МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

А. В. Якунін

ВИЩА МАТЕМАТИКА II

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 “Облік і аудит”

Харків
ХНАМГ
2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

А. В. Якунін

ВИЩА МАТЕМАТИКА ІІ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 "Облік і аудит"

Харків ХНАМГ 2011

УДК 517.2+517.3+517.5+519.6+519.95

Якунін А. В.

Вища математика II: Конспект лекцій для студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 "Облік і аудит". / А. В. Якунін; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. − Х.: ХНАМГ, 2011. − 140 с.

Подано конспект лекцій, доповнений матеріалом для самостійного опрацювання, зразками розв'язання типових задач і запитаннями для самоконтролю.

Рецензент: *к. ф.-м. н., доц. М. П. Данилевський*

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 3 від 26.10.2011 р.

Передмова

Конспект лекцій з навчальної дисципліни "Математика для економістів. Вища математика ІІ" призначений для студентів заочної форми навчання за напрямом підготовки 6.030509 "Облік і аудит". При викладенні матеріалу головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю. Теоретичні відомості подаються чітко і зважено, з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Частина матеріалу розрахована на самостійне опрацювання.

В основі підбору тематики, структури і стилю подання лежать цикли лекцій з даної дисципліни, що читаються на факультетах економіки і підприємництва, заочного навчання, післядипломної освіти і заочного навчання Харківської національної академії міського господарства.

Критичні зауваження і пропозиції щодо запропонованого конспекту лекцій надсилайте на кафедру вищої математики за адресою:

61002, Україна, Харків, вул. Революції, 12, ХНАМГ,
каф. ВМ;
e-mail: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

Змістовий модуль 1.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

1.1. Кратні інтеграли

1.1.1. Задача про об'єм циліндричного тіла. Подвійний інтеграл і його властивості

Нехай V – деяка замкнена обмежена просторова область (просторове тіло), а плоска область D_{xy} - її проекція паралельно осі Oz на координатну площину Oxy (рис. 1). Область V називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямі осі*** Oz, якщо виконуються наступні умови: 1) межа L проекції D_{xy} складається зі скінченного числа неперервних кривих; 2) довільна пробна пряма, що проходить хоча б через одну внутрішню точку області V паралельно осі Oz і в тому ж напрямі, перетинає її межу тільки у двох точках – по одній на ближній ***поверхні входу*** σ_1 і дальній ***поверхні виходу*** σ_2; 3) рівняння кожної з поверхонь σ_1 і σ_2 задається в явному вигляді, розв'язаному відносно z, причому тільки однією формулою відповідно $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, де функції $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ неперервні в D_{xy} і $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$.

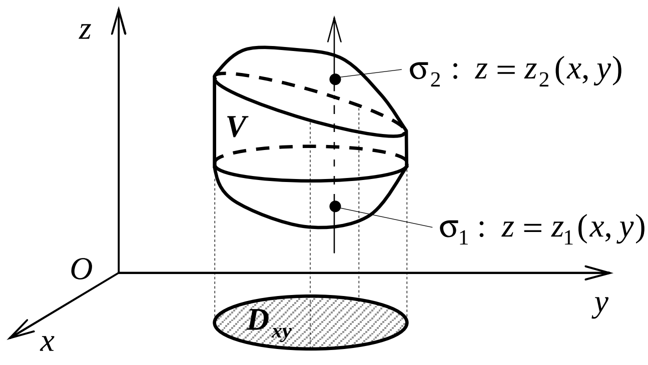

Рис. 1

Така просторова область V має вигляд вертикального циліндричного тіла, що обмежене знизу поверхнею входу $\sigma_1 : z = z_1(x, y)$, зверху – поверхнею виходу $\sigma_2 : z = z_2(x, y)$, а з боків – вертикальною циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямною служить межа L області D_{xy}, в яку проектується це тіло на координатну площину Oxy. Це вертикальне циліндричне тіло V як множину точок можна подати у вигляді

$$\boxed{V : \left\{ (x, y, z) \middle| \; z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y), \; (x, y) \in D_{xy}, \; V \xrightarrow{Oz} D_{xy} \right\}}.$$

Аналогічно вводиться означення просторової області V, що ***правильна*** (***стандартна***) ***в напрямі осі*** Ox ***чи*** Oy, відповідно

$$\boxed{V : \left\{ (x, y, z) \middle| \; x_1(y, z) \le x \le x_2(y, z), \; (y, z) \in D_{yz}, \; V \xrightarrow{Ox} D_{yz} \right\}}$$

і

$$\boxed{V : \left\{ (x, y, z) \middle| \; y_1(x, z) \le y \le y_2(x, z), \; (x, z) \in D_{xz}, \; V \xrightarrow{Oy} D_{xz} \right\}}.$$

Область V може бути одночасно правильною в напрямі різних осей координат. Якщо просторова область V правильна в напрямі кожної з координатних осей Ox, Oy і Oz, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***). Прикладами такої області служать куля і прямокутний паралелепіпед, всі ребра якого паралельні осям координат.

<u>Зауваження 1</u>. Якщо область V – неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Для цього, звичайно, застосовують координатні чи їм паралельні площини.

Розглянемо окремий випадок правильної в напрямі осі Oz області V, яка обмежена знизу координатною площиною Oxy (тобто, спирається на свою проекцію D), а зверху – поверхнею $z = f(x, y) \ge 0$ (рис. 2). Знайдемо об’єм V такого циліндричного тіла.

Для цього розіб'ємо область D довільними кусково-гладкими лініями на елементарні частини D_i ($i = \overline{1, n}$), що не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо площу майданчика D_i через ΔS_i, а його діаметр (довжину найбільшої хорди, яка з’єднує дві точки ме-

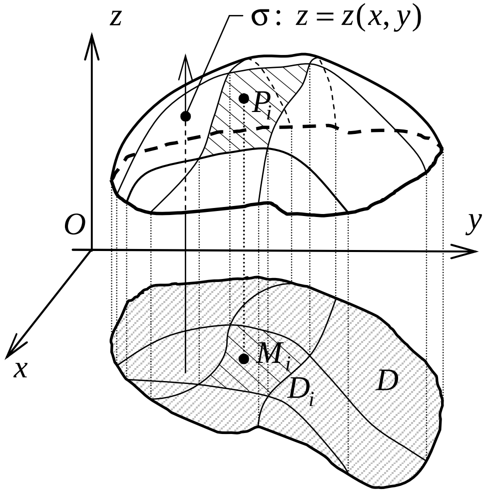

Рис. 2

жі області D_i) – через d_i, $i=\overline{1,n}$. Через межу кожної елементарної області D_i проведемо циліндричну поверхню з паралельними осі Oz твірними. Тоді тіло V розіб'ється на n циліндричних стовпчиків з основами D_i $(i=\overline{1,n})$, що обмежені зверху шматками поверхні $z=f(x,y)$ (на рис. 2 один з них виділений).

Візьмемо на кожному майданчику D_i довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і замінимо кожний стовпчик прямим циліндром з тією ж основою D_i і висотою $P_iM_i = z_i = f(x_i, y_i)$. Тоді для об'єму ΔV_i циліндричного стовпчика маємо $\Delta V_i \approx f(x_i, y_i)\cdot \Delta S_i$. Об'єм тіла V можна наближено подати так: $V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$.

Вираз $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ називається і***нтегральною сумою функції*** $f(x,y)$ ***по області*** D.

Одержана рівність тим точніша, чим менші розміри елементарних областей D_i і, відповідно, більша їх кількість n. Природно границю інтегральної суми при умові, що кожний майданчик D_i стягується в точку $(\max d_i \to 0)$ і, відповідно, їх число n необмежено збільшується $(n\to\infty)$, прийняти за об'єм V циліндричного тіла: $V=\lim\limits_{\max d_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$.

Скінченна границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття області D, *якщо вона існує і не залежить від* *способу поділу на елементарні майданчики* D_i *та від вибору точок* $M_i(x_i, y_i)$ *на них, називається* ***подвійним інтегралом від функції*** $f(x,y)$ ***по області*** D *і позначається* $\iint_D f(x,y)\,dS$ *або* $\iint_D f(M)\,dS$. Отже, за означенням

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i},$$

де x і y – ***змінні інтегрування***; $f(x,y)$ – ***підінтегральна функція***; dS – ***елемент*** (***диференціал***) ***площі***; $f(x,y)\,dS$ – ***підінтегральний вираз***; D – ***область інтегрування***.

Геометричний зміст: якщо функція $z = f(x,y)$ невід’ємна, то подвійний інтеграл від неї чисельно дорівнює об’єму V циліндричного тіла, нижньою основою якого є область D, верхньою – частина поверхні $z = f(x,y) \geq 0$, що проектується в D, а бічна поверхня – циліндрична з твірними, паралельними осі Oz, і напрямною L – межею області D: $\boxed{V = \iint_D f(x,y)\,dS}$.

Зауваження 2. Процес побудови подвійного інтеграла по двовимірній області D аналогічний процедурі синтезу визначеного інтеграла функції однієї змінної по одновимірній області $[a;b]$. Спочатку область інтегрування довільним чином розбивається на частини, в кожній з яких береться довільна точка і в ній знаходиться значення функції. Потім знайдене значення функції множиться на міру відповідної частини області. У випадку однієї змінної такою мірою служить довжина Δx_i частинного відрізка $[x_{i-1}; x_i]$, а у випадку двох змінних – площа ΔS_i елементарного майданчика D_i. Наступні кроки знову однакові: утворюються інтегральні суми і знаходяться їхні границі, коли міра частин області інтегрування прямує до нуля. Тому *умови існування та основні властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям звичайного визначеного інтеграла*. Наведемо найважливіші з них.

Зауваження 3. *Умови існування та основні властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям звичайно-*

го визначеного інтеграла. Надалі будемо розглядати лише функції, які неперервні в області інтегрування, що гарантує існування подвійного інтеграла. (Хоча подвійний інтеграл може існувати не тільки для неперервних функцій).

1.1.2. Обчислення подвійного інтеграла у прямокутній системі координат

Безпосереднє знаходження подвійного інтеграла як границі інтегральної суми пов'язане зі значними труднощами. Набагато простіше перейти до обчислення так званого двократного повторного інтеграла – послідовного знаходження двох звичайних визначених інтегралів.

Зауваження 1. Оскільки подвійний інтеграл не залежить від способу розбиття, то в декартовій прямокутній системі координат Oxy зручно розбивати область D координатною сіткою, утвореною прямими, які паралельні осям Ox і Oy (рис. 3). Тоді внутрішній елементарний майданчик D_i є прямокутником зі сторонами Δx_i, Δy_i і його площа $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Відповідно диференціал площі набуває вигляду $\boxed{dS = dxdy}$ і подвійний інтеграл можна подати у формі

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy}.$$

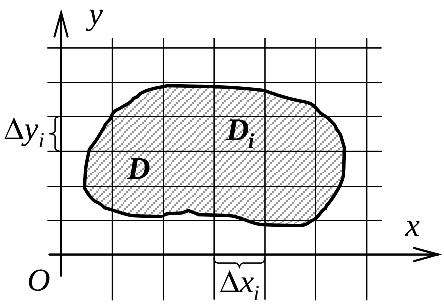

Рис. 3

Нехай функція $f(x,y)$ невід'ємна в обмеженій замкненій області D. Тоді подвійний інтеграл $\boxed{V = \iint_D f(x,y)\,dxdy}$ виражає об'єм V вертикального циліндричного тіла (рис. 4) з нижньою основою D, що обмежене зверху поверхнею $z = f(x,y) \geq 0$.

Обчислимо об'єм V по-іншому – методом паралельних перерізів. Припустимо, що область D – правильна в напрямі осі Oy (рис. 5) і може бути подана у вигляді

$$D:\left\{(x,y)\middle|\; y_1(x)\le y\le y_2(x),\; x\in[a;b],\; D\xrightarrow{Oy}[a;b]\right\}.$$

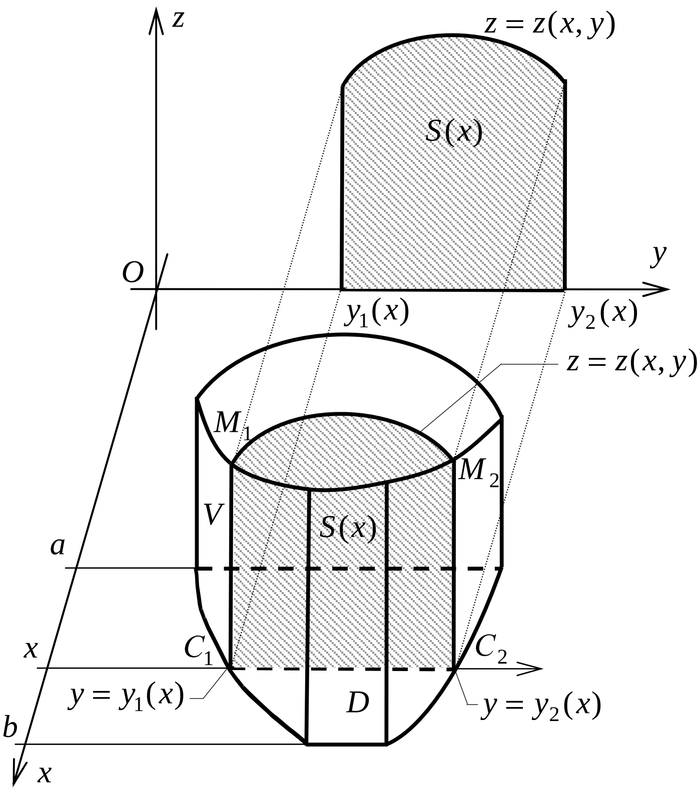

Рис. 4

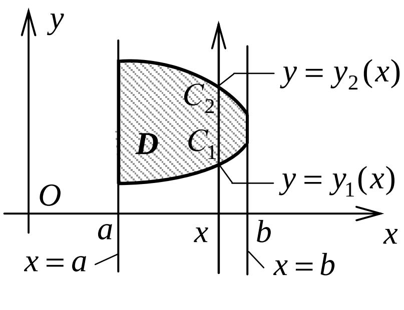

Рис. 5

Тоді проекцією тіла на вісь Ox є відрізок $[a;b]$. Об'єм V можна знайти так: $V=\int_a^b S(x)\,dx$, де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною $x=C=const$, перпендикулярною до осі Ox, а $x=a$ і $x=b$ – рівняння крайніх площин, між якими лежить дане тіло.

При перетині циліндричного тіла площиною $x = C$, де $C = const$ утворюється криволінійна трапеція $C_1M_1M_2C_2$ (рис. 4). Апліката $z = f(x, y)$ точки лінії M_1M_2 при фіксованому x є функцією лише однієї змінної y, причому аргумент y змінюється в межах від $y_{вх} = y_1(x)$ до $y_{вих} = y_2(x)$. Площа $S(x)$ фігури $C_1M_1M_2C_2$ дорівнює визначеному інтегралу:

$$S(x) = \int_{y_{вх}}^{y_{вих}} z\,dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \text{ Тоді } V = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx.$$

Порівнюючи два вирази для об'єму V, одержуємо формулу

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx,$$

яка зводить подвійний інтеграл до двократного повторного інтеграла – послідовного обчислення двох звичайних одновимірних інтегралів. Це співвідношення звичайно записують у спрощеній формі

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy}.$$

<u>Зауваження 2</u>. Одержана з геометричних міркувань формула залишається справедливою в загальному випадку інтегровної функції $f(x, y)$.

