і реалізація методу обчислення з заданою точністю найкращих за певним критерієм значень коефіцієнтів наближеної функції).

Нехай на відрізку $[a; b]$ зміни аргументу x задано одновимірну сітку $\omega_n = \{x_k : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_n = b\}$ (з нерівномірним, у загальному випадку, кроком $h_k = x_k - x_{k-1} = \mathrm{var}$, $k = \overline{1,n}$), у всіх вузлах x_k, $k = \overline{0,n}$ якої відомі значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ вхідної функції $y = f(x)$. Звичайно припускають, що вузли x_k, $k = \overline{0,n}$ визначені точно.

Якщо знехтувати похибками у значеннях функції $y = f(x)$, то за критерій узгодженості з нею апроксимуючої залежності $y = F(x)$ можна вибрати вимогу, щоб у всіх вузлах сітки обидві функції давали однакові результати: $F(x_k) = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$.

Такий спосіб наближення називають ***інтерполяцією***, відповідну модель $y = F(x)$ – ***інтерполяційною функцією***, а точки $x_0, x_1, ..., x_n$ – ***вузлами інтерполяції***.

Якщо похибки задання вузлових значень функції $y = f(x)$ суттєві, то вимога обов'язкового збігу з ними відповідних значень моделі $y = F(x)$ втрачає сенс. Тоді апроксимуючу функцію $y = F(x)$ можна вибрати з умови, щоб ***відхилення*** (***нев'язки***) $f(x) - F(x)$ у вузлах сітки x_k, $k = \overline{0,n}$ були найменшими у певному розумінні. Маємо більш загальну постановку задачі апроксимації.

Якщо задача передбачає мінімізацію суми квадратів відхилень моделі $y = F(x)$ від вхідної функції $y = f(x)$ у всіх вузлах сітки: $\rho_2(f, F) = \sum_{k=0}^{n} \big(f(x_k) - F(x_k)\big)^2 \to \min$, то говорять про ***середньоквадратичну апроксимацію*** (наближення за ***методом найменших квадратів*** (***МНК***)).

Як правило, апроксимуюча функція $y = F(x)$ будується у вигляді узагальненого полінома $F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x)$, де $\{\varphi_i(x)\}$ – деяка фіксована система лінійно незалежних базисних функцій; $a_0, a_1, ..., a_m$ – невідомі коефіцієнти. Базисними системами $\{\varphi_i(x)\}$ найчастіше служать степеневі, тригонометричні, дробово-раціональні, експоненціальні, логарифмічні та інші функції.

2.3.2. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Для практики вельми важливим випадком є наближення функції $f(x)$ інтерполяційним многочленом $P_n(x)$, що співпадає з $f(x)$ тільки на деякій системі точок $x_k \in [a;b]$, $k=\overline{0,n}$, а в інших точках $x \in [a;b]$ лише наближено дорівнює $f(x)$.

Нехай значення функції $y = f(x)$ задані в $n+1$ різних точках $x_k \in [a;b]$, причому $a = x_0$, $b = x_n$, і $y_k = f(x_k)$ $(k=\overline{0,n})$.

Розглядається <u>інтерполяційна задача</u>: побудувати многочлен $P_n(x)$ (степеня не вище за n), значення якого в $n+1$ різних точках $x_0, x_1, ..., x_n$ співпадали би зі значеннями в них функції $f(x)$:

$$P_n(x_k) = y_k, \quad \text{де} \quad y_k = f(x_k), \quad k=\overline{0,n}.$$

<u>Геометричний зміст</u>: знайти такий многочлен $P_n(x)$, графік якого проходить через задані точки $M_0(x_0;y_0)$, $M_1(x_1;y_1)$, …, $M_n(x_n;y_n)$, що лежать на графіку функції $y = f(x)$ (рис. 45).

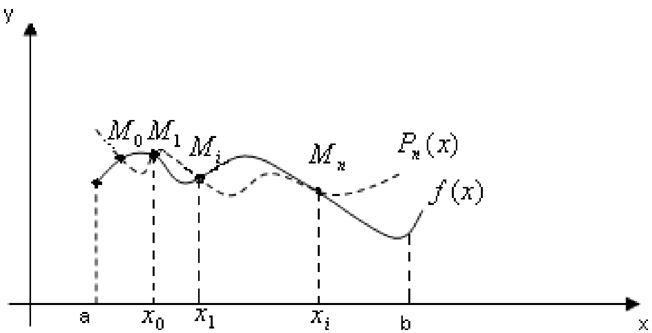

Рис. 45

Якщо інтерполяційний многочлен подати в стандартному вигляді $P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, то невідомі коефіцієнти a_0, a_1, …, a_n можна знайти, розв'язуючи систему

$$a_0 + a_1 x_k + \ldots + a_n x_k^n = y_k; \quad k = \overline{0,n}.$$

стандартними процедурами. Але така побудова цього <u>єдиного</u> многочлена $P_n(x)$ при великому числі вузлів інтерполяції викликає значні труднощі, оскільки вказана система має високий порядок.

Розглянемо побудову шуканого многочлена у формі так званого інтерполяційного полінома Лагранжа.

Нехай досліджувана функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$ своїми значеннями в $n+1$ (у загальному випадку, нерівновіддалених) вузлах $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ і $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$.

Наближену функцію $y = F(x)$ відшукуємо у вигляді інтерполяційного многочлена $F(x) = L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k P_{n,k}(x)$, де $P_{n,k}(x)$ – допоміжний поліном n-го степеня (***коефіцієнт Лагранжа***) такий, що

$$P_{n,k}(x_j) = \begin{cases} 0, & k \neq j; \\ 1, & k = j. \end{cases}$$

Оскільки точки $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ є коренями многочлена $P_{n,k}(x)$, то його можна записати у формі

$$P_{n,k}(x) = A_k (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n).$$

Приймемо $x = x_k$ і враховуючи, що $P_{n,k}(x_k) = 1$, дістанемо

$$1 = A_k (x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n),$$

звідки $A_k = 1/\big((x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)\big)$.

Тоді коефіцієнт Лагранжа $P_{n,k}(x)$ набуває вигляду

$$P_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)},$$

а інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ можна подати у формі:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}},$$

яку називають ***інтерполяційним многочленом*** (***формулою***) ***Лагранжа***.

Коефіцієнти Лагранжа $P_{n,k}(x)$ і відповідний інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ можна записати у стислому вигляді:

$$P_{n,k}(x)=\prod_{j\neq k}\frac{x-x_j}{x_k-x_j},\ k=\overline{0,n};\quad \boxed{L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\prod_{j\neq k}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}}.$$

Для $n=1$ формула Лагранжа має вигляд

$$L_1(x)=y_0\,(x-x_1)/(x_0-x_1)+y_1\,(x-x_0)/(x_1-x_0)$$

і називається ***лінійною інтерполяцією*** за Лагранжем.

Для $n=2$ отримаємо формулу ***квадратичної інтерполяції*** за Лагранжем:

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+$$
$$+\,y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Приклад. Для функції $y=f(x)$, що задана таблицею

k	0	1	2	3
x_k	0	0,5	1	2
y_k	1	2	3	4

побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа.

□ Степінь многочлена Лагранжа при $n+1$ вузлах дорівнює n. Для нашого прикладу $n=3$, тобто многочлен Лагранжа має третій порядок. Конкретизуємо формулу $L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\prod_{j\neq k}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$:

$$L_3(x)=\frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+\frac{y_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$
$$+\frac{y_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{y_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Підставимо значення з таблиці в отриману формулу:

$$L_3(x) = \frac{1\cdot(x-0{,}5)(x-1)(x-2)}{(0-0{,}5)(0-1)(0-2)} + \frac{2\cdot(x-0)(x-1)(x-2)}{(0{,}5-0)(0{,}5-1)(0{,}5-2)} +$$

$$+\frac{3\cdot(x-0)(x-0{,}5)(x-2)}{(1-0)(1-0{,}5)(1-2)} + \frac{4\cdot(x-0)(x-0{,}5)(x-1)}{(2-0)(2-0{,}5)(2-1)} =$$

$$= (31/3)x^3 - (63/2)x^2 + (139/6)x + 1. \quad \blacksquare$$

Зауваження. Абсолютна похибка інтерполяції в середньому буде тим більша, чим ближче лежить точка x до лівого чи правого кінця відрізка $[a;b]$. Якщо ж використовувати інтерполяційний поліном для наближеного знаходження значення функції поза відрізком $[a;b]$ (для екстраполяції), то похибка зростає дуже суттєво.

2.3.3. Апроксимація за методом найменших квадратів

Наближення за методом найменших квадратів часто застосовують для згладжування табличних функцій, отриманих у результаті експерименту, а також для зменшення обсягу інформації про табличні функції при невисоких вимогах до точності подання їх значень.

Застосування інтерполяції в цьому випадку невиправдане, оскільки значення вхідної функції у вузлах $y_k = f(x_k)$ є неточними. Інтерполяційна формула повторить всі похибки в експериментальних даних. Крім того, збіг значень у вузлах не гарантує близькості характерів поведінки вхідної $y = f(x)$ та апроксимуючої $y = F(x)$ функцій.

