$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ на відрізку $[-3;4]$ з кроком $h_d = 0{,}5$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньо-квадратичне відхилення Δy_s наближеної функції від заданих значень вхідної функції.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Для кубічної апроксимації $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ проведемо попередні обчислення коефіцієнтів системи необхідних умов екстремуму нев'язки і запишемо результати в таблицю:

k	x_k	$f(x_k)$	x_k^2	$x_k f(x_k)$	x_k^3
0	-3	-4,5	9	13,5	-27
1	-1	2,5	1	-2,5	-1
2	0	2	0	0	0
3	1	-2	1	-2	1
4	3	-1,5	9	-4,5	27
$\sum$	0	-3,5	20	4,5	0

k	$x_k^2 f(x_k)$	x_k^4	x_k^5	$x_k^3 f(x_k)$	x_k^6
0	-40,5	81	-243	121,5	729
1	2,5	1	-1	-2,5	1
2	0	0	0	0	0
3	-2	1	1	-2	1
4	-13,5	81	243	-40,5	729
$\sum$	-53,5	164	0	76,5	1460

Сформуємо і розв'яжемо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a_0 \cdot 5 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 20 + a_3 \cdot 0 = -3{,}5; \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 20 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 164 = 4{,}5; \\ a_0 \cdot 20 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 164 + a_3 \cdot 0 = -53{,}5; \\ a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 164 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1460 = 76{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 1{,}1810; \\ a_1 = -2{,}5938; \\ a_2 = -0{,}4702; \\ a_3 = 0{,}3438. \end{cases}$$

Отже, $y = 1{,}1810 - 2{,}5938x - 0{,}4702x^2 + 0{,}3438x^3$ – шукана кубічна регресія. Обчислимо значення отриманого наближення на відрізку $[-3;4]$ з кроком $h_d = 0{,}5$, складемо відповідну таблицю і побудуємо графік кубічної апроксимації (рис. 17).

k	0	1	2	3	4
x_k	-3	-2,5	-2	-1,5	-1
y	-4,5520	-0,6451	1,7374	2,8534	2,9608

k	5	6	7	8	9
x_k	-0,5	0	0,5	1	1,5
y	2,3174	1,1810	-0,1905	-1,5392	-2,6073

k	10	11	12	13	14
x_k	2	2,5	3	3,5	4
y	-3,1370	-2,8704	-1,5496	1,0832	5,2858

Знайдемо середньоквадратичне відхилення Δy_s:

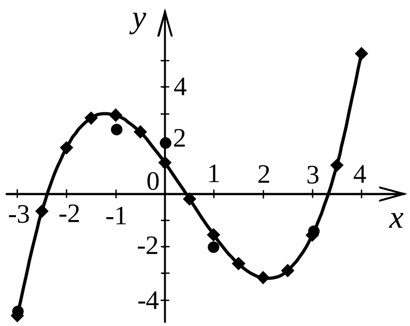

Рис. 17

$$\Delta y_s = \sqrt{\frac{1}{n+1}\rho_2(a_0, a_1, ..., a_m)} =$$

$$= \Big((1/(n+1))\sum\nolimits_{k=0}^{n}(y_k - a_0 -$$

$$- a_1 x_k - a_2 x_k^2 - a_3 x_k^3)^2\Big)^{1/2} =$$

$$= \left(1/\sqrt{5}\right)\Big((-4{,}5 + 4{,}5520)^2 +$$

$$+ (2{,}5 - 2{,}9608)^2 + (2 -$$

$$- 1{,}1810)^2 + (-2 + 1{,}5392)^2 +$$

$$+ (-1{,}5 + 1{,}5496)^2\Big)^{1/2} = 0{,}4692\,. \ \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Розглянуті приклади підтверджують, що збільшенням порядку m апроксимуючого многочлена можна зменшити середньоквадратичне відхилення Δy_s і довести його (при $m = n$) до нуля (отримати інтерполяційний поліном). Проте проведені розрахунки також показують зниження при цьому ступеня згладжування,

що може привести до наростання похибок прогнозування за одержаною моделлю (причому не тільки при екстраполяції, а навіть при інтерполяції).

4.4.4. Апроксимація кубічним сплайном

В обчислювальній математиці та в інженерній практиці все частіше застосовується апроксимація сплайнами, коефіцієнти яких знаходяться за МНК.

Знаходження МНК-оцінок параметрів сплайну зводиться до розв'язування задачі на умовний екстремум – пошуку мінімуму суми квадратів відхилень при наявності лінійних обмежень-рівностей. Це вимагає відповідної модифікації обчислювальних процедур методу найменших квадратів. Зокрема, можна з цих рівностей виразити одні з коефіцієнтів через інші та перейти до задачі безумовної оптимізації меншої розмірності.