<u>Зауваження 3</u>. Спочатку обчислюється ***внутрішній інтеграл*** $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$ за ***внутрішньою змінною*** y в припущенні, що ***зовнішня змінна*** x фіксована. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла в межах від $y_1(x)$ до $y_2(x)$ одержуємо певну функцію $S(x)$ однієї змінної x.

<u>Зауваження 4</u>. ***Зовнішні межі інтегрування*** a і b – завжди сталі. Обчислюючи ***зовнішній інтеграл*** $\int_a^b S(x)\,dx$, дістаємо деяке число I – значення подвійного інтеграла.

Зауваження 5. ***Внутрішні межі інтегрування*** $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є функціями зовнішньої змінної x. В окремих випадках вони також можуть бути сталими. Наприклад, коли область інтегрування D – прямокутник зі сторонами $x=a$, $x=b$, $y=c$ і $y=d$, що паралельні осям координат, то всі межі інтегрування є сталими і подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Правило знаходження меж інтегрування для правильної в напрямі осі Oy області D:

1) *Область D спроектувати паралельно осі Oy на вісь Ox і одержати відрізок $[a;b]$, $a\le x\le b$. Числа a і b – відповідно нижня і верхня межі у зовнішньому інтегралі за x.* Вони визначаються крайніми зліва та справа точками області D, які лежать на вертикальних прямих $x=a$ та $x=b$, що обмежують цю область.

2) *Провести через будь-яку внутрішню точку x відрізка $[a;b]$ пробну пряму, паралельну осі Oy і в тому ж напрямі. Ця пряма перетинає межу області D у двох точках – входу C_1 і виходу C_2. Щоб визначити внутрішні межі інтегрування за y – ординати вказаних точок, необхідно розв'язати рівняння лінії входу і лінії виходу відносно y: $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$. Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$, що на відрізку $[a;b]$ обмежені і зберігають аналітичний вираз, – відповідно нижня і верхня межі у внутрішньому інтегралі за y.*

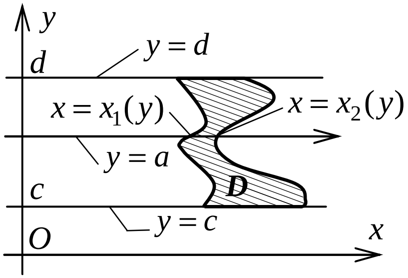

Рис. 6

Зауваження 6. Якщо область D – правильна в напрямі осі Ox (рис. 6) і може бути подана у вигляді

$$D:\left\{(x,y)\middle|\ x_1(y)\le x\le x_2(y),\right.$$

$$\left.y\in[c;d],\ D\xrightarrow{Ox}[c;d]\right\},$$

то справедлива формула (змінні x і y міняються ролями)

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx}.$$

Тут внутрішнім є інтеграл за змінною x. Обчислюючи його в межах від $x_1(y)$ до $x_2(y)$ (при цьому зовнішня змінна y вважається сталою), дістаємо деяку функцію $S(y)$ від однієї змінної y. Інтегруючи потім цю функцію в межах від c до d, одержуємо значення I подвійного інтеграла.

Зауваження 7. Якщо область D правильна в напрямах обох осей Ox і Oy, то подвійний інтеграл можна звести до повторного будь-яким з указаних способів. Зрозуміло,що результати при цьому однакові, тобто *значення подвійного інтеграла не залежить від порядку інтегрування*:

$$\boxed{\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx}.$$

Перехід від лівої частини цього співвідношення до правої і навпаки називається ***зміною порядку інтегрування***.

Зауваження 8. У кожному конкретному випадку, залежно від вигляду області D та підінтегральної функції $f(x,y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Зауваження 9. Якщо область D не є правильною в напрямі жодної з осей Ox чи Oy, то її необхідно розбити на частини без спільних внутрішніх точок, кожна з яких є правильною в напрямі Ox чи Oy. Обчислюючи подвійні інтеграли по правильних частинних областях і додаючи результати, знайдемо шуканий подвійний інтеграл по всій області D. Звичайно, для розбиття використовуються лінії, що належать координатній сітці. Зокрема, у випадку прямокутних координат поділ області D на правильні частини здійснюють прямими, які паралельні осям Ox і Oy.

Приклад 1. Для подвійного інтеграла $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ вказано підінтегральну функцію $f(x,y)$ і область інтегрування D, яка задана рівняннями ліній, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

1) Зобразити область інтегрування D.

2) Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Oy, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по x і внутрішнім інтегруванням по y.

3) Подати область інтегрування D як правильну в напрямі осі Ox, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити даний подвійний інтеграл переходом до повторного інтеграла із зовнішнім інтегруванням по y і внутрішнім інтегруванням по x.

$$f(x,y)=2xy;\quad D:\ xy=2;\ x-2y=0;\ y-2=0.$$

□ 1) Межа області D утворена трьома прямими. Знайдемо точки перетину цих ліній:

$$\begin{cases} xy=2; \\ x-2y=0; \end{cases}\quad \begin{matrix} x=2y; \\ 2y\cdot y=2; \end{matrix}\quad \begin{matrix} y^2=1;\ y_1=-1;\ y_2=1; \\ x_1=-2;\quad x_2=2; \end{matrix}\quad \begin{matrix} A(-1;-6); \\ B(1;1); \end{matrix}$$

$$\begin{cases} xy=2; \\ y-2=0; \end{cases}\quad \begin{matrix} y=2; \\ x\cdot 2=2;\ x=1 \end{matrix}\quad C(1;2);$$

$$\begin{cases} x-2y=0; \\ y-2=0; \end{cases}\quad \begin{matrix} y=2; \\ x-2\cdot 2=0;\ x=4 \end{matrix}\quad E(4;2).$$

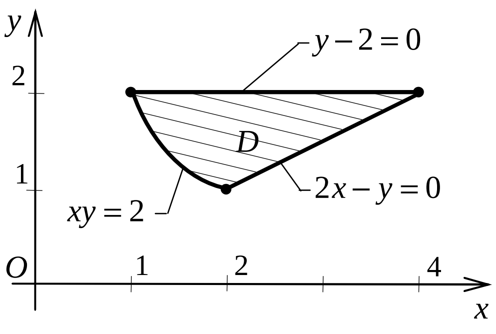

Рис. 7

Область D зображена штриховкою на рис. 7.

2) Спроектуємо область D паралельно осі Oy на вісь Ox і одержимо відрізок $[1;4]$. Аналіз форми області D і вигляду рівнянь ліній, які її обмежують, показує, що область D – неправильна у

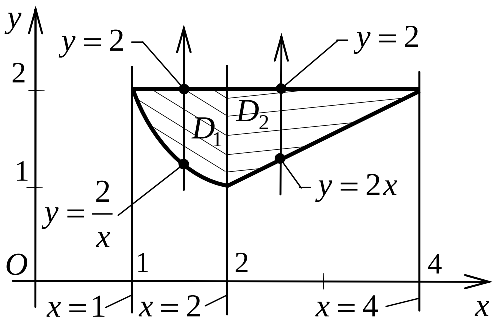

Рис. 8

напрямі осі Oy. Пряма $x = 2$ розбиває цю область на дві правильні у напрямі осі Oy частини D_1 і D_2. Відповідне подання відтворено на рис. 8. Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= 2\iint_D xy\,dx\,dy = 2\iint_{D_1} xy\,dx\,dy + 2\iint_{D_2} xy\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_1^2 x\,dx\int_{2/x}^{2} y\,dy + 2\int_2^4 x\,dx\int_{x/2}^{2} y\,dy = 2\int_1^2 x\left(\left.(y^2/2)\right|_{2/x}^{2}\right)dx +$$

$$+ 2\int_2^4 x\left(\left.(y^2/2)\right|_{x/2}^{2}\right)dx = \int_1^2 (4x - 4/x)\,dx + \int_2^4 (4x - x^3/4)\,dx =$$

$$= \left.\left(2x^2 - 4\ln|x|\right)\right|_1^2 + \left.\left(2x^2 - x^4/16\right)\right|_2^4 = 15 - 4\ln 2\,.$$

3) Спроектуємо область D паралельно осі Ox на вісь Oy і одержимо відрізок $[1;2]$. Аналіз форми області D і вигляду рівнянь ліній, які її обмежують, показує, що область D – правильна у напрямі осі Ox. Відповідне подання зображено на рис. 9. Тоді подвійний інтеграл обчислюється так:

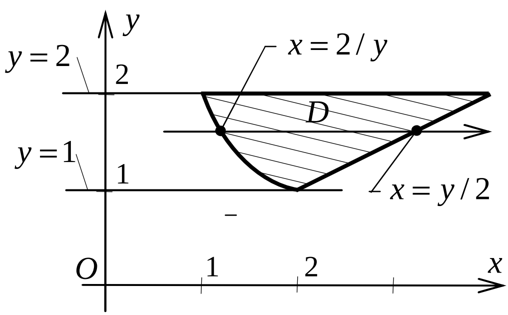

Рис. 9

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= 2\iint_D xy\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_1^2 y\,dy\int_{2/y}^{y/2} x\,dx =$$

$$= \int_1^2 y\left(\left.x^2\right|_{2/y}^{y/2}\right)dy =$$

$$= \int_1^2 (4y^3 - 4/y)\,dy = \left(y^4 - 4/y\right)\Big|_1^2 = 15 - 4\ln 2. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. У заданих повторних інтегралах змінити порядок інтегрування:

$$\text{а) } I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^e dx \int\limits_{-1}^{-\ln x} f(x,y)\,dy;$$

$$\text{б) } I = \int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\arcsin(y/2)} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^2 dy \int\limits_{\sqrt{2}}^{\arccos(y/2)} f(x,y)\,dx.$$

□ а) Використовуючи зазначені межі інтегрування, для кожного з двох повторних інтегралів-доданків запишемо рівняння ліній, що обмежують відповідні області D_1 і D_2, та зобразимо їх в одній системі координат Oxy (рис. 10):

$$D_1: \; x = 0;\; x = 1;\; y = -1;\; y = -\sqrt{1-x^2};$$

$$D_2: \; x = 1;\; x = e;\; y = -1;\; y = -\ln x.$$

З рис. 10 видно, що D_1 і D_2 можна об'єднати в одну область $D = D_1 \cup D_2$. У зазначених повторних інтегралах області D_1 і D_2 розглядаються як правильні в напрямі осі Oy.

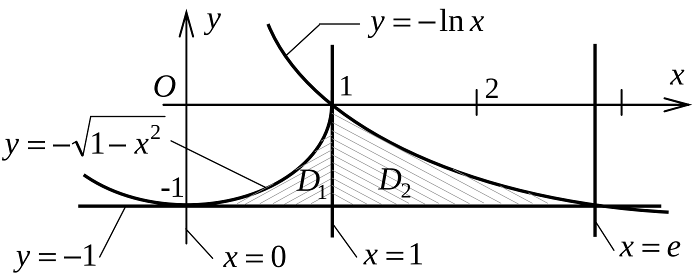

Рис. 10

Для зміни порядку інтегрування об'єднану область D треба подати як правильну в напрямі осі Ox, при необхідності розбиваючи на правильні у вибраному напрямі частини. У даному випадку область D – правильна в напрямі осі Ox: $D:\ y=-1;\ y=1;\ y=0;\ x=\sqrt{1-y^2};\ x=e^{-y}$. Відповідне зображення відтворено на рис. 11. Тоді

$$I=\int_{-1}^{0}dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{e^{-y}}f(x,y)\,dx.$$

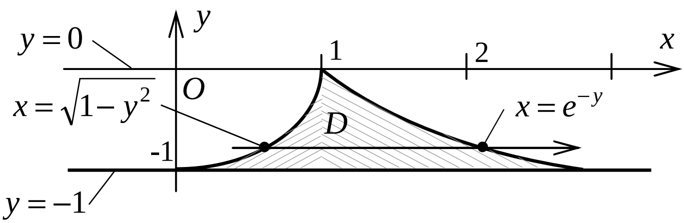

Рис. 11

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$I=\int_{0}^{\pi/4}dx\int_{2\sin x}^{2\cos x}f(x,y)\,dy. \quad \blacksquare$$

1.1.3. Задача про масу просторового тіла. Потрійний інтеграл і його властивості

Нехай у тривимірному просторі задана замкнена обмежена область (просторове тіло) V, яка суцільно заповнена речовиною з об'ємною густиною $\mu=f(x,y,z)$. Знайдемо масу m цього тіла V.

Для цього розіб'ємо область V сіткою довільних кусково-гладких поверхонь на елементарні частини V_i ($i=\overline{1,n}$), що не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо об'єм комірки V_i через ΔV_i, а її діаметр (довжину найбільшої хорди, що з'єднує дві точки межі області V_i) – через d_i, $i=\overline{1,n}$. У кожній комірці V_i візьмемо довільну точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$. Можна наближено вважати, що густина в межах елементарної області V_i однакова і дорівнює значенню $\mu_i = f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ у виділеній точці. Тоді для маси Δm_i комірки V_i справджується наближена рівність $\Delta m_i \approx \mu_i \Delta V_i = f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i$. Відповідно маса m всього тіла V наближено визначається за формулою $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$.

Вираз $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ називається ***інтегральною сумою функції*** $f(x, y, z)$ ***по області*** V.

Природно границю інтегральної суми при умові, що кожна комірка V_i стягується в точку $(\max d_i \to 0)$ і, відповідно, їх число n необмежено збільшується $(n \to \infty)$, прийняти за масу m тіла V:

$$m = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i .$$

Скінченна границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття тривимірної області V*, якщо вона існує і не залежить від способу поділу на елементарні комірки* V_i *та від вибору точок* $M_i(x_i, y_i, z_i)$ *у них, називається* ***потрійним інтегралом від функції*** $f(x, y, z)$ ***по області*** V:

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dV = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i},$$

де x, y і z – ***змінні інтегрування***; $f(x, y, z)$ – ***підінтегральна функція***; dV – ***елемент*** (***диференціал***) ***об'єму***; $f(x, y, z)\, dV$ – ***підінтегральний вираз***; V – ***область інтегрування***.

Таким чином $\boxed{m = \iiint_V \mu(x, y, z)\, dV}$ (<u>фізичний зміст потрійного інтеграла</u>).

Якщо в потрійному інтегралі підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x, y, z) \equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме об'єму області інтегрування V: $\boxed{V = \iiint_V dV}$ (<u>геометричний зміст потрійного інтеграла</u>).

1.1.4. Обчислення потрійного інтеграла у прямокутній системі координат

Нехай у тривимірному просторі визначена декартова прямокутна система координат $Oxyz$. Оскільки потрійний інтеграл не залежить від способу розбиття, то в цій системі координат зручно розбивати область V координатною сіткою, утвореною площинами, які паралельні координатним площинам. Тоді внутрішня елементарна комірка V_i є прямокутним паралелепіпедом зі сторонами Δx_i, Δy_i і Δz_i. Його об'єм $\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$. Відповідно диференціал об'єму набуває вигляду $\boxed{dV = dx\,dy\,dz}$ і подвійний інтеграл можна подати у формі $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$.