Нехай вхідна функція $y = f(x)$ задана таблицею значень $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …, $y_n = f(x_n)$ для скінченної множини точок $x_0, x_1, ..., x_n$. Припускаємо, що значення функції y_k, $k = \overline{0,n}$ відомі з похибками.

Розглянемо застосування методу найменших квадратів у поширеному на практиці випадку лінійної за невідомими параметрами апроксимуючої функції $y = F(x)$. Нехай наближена функція подана у вигляді узагальненого многочлена $F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x)$, де

$\{\varphi_i(x)\}$ – деяка фіксована система лінійно незалежних базисних функцій; $a_0, a_1, ..., a_m$ – невідомі коефіцієнти.

Згідно з МНК оптимальні значення коефіцієнтів $a_0, a_1, ..., a_m$ визначимо з умови, щоб сума квадратів відхилень (нев'язок) $\rho_2(a_0, a_1, ..., a_m)$ значень $F(x_k)$, $k = \overline{0, n}$ наближеної функції від відповідних значень $f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$ вхідної функції – була мінімальною:

$$\rho_2(a_0, a_1, ..., a_m) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x_k) - F(x_k) \right)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(f(x_k) - \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x_k) \right)^2 \to \min .$$

У випадку лінійно параметризованої моделі $y = F(x)$ сума $\rho_2(a_0, a_1, ..., a_m)$ є квадратичною функцією відносно шуканих коефіцієнтів, що має єдиний екстремум – мінімум. Оскільки в точці мінімуму всі частинні похідні $\partial\rho_2 / \partial a_j$, $j = \overline{0, m}$ перетворюються в нуль, то, використовуючи цей факт – необхідні умови екстремуму, дістанемо систему рівнянь ($m+1$)-го порядку

$$\sum_{k=0}^{n} \left(f(x_k) - \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x_k) \right) \varphi_j(x_k) = 0, \quad j = \overline{0, m}$$

або

$$\sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) \right) a_i = \sum_{k=0}^{n} \varphi_j(x_k) f(x_k), \quad j = \overline{0, m} .$$

Точність апроксимації за МНК оцінюється на основі мінімального значення суми $\rho_2(a_0, a_1, ..., a_m)$ або відповідного ***середньоквадратичного відхилення*** $\boxed{\Delta y_s = \sqrt{\rho_2(a_0, a_1, ..., a_m) / (n+1)}}$.

Нехай за апроксимуючу функцію взято звичайний алгебраїчний многочлен m-го степеня

$$F(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m .$$

Тоді після рівносильних перетворень система необхідних умов екстремуму відносно матриці-стовпця $X = (a_0 \ a_1 \ ... \ a_m)^T$ шуканих коефіцієнтів набуває стандартного вигляду $AX = B$:

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1\sum_{k=0}^{n} x_k + \ldots + a_m\sum_{k=0}^{n} x_k^m = \sum_{k=0}^{n} f(x_k); \\ a_0\sum_{k=0}^{n} x_k + a_1\sum_{k=0}^{n} x_k^2 + \ldots + a_m\sum_{k=0}^{n} x_k^{m+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k f(x_k); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\sum_{k=0}^{n} x_k^m + a_1\sum_{k=0}^{n} x_k^{m+1} + \ldots + a_m\sum_{k=0}^{n} x_k^{2m} = \sum_{k=0}^{n} x_k^m f(x_k). \end{cases}$$

Елементи a_{ij} $(i, j = \overline{0,m})$ квадратної матриці системи A і компоненти b_i $(i = \overline{0,m})$ матриці-стовпця правих частин B обчислюються за формулами:

$$a_{ij} = \sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j} \ (i, j = \overline{0,m}); \ \ b_i = \sum_{k=0}^{n} x_k^i f(x_k). \ (i = \overline{0,m}).$$

Після визначення коефіцієнтів і правих частин лінійну систему $AX = B$ можна розв`язати будь-яким стандартним методом.

Найпростішою (при $m = 1$) є залежність $F(x) = a_0 + a_1 x$ – ***лінійна регресія***. Близькість експериментального розподілу точок $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, …, $M_n(x_n; y_n)$ до ***лінії регресії*** – прямої $y = a_0 + a_1 x$ легко проглядається після їх побудови в одній прямокутній системі координат.

Для лінійної регресії $F(x) = a_0 + a_1 x$ система необхідних умов екстремуму суми квадратів відхилень $\rho_2(a_0, a_1)$ набуває вигляду

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} f(x_k); \\ a_0\sum_{k=0}^{n} x_k + a_1\sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \sum_{k=0}^{n} x_k f(x_k). \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, дістанемо оптимальні МНК-оцінки коефіцієнтів a_0 і a_1.

<u>Приклад</u>. Функція $f(x)$ задана таблицею

k	0	1	2	3
x_k	-3	-1	1	3
$y_k = f(x_k)$	-4,5	2,5	-2	-1,5

Знайти апроксимацію цієї функції $f(x)$ лінійною регресією $F(x) = a_0 + a_1 x$ за методом найменших квадратів. Обчислити значення отриманої лінійної регресії $y = a_0 + a_1 x$ на кінцях відрізка $[-3;4]$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення Δy_s лінійної регресії від заданих значень вхідної функції.
Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Застосуємо лінійну апроксимацію $F(x) = a_0 + a_1 x$. Проведемо попередні обчислення і заповнимо таблицю

k	x_k	$f(x_k)$	x_k^2	$x_k f(x_k)$
0	-3	-4,5	9	13,5
1	-1	2,5	1	-2,5
2	1	-2	1	-2
3	3	-1,5	9	-4,5
$\sum$	0	-5,5	20	4,5

Складемо і розв'яжемо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a_0(3+1) + a_1 \cdot 0 = -5{,}5; \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 20 = 4{,}5; \end{cases} \begin{cases} 4a_0 = -5{,}5; \\ 20a_1 = 4{,}5; \end{cases} \begin{cases} a_0 = -1{,}375; \\ a_1 = 0{,}225. \end{cases}$$

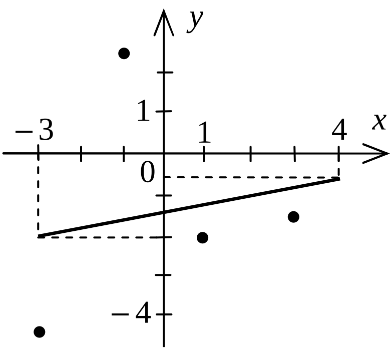

Рис. 46

Отже, $y = -1{,}375 + 0{,}225x$ – шукана лінійна регресія.

Обчислимо значення отриманої лінійної апроксимації та складемо відповідну таблицю:

x	-3	4
$y = a_0 + a_1 x$	-2,05	-0,475

Побудуємо графік – лінію регресії $y = -1{,}375 + 0{,}225x$ (рис. 46).

Знайдемо середньоквадратичне відхилення Δy_s:

$$\Delta y_s = \sqrt{\frac{1}{n+1}\rho_2(a_0,a_1)} = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(y_k - a_0 - a_1 x_k)^2} =$$

$$= (1/2)\Big((-4{,}5 + 2{,}05)^2 + (2{,}5 + 1{,}6)^2 + (-2 + 1{,}15)^2 +$$

$$+ (-1{,}5 + 0{,}7)^2\Big)^{1/2} = 2{,}4584. \ ■$$

2.4. Чисельне диференціювання та інтегрування функцій

2.4.1. Чисельне диференціювання

При числовому розв'язуванні багатьох практичних задач часто виникає потреба в обчисленні похідних різних порядків функції $y = f(x)$, що задана таблично або складним аналітичним виразом, безпосередньо диференціювати який досить важко. У таких випадках застосовуються наближені методи диференціювання.

Нехай на сітці $\{x_k : a = x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_n = b\}$ (з нерівномірним, у загальному випадку, кроком $h_k = x_k - x_{k-1} = \text{var}$, $k = \overline{1,n}$) у всіх вузлах x_k, $k = \overline{0,n}$ відомі значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ вхідної функції $y = f(x)$. Необхідно обчислити похідну $f^{(m)}(x_*)$ у точці $x_* \in [a;b]$ та оцінити абсолютну похибку Δ.

Знайдемо наближення $f(x) \approx F(x)$, тобто подамо вхідну функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = F(x) + R(x)$, де за апроксимуючу функцію $F(x)$ можна взяти, наприклад, часткову суму ряду Тейлора чи інтерполяційний многочлен, а остаточний член $R(x)$ визначає похибку апроксимації.

Продиференціюємо останню рівність m разів, покладемо $x = x_*$ і дістанемо $f^{(m)}(x_*) = F^{(m)}(x_*) + R^{(m)}(x_*)$, тобто $f^{(m)}(x_*) \approx F^{(m)}(x_*)$. Величина $R^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - F^{(m)}(x)$, що характеризує відхилення наближеного значення похідної від точного, називається ***похибкою апроксимації похідної***.