Розглянемо середньоквадратичну апроксимацію функції $f(x)$ за допомогою кубічного сплайну $S_3(x)$ – ***кубічної сплайнової регресії***. Обмежимося тільки конкретною задачею.

Приклад. Функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]=[x_0;x_n]$ наступною таблицею значень у $n+1$ рівновіддалених вузлах ($n=3$):

k	0	1	2	3
x_k	-3	-1	1	3
$y_k = f(x_k)$	-4,5	2,5	-2	-1,5

Методом найменших квадратів знайти апроксимацію цієї функції $f(x)$ кубічним сплайном

$$S_3(x)=\begin{cases} P_{31}(x)=a_1+b_1(x-x_s)+c_1(x-x_s)^2+d_1(x-x_s)^3, \\ \hfill x\in(-\infty;x_s]; \\ P_{32}(x)=a_2+b_2(x-x_s)+c_2(x-x_s)^2+d_2(x-x_s)^3, \\ \hfill x\in[x_s;+\infty) \end{cases}$$

з одним вузлом спряження $x_s=(a+b)/2$, в якому виконуються умови гладкості:

$$P_{31}(x_s) = P_{32}(x_s);\ P'_{31}(x_s) = P'_{32}(x_s);\ P''_{31}(x_s) = P''_{32}(x_s),$$

доповнені однорідними граничними умовами на кінцях $x = x_0$ і $x = x_n$ відрізка апроксимації: $P''_{31}(x_0) = 0$; $P''_{32}(x_n) = 0$.

Обчислити значення отриманої сплайн-апроксимації $y = S_3(x)$ на відрізку $[-4;4]$ з кроком $h_d = 0{,}5$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення Δy_s наближеної функції від заданих значень вхідної функції.

<u>Вказівка</u>. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ З додаткових умов у вузлах x_s, x_0 і x_n випливають наступні співвідношення для коефіцієнтів

$$a_1 = a_2;\quad b_1 = b_2;\quad 2c_1 = 2c_2;$$

$$2c_1 - 6d_1(b-a)/2 = 0;\quad 2c_2 + 6d_2(b-a)/2 = 0.$$

Введемо позначення

$$h = (b-a)/3;\ a_1 = a_2 = \bar{a};\ b_1 = b_2 = \bar{b};\ c_1 = c_2 = \bar{c}.$$

Тоді $d_1 = -d_2 = (2/9)\bar{c}/h$ і сплайн набуває вигляду

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{31}(x) = \bar{a} + \bar{b}(x - x_s) + \bar{c}(x - x_s)^2 + \left((2/9)\bar{c}/h\right)(x - x_s)^3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in (-\infty; x_s]; \\ P_{32}(x) = \bar{a} + \bar{b}(x - x_s) + \bar{c}(x - x_s)^2 - \left((2/9)\bar{c}/h\right)(x - x_s)^3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in [x_s; +\infty). \end{cases}$$

За МНК оптимальні значення коефіцієнтів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ визначаються як розв’язки системи необхідних умов екстремуму суми квадратів відхилень

$$\begin{cases} 4\bar{a} + (31/9)h^2\bar{c} - y_0 - y_1 - y_2 - y_3 = 0; \\ 10h\bar{b} + 3y_0 + y_1 - y_2 - 3y_3 = 0; \\ (62/9)\bar{a} + (745/81)h^2\bar{c} - 3y_0 - (4/9)y_1 - (4/9)y_2 - 3y_3 = 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\bar{a} = (-4y_0 + 37y_1 + 37y_2 - 4y_3)/46;$$

$$\bar{b} = (-3y_0 - y_1 + y_2 + 3y_3)/(10h); \ \bar{c} = 9(y_0 - y_1 - y_2 + y_3)/(23h^2).$$

Проведемо обчислення:

$$h = (b-a)/3 = (3+3)/3 = 2; \quad x_s = (a+b)/2 = (-3+3)/2 = 0:$$

$$\bar{a} = \left(-4\cdot(-4{,}5) + 37\cdot 2{,}5 + 37\cdot(-2) - 4\cdot(-1{,}5)\right)/46 = 0{,}8043;$$

$$\bar{b} = \left(-3\cdot(-4{,}5) - 2{,}5 + (-2) + 3\cdot(-1{,}5)\right)/(10\cdot 2) = 0{,}275;$$

$$\bar{c} = 9\cdot\left(-4{,}5 - 2{,}5 - (-2) + (-1{,}5)\right)/(23\cdot 2^2) = -0{,}6359;$$

$$(2/9)\bar{c}/h = (2/9)\cdot(-0{,}6359)/2 = -0{,}0707.$$

Отже, кубічна сплайн-апроксимація має вигляді:

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{31}(x) = 0{,}8043 + 0{,}275x - 0{,}6359x^2 - \\ \qquad\qquad - 0{,}0707x^3, \quad x \in (-\infty; x_s]; \\ P_{32}(x) = 0{,}8043 + 0{,}275x - 0{,}6359x^2 + \\ \qquad\qquad + 0{,}0707x^3, \quad x \in [x_s; +\infty). \end{cases}$$

Обчислимо значення отриманого наближення $y = S_3(x)$ на відрізку $[-4; 4]$ з кроком $h_d = 0{,}5$ і складемо відповідну таблицю

k	0	1	2	3	4	5
x_k	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5
y	-5,9453	-4,9167	-3,8349	-2,7529	-1,7237	-0,8004

k	6	7	8	9	10
x_k	-1	-0,5	0	0,5	1
y	-0,0359	0,5167	0,8043	0,7917	0,5141

k	11	12	13	14	15	16
x_k	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	0,0246	-0,6237	-1,3779	-2,1849	-2,9917	-3,7453

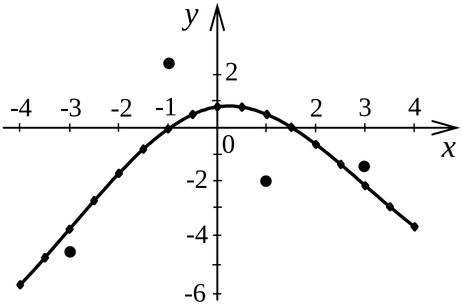

Рис. 18

Графік одержаної кубічної сплайн-апроксимації зображено на рис. 18.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення Δy_s:

$$\Delta y_s = \sqrt{\frac{1}{n+1}\rho_2(\overline{a},\overline{b},\overline{c})} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{n}(y_k - S_3(x_k))^2}{n+1}} =$$

$$= (1/2)\Big((-4{,}5+3{,}8349)^2 + (2{,}5+0{,}0359)^2 +$$

$$+ (-2-0{,}5141)^2 + (-1{,}5+2{,}1849)^2\Big)^{1/2} = 1{,}8482 . \ \blacksquare$$

Зауваження 1. Основні рекомендації по вибору порядку l сплайну $S_{l,m}(x)$, кількості та розміщенню його вузлів, які наведені вище для задачі інтерполяції, залишаються справедливими також у більш загальному випадку апроксимації. Їх треба доповнити порадою мати на кожному частинному проміжку між сусідніми вузлами не менше $l+1$ точок з відомими значеннями вхідної функції, оскільки проблема занадто тісної підгонки сплайн-моделі є реальною загрозою.

Зауваження 2. З точки зору ефективності обчислень краще використовувати подання сплайну $S_{l,m}(x)$ не через степеневі функції, а за допомогою так званих ***базисних сплайнів*** (B***-сплайнів***). Для ознайомлення з ними слід звернутися до спеціалізованої літератури.

4.4.5. Локальне згладжування даних

Якщо дослідні дані містять суттєві похибки, то доцільно провести їх згладжування (фільтрацію) для одержання більш плавного характеру залежності.

Нехай за результатами дослідження функції $f(x)$ сформована таблиця її значень $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ у рівновіддалених точках

$x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n$. Припускається, що величини y_k, $k = \overline{0,n}$ мають однакову точність.

Для знаходження згладженого значення $\bar{y}_k$ у точці x_k вибираємо з обох боків від x_k по m точок: x_{k-m}, …, x_{k-1} і x_{k+1}, …, x_{k+m}. За $2m+1$ значеннями y_{k-m}, …, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, …, y_{k+m} у виділених точках будуємо апроксимуючий многочлен l-го порядку, користуючись МНК (при цьому $l < 2m$). Значення одержаного полінома в центральній точці x_k приймаємо за $\bar{y}_k$. Процес повторюється для всіх внутрішніх точок. Згладжування значень поблизу кінців відрізка $[x_0; x_n]$ здійснюється за допомогою крайніх точок.

Для трьох точок при апроксимації многочленом першого порядку одержуємо $\boxed{\bar{y}_k = (y_{k-1} + y_k + y_{k+1})/3,\ k = \overline{1, n-1}}$.