Нехай тривимірна область V – правильна в напрямі осі Oz (є вертикальним циліндричним тілом, зображеним на рис. 1), і може бути подана у вигляді

$$V : \left\{(x,y,z)\middle|\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\ (x,y) \in D_{xy},\ V \xrightarrow{Oz} D_{xy}\right\}.$$

Тоді справедлива формула

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz},$$

за якою спочатку обчислюється внутрішній одновимірний інтеграл по z, а потім зовнішній подвійний інтеграл по x, y.

Якщо при цьому плоска область D_{xy}, що служить проекцією тіла V на площину Oxy, є правильною в напрямі осі Oy (рис. 5) і може бути подана у вигляді

$$D_{xy} : \left\{(x,y)\middle|\ y_1(x) \le y \le y_2(x),\ x \in [a;b],\ D \xrightarrow{Oy} [a;b]\right\},$$

то приходимо до формули

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz},$$

яка зводить потрійний інтеграл до трикратного повторного інтеграла.

Зауваження 1. За цією формулою спочатку обчислюється самий внутрішній інтеграл по внутрішній змінній z при фіксованих зовнішніх змінних x і y. Потім знаходиться проміжний інтеграл по y при фіксованому x. В останню чергу обчислюється зовнішній інтеграл по x.

Зауваження 2. Можна одержати повторний інтеграл з іншим порядком інтегрування. Його доцільність залежить як від розташування області V відносно прийнятої системи координат $Oxyz$ та її форми, так і від вигляду підінтегральної функції $f(x, y, z)$.

Зауваження 3. Якщо область V – неправильна, то її треба розбити на правильні частини.

Приклад. Для потрійного інтеграла $I = \iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$ вказано підінтегральну функцію $f(x, y, z)$ й область інтегрування V, яка задана рівняннями поверхонь, що її обмежують, або системою нерівностей. Необхідно:

1) Зобразити тіло V у прямокутній системі координат $Oxyz$ як правильну в напрямі осі Oz просторову область.

2) Подати його проекцію D_{xy} як правильну в напрямі осі Oy плоску область, при необхідності розбиваючи на частини, і зробити відповідний рисунок.

3) За результатами пунктів 1) і 2) перейти до повторного інтеграла і обчислити його значення.

а) $f(x, y, z) = 7(1 - x/4)(3y^2 + 4z)$;

$V:\ z - y^2 = 0;\ x + 4y - 4 = 0;\ x = 0;\ z = 0;$

б) $f(x, y, z) = x + y + z$;

$V:\ x + y + z = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0$.

□ а) Область інтегрування V є вертикальним циліндричним тілом, а його проекцією на координатну площину Oxy є плоска область D_{xy}. На рис. 12 це тіло V подано як правильну в напрямі осі Oz просторову область, що обмежена знизу координатною площиною $z = 0$ (поверхня входу), зверху – параболічним циліндром $z = y^2$ (поверхня виходу), а з боків – координатною площиною $x = 0$ і вертикальною площиною $x + 4y - 4 = 0$. Відповідно на

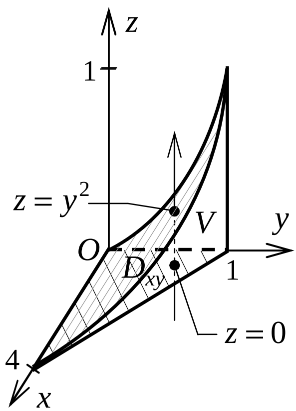

Рис. 12

рис. 13 проекцію D_{xy} відтворено як правильну в напрямі осі Oy плоску область, яка обмежена знизу віссю Ox (лінія входу $y = 0$), зверху – похилою прямою $y = 1 - x/4$ ((лінія виходу), а з боків – вертикальними прямими $x = 0$ і $x = 4$. Тоді потрійний інтеграл переходом до повторного обчислюється так:

$$I = 7\iiint\limits_V (1 - x/4)(3y^2 +$$

$$+ 4z)\, dxdydz = 7\int_0^4 (1 - x/4)\, dx \int_0^{1-x/4} dy \int_0^{y^2} (3y^2 + +4z)\, dz =$$

$$= 7\int_0^4 (1 - x/4)\, dx \int_0^{1-x/4} (3y^2 z + 2z^2)\Big|_0^{y^2} dy = 7\int_0^4 (1 - x/4)\, dx \int_0^{1-x/4} (3y^4 +$$

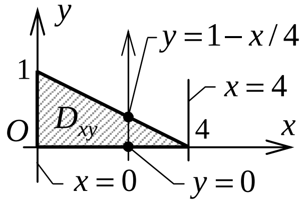

Рис. 13

$$+ 2y^4)\, dy = 7\int_0^4 (1 - x/4)\, dx \int_0^{1-x/4} 5y^4 dy =$$

$$= 7\int_0^4 (1 - x/4)\, y^5\Big|_0^{1-x/4} dx =$$

$$= 7\int_0^4 (1 - x/4)^6 dx = -4 \cdot (1 - x/4)^7\Big|_0^4 = 4$$

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь: $I = 1/8$. ■

1.1.5. Застосування кратних інтегралів

Площа плоскої фігури. Якщо в подвійному інтегралі $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x,y)\equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме площі області інтегрування D:

$$\boxed{S=\iint_D dx\,dy}.$$

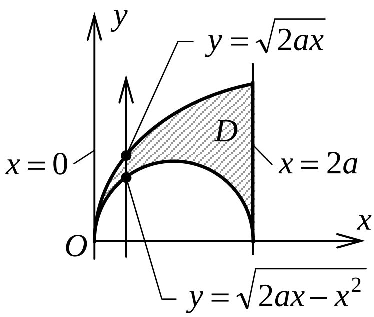

Рис. 14

Приклад 1. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу плоскої області D, що обмежена півколом $y=\sqrt{2ax-x^2}$, дугою параболи $y=\sqrt{2ax}$ і прямою $x=2a$ ($a>0$).

□ На рис. 14 область D подана як правильна в напрямі осі Oy. Тоді

$$S=\iint_D dxdy=\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}dy=\int_0^{2a}\left(\sqrt{2ax}-\sqrt{2ax-x^2}\right)dx=\int_0^{2a}\sqrt{2ax}dx-$$

$$-\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}dx=\sqrt{2a}\cdot(2/3)x^{3/2}\Big|_0^{2a}-\int_0^{2a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}dx=$$

$$=\Big|\, x-a=a\sin t;\ dx=a\cos t\,dt;\ t=\arcsin(x/a-1);$$

$$t_1=-\pi/2;\ t_2=\pi/2;\ \sqrt{a^2-(x-a)^2}=a\cos t\,\Big|=\sqrt{2a}\cdot(2/3)\sqrt{8a^3}-$$

$$-a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=(8/3)a^2-(1/2)a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{8}{3}a^2-\frac{1}{2}a^2\cdot\left(t+(1/2)\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{(16-3\pi)}{6}a^2 \text{ (кв. од.).} \quad ■$$

Об'єм тіла. Нехай правильне у напрямі осі Oz просторове тіло V, яке обмежене знизу і зверху поверхнями входу $z=z_1(x,y)$ і виходу $z = z_2(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D_{xy}. Тоді його об'єм обчислюється за формулою

$$\boxed{V = \iint_{D_{xy}} \left(z_2(x, y) - z_1(x, y)\right) dxdy}.$$

Зауваження 1. Якщо тіло V – правильне в напрямі осі Ox чи Oy, то його об'єм обчислюється за аналогічною формулою відповідно

$$\boxed{V = \iint\limits_{D_{yz}} \left(x_2(x, y) - x_1(x, y)\right) dydz}$$

і

$$\boxed{V = \iint\limits_{D_{xz}} \left(y_2(x, y) - y_1(x, y)\right) dxdz}.$$

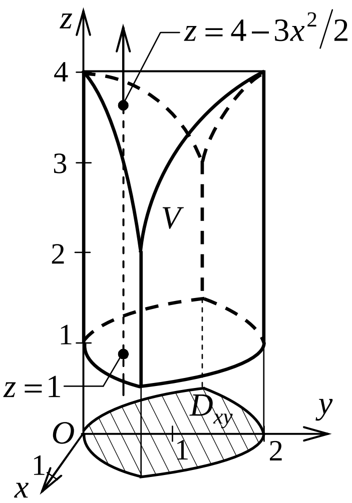

Рис. 15

Приклад 2. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об'єм тіла V, що обмежене параболічними циліндрами $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $z = 4 - 3x^2/2$ і площиною $z = 1$.

□ На рис. 15 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz. Його проекцією на площину Oxy служить область D_{xy}, що зображена на рис. 16 як правильна в напрямі осі Oy. Тоді

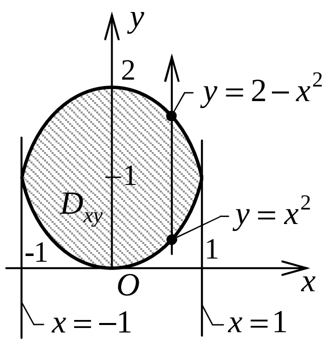

Рис. 16

$$V = \iint_{D_{xy}} \left(z_2(x, y) - z_1(x, y)\right) dxdy =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(4 - 3x^2/2 - 1\right) dxdy =$$

$$= \frac{3}{2} \int\limits_{-1}^{1} (2 - x^2)\, dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} dy = \frac{3}{2} \int\limits_{-1}^{1} (2 -$$

$$x^2) \cdot y\Big|_{x^2}^{2-x^2} dx = (3/2)\int_{-1}^{1} (2 - x^2)(2 -$$

$$-x^2-x^2)\,dx=3\int_{-1}^{1}(x^4-3x^2+2)\,dx=$$

$$=3\cdot(x^5/5-x^3+2x)\Big|_{-1}^{1}=7\frac{1}{5}\ \text{(куб. од.)}.\quad \blacksquare$$

Зауваження. Згідно геометричного змісту потрійного інтеграла об'єм просторової області V також можна обчислити за формулою

$$\boxed{V=\iiint_V dV=\iiint_V dxdydz}.$$

Приклад 3. За допомогою потрійного інтеграла обчислити об'єм тіла V, що обмежене гіперболічним параболоїдом $z=xy$, координатною площиною $z=0$ і площиною $2x+y-2=0$.

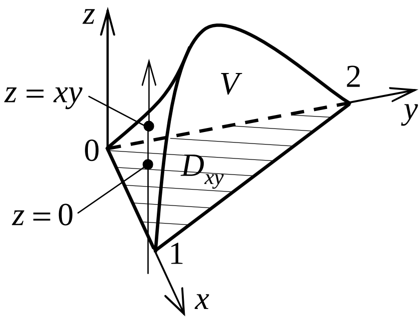

Рис. 17

□ На рис. 17 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz. Його проекцією на площину Oxy служить область D_{xy}, що зображена на рис. 18 як правильна в напрямі осі Oy. Тоді

$$V=\iiint_V dxdydz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x} dy\int_0^{xy} dz=$$

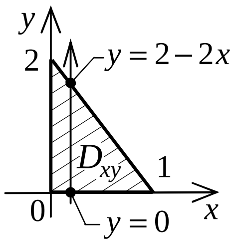

Рис. 18

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x} z\,\Big|_0^{xy} dy=\int_0^1 xdx\int_0^{2-2x} y\,dy=$$

$$=\int_0^1 x(y^2/2)\Big|_0^{2-2x}dx=\int_0^1(2x-4x^2+2x^3)dx=$$

$$=(x^2-4x^3/3+x^4/2)\Big|_0^1=1/6.\quad \blacksquare$$

1.2. Криволінійні інтеграли

1.2.1. Скалярне поле. Задача про масу дуги. Криволінійний інтеграл за довжиною

Нехай у деякій області D простору задано скалярну функцію трьох змінних $u = f(M) = f(x, y, z)$. Тоді кажуть, що в області D задане просторове скалярне поле $u = f(M)$.

Функція двох змінних $z = f(x, y)$, яка визначена у плоскій області D, задає плоске скалярне поле $z = f(x, y)$.

Поле – це функція $u = f(M)$, що розглядається разом з її областю визначення D. (Фізичний зміст функції багатьох змінних).

Приклади скалярних фізичних полів: поля температури, атмосферного тиску, електричного потенціалу.

Нехай у деякій області D координатної площини Oxy задано неперервне плоске скалярне поле $\mu = f(x, y)$. Припустимо, що в цій області D лежить кусково-гладка матеріальна крива L. Нехай неперервна функція $\mu = f(x, y)$ визначає лінійну густину розподілу маси вздовж кривої L. Потрібно обчислити масу дуги L_{AB} (рис. 19).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних частин Δl_i, $i = \overline{1, n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Розглянемо одну з елементарних дуг Δl_i. Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що її густину можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \in \Delta l_i$.

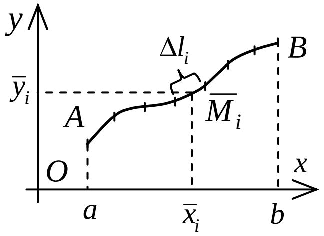

Рис. 19

Тоді $\Delta m_i \approx f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta l_i$ – маса елементарної дуги Δl_i. А маса всієї дуги L_{AB}:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\Delta l_i .$$

Одержана сума називається ***інтегральною*** для функції $f(x,y)$ по довжині дуги L_{AB}.

Очевидно, що $m = \lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i$.

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i$ *при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається* ***криволінійним інтегралом за довжиною*** (***криволінійним інтегралом першого роду***) *і позначається*:

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i},$$

де dl – ***диференціал*** (***елемент***) ***довжини дуги***.

Таким чином, $\boxed{m = \int_{L_{AB}} \mu\, dl = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl}$ (фізичний зміст криволінійного інтеграла за довжиною).

Якщо покласти $f(x,y) \equiv 1$, то криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює довжині l дуги L_{AB}: $\boxed{l = \int_{L_{AB}} dl}$ (геометричний зміст криволінійного інтеграла за довжиною).

Зауваження 1. При $f(x,y) \ge 0$ криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює площі S_c частини вертикальної циліндричної поверхні (рис. 20) з напрямною L_{AB} і паралельними осі Oz твірними, що розміщена між координатною площиною $z = 0$ і поверхнею $z = f(x,y)$:

$$\boxed{S_c = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl}.$$

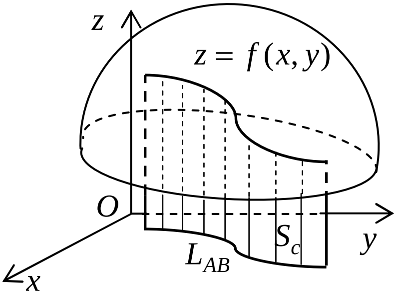

Рис. 20

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в деякій області D, що містить в собі кусково-гладку криву L, то існує криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ (достатні умови існування криволінійного інтеграла за довжиною).

Зауваження 3. Криволінійний інтеграл за довжиною не залежить від напряму руху по дузі: $\boxed{\int_{L_{BA}} f(x,y)\,dl = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl}$. Інші *властивості цього інтеграла аналогічні властивостям звичайного одновимірного інтеграла*.

Зауваження 4. Поняття криволінійного інтеграла за довжиною поширюється на випадок дуги L_{AB} просторової лінії L, розміщеної в просторовому скалярному полі $u = f(x,y,z)$:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} f(x,y,z)\,dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta l_i}.$$

1.2.2. Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною

Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Випадок 1. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$, тобто коли параметр t змінюється на відрізку $[\alpha;\beta]$, біжуча точка $(x(t); y(t))$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Диференціал дуги такої кривої записується у вигляді $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної і отримуємо:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}.$$

Приклад 1. Обчислити $\int_L e^y \,tg\, x\, dl$, якщо $L:\ x = arctg\ t$; $y = \ln(1+t^2)$; $0 \le t \le \sqrt{2}$.