Нехай сітка має сталий крок $h = x_k - x_{k-1} = const$. Тоді похибка $R^{(m)}$ залежить від h і її записують у вигляді $R^{(m)} = O(h^r)$ (тобто $\left|R^{(m)}\right| < Ch^r$, де $C > 0$ і C не залежить від h). Показник степеня r називається ***порядком похибки апроксимації*** похідної (***порядком точності апроксимації***).

Розглянемо побудову наближених формул для $f'(x)$ за допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа з рівномірним розміщенням вузлів.

Запишемо інтерполяцію многочленом Лагранжа другого порядку (за ***шаблоном*** з трьох вузлів x_{k-1}, x_k і x_{k+1})

$$L_2(x) = \big((x - x_k)(x - x_{k+1})y_{k-1} - 2(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})y_k +$$
$$+ (x - x_{k-1})(x - x_k)y_{k+1}\big)\big/(2h^2)$$

з залишковим членом

$$R_2(x) = f(x) - L_2(x) = (1/3!)f'''(c(x))(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1}) \;.$$

Тоді $f'(x) = L'_2(x) + R'_2(x) = \big((2x - x_k - x_{k+1})y_{k-1} -$

$$- 2(2x - x_{k-1} - x_{k+1})y_k + (2x - x_{k-1} - x_k)y_{k+1}\big)\big/(2h^2) + R'_2(x)\,;$$

$$R'_2(x) = (1/3!)f'''(c(x))\big(3x^2 - 2(x_{k-1} + x_k + x_{k+1})x +$$
$$+ x_{k-1}x_k + x_k x_{k+1} + x_{k-1}x_{k+1}\big)$$

Як правило, формули чисельного диференціювання застосовують для обчислення похідних у вузлах x_k, $k = \overline{0,n}$. Підставляючи в одержані вирази послідовно значення x_{k-1}, x_k і x_{k+1}, дістанемо:

$$f'(x_{k-1}) = (-3y_{k-1} + 4y_k - y_{k+1})\big/(2h) + (h^2/3)f'''(c_{k-1})\,;$$

$$f'(x_k) = (-y_{k-1} + y_{k+1})\big/(2h) - (h^2/6)f'''(c_k)\,;$$

$$f'(x_{k+1}) = (y_{k-1} - 4y_k + 3y_{k+1})\big/(2h) + (h^2/3)f'''(c_{k+1})\,,$$

де останні доданки відображають похибку апроксимації похідної; c_{k-1}, c_k і c_{k+1} – деякі невідомі точки з інтервалу $(x_{k-1}; x_{k+1})$.

Зауваження. При непарному числі вузлів інтерполяції та парному степені поліному Лагранжа найбільш прості вирази і найменші коефіцієнти у залишкових членах одержуються для похідної у центральному вузлі. Указані співвідношення є ***апроксимаціями похідної за допомогою центральних різниць***.

Порядок точності скінченно-різницевих апроксимацій похідної зростає зі збільшенням числа вузлів, за якими вони будуються.

Можна оцінити абсолютну похибку апроксимації похідної й уточнити наближене значення останньої, не змінюючи шаблону, якщо застосувати ***метод Рунге*** (***метод подвоєння кроку***).

Нехай $f'(x)$ – похідна, наближене значення якої треба знайти; $F'(x,h)$ – її скінченно-різницева апроксимація на рівномірній сітці з кроком h, що має r-й порядок точності; $R'(x,h)$ – похибка апроксимації. Тоді маємо ***першу формулу Рунге***

$$\boxed{\Delta_1 \approx \left|F'(x,h)-F'(x,2h)\right| \big/ (2^r-1)}$$

і ***другу формулу Рунге***

$$\boxed{f'(x)=F'(x,h)+\left(F'(x,h)-F'(x,2h)\right)\big/(2^r-1)+O(h^{r+1})},$$

що дозволяють за двома наближеннями похідної з кроками h і $2h$ з r-м порядком точності оцінити абсолютну похибку апроксимації $\Delta_1 = |R'(x,h)|$ та знайти уточнене значення цієї похідної з підвищеним порядком точності $r+1$.

Приклад. Функція $y=f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$, де $a=1$ і $b=3{,}1$, наступною таблицею значень $y_k=f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$ ($n=7$) у рівновіддалених вузлах з кроком $h=(b-a)/n=0{,}3$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
y_k	-1,15	-1,5	-1,6	-1,8	-1,7	-1,75	-2,05	-2,3

Знайти наближене значення $f'(x_3)$ похідної $f'(x)$ у вузлі $x_3=1{,}9$ за формулою $f'(x_k)\approx F'(x_k,h)=(-y_{k-1}+y_{k+1})\big/(2h)$, що має порядок точності $r=2$: $R'(x_k,h)=-(h^2/6)f'''(c_k)$, з кроком $h = 0{,}3$. Користуючись методом Рунге, оцінити абсолютну похибку апроксимації $\Delta_1 = |R'(x_3,h)|$ та уточнити значення похідної $f'(x_3)$.

<u>Вказівка</u>. Похибками у вхідних даних і похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до трьох десяткових знаків після коми.

□ При кроці $h = 0{,}3$ маємо:

$$f'(x_3) \approx F'(x_3,h) = (-y_2 + y_4)/(2h) = -0{,}167.$$

Згідно з методом Рунге обчислимо наближене значення $f'(x_3)$ за тією ж формулою при подвоєному кроці $2h = 0{,}6$:

$$f'(x_3) \approx F'(x_3,2h) = (-y_1 + y_5)/(4h) = -0{,}208.$$

Далі знайдемо оцінку абсолютної похибки Δ_1 і уточнене значення похідної:

$$\Delta_1 = |R'(x_3,h)| \approx \left|\left(F'(x_3,h) - F'(x_3,2h)\right)/(2^r - 1)\right| = \left|\left(-0{,}167 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 0{,}208\right)/(2^2 - 1)\right| = 0{,}014; \quad f'(x_3) \approx F'(x_3,h) + \left(F'(x_3,h) - \right.$$

$$\left. - F'(x_3,2h)\right)/(2^r - 1) = -0{,}167 + 0{,}014 = -0{,}153. \quad ■$$

2.4.2. Чисельне інтегрування функцій. Основні поняття

При математичному моделюванні різноманітних процесів часто виникає потреба в наближених обчисленнях визначеного інтеграла $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, якщо: а) підінтегральна функція $f(x)$ задана графічно, таблично чи іншим неаналітичним способом; б) первісна $F(x)$ не є елементарною функцією; в) первісна $F(x)$ хоч і є елементарною функцією, але знаходження її значень досить громіздке.

Нехай необхідно знайти наближене значення $I_n(f)$ визначеного інтеграла $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, де $f(x)$ – задана функція.

В основі ***чисельних наближених методів*** розв'язування цієї задачі лежить подання визначеного інтеграла як границі інтегральної суми

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\max \Delta x_k \to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)h_k ,$$

де $h_k = x_k - x_{k-1} = \mathrm{var}$ – нерівномірний крок сітки (розбиття) $\omega_n = \{x_k : a = x_0 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b\}$; $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k=\overline{1,n}$, причому точки x_k і ξ_k вибираються довільно.

Якщо наближення $I_n(f)$ до інтеграла $I(f)$ будувати у вигляді аналогічної суми, тобто лінійної комбінації скінченного числа значень підінтегральної функції $f(x)$, то дістанемо ***квадратурну формулу*** $\boxed{I(f)\approx I_n(f)=\sum_{k=0}^n c_k f(x_k)}$, де x_k, $k=\overline{0,n}$ – ***вузли***; c_k, $k=\overline{0,n}$ – ***ваги*** (***коефіцієнти***).

Методи ***чисельного інтегрування*** різняться способами вибору вузлів x_k і ваг c_k, $k=\overline{0,n}$, а також наближень для значень підінтегральної функції у вузлах $f(x_k)$. Вибрані значення повинні, по-перше, мінімізувати (у певному смислі) ***похибку*** (***залишковий член***) $R_n(f)=I(f)-I_n(f)$ квадратурної формули, а по-друге, забезпечити достатню швидкість збіжності обчислювальної процедури.

Нехай вузли утворюють сітку ω_n зі сталим кроком h. Тоді похибка $R_n(f)$ залежить від h і її можна подати у вигляді $R_n(f)=O(h^r)$, тобто $|R_n(f)|< Ch^r$, де $C>0$ і C не залежить від h. Показник степеня r називається ***порядком точності за кроком*** h квадратурної формули. Квадратурна формула повинна бути такою, щоб для довільної інтегровної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ при $n\to\infty$ наближене значення $I_n(f)$ інтеграла збігалося до його точного $I(f)$. Тобто, щоб виконувалася умова $r>0$.