□ Обчислимо:

$$x' = \frac{1}{1+t^2};\ y' = \frac{2t}{1+t^2};\ dl = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\,dt = \frac{\sqrt{1+4t^2}}{1+t^2}\,dt.$$

Підставимо в інтеграл:

$$\int\limits_L e^y \, tg\, x \, dl = \int\limits_0^{\sqrt{2}} e^{\ln(1+t^2)} tg\,(arctg\, t) \frac{\sqrt{1+4t^2}}{1+t^2} dt = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4t^2}\, t\, dt =$$

$$= \left| u = 1+4t^2;\ du = 8t\,dt;\ u_1 = 1;\ u_2 = 9 \right| = (1/8) \int_1^9 u^{1/2} du =$$

$$= (1/12) u^{3/2} \Big|_1^9 = 13/6. \ \blacksquare$$

<u>Випадок 2</u>. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x),\ a \le x \le b$. Тоді $dl = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2} dx$. Відповідно

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\, dl = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2} dx}.$$

<u>Приклад 2</u>. Обчислити $I = \int\limits_{AB} \frac{xy\, dl}{24-5x^2-8y^2}$, якщо AB є чвертю еліпса $x^2/4 + y^2 = 1 \quad (x \ge 0,\quad y \ge 0)$.

□ $AB: y = (1/2)\sqrt{4-x^2}, \quad 0 \le x \le 2;\quad y' = -(1/2)\, x \Big/ \sqrt{4-x^2}$;

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\, dx = (1/2) \left(\sqrt{16-3x^2} \Big/ \sqrt{4-x^2} \right) dx;$$

$$I = \int\limits_0^2 \frac{x(1/2)\sqrt{4-x^2}}{24-5x^2-8\cdot(1/4)(4-x^2)} \cdot \frac{\sqrt{16-3x^2}}{2\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^2 x\, dx =$$

$$= (1/8)\, x^2 \Big|_0^2 = 1/2. \ \blacksquare$$

<u>Випадок 3</u>. Якщо просторова дуга L_{AB} задана параметричними рівняннями $x = x(t);\quad y = y(t);\quad z = z(t),\quad \alpha \le t \le \beta$, то відповідний криволінійний інтеграл за довжиною обчислюється так:

$$\boxed{\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)\, dl = \int\limits_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2} dt}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int_L (x^2-y^2)z^{-3}\,dl$ за довжиною дуги гвинтової лінії $L:\ x=2e^t\cos t;\ y=2e^t\sin t;\ z=e^t$, $0\le t\le \pi/4$.

□ $x'=2(e^t\cos t-e^t\sin t);\ y'=2(e^t\sin t+e^t\cos t);\ z'=e^t;$

$$dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt=3e^t dt;$$

$$f(x,y,z)=\left((2e^t\cos t)^2-(2e^t\sin t)^2\right)(e^t)^{-3}=4e^{-t}\cos 2t;$$

$$I=4\int_0^{\pi/4}4e^{-t}\cos 2t\cdot 3e^t\,dt=6\cdot\sin 2t\Big|_0^{\pi/4}=6.\ \blacksquare$$

1.2.3. Векторне поле. Задача про роботу векторного поля. Криволінійний інтеграл за координатами

Якщо кожній точці $M(x,y,z)$ деякої області D простору поставлений у відповідність вектор $\boxed{\vec F(M)=P\vec i+Q\vec j+R\vec k}$, де $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ - скалярні функції, то говорять, що задано ***просторове векторне поле***.

У випадку плоскої області D і двовимірного вектора $\vec F(M)$, що лежить у площині цієї області, говорять про ***плоске векторне поле***. Зокрема, якщо область D лежить на координатній площині Oxy, то розглядається плоске векторне поле $\vec F(M)=P\vec i+Q\vec j$, де $P=P(x,y)$ і $Q=Q(x,y)$.

Задача про роботу векторного поля. Розглянемо плоске векторне поле сили $\vec F(x,y)=P(x,y)\vec i+Q(x,y)\vec j$. Нехай під дією змінної сили $\vec F=\vec F(x,y)$ матеріальна точка M рухається деякою плоскою кусково-гладкою напрямленою лінією L. Необхідно обчислити роботу $\tilde A$, яка виконується при переміщенні цієї точки M по дузі L_{AB} від початкової точки A до кінцевої точки B (рис. 21).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i=\overline{1,n}$ точками $A=M_0,M_1,M_2,...,M_n=B$ з абсцисами

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b$. Розглянемо елементарну дугу Δl_i, якій відповідає вектор переміщення $\Delta \vec{l_i} = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$. Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що на ній вектор сили $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $\vec{F} = \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \Delta l_i$.

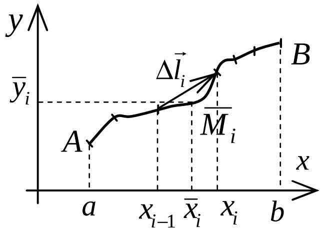

Рис. 21

Елементарна робота $\Delta\tilde{A}_i$ на ділянці Δl_i визначається скалярним добутком

$$\Delta\tilde{A}_i \approx \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta\vec{l_i} = P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i .$$

Якщо обчислити елементарну роботу на всіх ділянках Δl_i, $i = \overline{1, n}$ і скласти суму, то $\tilde{A} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\tilde{A}_i \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta\vec{l_i} =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i \right).$$

Одержана сума називається ***інтегральною*** для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ по напрямленій дузі L_{AB}.

Очевидно, що $\tilde{A} = \lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\tilde{A}_i$.

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + \right.$ $\left. + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i \right)$ *при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається* ***криволінійним інтегралом за координатами*** (***криволінійним інтегралом другого роду***) *і позначається*

$$\boxed{\int_{L_{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =}$$

$$\boxed{= \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta y_i \right)},$$

де для скорочення запису в підінтегральному виразі опущені зовнішні дужки.

Криволінійний інтеграл за координатами у векторному полі також називається ***циркуляцією вектора*** $\vec{F}$ ***по дузі*** L_{AB} і позначається $\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cdot \Delta \vec{l}_i}$,

де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$ – ***вектор диференціала*** (***елемента***) ***довжини плоскої дуги***.

Таким чином, $\boxed{\widetilde{A} = \int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l}}$

(фізичний зміст криволінійного інтеграла за координатами).

Якщо лінія L замкнена, то інтеграл по ній записується так

$$\boxed{\oint_L \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy},$$

причому початкова точка вибирається довільно і вказується напрям обходу. Якщо напрям обходу замкненого контуру L явно не зазначено, то приймається додатний напрям, при якому область, обмежена контуром, залишається зліва – рух проти годинникової стрілки.

Зауваження 1. Для просторового векторного поля інтеграл має вигляд

$$\boxed{\oint_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \oint_{L_{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz},$$

де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ – ***вектор диференціала*** (***елемента***) ***довжини просторової дуги***.

Криволінійний інтеграл за координатами визначається підінтегральним виразом, довжиною і формою кривої інтегрування та її напрямом.

Зауваження 2. *При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл за координатами тільки змінює знак*

$$\boxed{\int_{L_{BA}} \vec{F}\,d\vec{l} = -\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l}}.$$

Це випливає з означення, оскільки при цьому вектор $d\vec{l}$, а відповідно і його проекції dx, dy і dz, змінюють знак. Інші властивості криволінійного інтеграла за координатами аналогічні властивостям звичайного визначеного інтеграла.

1.2.4. Обчислення криволінійного інтеграла за координатами

Обчислення криволінійного інтеграла за координатами здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

<u>Випадок 1</u>. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах у параметричній формі $x = x(t)$; $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, причому коли параметр t змінюється на відрізку $[\alpha;\beta]$, біжуча точка $\big(x(t);y(t)\big)$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Тоді $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =}$$

$$\boxed{= \int_{\alpha}^{\beta} \left[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\right] dt}.$$

<u>Приклад 1</u>. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F} = (x/y)\,\vec{i} + 2\vec{j}$ по дузі циклоїди L: $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$, $\pi/3 \le t \le \pi/2$.

□ $dx = (1-\cos t)\,dt$; $dy = \sin t\,dt$; $\int_L \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int_L (x/y)\,dx +$

$$+ 2\,dy = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\big((t-\sin t)/(1-\cos t)\big)(1-\cos t) + 2\sin t\right]dt =$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} (t - \sin t + 2\sin t)\,dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} t\,dt + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin t\,dt =$$

$$= (1/2)t^2\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} - \cos t\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = 5\pi^2/72 + 1/2. \quad ■$$

<u>Випадок 2</u>. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x)$, $a \le x \le b$, причому коли x змінюється на відрізку $[a;b]$, біжуча точка $(x;y)$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Можна використати

попередній спосіб, записавши рівняння дуги у параметричній формі $x = x;\ y = y(x),\ a \le x \le b$. Тоді $dx = dx;\ dy = y'(x)\,dx$ і маємо

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =}$$

$$\boxed{= \int_a^b \left[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right) y'(x)\right] dx}.$$

Приклад 2. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^5 / y)\vec{j}$ по дузі кубічної параболи $L: y = x^3$, $1 \le x \le 2$.

□ $L: y = x^3$, $1 \le x \le 2$; $y' = 3x^2$; $dy = 3x^2 dx$;

$$\int_L \vec{F}\,d\vec{l} = \int_L 2xy\,dx + (x^5 / y)\,dy = \int_1^2 \left[2x\,x^3 + (x^5 / x^3)\cdot 3x^2\right] dx =$$

$$= 5\int_1^2 x^4\,dx = x^5\Big|_1^2 = 31. \quad ■$$

Випадок 3. Розглянемо просторове векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Нехай просторова дуга L_{AB} задана в параметричній формі $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, причому коли параметр t змінюється на відрізку $[\alpha;\beta]$, біжуча точка $\left(x(t); y(t); z(t)\right)$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Тоді $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$; $dz = z'(t)\,dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\boxed{\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy +}$$

$$\boxed{+ R(x,y,z)\,dz = \int_\alpha^\beta \left[P\left(x(t), y(t), z(t)\right) x'(t) +\right.}$$

$$\boxed{\left. + Q\left(x(t), y(t), z(t)\right) y'(t) + R\left(x(t), y(t), z(t)\right) z'(t)\right] dt}.$$

Приклад 3. Обчислити циркуляцію просторового векторного поля $\vec{F} = xz\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + (x + y - 2)\,\vec{k}$ по відрізку L_{AB} прямої, який з'єднує точки $A(1, 0, -3)$ та $B(2, -2, 0)$.

□ Знайдемо канонічні рівняння прямої AB:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{-2-0}=\frac{z+3}{0+3};\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{3}.$$

Перейдемо до параметричних рівнянь і обчислимо диференціали: $x=t+1; y=-2t; z=3t-3;\quad dx=dt; dy=-2dt; dz=3dt$.

$$x=t+1;\ y=-2t;\ z=3t-3;\ dx=dt;\ dy=-2dt;\ dz=3dt.$$

Врахуємо, що при заміні змінної змінюються межі інтегрування, а саме, якщо на відрізку L_{AB} $1\le x\le 2$, то $0\le t\le 1$.

Отже, $\int_{L_{AB}}\vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l}=\int_{L_{AB}}xz\,dx+2y\,dy+(x+y-2)\,dz=$

$$=\int_0^1\left[(t+1)(3t-3)+2(-2t)\cdot(-2)+(t+1-2t-2)\cdot 3\right]dt=$$

$$=\int_0^1(3t^2-3+8t-3t-3)\,dt=3\int_0^1 t^2dt+5\int_0^1 t\,dt-6\int_0^1 dt=$$

$$=t^3\Big|_0^1+(5/2)\cdot t^2\Big|_0^1-6t\Big|_0^1=-2/5.\quad\blacksquare$$

1.2.5. Формула Гріна

Встановимо зв'язок між подвійним інтегралом по деякій плоскій області D та криволінійним інтегралом по межі L цієї області.

Теорема. (Зв'язок між криволінійним і подвійним інтегралом). *Нехай задано плоске векторне поле* $\vec{F}(M)=P\vec{i}+Q\vec{j}$ *де* $P=P(x,y)$ та $Q=Q(x,y)$ - *функції двох змінних, неперервні разом з частинними похідними* $\partial P/\partial y$ *і* $\partial Q/\partial x$. *Якщо* L - *замкнена лінія, що обмежує однозв'язну область* D, *то*

$$\boxed{\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy}$$

(***формула Гріна***).

□ Обмежимось розглядом області D, правильної в напрямі осі Oy (рис. 22). Обчислимо

$$\iint_D\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy=$$

$$=\int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx=\int_a^b \big(P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x))\big)\,dx=$$

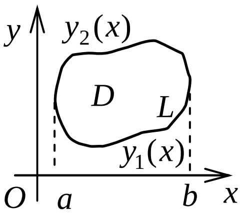

Рис. 22

$$=-\int_b^a P(x,y_2(x))\,dx-\int_a^b P(x,y_1(x))\,dx=$$

$$=-\oint_L P(x,y)\,dx.$$ Аналогічно

$$\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dxdy=\oint_L Q(x,y)\,dx.$$

Склавши відповідні вирази, маємо

$$\oint_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy. \ \blacksquare$$

Приклад 1. Використовуючи формулу Гріна, обчислити циркуляцію $I=\oint_L \ln(x^2+y^2)\,dx+2\,arctg\,(y/x)\,dy$, якщо L - замкнений контур $ABCE$ (рис. 23), утворений колами $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ і прямими $y=x$, $y=x\sqrt{3}$, де $x>0$, $y>0$.

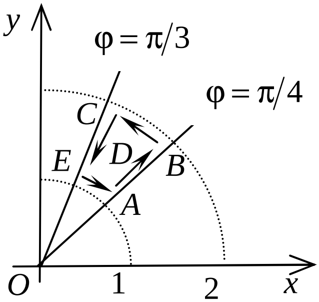

Рис. 23

□ У прийнятих позначеннях

$$P(x,y)=\ln(x^2+y^2);$$

$$Q(x,y)=2\,arctg\,(y/x).$$

Знайдемо $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=-\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Тоді за формулою Гріна

$$I=\oint_L \ln(x^2+y^2)\,dx+2\,arctg\,(y/x)\,dy=-4\iint_D \frac{y\,dxdy}{x^2+y^2},$$

де область D обмежена контуром L.

Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, де

$1 \le \rho \le 2$, $\pi/4 \le \varphi \le \pi/3$. Отже,

$$I = -4\iint_D \frac{y\,dxdy}{x^2+y^2} = -4\iint_D \frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2}\rho\,d\rho\,d\varphi = -4\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin\varphi\,d\varphi\int_1^2 d\rho =$$

$$= -4\int_{\pi/4}^{\pi/3} \rho\Big|_1^2 \sin\varphi\,d\varphi = 4\cos\varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = 2-2\sqrt{2}\,. \quad \blacksquare$$

1.2.6. Застосування криволінійних інтегралів

За допомогою криволінійного інтеграла за довжиною можна обчислити довжину дуги і площу циліндричної поверхні.

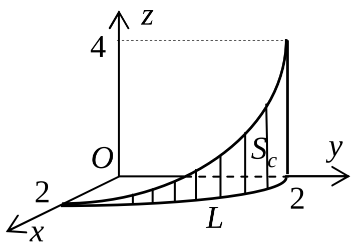

Рис. 24

Приклад 1. Обчислити площу S_c частини параболічного циліндра $y=\sqrt{4-2x}$, $0 \le x \le 2$, що розміщена між площиною $z=0$ і циліндром $z = y^3/2$ (рис. 24).

□ $L:\ y=\sqrt{4-2x},\quad 0\le x\le 2$;

$y' = -1\big/\sqrt{4-2x}$;

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{4-2x}}dx;\ \ S_c = \int_L \frac{y^3}{2}\,dl = \frac{1}{2}\int_0^2\left(\sqrt{4-2x}\right)^3 \times$$

$$\times\frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{4-2x}}dx = \int_0^2 (2-x)\sqrt{5-2x}\,dx = \Big|\,5-2x=u^2;\ x=(5-u^2)\big/2;$$

$$dx=-u\,du;\ u=\sqrt{5-2x};\ u_1=\sqrt{5};\ u_2=1\Big| = \int_{\sqrt{5}}^1\left(2-(5-u^2)/2\right)u\times$$

$$\times(-u\,du) = (1/2)\int_{\sqrt{5}}^1 (u^2-u^4)\,du = (1/2)\int_{\sqrt{5}}^1 u^2du - (1/2)\times$$

$$\times\int_{\sqrt{5}}^1 u^4du = (1/6)\cdot u^3\Big|_{\sqrt{5}}^1 - (1/10)\cdot u^5\Big|_{\sqrt{5}}^1 = \left(25\sqrt{5}+1\right)\Big/15\,. \quad \blacksquare$$

Маса плоскої матеріальної дуги L з лінійною густиною $\mu=\mu(x,y)$ визначається за формулою $\boxed{m=\int_L \mu(x,y)\,dl}$. Якщо густина стала $\mu_0 = const$, то $m = \mu_0 \int_L dl$.

<u>Приклад 2</u>. Обчислити масу m плоскої матеріальної дуги L з лінійною густиною $\mu = \mu(x,y)$:

а) L: $y = 2x^{3/2}$, $0 \le x \le 1$; $\mu(x,y) = y\big/\sqrt{1+9x}$;

б) L: $x = 3\cos t$; $y = 3\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$; $\mu(x,y) = 6xy^2$.

□ а) L: $y = 2x^{3/2}$; $y' = 3x^{1/2}$; $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+9x}\,dx$;

$$m = \int_L \mu(x,y)\,dl = \int_L \left(y\big/\sqrt{1+9x}\right) dl = \int_0^1 \left(2\,x^{3/2}\big/\sqrt{1+9x}\right)\times$$

$$\times\sqrt{1+9x}\,dx = 2\int_0^1 x^{3/2}\,dx = (4/5)\cdot x^{5/2}\Big|_0^1 = 4/5;$$

б) Розв’язати самостійно. ■

Нехай замкнений контур L обмежує однозв’язну область D. За формулою Гріна

$$\oint_L -y\,dx + x\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) dxdy = \iint_D (1+1)\,dxdy =$$

$$= 2\iint_D dxdy = 2S_D. \quad \text{Звідси } \boxed{S_D = (1/2)\oint_L -y\,dx + x\,dy},$$

де S_D – площа плоскої області D, що обмежена контуром L. Таким чином, за допомогою криволінійного інтеграла за координатами можна обчислити площу плоскої області.

<u>Приклад 3</u>. За допомогою криволінійного інтеграла за координатами обчислити площу плоскої області D, що обмежена осями координат $x = 0$, $y = 0$ і дугою астроїди $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$, розміщеною в першому квадранті ($x \ge 0$, $y \ge 0$) (рис. 25).

□ Контур L_{OABO}, що обмежує область D, складається з трьох ділянок OA, AB і BO. Відповідно розіб’ємо інтеграл:

$$S_D = (1/2)\oint_{L_{OABO}} -y\,dx + x\,dy = (1/2)\left(\int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO}\right).$$

Тоді OA: $y = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$; $dy = 0$;

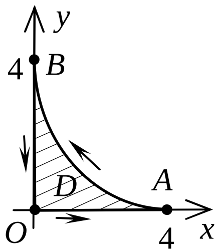

Рис. 25

$$\int_{OA} -y\,dx + x\,dy = \int_0^4 (-0 + x\cdot 0)\,dx = 0:$$

$$AB:\ x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t,\ t_1 = 0,\ t_2 = \pi/2;$$

$$dx = -12\cos^2 t\sin t\,dt;\quad dy = 12\sin^2 t\cos t\,dt;$$

$$\int_{AB} -y\,dx + x\,dy = \int_0^{\pi/2}\Big(-4\sin^3 t\cdot(-12)\cos^2 t\times$$

$$\times\sin t + 4\cos^3 t\cdot 12\sin^2 t\cos t\Big)\,dt =$$

$$= 48\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 12\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt =$$

$$= 6\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt = 6t\Big|_0^{\pi/2} - (3/4)\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = 3\pi;$$

$BO: x = 0,\ y_1 = 4,\ y_2 = 0;\ dx = 0;$ $\int_{BO} -y\,dx + x\,dy = \int_4^0 (-y\cdot 0 +$

$+0)\,dx = 0$. Отже, $S_D = (1/2)(0 + 3\pi + 0) = 3\pi/2$. ■

1.3. Степеневі ряди

1.3.1. Функціональні ряди. Степеневі ряди та їх збіжність

Функціональним називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, членами якого є функції $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, визначені на деякій непорожній множині D зміни аргументу x.

Якщо аргументу x надати деякого значення x_0 з ***області визначення*** D ряду, то дістанемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, що може збігатися чи розбігатися. Відповідно x_0 називається ***точкою збіжності*** чи ***точкою розбіжності*** функціонального ряду.

Множина D_s всіх точок збіжності називається ***областю збіжності*** функціонального ряду. Очевидно, що D_s є деякою підмножиною області визначення D: $D_s \subseteq D$.

В області збіжності ряду його сума S є функцією x:

$S = S(x)$. Записують $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і кажуть, що ***функція*** $S(x)$ **розвивається** (***розкладається***) ***в ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Для залишку $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ збіжного функціонального ряду виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається ***абсолютно збіжним*** в деякій області D_a, якщо в довільній точці x_0 цієї області абсолютно збігається відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та неперервні на деякому відрізку $[a;b]$.

Рівномірною відстанню між функціями $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число

$$\boxed{\rho_1(f,g) = \| f - g \|_1 = \max_{a\le x\le b} | f(x) - g(x) |}\,.$$

Нехай відрізок $[a;b]$ міститься в області визначення D функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Цей ряд називається ***рівномірно збіжним*** на відрізку $[a;b]$ до суми $S(x)$, якщо виконується умова

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \rho_1(S, S_n) = 0}\,.$$

<u>Теорема Вейєрштрасса</u> (***достатня ознака рівномірної збіжності функціонального ряду***). Якщо *для всіх значень* x *з деякого відрізка* $[a;b]$ *члени функціонального ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *за абсолютною величиною не перевищують відповідних членів збіжного знакододатного числового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *то функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно на цьому відрізку* $[a;b]$.

Найбільш важливим для прикладних задач окремим випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$ називається функціональний ряд вигляду:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots},$$

де x – дійсна змінна (***аргумент***); x_0 – дійсне фіксоване число (***центр розвинення*** або ***опорна точка***); $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – дійсні сталі (***коефіцієнти***).

При $\boxed{x_0 = 0}$ одержується більш зручний за формою степеневий ряд $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ за степенями x. До цього спрощеного вигляду довільний степеневий ряд зводиться лінійною заміною $x - x_0 = t$.

Очевидно, що довільний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ збіжний в точці $x = x_0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку $x = x_0$ – центр розвинення. Детальніші відомості про збіжність дає наступна

<u>теорема Абеля</u>. а) *Якщо степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збігається при деякому* $x = x_1 \neq 0$, *то він абсолютно збігається при всіх значеннях* x, *для яких* $|x| < |x_1|$. *б) Якщо степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *розбігається при деякому* $x = x_2$, *то він розбігається при всіх значеннях* x, *для яких* $|x| > |x_2|$.

Теорема Абеля дозволяє розділити множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Якщо x_1 – точка збіжності ряду, то весь інтервал $(-|x_1|; |x_1|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду (рис. 26). Якщо x_2 – точка розбіжності ряду, то півпряма $(-\infty; |x_2|)$ зліва від точки $-|x_2|$ і півпряма $(|x_1|; +\infty)$ справа від точки $|x_2|$ (рис. 26) складаються з точок розбіжності цього ряду. Зближуючи $|x_1|$ і $|x_2|$ простим перебором значень x між ними, звужуватимемо зону невизначеності $(-|x_2|; -|x_1|) \cup (|x_1|; |x_2|)$ і дістанемо:

існує таке невід'ємне число R, яке називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду, що при $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний (рис. 27). Симетричний інтервал $(-R; R)$ називається ***інтервалом збіжності*** степеневого ряду. Його довжина дорівнює подвоєному радіусу.

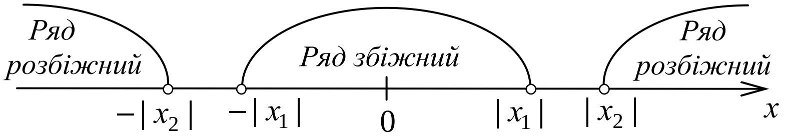

Рис. 26

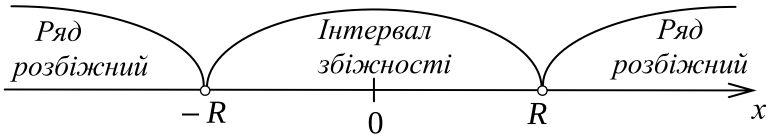

Рис. 27

Зауваження 1. На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = \pm R$, питання про збіжність розв'язується окремо для кожного конкретного ряду. Таким чином, область збіжності степеневого ряду може відрізнятись від інтервалу $(-R; R)$ не більше ніж двома точками $x = \pm R$.

Зауваження 2. У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку ($R = 0$), у інших – інтервалом збіжності є вся числова пряма $(-\infty; +\infty)$ ($R = +\infty$).

Зауваження 3. Інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ за степенями двочлена $x - x_0$ знаходять з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто він має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$ і є симетричним відносно центру розвинення x_0.

Зауваження 4. Інтервал збіжності степеневого ряду можна знайти безпосередньо за ознакою Даламбера або за радикальною ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів даного ряду. Для дослідження кінців інтервалу використовуються більш “сильні” ознаки.

Приклад 1. Знайти інтервал і область збіжності даного степеневого ряду:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^{6n}}$;

в) $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{(-1)^n n!\,(x-2)^{n+5}}{3^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n\sqrt{\ln(4n)}}$.

□ а) Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n};\quad u_{n+1}=\frac{(x-1)^{3(n+1)}}{(4(n+1)+5)8^{n+1}}=\frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}}:\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}\right|=\frac{|x-1|^3}{8}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{4n+9}=\frac{|x-1|^3}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{4+5/n}{4+9/n}=\frac{|x-1|^3}{8};\quad \frac{|x-1|^3}{8}<1;$$

$$|x-1|^3<8;\ |x-1|<2;\ -2<x-1<2;\ -1<x<3.$$

Таким чином, $(-1;3)$ – інтервал збіжності даного ряду і $R=(3-(-1))/2=2$ – його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $x=-1$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{4n+5},$$

який є умовно збіжним за ознакою Лейбниця. (Переконайтеся в цьому самостійно).

При $x=3$ дістаємо знакододатний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(3)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4n+5},$$

який розбігається за граничною ознакою порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/n$. (Переконайтеся в цьому самостійно).

Отже, областю збіжності даного ряду є півінтервал $[-1;3)$.

б) Для даного ряду скористаємося радикальною ознакою:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(x+4)^n/n^{6n}\right|} = |x+4|\lim_{n\to\infty}1/n^6 = 0$$

Оскільки $0<1$ при всіх дійсних значеннях x, то інтервалом і областю збіжності ряду є вся числова пряма $(-\infty;+\infty)$ і його радіус збіжності $R=+\infty$.

в) До даного ряду застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n = (-1)^n n!\,(x-2)^{n+5}/3^n\,; \quad u_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)!\times$$

$$\times\,(x-2)^{n+1+5}/3^{n+1} = (-1)^{n+1}n!\,(n+1)(x-2)^{n+6}/3^{n+1}\,;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}n!\,(n+1)(x-2)^{n+6}/3^{n+1}}{(-1)^n n!\,(x-2)^{n+5}/3^n}\right| =$$

$$= \frac{|x-2|}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1) = \begin{cases} 0 \;\; при \;\; x=2; \\ +\infty \;\; при \;\; x\neq 2. \end{cases}$$

Отже, інтервалом і областю збіжності ряду є тільки одна точка $x=2$ і його радіус збіжності $R=0$.

г) (Розв'язати самостійно. До ряду з модулів застосувати ознаку Даламбера. Кінці інтервалу збіжності дослідити за інтегральною ознакою. Відповідь: $(-1;1)$ – інтервал і область збіжності). ■

Наведемо <u>основні властивості</u> степеневих рядів:

1) *Степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку* $[a;b]$, *який цілком міститься в інтервалі збіжності* $(-R;R)$.

2) *Сума степеневого ряду* $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *неперервна на інтервалі збіжності* $(-R;R)$.

3) *Степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку* $[a;b]$, *який належить інтервалу збіжності* $(-R;R)$. *Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності.*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \ [a;b] \subset (-R;R).$$

4) *Степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *можна почленно диференціювати в інтервалі збіжності* $(-R;R)$. *Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності*.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \ \ x \in (-R;R).$$

Зауваження 5. При диференціюванні чи інтегруванні степеневого ряду інтервал збіжності не змінюється, але може змінитися збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

Зазначені властивості степеневих рядів широко використовуються в теоретичних дослідженнях і наближених обчисленнях.

Приклад 2. Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, інтервал збіжності якого $(-1;1)$.

□ Нехай $S(x)$ – сума даного ряду. Тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \big/ (2n+1) \right) (x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n .$$

Одержаний ряд геометричної прогресії з першим членом $a = 1$ і знаменником $q = -x^2$ при $x \in (-1;1)$ є збіжним, оскільки $|q| < 1$. Знайдемо його суму: $S'(x) = 1 \big/ (1 + x^2)$.

Інтегруючи цю рівність на відрізку $[0;x] \subset (-1;1)$, дістанемо:

$$S(x) = \int_0^x S'(x)\,dx = \int_0^x dx/(1+x^2) = arctg\, x, \ \ |x| < 1. \quad ■$$

Приклад 3. Знайти область збіжності та суму степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$.

□ (Розв’язати самостійно, використовуючи почленне інтегрування). Відповідь: $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = (2x - x^2) \big/ (1-x)^2$, $|x| < 1$. ■

1.3.2. Ряди Тейлора і Маклорена. Розвинення функцій у ряди Тейлора і Маклорена

В області збіжності сумою степеневого ряду є деяка функція. Вище висвітлені основні властивості та на прикладах розглянуті деякі способи знаходження цієї функції в скінченному вигляді.

Вважатимемо тепер, що функція задана, і з'ясуємо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти його коефіцієнти.