Далі розглянемо найбільш прості квадратурні формули, що у випадку невід'ємної підінтегральної функції $f(x)\ge 0$ мають ясний геометричний зміст – наближене обчислення площі $S=\int_a^b f(x)\,dx$

відповідної криволінійної трапеції при рівномірному розбитті відрізка $[a;b]$, $a<b$ зі сталим ***кроком*** $\Delta x_i = h = (b-a)/n$, $i=\overline{1,n}$.

2.4.3. Метод прямокутників

Нехай треба наближено обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, де функція $f(x)$ невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$ (рис. 47).

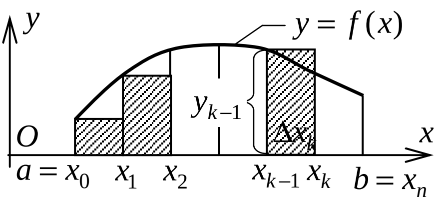

Рис. 47

Будемо спиратися на геометричний зміст інтеграла: $\int_a^b f(x)\,dx = S$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин з кроком $h=(b-a)/n$ точками $x_0=a$, $x_k = x_{k-1}+h$, $k=\overline{1,n}$. Кожну k-у частинну криволінійну трапецію наближено замінимо прямокутником з основою $\Delta x_k = h$ і висотою $y_{k-1} = f(x_{k-1})$, що є значенням функції $y=f(x)$ у крайній лівій точці елементарного відрізка $[x_{k-1};x_k]$. Площа цього прямокутника $\Delta S_k = y_{k-1}h$. Тоді площа S всієї криволінійної трапеції:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}h = h\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\,.$$

Маємо ***формулу лівих прямокутників*** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})+R_n}$$, де R_n – похибка.

Якщо за висоти частинних прямокутників узяти значення функції $y=f(x)$ у крайніх правих точках елементарних відрізків $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, то дістанемо ***формулу правих прямокутників***:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)(y_1+y_2+\ldots+y_n)+R_n}$$, де R_n – похибка.

Якщо похідна $f'(x)$ існує й обмежена на відрізку $[a;b]$, то істинну абсолютну похибку $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за цими формулами можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ_n^* за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^2/(2n))M_1},$$

де $M_1 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$. Тобто, формули прямокутників характеризуються першим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 1$.

2.4.4. Метод трапецій

Як і в попередньому пункті, розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин. Сполучимо відрізком кінці кожної частинної дуги даної лінії $y = f(x)$, як показано на рис. 48.

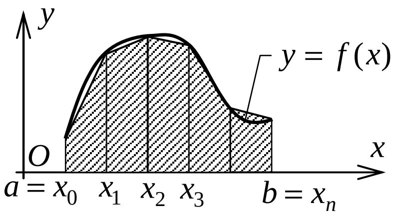

Рис. 48

Кожну k-у частинну криволінійну трапецію наближено замінимо звичайною трапецією з висотою $\Delta x_k = h$ і основами $y_{k-1} = f(x_{k-1})$ та $y_k = f(x_k)$, що має площу $\Delta S_k = (y_{k-1} + y_k)h/2$.

Тоді площа S всієї криволінійної трапеції

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} (y_{k-1} + y_k)h/2 = h\sum_{k=1}^{n} (y_{k-1} + y_k)/2.$$

Дістаємо ***формулу трапецій*** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)\cdot(y_0/2 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + y_n/2) + R_n},$$

де R_n – похибка.

Якщо друга похідна $f''(x)$ існує й обмежена на відрізку $[a;b]$, то істинну абсолютну похибку $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за формулою трапецій можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ_n^* за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^3/(12n^2))M_2},$$

де $M_2 = \max_{x\in[a;b]} |f''(x)|$. Тобто, формула трапецій характеризується другим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 2$.

2.4.5. Метод Симпсона (парабол)

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на парне число $n = 2m$ рівних частин з кроком $h = (b-a)/n$ точками $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ... , $x_{2i-1} = x_{2i-2} + h$, $x_{2i} = x_{2i-1} + h$, ... , $x_n = b$, $i = \overline{1,m}$.

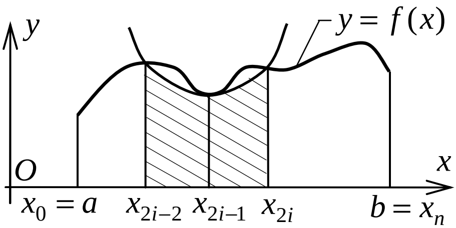

Рис. 49

Як показано на рис. 49, дві сусідні елементарні криволінійні трапеції, що спираються на спарені відрізки $[x_{2i-2}; x_{2i-1}]$ і $[x_{2i-1}; x_{2i}]$, наближено замінимо однією криволінійною трапецією, обмеженою зверху дугою вертикальної параболи $y = A_i(x - x_{2i-1})^2 + B_i(x - x_{2i-1}) + C_i$. Ця парабола проходить через три верхні вершини даних частинних трапецій, що породжує лінійну алгебраїчну систему, з якої однозначно знаходяться невідомі коефіцієнти A_i, B_i, C_i:

$$A_i = (y_{2i-2} - 2y_{2i-1} + y_{2i})\big/(2h^2);\quad B_i = (y_{2i} - y_{2i-2})\big/(2h);$$

$$C_i = y_{2i-1}.$$

Тоді площа ΔS_{pi} елементарної параболічної трапеції:

$$\Delta S_{pi} = \int_{-h}^{h} \Big(A_i(x - x_{2i-1})^2 + B_i(x - x_{2i-1}) + C_i\Big)\, dx = (h/3)\times$$

$$\times(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}).$$

Підсумовуючи ΔS_{pi} за всіма $i=\overline{1,m}$, дістаємо наближений вираз для площі S всієї криволінійної трапеції:

$$S\approx\sum_{i=1}^{m}\Delta S_{pi}=\sum_{i=1}^{m}(h/3)(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}).$$

Маємо ***формулу Симпсона*** (***формулу парабол***) для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\boxed{\begin{gathered}\int_a^b f(x)\,dx=((b-a)/(3n))\cdot(y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+\\ +2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2}))+R_n,\end{gathered}}$$

де R_n – похибка.

Якщо на відрізку $[a;b]$ існує обмежена четверта похідна $f^{IV}(x)$, то істинна абсолютна похибка $\Delta_n=|R_n|$ обчислення інтеграла за формулою парабол оцінюється граничною абсолютною похибкою Δ_n^* так:

$$\boxed{\Delta_n=|R_n|\le\Delta_n^*=((b-a)^5/(180n^4))M_4}, \text{ де } M_4=\max_{x\in[a;b]}|f^{IV}(x)|.$$

Тобто, формула Симпсона характеризується четвертим порядком точності: $\Delta_n^*=O(h^r)$, де $r=4$.

Зауваження 1. Усі розглянуті формули тим точніші, чим густіше розбиття: $R_n\to 0$ при $n\to\infty$. При одному й тому ж значенні n формула Симпсона – найбільш точна з них. У загальному випадку, ефективність тієї чи іншої квадратурної формули залежить від поведінки функції $f(x)$ та її похідних на відрізку інтегрування.

Приклад 1. Обчислити наближено визначений інтеграл $I=\int_0^1(x+2)^{-1}dx$, застосовуючи при $n=4$ формули: а) лівих прямокутників, б) трапецій, в) Симпсона. Оцінити допущені абсолютні похибки. Обчислення проводити з округленням до п’ятого десяткового знака після коми. Одержані результати порівняти з точним значенням інтеграла, обчисленим за формулою Ньютона – Лейбниця: $I=\int_0^1 (x+2)^{-1}dx = \ln|x+2|\Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 \approx 0{,}40547$.

□ Розіб'ємо заданий відрізок інтегрування [0;1] на $n=4$ рівних частин точками $x_0=a=0$, $x_1=0{,}25$, ..., $x_4=b=1$. Обчислимо значення y_0, y_1, ..., y_4 підінтегральної функції $y=1/(x+2)$, що відповідають указаним точкам, і запишемо результат у таблицю:

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0,25	0,5	0,75	1
y_k	0,5	0,44444	0,4	0,36364	0,33333

а) Знайдемо значення інтеграла за допомогою формули лівих прямокутників:

$$I_n \approx ((b-a)/4)(y_0+y_1+y_2+y_3) = ((1-0)/4)\times$$
$$\times(0{,}5+0{,}44444+0{,}4+0{,}36364) = 1{,}70808/4 \approx 0{,}42702.$$

Знайдемо і порівняємо граничну Δ_n^* та істинну $\Delta_n = |I - I_n|$ абсолютні похибки.

Щоб обчислити граничну абсолютну похибку Δ_n^*, знайдемо похідну підінтегральної функції: $y' = -1/(x+2)^2$. Найбільше за модулем значення цієї похідної на відрізку [0;1] дорівнює $M_1 = |y'(0)| = 0{,}25$. Тоді $\Delta_n^* = ((1-0)^2/(2\cdot 4))\cdot 0{,}25 \approx 0{,}03125$.

Істинна абсолютна похибка $\Delta_n = |0{,}40547 - 0{,}42702| \approx$ $\approx 0{,}02155$. Можемо переконатися, що істинна похибка не перевищує граничної: $\Delta_n = 0{,}02155 < 0{,}03125 = \Delta_n^*$.