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки x_0 і в цій точці нескінченне число разів диференційовна. Припустимо, що в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ функцію $f(x)$ можна подати у вигляді степеневого ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

У цьому разі кажуть, що ***функція*** $f(x)$ ***розвинена*** (***розкладена***) ***в степеневий ряд*** в околі точки x_0 (за степенями двочлена $x - x_0$).

Знайдемо коефіцієнти цього ряду через значення самої функції $f(x)$ та її похідних у центрі розвинення x_0. Для цього послідовно диференціюватимемо ряд і підставлятимемо в ліву та праву частини одержаних розкладів значення $x = x_0$, а потім розв'язуватимемо знайдені вирази відносно шуканих коефіцієнтів:

$$f(x_0) = a_0 = 1 \cdot a_0 = 0! a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)/0!;$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + n\,a_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots;$$

$$f'(x_0) = a_1 = 1 \cdot a_1 = 1!\, a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(x_0)/1!;$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots;$$

$$f''(x_0) = 2a_2 = 1 \cdot 2a_2 = 2! a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = f''(x_0)/2!;$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots;$$

$$f'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 = 3!\, a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = f'''(x_0)/3!;$$

… … … … … … ... … … … … … … … … … …

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2a_n + (n+1)n\ldots 2a_{n+1}(x - x_0) + \ldots;$$

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2)\ldots 2a_n = n!a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = f^{(n)}(x_0)\big/n!;$$

… … … … … … ... … … … … … … … … … …

Підставляючи одержані значення коефіцієнтів, дістанемо ***ряд Тейлора*** для даної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) +}$$

$$\boxed{+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots}.$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0 = 0$, то отримаємо ***ряд Маклорена*** для даної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots}.$$

Зауваження. Після побудови для даної функції $f(x)$ її ряду Тейлора треба знайти його область збіжності та встановити, чи збігається він саме до цієї функції $f(x)$.

Єдиність розвинення функції в ряд Тейлора виражає наступна

теорема. *Якщо функцію* $f(x)$ *в інтервалі* $(x_0 - R; x_0 + R)$ *можна подати у вигляді ряду* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ *за степенями двочлена* $x - x_0$*, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції, тобто* $a_n = f^{(n)}(x_0)\big/n!$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Розвинення функцій в степеневі ряди в загальному випадку ґрунтується на використанні рядів Тейлора чи Маклорена.

За ***способом безпосередньої побудови*** для даної функції $f(x)$ здійснюють наступне:

а) знаходять похідні $f'(x)$, $f''(x)$ ..., $f^{(n)}(x)$, ...;

б) обчислюють значення похідних у заданій точці $x = x_0$;

в) записують шуканий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}(x_0)\big/n! \right)(x-x_0)^n$;

г) знаходять інтервал і область його збіжності;

д) визначають проміжок, в якому виконуються умови теореми 2 чи теореми 3 з попереднього пункту 1.5.3. Якщо такий проміжок існує, то в ньому дана функція $f(x)$ і сума її ряду Тейлора співпадають, тобто $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(f^{(n)}(x_0)/n!\right)(x-x_0)^n$.

Згідно теореми про єдиність розвинення, ряд Тейлора чи ряд Маклорена для даної функції $f(x)$ не залежить від способу його побудови. Тому на практиці частіше застосовують ***спосіб формальних перетворень*** – без знаходження виразів для похідних довільного порядку, а за допомогою формальних перетворень уже відомих (стандартних) розвинень. Тоді залишається обґрунтувати збіжність і саме до даної функції отриманого розкладу на певному проміжку.

У наступній таблиці подані ряди Маклорена і області їх збіжності для деяких елементарних функцій. Вони використовуються як ***стандартні розвинення*** при знаходженні степеневих рядів для інших функцій. (Виведення цих співвідношень здійсніть самостійно).

№ п/п	Функція та її розвинення в ряд Маклорена
1	$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x\in R$
2	$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in R$
3	$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x\in R$
4	$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=$ $=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\ x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)},\ x\in[-1;1]$, де $\begin{cases}(2n-1)!!=1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\\(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)\end{cases}$
5	$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1;1]$
6	$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ x\in(-1;1]$

7	$\ln\dfrac{1+x}{1-x}=2\left(x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\ldots+\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right)=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x\in(-1;1)$
8	$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$ $=1+\alpha x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$, $x\in(-1;1)$
8а	$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $x\in(-1;1)$
9	$sh\,x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^3}{5!}+\ldots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in R$
10	$ch\,x=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in R$

Приклад 1. Розкласти в ряд Маклорена дані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

а) $f(x)=\cos^2 x$; б) $f(x)=12\big/(x^2-2x-3)$.

□ а) Спосіб I – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,\ldots$ та їх значення $f^{(n)}(0)$, $n=0,1,2,\ldots$, що входять у ряд Маклорена $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x)=\cos^2 x; \qquad f(0)=1;$$

$$f'(x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x=\sin(2x+(\pi/2)\cdot 2); \quad f'(0)=0;$$

$$f''(x)=-2\cos 2x=2\sin(2x+(\pi/2)\cdot 3); \qquad f''(0)=-2;$$

$$f'''(x)=2^2\sin 2x=2^2\sin(2x+(\pi/2)\cdot 4); \qquad f'''(0)=0;$$

$$f^{(4)}(x)=2^3\cos 2x=2^3\sin(2x+(\pi/2)\cdot 5); \qquad f^{(4)}(0)=2^3;$$

… …

$$f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin(2x+\frac{\pi}{2}(n+1)); \quad f^{(n)}(0)=2^{n-1}\sin(\frac{\pi}{2}(n+1));$$

… …

Підставимо отримані значення похідних у формулу ряду Маклорена і дістанемо

$$\cos^2 x = \underbrace{1}_{u_0} + \underbrace{0}_{u_1} - \underbrace{(2/2!)x^2}_{u_2} + \underbrace{0}_{u_3} + \underbrace{(2^3/4!)x^4}_{u_4} + \ldots +$$

$$+\underbrace{\frac{2^{n-1}\sin((\pi/2)\cdot(n+1))}{n!}x^n}_{u_n} + \ldots = \left| \begin{array}{l} u_n = \dfrac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!}x^{2m}, \ n = 2m; \\ u_n = 0, \ n = 2m+1, \ \ m = 0,1,2,\ldots \end{array} \right| =$$

$$= 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!}x^{2m} + \ldots =$$

$$= \left| n = m \right| = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n 2^{2n-1}\big/(2n)!\right)x^{2n} .$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{(-1)^n 2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\right| = 4x^2 \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\left(1/((2n+1)(2n+2))\right) = 0 < 1, \ \ x \in R .$$

Отже, інтервал і область збіжності ряду $(-\infty; +\infty)$.

<u>Спосіб 2 – формальні перетворення</u>. Скористаємося відомими тотожностями для перетворення даної функції, основними властивостями збіжних степеневих рядів і стандартними розвиненнями.

Подамо функцію $f(x) = \cos^2 x$ у вигляді:

$$f(x) = \cos^2 x = (1+\cos 2x)/2 = 1/2 + (1/2)\cos 2x$$

і використаємо відомий розклад

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

замінюючи x на $2x$. Дістанемо:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) = 1 -$$

$$-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots+\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}\ .$$

Як бачимо, обидва способи дають однакове розвинення. Його область збіжності $(-\infty;+\infty)$ знайдена вище.

б) (Розв'яжіть самостійно). Відповідь:

$$\frac{12}{x^2-2x-3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n}x^n\ ,\quad x\in(-1;1)\ ,\quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Розкласти в ряд Тейлора дані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

а) $f(x)=1/(4x-5)$ за степенями двочлена $x-3$;

б) $f(x)=\cos\,(\pi x/4)$ за степенями двочлена $x+2$.

□ а) <u>Спосіб I – безпосередня побудова</u>. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,\ldots$ та їх значення $f^{(n)}(3)$, $n=0,1,2,\ldots$, що входять у ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n = f(3)+\frac{f'(3)}{1!}(x-3)+$$

$$+\frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n+\ldots$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x)=1/(4x-5)\,;\qquad f(3)=1/7\,;$$

$$f'(x)=-1\cdot 4/(4x-5)^2\,;\quad f'(3)=-1\cdot 4/7^2\,;$$

$$f''(x)=1\cdot 2\cdot 4^2/(4x-5)^3\,;\quad f''(3)=1\cdot 2\cdot 4^2/7^3\,;$$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … …

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,4^n/(4x-5)^{n+1}\,;\quad f^{(n)}(3)=(-1)^n n!\,4^n/7^{n+1}\,;$$

… …

Підставимо знайдені значення похідних в ряд Тейлора і дістанемо:

$$\frac{1}{x-5}=\frac{1}{7}-\frac{1\cdot 4/7^2}{1!}(x-3)+\frac{1\cdot 2\cdot 4^2/7^3}{2!}(x-3)^2+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^n n!\cdot 4^n/7^{n+1}}{n!}(x-3)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}.$$

Звернемося до ознаки Даламбера для дослідження отриманого ряду на збіжність:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}(x-3)^{n+1}}{7^{n+2}}:\frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}\right|=$$

$$=(4/7)\,|\,x-3\,|<1;\ \ -7/4<x-3<7/4;\ \ 5/4<x<19/4.$$

На кінцях інтервалу збіжності $(5/4;19/4)$ маємо ряди $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(5/4)=(1/7)\sum_{n=0}^{\infty}1$ і $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(19/4)=(1/7)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, що розбігаються, оскільки для них не виконується необхідна ознака збіжності. Отже, $(5/4;19/4)$ – область збіжності одержаного ряду.

<u>Спосіб 2 – формальні перетворення</u>. Спочатку подамо функцію $f(x)=1/(4x-5)$ через нову змінну $z=x-3$ – відхилення від центру розвинення $x=x_0=3$:

$$x=z+3;\quad f(x)=\frac{1}{4(z+3)-5}=\frac{1}{4z+7}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1+4z/7}.$$

Скористаємося рядом

$$1/(1+x)=1-x+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ \ x\in(-1;1),$$

в який замість x підставимо $4z/7$. Отримаємо:

$$f(x)=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1+4z/7}=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4z/7)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n z^n}{7^{n+1}}.$$

Поклавши $z=x-3$, повернемося до початкової змінної x і дістанемо шукане розвинення $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}$.

Його область збіжності $(5/4;19/4)$ знайдена вище.

б) (Розв'яжіть самостійно).

Відповідь:

$$\cos\frac{\pi x}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}(x+2)^{2n+1}}{(2n+1)!\,4^{2n+1}},\quad x\in(-\infty;+\infty).\quad\blacksquare$$

1.3.3. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

У наближених обчисленнях степеневі ряди застосовують, зокрема, для: обчислення значень функцій; обчислення інтегралів; розв'язування диференціальних рівнянь.

Наближене обчислення значень функцій. Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x=x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд в деякому інтервалі $(a;b)$, що містить точку x_0, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x=x_0$, а наближене – частковій сумі $S_n(x_0)$: $f(x_0)\approx S_n(x_0)$. Абсолютна похибка $\Delta=\left|f(x_0)-S_n(x_0)\right|$ характеризує точність наближення. Вона дорівнює модулю залишку ряду $\Delta=\left|R_n(x_0)\right|$.

Треба також враховувати похибки округлення при обчисленні самих залишених в $S_n(x_0)$ членів ряду.

Приклад 1. Обчислити наближено значення $\sin 12^\circ$ з точністю до $\varepsilon=0{,}0001$.

□ Скористаємося розвиненням функції $\sin x$ в ряд Маклорена

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in R,$$

де покладемо $x=12^\circ=\pi/15=0{,}2094393$ і дістанемо знакопочерговий ряд

$$\sin 12^\circ=\sin\frac{\pi}{15}=\frac{\pi}{15}-\frac{\pi^3}{15^3\cdot 3!}+\frac{\pi^5}{15^5\cdot 5!}+\ldots+\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{15^{2n+1}\cdot(2n+1)!}+\ldots.$$

Для заданої точності $\varepsilon=0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2=0{,}0001/2=0{,}00005.$$

Знайдемо спочатку, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми $f(x_0)$ ряду частковою сумою $S_n(x_0)$ отримати граничну абсолютну похибку $\varepsilon_1 = 0{,}00005$ залишку.

За наслідком з ознаки Лейбниця $|R_n| \le |u_{n+1}|$. Тоді

$$|R_n| \le |u_{n+1}| = \frac{(\pi/15)^{2n+3}}{(2n+3)!} \le \varepsilon_1 = 0{,}00005;\ \frac{(\pi/15)^{2n+3}}{(2n+3)!} \le 0{,}00005.$$

Розв'яжемо цю нерівність методом підбору:

$$n = 0:\ \ |u_1| = (\pi/15)^3/3! = 0{,}0015312 > \varepsilon_1 = 0{,}00005;$$

$$n = 1:\ \ |u_2| = (\pi/15)^5/5! = 0{,}000003 \le \varepsilon_1 = 0{,}00005.$$

Отже, досить взяти два перших члени ряду u_0 і u_1.

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5 \cdot 10^{-k} \cdot 2 \le \varepsilon_2 = 0{,}00005;\ 10^{-k} \le 0{,}00005;\ k \ge \lg 20000;\ k = 5.$$

Таким чином

$$\sin 12^\circ \approx S_1 = \pi/15 - (\pi/15)^3/3! = 0{,}20944 - 0{,}00153 = 0{,}20791.$$

Остаточно $\sin 12^\circ \approx 0{,}2079$. ■

<u>Наближене обчислення визначених інтегралів</u>. Нехай потрібно знайти інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, який не береться в елементарних функціях або складний і незручний для безпосередніх обчислень. Розглянемо випадок, коли підінтегральну функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, інтервал збіжності якого охоплює відрізок інтегрування $[a;b]$. Тоді на цьому відрізку ряд можна почленно проінтегрувати, використавши відповідну властивість степеневих рядів. Одержаний ряд дає точне значення інтеграла. Наближене значення дорівнює частковій сумі. Похибка обчислень визначається так само, як і при знаходженні значень функцій.

<u>Приклад 2</u>. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^{1/2} x^4 (e^{x^2} - 1)\,dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$.

□ Формула Ньютона – Лейбниця тут не застосовна, тому що первісна від $f(x)=x^4(e^{x^2}-1)$ не виражається в елементарних функціях. Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи стандартний розклад для експоненти e^x, де замість x підставимо x^2, потім віднімемо 1 і почленно помножимо на x^4:

$$x^4(e^{x^2}-1)=x^4\Big((1+x^2/1!+x^4/2!+\ldots+x^{2n}/n!+\ldots)-1\Big)=$$

$$=x^6/1!+x^8/2!+\ldots+x^{2n+4}/n!+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Оскільки $[0;1/2]\subseteq(-\infty;+\infty)$, то цей степеневий ряд можна проінтегрувати почленно на $[0;1/2]$. Дістанемо:

$$I=\int_0^{1/2}\Big(x^6/1!+x^8/2!+x^{10}/3!+\ldots+x^{2n+4}/n!+\ldots\Big)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^7}{1!\cdot 7}+\frac{x^9}{2!\cdot 9}+\frac{x^{11}}{3!\cdot 11}+\ldots+\frac{x^{2n+5}}{n!\cdot(2n+5)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{1!\cdot 7\cdot 2^7}+$$

$$+1\Big/(2!\cdot 9\cdot 2^9)+1\Big/(3!\cdot 11\cdot 2^{11})+\ldots+1\Big/\Big(n!\cdot(2n+5)\cdot 2^{2n+5}\Big)+\ldots.$$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакододатного ряду. З’ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon=0{,}0001$.

Для заданої точності $\varepsilon=0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2=0{,}0001/2=0{,}00005.$$

Спочатку оцінимо n-й залишок:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!\cdot(2n+7)\cdot 2^{2n+7}}+\frac{1}{(n+2)!\cdot(2n+9)\cdot 2^{2n+9}}+$$

$$+\frac{1}{(n+3)!\cdot(2n+11)\cdot 2^{2n+11}}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!\cdot 2^{2n+7}}\left(\frac{1}{2n+7}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(n+2)(2n+9)}+\frac{1}{2^2(n+2)(n+3)(2n+11)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{2^{2n+7}(n+1)!\cdot(2n+7)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)$$

Тут добутки $(n+2)(2n+9)$, $(n+2)(n+3)(2n+11)$, …, що стоять у знаменниках другого, третього, … дробів, замінено на менший вираз $2n+7)$, від чого кожний дріб збільшився. У дужках записана нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q=1/2$. Її сума $S=1/(1-1/2)=2$. Тоді

$$R_n < 1\Big/\left(2^{2n+7}(n+1)!\cdot(2n+7)\right)\cdot 2 < 1\Big/\left(2^{2n+6}(n+1)!\cdot(2n+7)\right).$$

Підберемо n так, щоб виконувалася умова

$$R_n < 1\Big/\left(2^{2n+6}(n+1)!\cdot(2n+7)\right) \le \varepsilon_1 = 0{,}00005:$$

$$n=1: \quad R_1 < 1\Big/\left(2^8\, 2!\cdot 9\right) = 0{,}000217 > \varepsilon_1 = 0{,}00005;$$

$$n=2: \quad R_2 < 1\Big/\left(2^{10}\, 3!\cdot 11\right) = 0{,}000015 < \varepsilon_1 = 0{,}00005.$$

Отже, досить взяти два перших члени ряду.

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5\cdot 10^{-k}\cdot 2 \le \varepsilon_2 = 0{,}00005;\ 10^{-k} \le 0{,}00005;\ k \ge \lg 20000;\ k=5.$$

Таким чином $I \approx S_2 = \dfrac{1}{1!\cdot 7\cdot 2^7} + \dfrac{1}{2!\cdot 9\cdot 2^9} = 0{,}00112 +$

$+0{,}00011 = 0{,}00123$. Остаточно $I \approx 0{,}0012$. ■

Наближене розв'язування диференціальних рівнянь. Коли точно проінтегрувати диференціальне рівняння за допомогою елементарних функцій не вдається або досить складно, його розв'язок $y=y(x)$ можна шукати у вигляді ряду Тейлора або Маклорена.

Зокрема, при розв'язуванні задачі Коші:

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0)=y_0$$

використовується ряд Тейлора з центром розвинення у початковій точці x_0:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots,$$

де $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$, а решта похідних $y^{(n)}(x_0)$, $n=2,3,\ldots$ знаходиться ***методом послідовного диференціювання*** чи ***методом невизначених коефіцієнтів***. Суть цих методів розглянемо на прикладах.

Зауваження 1. Питання про те, за яких умов розв'язок диференціального рівняння можна шукати у вигляді степеневого ряду, а також яка похибка цього розв'язку, тут не розглядаються.

Приклад 3. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших чотирьох членів включно частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = y^2 - x^3$, що задовольняє початковій умові $y(1) = 2$.

□ Застосовуємо метод послідовного диференціювання.

Шукаємо розв'язок $y = y(x)$ у вигляді ряду Тейлора з центром розвинення $x = 1$:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots,$$

де згідно умови задачі явно виписані перші чотири члени.

За умовою $y(1) = 2$. Підставляючи $x = 1$ і $y = y(1) = 2$ у диференціальне рівняння $y' = y^2 - x^3$, знаходимо $y'(1) = 2^2 - 1^3 = 3$.

Далі диференціюємо послідовно диференціальне рівняння по x і в отримані вирази підставляємо відомі на даному кроці величини. Одержуємо похідні $y''(1)$ і $y'''(1)$:

$$y'' = 2y\,y' - 3x^2; \quad y''(1) = 2\cdot y(1)\cdot y'(1) - 3\cdot 1^2 = 2\cdot 2\cdot 3 - 3 = 9;$$

$$y''' = 2(y'y' + y\,y'') - 6x = 2(y')^2 + 2y\,y'' - 6x;$$

$$y'''(1) = 2(y'(1))^2 + 2y(1)\cdot y''(1) - 6\cdot 1 = 2\cdot 3^2 + 2\cdot 2\cdot 9 - 6 = 42.$$

Отже, $y(x) = 2 + (3/1!)(x-1) + (9/2!)(x-1)^2 + (42/3!)\times$

$$\times(x-1)^3 + \ldots = 2 + 3(x-1) + (9/2)(x-1)^2 + 7(x-1)^3 + \ldots. \quad ■$$

Приклад 4. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших трьох членів включно частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = y^2 - 64\ln(1 + x/2)$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 4$.

□ Застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів.

Шукаємо розв'язок $y = y(x)$ у вигляді степеневого ряду

$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ з центром розвинення у початковій точці $x = 0$. Тут згідно умови задачі явно виписані перші три члени з невідомими коефіцієнтами a_n, $n = 0,1,2$.

З початкової умови $y(0) = 4$ дістаємо $a_0 = y(0) = 4$. Тоді розв'язок $y = y(x)$ набуває вигляду: $y(x) = 4 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$.

Далі диференціюємо цей розв'язок: $y'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots$.

Використовуючи стандартне розвинення для $\ln(1+x)$, в якому замінюємо x на $x/2$, дістаємо степеневий ряд з центром в тій же початковій точці $x = 0$ для функції $\ln(1+x/2)$ в правій частині:

$$\ln(1+x/2) = x/2 - x^2/(2^2 \cdot 2) + \ldots = x/2 - x^2/8 + \ldots,$$

де відповідно до умови задачі явно виписані тільки перші члени до степеня x^2 включно.

Отримані вирази підставляємо в диференціальне рівняння:

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots = \left(4 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\right)^2 - 64 \cdot \left((1/2)x - (1/8)x^2 + \ldots\right);$$

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots = 16 + a_1^2 x^2 + a_2^2 x^4 + 8a_1 x + 8a_2 x^2 +$$
$$+ 2a_1 a_2 x^3 + \ldots - 32x + 8x^2 - \ldots.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва та справа у цій тотожності:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & a_1 = 16; \\ x & 2a_2 = 8a_1 - 32; \\ \ldots & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \end{array}$$

Звідси знаходимо: $a_1 = 16$; $a_2 = 4a_1 - 16 = 4 \cdot 16 - 16 = 48$.

Підставляємо отримані значення коефіцієнтів у степеневий ряд і дістаємо: $y(x) = 4 + 16x + 48x^2 + \ldots$. ■

Зауваження 2. Цими ж методами можна наближено розв'язувати диференціальні рівняння вищих порядків.

1.4. Ряди Фур'є

Функціональні ряди використовуються для подання довільної функції $f(x)$ у вигляді $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, де $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, … – система відомих (***базисних***) функцій; a_n $(n=0,1,\ldots)$ – сталі коефіцієнти.

Розглянуті вище степеневі ряди (ряди Тейлора чи Маклорена) дозволяють подавати функції, що безліч разів диференційовні, тобто дуже гладкі. Крім того, у загальному випадку а) швидкість збіжності (кількість членів, які треба залишити для досягнення заданої точності наближення) значно зростає при віддалені від центру розвинення; б) n-а часткова сума S_n ряду Тейлора чи Маклорена не є найкращим середньо квадратичним наближенням функції $f(x)$ серед поліномів n-го степеня.

Для розвинення розривних функцій чи функцій з розривами похідних потрібні інші функціональні ряди. Необхідність усунення зазначених та інших недоліків обумовлює переважне використання рядів з ортогональними базисними функціями.

1.4.1. Розкладання періодичних функцій у ряди Фур'є. Достатні умови збіжності ряду Фур'є

Функції $f(x)$ і $g(x)$, що неперервні на відрізку $[a;b]$, називають ***ортогональними*** на цьому відрізку, якщо виконується умова

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0.$$

Скінченну чи нескінченну систему функцій $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, …, які неперервні на відрізку $[a;b]$ і не дорівнюють тотожно нулю, називають ***ортогональною*** на цьому відрізку, якщо всі зазначені функції попарно ортогональні, тобто

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ A_n\neq 0, & m=n\end{cases} \quad (m=0,1,\ldots;\ n=0,1,\ldots).$$

<u>Теорема</u>. Система тригонометричних функцій

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ldots$$

ортогональна на відрізку $[-\pi;\pi]$, довжина якого дорівнює їх спільному періоду $T=2\pi$.

□ Враховуючи співвідношення $\sin nx=0$ і $\cos nx=(-1)^n$ ($n\in Z$), безпосереднім обчисленням можна показати, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx=2\pi;\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\pi;\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx=0;\ \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx=0;\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0\ (m\neq n);\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0\ (m\neq n). \blacksquare$$

Зауваження 1. Тригонометрична система має значне застосування, оскільки описує поширені у різних сферах коливальні процеси. Хоча існує багато інших ортогональних систем функцій. Зокрема, часто використовуються системи ортогональних многочленів.

За наведеною вище ортогональною тригонометричною системою складемо відповідний ***тригонометричний ряд***:

$$a_0/2+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+$$

$$+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots=a_0/2+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

де a_0, a_n, b_n ($n=1,2,\ldots$) – сталі коефіцієнти.

Примітка. Для скорочення запису, за знаком підсумовування $\sum$ зовнішні дужки часто опускають.

Оскільки базисні тригонометричні функції мають спільний період $T=2\pi$, то сума ряду теж періодична з періодом $T=2\pi$.

Нехай $f(x)$ – задана 2π-періодична функція. Знайдемо такі конкретні значення коефіцієнтів a_0, a_n, b_n ($n=1,2,\ldots$), щоб справджувалося розвинення:

$$\boxed{f(x)=a_0/2+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)}. \qquad (1)$$

Будемо припускати, що цей розклад і одержані з нього далі ряди можна почленно інтегрувати на відрізку $[-\pi;\pi]$ довжиною в період $T=2\pi$. При обчисленнях використаємо значення інтегралів, записаних при доведенні попередньої теореми.

Інтегруючи ряд для $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = (a_0/2)\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx\,.$$

Звідси

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = (a_0/2)\int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi\,;\quad \boxed{a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}\,. \quad (2)$$

Помноживши обидві частини (1) на $\cos mx$ і проінтегрувавши почленно на відрізку $[-\pi;\pi]$, отримаємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = (a_0/2)\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx +$$

$$+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\,dx\,.$$

Звідси при $m = n$: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = a_n\pi$;

$$\boxed{a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,,\quad n = 1, 2, \ldots}\,. \quad (3)$$

Аналогічно, помноживши ряд (1) на $\sin mx$ і проінтегрувавши в межах від $-\pi$ до π, знайдемо

$$\boxed{b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,,\quad n = 1, 2, \ldots}\,. \quad (4)$$

Числа a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, \ldots$), які обчислюються за формулами (2) – (4), називаються ***коефіцієнтами Фур'є*** функції $f(x)$.

Тригонометричний ряд (1), коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають ***рядом Фур'є*** цієї функції.

Зауваження 2. Інтеграли у формулах для коефіцієнтів Фур'є можна обчислювати на довільному проміжку $[a; a + 2\pi]$, довжина якого дорівнює періоду $T = 2\pi$ функції $f(x)$.

Теорема Діріхле (***достатня ознака розвинення функції в ряд Фур'є***). *Якщо функція* $f(x)$ *має період* $T = 2\pi$ *і на відрізку* $[-\pi;\pi]$ *неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду і відрізок* $[-\pi;\pi]$ *можна розбити на скінченне число частин так, що всередині кожної з них функція монотонна, то її ряд Фур'є* *збігається на всій числовій осі, причому сума ряду* $S(x)$ *в точках неперервності функції* $f(x)$ *дорівнює їй самій* $S(x) = f(x)$, *а у кожній точці розриву* x_0 *функції* $f(x)$ *– середньому арифметичному односторонніх границь при* $x \to x_0$ *зліва та справа*

$$S(x_0) = (1/2)\left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \right).$$

При цьому збіжність ряду Фур'є рівномірна на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

Отже, у ряд Фур'є можна розвивати функції достатньо загального вигляду. Графік суми ряду $S(x)$ є сукупністю дуг кривих та ізольованих точок. Він майже всюди співпадає з графіком самої функції $f(x)$, за винятком її точок розриву першого роду, де сума ряду приймає згладжене значення, що дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь. Як приклад, на рис. 28 зображено графік деякої 2π-періодичної функції $f(x)$, а на рис. 29 – графік суми $S(x)$ її ряду Фур'є.

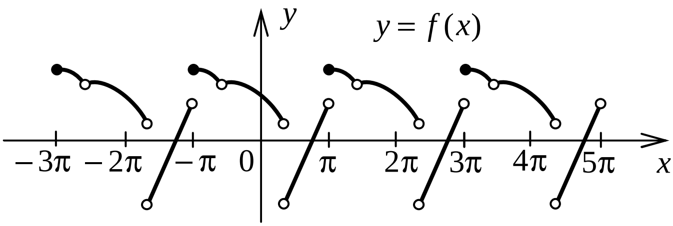

Рис. 28

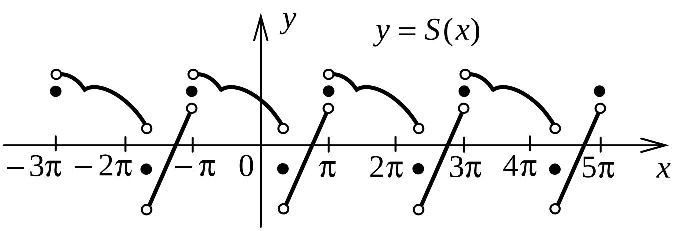

Рис. 29

Зауваження 3. Швидкість збіжності ряду Фур'є тим більша, чим гладкіша функція $f(x)$.