б) Обчислимо наближене значення інтеграла за формулою трапецій:

$$I_n \approx ((b-a)/4)\cdot(y_0/2+y_1+y_2+y_3+y_4/2) = ((1-0)/4)\times$$
$$\times(0{,}5/2+0{,}44444+0{,}4+0{,}36364+0{,}33333/2) \approx 0{,}40619.$$

Знайдемо граничну Δ_n^* та істинну Δ_n абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y''(x) = 6/(x+2)^4; \quad M_2 = |y''(0)| = 0{,}25;$$

$$\Delta_n^* = ((1-0)^3/(12\cdot 4^2))\cdot 0{,}25 \approx 0{,}0013;$$

$$\Delta_n = |\,0{,}40547 - 0{,}40619\,| \approx 0{,}00072; \;\; \Delta_n < \Delta_n^*.$$

в) Обчислимо наближене значення визначеного інтеграла за формулою Симпсона:

$$I_n \approx ((b-a)/(3\cdot 4))\cdot (y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) =$$

$$= ((1-0)/(3\cdot 4))\cdot (0{,}5 + 0{,}33333 + 4\cdot (0{,}44444 +$$

$$+ 0{,}36364) + 2\cdot 0{,}4) = 4{,}86565/12 \approx 0{,}40547$$

Знайдемо граничну Δ_n^* та істинну Δ_n абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y^{IV} = 24/(x+2)^5; \quad M_4 = |y^{IV}(0)| = 0{,}75;$$

$$\Delta_n^* = ((1-0)^5/(180\cdot 4^4))\cdot 0{,}75 \approx 0{,}00002;$$

$$\Delta_0 = |\,0{,}40547 - 0{,}40547\,| \approx 0{,}00000; \;\; \Delta_n < \Delta_n^*. \;\; \blacksquare$$

Зауваження 2. В аналітичні вирази оцінки похибки розглянутих квадратурних формул входять величини $M_r = \max\limits_{x\in[a;b]} |\,f^{(r)}(x)\,|$ ($r = 1$ – для формул лівих і правих прямокутників, $r = 2$ – для формули трапецій, $r = 4$ – для формули Симпсона), знаходження яких нерідко приводить до громіздких обчислень або взагалі неможливе. Тоді можна скористатися методом Рунге (методом подвоєння кроку). Згідно з ним обчислюють інтеграл I за вибраною квадратурною формулою два рази: спочатку з кроком $2h$, потім з кроком h, тобто подвоюють число n. Як результат отримують два значення інтеграла I_{2h} та I_h. Для оцінки граничної абсолютної похибки використовують першу формулу Рунге $\boxed{\Delta_n^* \approx \left|I_h - I_{2h}\right| \big/ (2^r - 1)}$. За другою формулою Рунге знаходять уточнене значення інтеграла $\boxed{I_{ym} \approx I_h + \left(I_h - I_{2h}\right) \big/ (2^r - 1)}$.

Приклад 2. Знайти наближено за формулою Симпсона визначений інтеграл $I = \int_0^1 \frac{2x\,dx}{1+x^2}$, поклавши $n = 8$. Оцінити граничну абсолютну похибку Δ_n^* одержаного наближення I_h, користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку). За цим же методом знайти уточнене наближене значення інтеграла I_{ym}. Обчислити абсолютну похибку Δ_{ym} цього наближення I_{ym}, одержавши точне значення інтеграла I за формулою Ньютона – Лейбниця.

Вказівка. Похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до сьомого десяткового знака після коми.

□ Розіб'ємо заданий відрізок інтегрування $[0;1]$ на $n = 8$ рівних частин з кроком $h = (b-a)/n = (1-0)/8 = 0{,}125$ точками x_k, $k = \overline{0,n}$ і обчислимо відповідні значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ підінтегральної функції $f(x)$. Запишемо результат у таблицю:

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0,125	0,25	0,375	0,5
y_k	0,0000000	0,2461538	0,4705882	0,6575342	0,8000000

k	5	6	7	8
x_k	0,625	0,75	0,875	1
y_k	0,8988764	0,9600000	0,9911504	1,0000000

Далі за формулою парабол при кроці $h = 0{,}125$ дістанемо наближені значення інтеграла I_h і I_{2h}:

$$I_h = (h/3)\cdot(y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)) =$$
$$= (0{,}125/3)\cdot(0 + 1 + 4(0{,}2461538 + 0{,}6575342 + 0{,}8988764 +$$
$$+ 0{,}9911504 + 2(0{,}4705882 + 0{,}8 + 0{,}96)) = 0{,}6931682;$$
$$I_{2h} = (2h/3)\cdot(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) = (2\cdot 0{,}125/3)\cdot(0 +$$
$$+ 1 + 4(0{,}4705882 + 0{,}96) + 2\cdot 0{,}8) = 0{,}6935294.$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_n^* \approx \frac{|I_h - I_{2h}|}{2^r - 1} = \frac{|0{,}6931682 - 0{,}6935294|}{2^4 - 1} = 0{,}0000241 .$$

Оскільки $\Delta_n^* \approx 0{,}0000241 < 0{,}5 \cdot 10^{-4}$,то значення I_h повинно бути вірним до четвертого знака після коми.

Знайдемо уточнене значення інтеграла I_{ym} за другою формулою Рунге:

$$I_{ym} \approx I_h + (I_h - I_{2h}) / (2^r - 1) = 0{,}6931682 + (0{,}6931682 -$$

$$- 0{,}6935294) / (2^4 - 1) = 0{,}6931441 .$$

За формулою Ньютона – Лейбниця обчислимо точне значення інтеграла I :

$$I = \int_0^1 \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \left| u = 1 + x^2;\ du = 2x\,dx;\ u_1 = 1;\ u_2 = 2 \right| = \int_1^2 \frac{du}{u} =$$

$$= \ln|u| \Big|_1^2 = \ln 2 = 0{,}6931472 .$$

Тоді $\Delta_{ym} = \left| I - I_{ym} \right| = \left| 0{,}6931472 - 0{,}6931441 \right| = 0{,}0000031 .$ ■

2.5. Чисельні методи розв’язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь

2.5.1. Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

Нехай ***звичайне диференціальне рівняння першого порядку*** $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ можна подати у ***нормальній формі***

$$y'(x) = f(x, y(x)) .$$

Його ***розв’язком*** є диференційовна функція $y(x)$, що при підстановці в рівняння перетворює його у вірну тотожність. На рис. 50 наведено графік розв’язку диференціального рівняння, який називається ***інтегральною кривою***.

Геометричною інтерпретацією похідної $y'(x)$ у кожній точці

(x, y) є тангенс кута α нахилу дотичної до інтегральної кривої, що проходить через цю точку, тобто: $k = tg\,\alpha = f(x, y)$ (рис. 50).

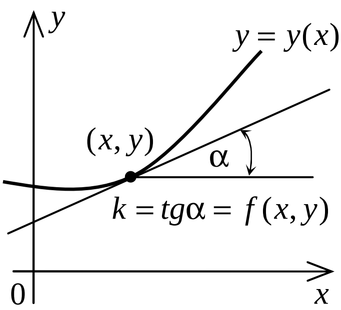

Рис. 50

Рівняння $y'(x) = f(x, y(x))$ має цілу сім'ю розв'язків ***–загальний розв'язок*** $y = y(x, C)$, де C – довільна стала. При конкретному значенні C із загального розв'язку одержуємо ***частинний розв'язок***. Щоб виділити один певний частинний розв'язок, диференціальне рівняння найчастіше доповнюють ***початковою умовою*** $y(x_0) = y_0$, де x_0 – задане ***початкове значення аргументу***, а y_0 – відповідно задане ***початкове значення функції***.

Задача Коші полягає у тому, щоб відшукати функцію $y = y(x)$, яка задовольняє рівнянню $y'(x) = f(x, y(x))$ і початковій умові $y(x_0) = y_0$. Геометричний зміст цієї задачі: знайти інтегральну криву $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$. Звичайно визначають розв'язок задачі Коші на відрізку, який розташований праворуч від початкового значення x_0, тобто для $x \in [x_0, X]$, де $X > x_0$.

<u>Теорема</u>. *Нехай права частина $f(x, y)$ диференціального рівняння $y'(x) = f(x, y(x))$ визначена і неперервна при $x_0 \le x \le X$, $-\infty < y < +\infty$ і задовольняє умові $\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right|$, де L – деяка стала, а y_1, y_2 – довільні значення. Тоді для кожного початкового значення y_0 існує єдиний розв'язок $y(x)$ задачі Коші для $x \in [x_0, X]$.*

<u>Приклад</u>. Розв'язати аналітично задачу Коші: знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = x / y^2$, який задовольняє заданій початковій умові $y(0) = 1$. Обчислити значення

$y(x_k)$ отриманого аналітичного розв'язку $y(x)$ на відрізку $[0;1]$ у рівновіддалених вузлах $x_k = x_{k-1} + h$; $x_0 = 0$; $k = 1,2,...,n$; $n = 10$ зі сталим кроком $h = 0{,}1$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік аналітичного розв'язку $y = y(x)$.