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичні функції:

а) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0;\\ x^2/\pi, & 0\le x\le\pi;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}x+\pi, & -\pi<x<0;\\ -\pi, & 0<x<\pi.\end{cases}$

□ а) Задана функція задовольняє умовам теореми Діріхле (рис. 30), тому її можна розкласти в ряд Фур'є. Отже, задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є:

$$a_0=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=(1/\pi)\left(\int_{-\pi}^{0}0\,dx+\int_0^{\pi}(x^2/\pi)\,dx\right)=$$

$$=(1/\pi^2)(x^3/3)\Big|_0^{\pi}=\pi/3;\quad a_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=$$

$$=(1/\pi)\left(\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos nx\,dx+\int_0^{\pi}(x^2/\pi)\cos nx\,dx\right)=(1/\pi^2)\times$$

$$\times\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\left|\begin{matrix}u=x^2; & du=2xdx;\\ dv=\cos nx\,dx; & v=(1/n)\sin nx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi^2}\times$$

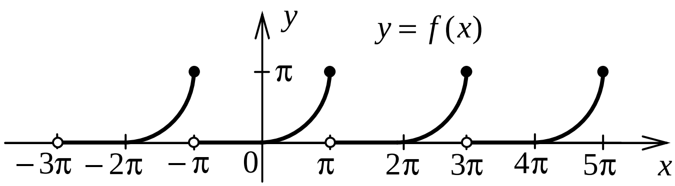

Рис. 30

$$\times\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\right)=-\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=$$

$$=\left|u=x;\quad du=dx;\ dv=\sin nx\,dx;\ v=-(1/n)\cos nx\right|=$$

$$=-\frac{2}{\pi^2 n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=-\frac{2}{\pi^2 n}\Big(-\pi(-1)^n/n+$$

$$+(1/n^2)\sin nx\Big|_0^{\pi}\Big)=2(-1)^n/(\pi n^2)\,;\quad b_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=$$

$$=(1/\pi)\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}(x^2/\pi)\sin nx\,dx\right)=(1/\pi^2)\times$$

$$\times\int_0^{\pi} x^2\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix} u=x^2; & du=2xdx\,; \\ dv=\sin nx\,dx; & v=-(1/n)\cos nx \end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi^2}\times$$

$$\times\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right)=-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx=$$

$$=\big|\,u=x;\; du=dx\,;\; dv=\cos nx\,dx;\; v=(1/n)\sin nx\,\big|=(-1)^{n+1}/n+$$

$$+\frac{2}{\pi^2 n}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi^2 n^2}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi^2 n^3}((-1)^n-1)=\frac{(-1)^{n+1}\pi^2 n^2+2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^3}.$$

Розвинення заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}\pi^2 n^2+2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^3}\sin nx\right).$$

Знайдений ряд збіжний до функції $f(x)$ при всіх $x\neq(2n+1)\pi$, $n\in Z$. У точках $x=(2n+1)\pi$, $n\in Z$ функція $f(x)$ терпить розриви першого роду (скінченні стрибки висотою π). У цих точках сума ряду

$$S((2n+1)\pi)=(1/2)\big(f((2n+1)\pi-0)+f((2n+1)\pi+0)\big)=\pi/2).$$

Зазначимо, що сума $S(x)$ є розривною функцією, хоча всі члени ряду неперервні (у точках розриву $x=(2n+1)\pi$, $n\in Z$ порушена рівномірна збіжність ряду).

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n-\pi-1}{\pi n}\sin nx\right).\quad\blacksquare$$

1.4.2. Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій

Для парних і непарних функцій справедливі наступні твердження:

1) *Добуток двох парних чи двох непарних функцій є парною функцією. Добуток парної функції на непарну є непарною функцією.*

2) *Інтеграл по симетричному відрізку* $[-a;a]$, $a>0$ *від парної функції* $f(x)$ *дорівнює подвоєному інтегралу по правій половині цього проміжку* $[0;a]$: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$. *Інтеграл по симетричному відрізку* $[-a;a]$, $a>0$ *від непарної функції* $f(x)$ *дорівнює нулю*: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Нехай треба розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну парну функцію $f(x)$. Оскільки $\cos nx$ і $\sin nx$ – відповідно парна ч непарна функції, то добутки $f(x)\cos nx$ і $f(x)\sin nx$ також відповідно є парною і непарною функціями. Інтегруючи їх на симетричному проміжку $[-\pi;\pi]$, дістанемо:

$$\boxed{a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = (2/\pi)\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx}\ ; \quad (1)$$

$$\boxed{a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = (2/\pi)\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}; \quad (2)$$

$$\boxed{b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0}\ .$$

Тоді ряд Фур'є для парної функції набуває вигляду

$$\boxed{f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx}\ . \quad (3)$$

Нехай треба розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну непарну функцію $f(x)$. Тоді добутки $f(x)\cos nx$ і $f(x)\sin nx$ відповідно є непарною і парною функціями. Інтегруючи їх на симетричному проміжку $[-\pi;\pi]$, дістанемо:

$$\boxed{a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0}\ ; \quad \boxed{a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0};$$

$$\boxed{b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = (2/\pi)\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}\,. \qquad (4)$$

Ряд Фур'є для непарної функції набуває вигляду

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx}\,. \qquad (5)$$

Зазначимо, що ряди (1) – (3) і (4), (5) відображають характер функції $f(x)$. *Ряд Фур'є для парної функції містить лише косинуси* (парні функції), а *ряд Фур'є для непарної функції містить лише синуси* (непарні функції).

<u>Приклад</u>. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичні функції:

а) $f(x) = |x|, -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < 0; \\ -1, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

□ Задані функції задовольняють умовам теореми Діріхле, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Оскільки функція $f(x)$ парна (рис. 31), то, користуючись формулами (1) – (3), дістанемо:

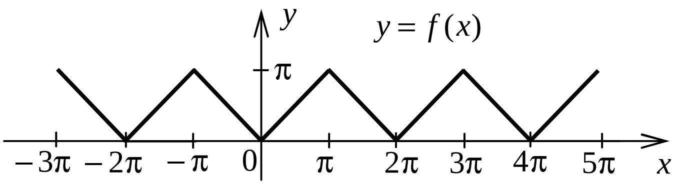

Рис. 31

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi; \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin x}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2m,\ m = 1, 2, \dots; \\ -\dfrac{4}{\pi(2m-1)^2}, & n = 2m-1,\ m = 1, 2, \dots; \end{cases};$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

б) Функція $f(x)$ непарна (рис. 32). Згідно з формулами (4) і (5) маємо:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)\cdot\sin nx dx=\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi n}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n=2m,\ m=1,2,...;\\ -\dfrac{4}{\pi(2m-1)}, & n=2m-1,\ m=1,2,...;\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}\sin nx=-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}. \quad \blacksquare$$

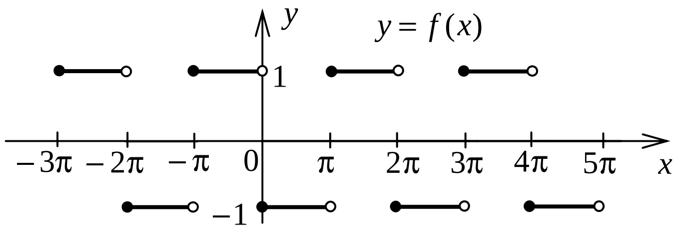

Рис. 32

1.4.3. Ряди Фур'є для періодичних функцій з довільним періодом

Нехай $2l$-періодична функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l;l]$ довжиною в період $T=2l$, $l>0$ і на цьому відрізку задовольняє умовам теореми Діріхле.

Розкладемо її в ряд Фур'є. Виконаємо заміну змінної за формулою $x=lt/\pi$ і розглянемо періодичну функцію $\varphi(t)=f(lt/\pi)$ з періодом $T=2\pi$, що визначена на відрізку $[-\pi;\pi]$. Розвинемо її в ряд Фур'є:

$$\varphi(t)=a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt);\quad a_0=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt;$$

$$a_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt;\quad b_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt.$$

Повернемося до змінної x і дістанемо шукане розвинення:

$$t=\frac{\pi x}{l};\ \ dt=\frac{\pi}{l}dx;\ \boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)};$$

$$\boxed{a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx}.$$

Зауваження 1. Розвинення парних та непарних періодичних функцій з періодом $T=2l$, $l>0$ відповідно у ряди косинусів і синусів набувають наступного вигляду.

а) Для парної $2l$ -періодичної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}};$$

$$\boxed{a_0=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)dx;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n=1,2,...}.$$

б) Для непарної $2l$ -періодичної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l};\ \ b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n=1,2,...}.$$

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є періодичні функції, що задані на відповідному відрізку $[-l;l]$ довжиною в період $T=2l$, $l>0$. Знайти значення суми ряду $S(0)$ і $S(l/2)$:

$$\text{а)}\ \ f(x)=|\sin x|,-\pi/2<x<\pi/2;\ \text{б)}\ \ f(x)=\begin{cases}x+1, & -1<x<0;\\ x-1, & 0<x<1.\end{cases}$$

□ Задані функції задовольняють умовам теореми Діріхле, тому можуть бути розвинені в ряди Фур’є.

а) Функція $f(x)$ парна і має півперіод $l=\pi/2$ (рис. 33). Її можна подати у вигляді ряду косинусів. Дістанемо:

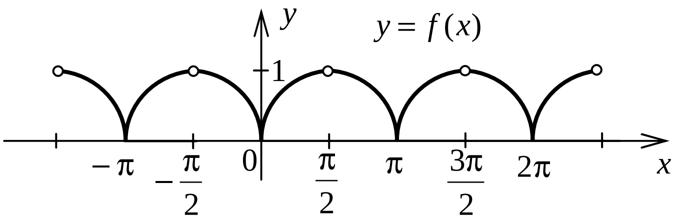

Рис. 33

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \frac{4}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin x\cos\frac{n\pi x}{\pi/2}dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\big(\sin(1+2n)x + \sin(1-2n)x\big)dx = -\frac{2}{\pi(1+2n)}\times$$

$$\times\cos(1+2n)x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi(1-2n)}\times\cos(1-2n)x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi(1+2n)} +$$

$$+\frac{2}{\pi(1-2n)} = \frac{2(1-2n+1+2n)}{\pi(1+2n)(1-2n)} = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)};$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\right)\cos\frac{n\pi x}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

У точках $x = 0$ і $x = l/2 = \pi/4$ дана функція $f(x)$ неперервна, тому

$$S(0) = f(0) = 0;\quad S(\pi/4) = f(\pi/4) = |\sin(\pi/4)| = \sqrt{2}/2.$$

б) Функція $f(x)$ непарна і має півперіод $l = 1$ (рис. 34). Її можна розкласти в ряд синусів. Одержимо:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{1}\int_0^1 (x-1)\sin\frac{n\pi x}{1}dx =$$

$$= \Big| u = x-1;\ du = dx;\ dv = \sin n\pi x\,dx;\ v = -(1/(n\pi))\cos n\pi x \Big| =$$

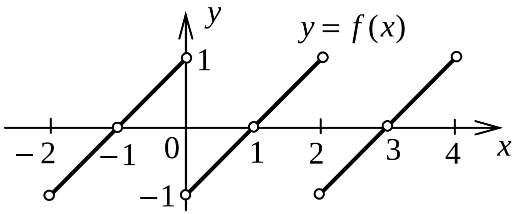

Рис. 34

$$=2\left(-\frac{x-1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cos n\pi x dx\right)=-\frac{2}{n\pi}+\frac{2}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^1=$$

$$=-\frac{2}{n\pi};\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n\pi}\right)\sin\frac{n\pi x}{1}=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}.$$

При $x=0$ дана функція $f(x)$ має скінченний стрибок, тому

$$S(0)=(1/2)\left(\lim_{x\to-0}(x+1)+\lim_{x\to+0}(x-1)\right)=(1/2)(1-1)=0.$$

У точці $x=l/2=1/2$ дана функція $f(x)$ неперервна, тому

$$S(1/2)=f(1/2)=1/2-1=-1/2. \quad \blacksquare$$

1.4.4. Розвинення в ряд Фур'є неперіодичних функцій

Часто виникає необхідність розвинути в ряд Фур'є неперіодичну функцію $f(x)$, задану на скінченному проміжку $[a;b]$.

Побудуємо довільним способом періодичну функцію $f_*(x)$ з періодом $T\ge b-a$, що збігається з $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Наприклад, введемо допоміжну функцію

$$f_*(x)=\begin{cases}\varphi_1(x),\ -l\le x<a;\\ f(x),\ a\le x\le b;\\ \varphi_2(x),\ b<x\le l,\end{cases}$$

де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – довільні функції, що задовольняють умовам теореми Діріхле. (Поза відрізком $[a;b]$ поводження функції $f_*(x)$ не має значення). Продовжимо її періодичним способом з періодом $T = 2l \geq b - a$ на всю числову вісь. (Геометрично для цього потрібно виконати перенесення графіка функції $f_*(x)$ паралельно осі Ox праворуч і ліворуч на відстані $T, 2T, ..., nT, ...$).

Отриману $2l$ -періодичну функцію можна подати рядом Фур'є. На відрізку $[a;b]$ його сума співпадає з даною функцією $f(x)$ у всіх її точках неперервності, а в точках розриву всередині проміжку $[a;b]$ і на його кінцях вона дорівнює півсумі односторонніх границь. Тобто можна вважати, що функція $f(x)$ розкладена в ряд Фур'є на відрізку $[a;b]$.

Зауваження. При різному виборі періоду $T = 2l \geq b - a$ і різних функціях $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ одержуємо різні розвинення однієї й тієї ж заданої функції $f(x)$, $x \in [a;b]$ в ряд Фур'є. Відкривається можливість вибирати краще за тими чи іншими критеріями розвинення. Наприклад, використовувати розклад, у якому коефіцієнти за модулем спадають швидше або обчислюються простіше.

Розглянемо детальніше поширений випадок, коли неперіодична функція $f(x)$ задана на відрізку $[0;l]$, $l > 0$. Випадки довільного проміжку $[a;b]$ зводяться до нього лінійною заміною аргументу $t = x - a$.

Можна безпосередньо проміжок $[0;l]$ взяти за період $T = l$ і побудувати для $f(x)$ повний ряд Фур'є, проте при цьому доведеться обчислювати всі коефіцієнти a_0, a_n і b_n.

Можна вчинити інакше: вибрати довільну функцію $\varphi(x)$ на відрізку $[-l;0]$ і визначити на всьому симетричному проміжку $[-l;l]$ допоміжну функцію

$$f_*(x) = \begin{cases} \varphi(x), & -l < x < 0; \\ f(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

а потім поширити її періодичним способом з періодом $T = 2l$ на всю числову вісь. Далі знову для $f(x)$ побудувати ряд Фур'є, але тепер з іншим періодом $T = 2l$.

На практиці найчастіше перевага надається парному чи непарному продовженню функції $f(x)$, $x \in [0;l]$ на проміжок $[-l;0]$, що приводить до неповного ряду Фур'є.

а) Продовжимо функцію $f(x)$, $x \in [0;l]$ парним способом на проміжок $[-l;0]$ (геометрично для цього потрібно симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно осі Oy) (рис. 35), прийнявши

$$f_*(x) = \begin{cases} f(-x), & -l < x < 0; \\ f(x), & 0 \le x \le l, \end{cases}$$

а потім поширимо її періодичним способом з періодом $T = 2l$ на всю числову вісь. Дістанемо розвинення в ряд косинусів:

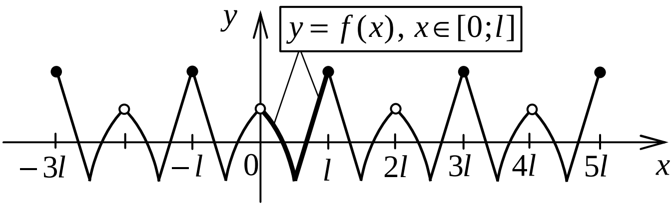

Рис. 35

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},\ x \in [0;l];\ a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f_*(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_*(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ n = 1, 2, \ldots.$$

б) Продовжимо функцію $f(x)$, $x \in [0;l]$ непарним способом на відрізок $[-l;0]$ (геометрично для цього потрібно центрально симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно початку координат O) (рис. 36), вважаючи

$$f_*(x) = \begin{cases} -f(-x), & -l < x < 0; \\ f(x), & 0 \le x \le l, \end{cases}$$