□ Розв'яжемо задану задачу Коші аналітично. Дане рівняння допускає відокремлення змінних: $y^2 dy = xdx$. Далі проінтегруємо ліву і праву частини: $y^3/3 = x^2/2 + C/3$. Звідси дістанемо $y = \sqrt[3]{1{,}5x^2 + C}$ – загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Підставимо у нього початкову умову $y(0) = 1$: $1 = \sqrt[3]{C}$ $\Rightarrow$ $C = 1$. Тоді $y = \sqrt[3]{1{,}5x^2 + 1}$ – шуканий частинний розв'язок.

Обчислимо значення $y(x_k)$ отриманого аналітичного розв'язку $y(x)$ на відрізку $[0;1]$ у рівновіддалених вузлах з кроком $h = 0{,}1$ і складемо відповідну таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y(x_k)$	1	1,005	1,0196	1,0431	1,0743	1,1120

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y(x_k)$	1,1548	1,2016	1,2515	1,3035	1,3572

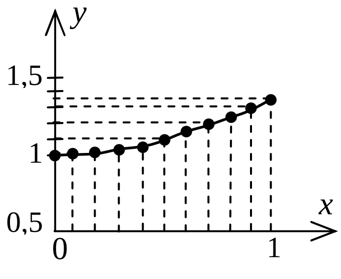

Рис. 51

Побудуємо інтегральну криву – графік аналітичного розв'язку $y = y(x)$ (рис. 51), сполучивши послідовні точки плавною лінією. ■

Зауваження. Досі невідомі загальні методи точного аналітичного розв'язування диференціальних рівнянь. Тому до більшості з них застосовні тільки наближені методи.

2.5.2. Метод послідовних наближень. Поняття про чисельні методи розв'язування задачі Коші

Метод послідовних наближень (***метод Пікара***) відноситься до ***наближених аналітичних способів*** розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. За цим методом здійснюється перехід до еквівалентного ***інтегрального рівняння*** $\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt}$, яке розв'язується за допомогою послідовних наближень аналогічно методу простих ітерацій розв'язування скінченних рівнянь.

Шуканий розв'язок $y(x)$ знаходиться як границя послідовності функцій $y_0(x), y_1(x), ..., y_n(x), ...$ ($n = 0, 1, 2, ...$):

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x),$$

де $y_0(x) = y_0$; $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt$; $y_2(x) = y_0 +$

$$+\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt\,;\ \ ...;\ \ \boxed{y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt}\,.$$

Абсолютна похибка $\Delta_n = |R_n(x)| = |y(x) - y_n(x)|$ оцінюється за співвідношенням $\boxed{\Delta_n \le \Delta_n^* = M(KC)^n \big/ (K\,n!)}$, де $\left|\partial f / \partial y\right| \le K$; $|f(x, y)| \le M$; $|x - x_0| \le A$; $|y - y_0| \le B$; $C = \min\{A,\ B/M\}$.

<u>Приклад</u>. Методом Пікара знайти друге наближення $y_2(x)$ до розв'язку задачі Коші: $y' = x / y^2$, $y(0) = 1$.

□ За умовою $y_0(x) = 1$. Далі за методом Пікара знаходимо:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t/1^2)\,dt = 1 + (t^2/2)\Big|_0^x = 1 + x^2/2\,;$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(t \big/ (1 + t^2/2)^2 \right) dt = \Big| u = 1 + t^2/2;\ du = t\,dt; u_1 = 1;$$

$$u_2 = 1 + \frac{x^2}{2} \Bigg| = 1 + \int_1^{1 + x^2/2} u^{-2}\,du = 1 - u^{-1}\Big|_1^{1 + x^2/2} = \frac{2(1 + x^2)}{2 + x^2}\,.\ \ ■$$

<u>Зауваження 1</u>. Із-за складності обчислень метод Пікара засто-

совується для знаходження лише декількох перших наближень.

Навіть для простих диференціальних рівнянь першого порядку не завжди можна отримати аналітичний розв'язок. Тому значне застосування мають чисельні методи розв'язування, що дозволяють визначити наближені значення шуканого розв'язку $y(x)$ на відрізку $[x_0, X]$ у ***вузлах*** x_k, $k = 0,1,...,n$ деякої одновимірної ***сітки*** $\omega_n = \{x_k : x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_n = X\}$ з нерівномірним, у загальному випадку, ***кроком*** $h_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1,...,n$. При цьому ***наближений розв'язок*** отримують у вигляді ***сіткової функції*** y_k, $k = 0,1,...,n$, що задається таблицею, в якій кожному вузлу x_k сітки ω_n відповідає наближене значення розв'язку $y_k \approx y(x_k)$.

Чисельні методи розв'язування задачі Коші діляться на: ***однокрокові*** та ***багатокрокові***, ***явні*** та ***неявні***.

Однокроковий метод використовує дані про розв'язок $y(x)$ тільки в одній попередній точці. Проте деякі з них передбачають обчислення значень правої частини $f(x, y)$ у проміжних точках.

А m***-кроковий метод*** для обчислення поточного значення розв'язку y_k потребує даних про розв'язок у m попередніх точках x_{k-i}, $i = 1, 2,..., m$, $m \geq 1$.

В ***явних методах*** поточне значення розв'язку виражається в явній формі і знаходиться безпосередньо через його відомі значення на попередніх кроках за допомогою скінченного числа операцій. (Ці методи не потребують ітерацій).

У ***неявних методах*** знаходження поточного значення розв'язку зводиться до наближеного розв'язування скінченного рівняння. Звичайно, для цього застосовують метод простих ітерацій або метод Ньютона.

Нехай $y(x)$ – точний розв'язок задачі Коші, а y_k, $k = 0,1,...,n$ – її наближений чисельний розв'язок. ***Глобальною похибкою*** (або просто ***похибкою***) чисельного методу називають сіткову функцію $R_k = y(x_k) - y_k$, $k = \overline{0, n}$, задану у вузлах x_k сітки ω_n, $k = \overline{0, n}$. За ***абсолютну похибку*** приймають величину $\Delta_n = \max\limits_{1 \leq k \leq n} | R_k |$. ***Локальною похибкою*** на k-му кроці ***однокрокового методу*** називають $l_k = \tilde{y}_k - y(x_k)$, де $\tilde{y}_k$ – чисельний розв'язок, отриманий при умові, що за наближення y_{k-1} до розв'язку на попередньому кроці взято його точне значення: $y_{k-1} = y(x_{k-1})$. ***Локальною похибкою*** на k-му кроці m***-крокового методу*** називають величину $l_k = \tilde{y}_k - y(x_k)$, де $\tilde{y}_k$ – чисельний розв'язок, одержаний при умові, що за наближення y_{k-i}, $i = \overline{1,m}$ до розв'язку на m попередніх кроках взято його точні значення: $y_{k-i} = y(x_{k-i})$, $i = \overline{1,m}$.

Для оцінки якості наближення на відрізку $[x_0; x_n]$ також використовується ***середньоквадратичне відхилення*** σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$, яке обчислюється за формулою $\boxed{\sigma_n = \sqrt{(1/n)\sum_{k=1}^{n} (y(x_k) - y_k)^2}}$.

Чисельний метод має r***-й порядок точності*** ($r > 0$), якщо для абсолютної похибки Δ_n справджується оцінка $\Delta_n \le Ch^r$, де C – деяка додатна стала.

Зауваження 2. Похибка наближеного розв'язку тим чи іншим чисельним методом виражається через похідні шуканого розв'язку, які наперед невідомі. Крім того, попередні оцінки похибки, як правило, є сильно завищеними. Тому на практиці у випадку рівномірної сітки двічі проводять розрахунки за однією й тією ж схемою r-го порядку точності при кроках h і $2h$. Як результат отримують відповідно два наближення $y(x,h)$ і $y(x,2h)$ до точного розв'язку $y(x)$. Використовуючи першу формулу Рунге, для оцінки граничної абсолютної похибки Δ_n^* наближеного розв'язку $y(x,h)$ на густішій сітці можна дістати співвідношення

$$\boxed{\Delta_n^* \approx \left(1 \big/ (2^r - 1)\right) \max_x | y(x,h) - y(x,2h) |},$$

де максимум береться за всіма співпадаючими вузлами x обох сіток. Часто застосовують також більш грубу оцінку

$$\boxed{\Delta_n^* \approx \max_x | y(x,h) - y(x,2h) |}.$$

2.5.3. Явний метод Ейлера

Явний однокроковий метод Ейлера є найпростішим чисельним методом розв’язування задачі Коші. Він досить грубий і використовується, в основному, для отримання орієнтовних значень розв’язку.

Нехай треба розв’язати задачу Коші $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ на відрізку $x \in [x_0, X]$, де $X > x_0$. Візьмемо сталий крок $h = (X - x_0)/n$ і побудуємо рівномірну сітку з вузлами $x_k = x_0 + kh$, $k = 0,1,2,...,n$.

У кожному вузлі x_{k-1}, $k = 1,...,n$ замінимо похідну y' скінченною різницею вперед $y'_{k-1} \approx (y_k - y_{k-1})/h$, а праву частину $f(x, y)$ обчислимо в точці (x_{k-1}, y_{k-1}). Тоді на кожному елементарному відрізку $[x_{k-1}, x_k]$ дістанемо наближену рівність

$$(y_k - y_{k-1})/h = f(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k = 1,...,n.$$

Звідси отримаємо $y_k = y_{k-1} + h\, f(x_{k-1}, y_{k-1})$ $(k = 1,...,n)$ – ***різницеве рівняння***, що служить наближенням даного диференціального рівняння з локальною похибкою другого порядку: $l_k = O(h^2)$. Абсолютна похибка має перший порядок: $\Delta_n = O(h)$.

Додаючи початкову умову $y_0 = y(x_0)$, одержимо ***різницеву задачу Коші***, що апроксимує відповідну диференціальну задачу.

Таким чином, метод Ейлера задається розрахунковими формулами:

$$\boxed{y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,,\ \Delta y_k = h\, f(x_{k-1}, y_{k-1})\,,\ k = 1,...,n}$$

і забезпечує перший порядок точності ($r = 1$).

<u>Геометрична інтерпретація</u>: якщо кожну пару сусідніх точок $M_{k-1}(x_{k-1}; y_{k-1})$ і $M_k(x_k; y_k)$, $k = 1,...,n$ сполучити відрізком прямої, то шукана інтегральна крива $y = y(x)$, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, наближено замінюється ***ламаною Ейлера*** $M_0 M_1 M_2 ... M_n$. Кожна ланка $M_{k-1}M_k$ цієї ламаної має напрям, який співпадає з напрямом дотичної в точці M_{k-1} до тієї інтеграль-

ної кривої, що проходить через цю точку.

<u>Приклад</u>. Чисельно розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = x / y^2$ з початковою умовою $y(0) = 1$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ методом Ейлера і побудувати графік наближеного розв'язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$. За формулою Рунге оцінити граничну абсолютну похибку Δ_n^*.
<u>Вказівка</u>. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Проведемо обчислення за методом Ейлера й одержані значення запишемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	1	1	1,01	1,0296	1,0579	1,0936
$f(x_k, y_k)$	0	0,1	0,1961	0,283	0,3574	0,4181

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	1,1354	1,1819	1,2320	1,2847	1,3392
$f(x_k, y_k)$	0,4654	0,5011	0,5271	0,5453	–

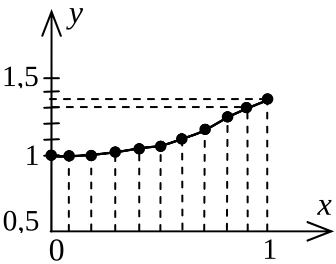

Рис. 52

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 52), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з прикладу пункту 2.5.1. Дістанемо $\sigma_n \approx 0{,}0167$.

Аналогічно провівши розрахунки наближеного розв'язку з подвоєним кроком $2h = 0{,}2$ (зробіть це самостійно), за формулою

Рунге дістанемо оцінку граничної абсолютної похибки:

$$\Delta_n^* \approx \left(1/(2^1-1)\right) \max\{|1{,}01-1|, |1{,}0579-1{,}04|,$$

$$|1{,}1354-1{,}114|, |1{,}232-1{,}2107|, |1{,}3392-1{,}3199|\} \approx 0{,}02 . \quad \blacksquare$$

2.5.4. Явний метод Рунге – Кутта

Серед методів високої точності одним з найпоширеніших є ***метод Рунге – Кутта***. Він базується на розвиненні шуканого розв’язку $y(x)$ в ряд Тейлора в околі точки $x = x_k$ до членів r-го порядку включно. Розрахункові формули ***явного однокрокового методу Рунге – Кутта четвертого порядку точності*** ($r = 4$) для випадку сталого кроку інтегрування мають вигляд:

$$\boxed{\begin{gathered} y_k = y_{k-1} + \Delta y_k, \quad \Delta y_k = (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6; \\ K_1 = h\, f(x_{k-1}, y_{k-1}); \quad K_2 = h\, f(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_1/2); \\ K_3 = h\, f(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_2/2); \\ K_4 = h\, f(x_{k-1} + h, y_{k-1} + K_3), \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \end{gathered}}$$

Зауваження 1. Метод Рунге – Кутта легко реалізувати, проте він потребує додаткових обчислень правих частин $f(x, y)$ у проміжних точках інтервалу $[x_{k-1}, x_k]$.

Зауваження 2. Метод Ейлера можна розглядати як окремий простий варіант методу Рунге – Кутта.

Приклад. Чисельно розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = x/y^2$ з початковою умовою $y(0) = 1$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ методом Рунге–Кутта четвертого порядку точності та побудувати графік наближеного розв’язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв’язку від точних $y(x_k)$.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ а) Проведемо обчислення за методом Рунге – Кутта й одержані значення занесемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
K_1	–	0,0000	0,0099	0,0192	0,0276	0,0347
K_2	–	0,0050	0,0147	0,0236	0,0313	0,0378
K_3	–	0,0050	0,0146	0,0235	0,0312	0,0377
K_4	–	0,0099	0,0192	0,0276	0,0347	0,0404
Δy_k	–	0,0050	0,0146	0,0235	0,0312	0,0377
y_k	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0743	1,1120

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
K_1	0,0404	0,0450	0,0485	0,0511	0,0530
K_2	0,0429	0,0469	0,0499	0,0521	0,0537
K_3	0,0428	0,0468	0,0499	0,0521	0,0537
K_4	0,0450	0,0485	0,0511	0,0530	0,0543
Δy_k	0,0428	0,0468	0,0499	0,0521	0,0537
y_k	1,1548	1,2016	1,2515	1,3036	1,3573

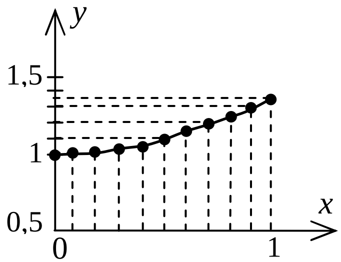

Рис. 53

Побудуємо графік наближеного розв’язку (рис. 53), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв’язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з прикладу пункту 2.5.1. Дістанемо $\sigma_n \approx 0,0000$. ■

2.5.5. Явний чотирикроковий метод Адамса

Якщо в диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ підставити його частинний розв'язок $y = y(x)$, що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, то одержимо вірну тотожність $y' = f(x, y(x))$, де права частина є складеною функцією x: $F(x) = f(x, y(x))$. Для екстраполяції справа в околі кожного вузла x_k, $k = 0,1, 2,...$ рівномірної сітки зі сталим кроком h наближено замінимо цю функцію $F(x) = f(x, y(x))$ інтерполяційним многочленом третього порядку, а потім проінтегруємо одержану наближену тотожність на кожному елементарному відрізку $[x_{k-1}, x_k]$. У результаті після зведення подібних членів отримаємо розрахункові формули ***явного чотирикрокового методу Адамса***

$$\boxed{\begin{gathered} y_k = y_{k-1} + \Delta y_k; \quad \Delta y_k = (h/24)\big(55 f(x_{k-1}, y_{k-1}) - 59 \times \\ \times f(x_{k-2}, y_{k-2}) + 37 f(x_{k-3}, y_{k-3}) - 9 f(x_{k-4}, y_{k-4})\big),\ k = 4,5, ..., \end{gathered}}$$

що має четвертий порядок точності.

Зауваження. Метод Адамса порівняно з методом Рунге – Кутта тієї ж точності є більш економічним, оскільки на кожному кроці потрібно обчислювати лише одне значення правої частини, а не чотири. Проте цей метод незручний тим, що неможливо розпочати розрахунки, маючи лише одне відоме значення $y(x_0) = y_0$. Для запуску методу Адамса потрібно додатково визначити y_1, y_2 і y_3, наприклад, тим же методом Рунге – Кутта. Це суттєво ускладнює процедуру. Крім того, на відміну від однокрокових, більшість багатокрокових методів, включаючи метод Адамса, не дозволяє легко змінювати крок h у процесі обчислень.

Приклад. Чисельно розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = x / y^2$ з початковою умовою $y(0) = 1$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0,1$ чотирикроковим методом Адамса і побудувати графік наближеного розв'язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$.

Вказівка. Необхідні для запуску методу Адамса значення y_1, y_2 і y_3 попередньо знайти за допомогою методу Рунге – Кутта (використати результати прикладу з пункту 2.5.4). Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ З умови задачі маємо $f(x, y) = x / y^2$, $y_0 = 1$, а приклад з пункту 2.5.4 додатково дає значення $y_1 = 1{,}0050$, $y_2 = 1{,}0196$ і $y_3 = 1{,}0431$, одержані за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами методу Адамса й отримані значення занесемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0742	1,1118
$f(x_k, y_k)$	0	0,0990	0,1924	0,2757	0,3466	0,4045
Δy_k	–	–	–	–	0,0311	0,0376

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	1,1546	1,2014	1,2513	1,3034	1,3571
$f(x_k, y_k)$	0,4501	0,4850	0,5109	0,5298	–
Δy_k	0,0428	0,0468	0,0499	0,0521	0,0537

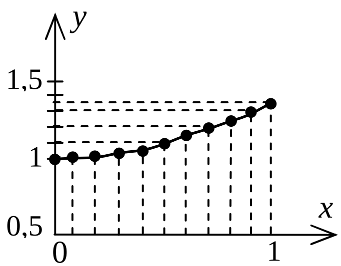

Рис. 54

Побудуємо графік наближеного розв’язку (рис. 54), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв’язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з прикладу пункту 2.5.1. Дістанемо $\sigma_n \approx 0{,}0001$. ■

2.5.6. Метод прогнозування і корекції Хеммінга

Ідея методів ***прогнозування та корекції*** (***предиктор – коректор***) полягає у тому, що кожний крок розбивається на два етапи: спочатку за допомогою явного методу (***предиктор***) за відомими значеннями розв'язку в попередніх вузлах знаходять його грубе наближення $y_k^{(0)}$ в новому k-му вузлі (***прогнозування***), а потім, використовуючи неявний метод (***коректор***), ітераційно уточнюють отримане значення $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$, ... (***корекція***).

На практиці часто застосовують ***чотирикроковий метод прогнозування і корекції Хеммінга***:

$$\boxed{\begin{gathered} y_k^{(0)} = y_{k-4} + (4h/3)\left(2f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2}) + \right. \\ \left. + 2f(x_{k-3}, y_{k-3})\right); \qquad y_k = (1/8)\,(9y_{k-1} - y_{k-3}) + (3h/8)\times \\ \times\left(f(x_k, y_k^{(0)}) + 2f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})\right); \quad k = 4,5,6,\ldots, \end{gathered}}$$

де корекція обмежується однією ітерацією. Він має четвертий порядок точності.

Приклад. Чисельно розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = x/y^2$ з початковою умовою $y(0) = 1$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ чотирикроковим методом прогнозування і корекції Хеммінга і побудувати графік наближеного розв'язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$.

Вказівка. Необхідні для запуску методу Хеммінга значення y_1, y_2 і y_3 попередньо знайти за допомогою методу Рунге – Кутта (використати результати прикладу з пункту 2.5.4). Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ а) З умови задачі маємо $f(x, y) = x/y^2$, $y_0 = 1$, а додаткові значення $y_1 = 1{,}0050$, $y_2 = 1{,}0196$ і $y_3 = 1{,}0431$ дістаємо з прикладу пункту 2.5.4, де вони одержані за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами методу прогнозування і корекції Хеммінга й отримані значення занесемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0743	1,1120
$f(x_k, y_k)$	0	0,0990	0,1924	0,2757	0,3466	0,4044
$y_k^{(0)}$	–	–	–	–	1,0743	1,1120
$f(x_k, y_k^{(0)})$	–	–	–	–	0,3466	0,4044

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	1,1548	1,2016	1,2514	1,3035	1,3572
$f(x_k, y_k)$	0,4499	0,4848	0,5109	0,5297	0,5429
$y_k^{(0)}$	1,1547	1,2016	1,2514	1,3036	1,3572
$f(x_k, y_k^{(0)})$	0,4500	0,4848	0,5109	0,5296	0,5429

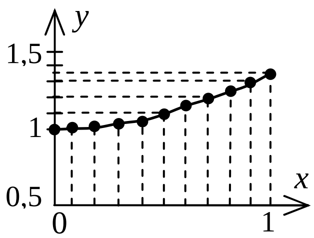

Рис. 55

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 55), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з прикладу пункту 2.5.1. Дістанемо $\sigma_n \approx 0{,}0000$. ■

2.6. Контрольні запитання

1. Що таке математична модель об'єкта?
2. Який розв'язок задачі називається стійким за вхідними даними?
3. Що таке коректно (правильно) поставлена математична задача?
4. Що розуміють під чисельним (числовим, обчислювальним) методом?
5. Який метод називається прямим? Ітераційним?
6. Дайте означення однокрокового і багатокрокового ітераційного методу.
7. За якими характеристиками розрізняються чисельні методи?
8. Що означає p -й порядок збіжності ітераційного методу?
9. При якій умові ітераційний метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії?
10. Що називається наближеним числом?
11. Що називається похибкою наближення? Укажіть основні джерела похибок. Дайте класифікацію похибок.
12. Дайте означення абсолютної та відносної похибки.
13. У яких формах записуються наближені числа? Що таке значущі цифри? Які з них називаються вірними (правильними) у вузькому сенсі?
14. Сформулюйте правило симетричного заокруглювання.
15. Як за записом наближеного числа оцінити його абсолютну та відносну похибки?
16. Як обчислюються лінійні оцінки похибки функції?
17. Як обчислюються лінійні оцінки похибок арифметичних операцій? Наведіть відповідні правила підрахунку цифр.
18. У чому полягає локалізація (відокремлення) дійсного кореня скінченного рівняння? Які способи для цього застосовують?
19. Наведіть основні критерії закінчення ітераційного процесу уточнення кореня.
20. У чому суть методу поділу навпіл (дихотомії, бісекції)? Наведіть його переваги та недоліки.
21. У чому суть методу простих ітерацій? Запишіть достатню умову його збіжності. Дайте геометричну інтерпретацію.
22. У чому полягає метод Ньютона (метод дотичних, метод лінеаризації)? Запишіть його розрахункову формулу. Дайте геометричну інтерпретацію. Запишіть достатню умову його збіжності.

23. У чому полягає задача апроксимації (наближення) функцій?
24. Який спосіб наближення називають інтерполяцією?
25. Що розуміють під середньоквадратичною апроксимацією (наближенням за методом найменших квадратів)? У чому відмінність цього методу від інтерполяції?
26. Як здійснюється інтерполяція многочленами? Запишіть інтерполяційний поліном Лагранжа.
27. Як оцінюється похибка інтерполювання?
28. Коли застосовують апроксимацію за методом найменших квадратів? Чому цей метод найбільш ефективний у випадку моделі, що лінійна відносно параметрів?
29. Як здійснюється апроксимація лінійною функцією за методом найменших квадратів?
30. Коли застосовується чисельне диференціювання?
31. Як наближено знаходяться похідні за допомогою інтерполяційних многочленів?
32. Як за методом Рунге (методом подвоєння кроку) оцінити похибку апроксимації похідної й уточнити її значення?
33. Запишіть розрахункові формули методу лівих і правих прямокутників.
34. Запишіть розрахункову формулу методу трапецій.
35. Наведіть формулу Симпсона (формулу парабол) чисельного інтегрування.
36. Як практично оцінюється похибка чисельного інтегрування за правилом Рунге?
37. Як ставиться задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку?
38. Дайте геометричну інтерпретацію розв'язку задачі Коші та його похідної.
39. У чому полягає метод послідовних наближень (метод Пікара) наближеного обчислення визначеного інтеграла?
40. Що таке локальна і глобальна похибки чисельного методу розв'язування задачі Коші?
41. Як за правилом Рунге практично оцінюється похибка наближеного розв'язку?
42. Запишіть розрахункову формулу явного методу Ейлера. Який його порядок точності? Яка геометрична інтерпретація цього методу?

43. Запишіть розрахункові формули явного методу Рунге – Кутта четвертого порядку точності.
44. Наведіть розрахункові формули явного чотирикрокового методу Адамса. Порівняйте цей метод з методом Рунге – Кутта тієї ж точності.
45. У чому суть методів прогнозування та корекції (предиктор – коректор)?
46. Запишіть розрахункові формули чотирикрокового методу прогнозування і корекції Хеммінга.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632с.
3. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: У 2 ч. Ч.2. – К.: КНЕУ, 2002. – 451 с.
4. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 2003. Кн.2. Спеціальні розділи. – 368 с.
5. Данилович В.П. Чисельні методи в задачах і вправах. – К.: ІСДО, 1995.–248 с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.2. – М.: Высш. шк., 1997. – 416 с.
7. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
8. Орвис В.Д. Excel для ученых, инженеров и студентов. – К.: Юниор, 1999. – 528 с.
9. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. – М.: Наука, 1985. Т.2. – 560 с.
11. Станішевський С.О. Вища математика. – Х.: ХНАМГ, 2005.–270 с.
12. Фадеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента. – СПб.: Лань, 2008. – 128 с.

З М І С Т

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Якунін Анатолій Вікторович

ВИЩА МАТЕМАТИКА II

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
для студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 "Облік і аудит"

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *З. І. Зайцева*
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2011, поз. 96Л
Підп. до друку 15.12.2011 Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 8,0
Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011