Якщо брати по п’ять точок і використовувати середньоквадратичне наближення кубічним поліномом, то дістаємо

$$\boxed{\bar{y}_k = (-3y_{k-2} + 12y_{k-1} + 17y_k + 12y_{k+1} - 3y_{k+2})/35,\ k = \overline{2, n-2}}.$$

При застосуванні середньоквадратичної апроксимації многочленом п’ятого порядку за “ковзним вікном” з семи точок отримаємо

$$\boxed{\bar{y}_k = (1/231)(5y_{k-3} - 30y_{k-2} + 75y_{k-1} + 131y_k +}$$
$$\boxed{+75y_{k+1} - 30y_{k+2} + 5y_{k+3}),\ k = \overline{3, n-3}}.$$

<u>Зауваження</u>. Фільтрація приводить до послаблення високочастотних коливань, майже не змінюючи низькочастотну складову вхідної залежності $y = f(x)$. Згладжені величини $\bar{y}_k$, $k = \overline{0,n}$, як правило, достатньою близькі до істинних значень, при цьому ступінь розсіювання їх похибок менша. Проте при цьому сильно зростає кореляція (взаємозалежність) похибок. Крім того, коли функція $y = f(x)$ не є многочленом l-го порядку, то відбувається “розмазування” її графіка, що може привести до суттєвого спотворення справжнього характеру залежності $y = f(x)$. Тому повторна фільтрація не рекомендується.

5. ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

5.1. Чисельне диференціювання

При числовому розв’язуванні багатьох практичних задач часто виникає потреба в обчисленні похідних різних порядків функції $y = f(x)$, що задана таблично або складним аналітичним виразом, безпосередньо диференціювати який досить важко. У таких випадках застосовуються наближені методи диференціювання.

Нехай на сітці $\{x_k : a = x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_n = b\}$ (з нерівномірним, у загальному випадку, кроком $h_k = x_k - x_{k-1} = \mathrm{var}$, $k = \overline{1,n}$) у всіх вузлах x_k, $k = \overline{0,n}$ відомі значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ вхідної функції $y = f(x)$. Необхідно обчислити похідну $f^{(m)}(x_*)$ у точці $x_* \in [a;b]$ та оцінити абсолютну похибку Δ.

Знайдемо наближення $f(x) \approx F(x)$, тобто подамо вхідну функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = F(x) + R(x)$, де за апроксимуючу функцію $F(x)$ можна взяти, наприклад, часткову суму ряду Тейлора чи інтерполяційний многочлен, а остаточний член $R(x)$ визначає похибку апроксимації.

Продиференціюємо останню рівність m разів, покладемо $x = x_*$ і дістанемо

$$f^{(m)}(x_*) = F^{(m)}(x_*) + R^{(m)}(x_*), \text{ тобто } f^{(m)}(x_*) \approx F^{(m)}(x_*).$$

Величина $R^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) - F^{(m)}(x)$, що характеризує відхилення наближеного значення похідної від точного, називається ***похибкою апроксимації похідної***.

Нехай сітка має сталий крок $h = x_k - x_{k-1} = const$. Тоді похибка $R^{(m)}$ залежить від h і її записують у вигляді $R^{(m)} = O(h^r)$ (тобто $\left|R^{(m)}\right| < Ch^r$, де $C > 0$ і C не залежить від h). Показник степеня r називається ***порядком похибки апроксимації*** похідної (***порядком точності апроксимації***).

5.1.1. Застосування інтерполяційних многочленів

Нехай функція $f(x)$ задана на рівномірній сітці зі сталим кроком h і може бути апроксимована інтерполяційним многочленом Ньютона (для інтерполяції вперед). Для відшукання похідних у вузлі x_k запишемо цей поліном за ***шаблоном*** з $(m+1)$ вузлів x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_{k+m}:

$$N_m(x) = f(x_k) + (q/1!)\Delta f(x_k) + \big(q(q-1)/2!\big)\Delta^2 f(x_k) +$$
$$+ \ldots + \big(q(q-1)\ldots(q-m+1)/m!\big)\Delta^m f(x_k), \quad q = (x - x_k)/h .$$

Продиференціюємо одержаний вираз, враховуючи, що для складеної функції $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{d}{dq}\dfrac{dq}{dx} = \dfrac{1}{h}\dfrac{d}{dq}$, і дістанемо:

$$f'(x) = N_m'(x) \approx \frac{1}{h}\frac{d}{dq}(N_m(x_k + hq) = \frac{1}{h}\Big(\Delta f(x_k) + (2q-1)\times$$
$$\times\frac{\Delta^2 f(x_k)}{2!} + (3q^2 - 6q + 2)\frac{\Delta^3 f(x_k)}{3!} + \ldots\Big); \quad f''(x) \approx \frac{1}{h}\frac{d}{dq} f'(x) =$$
$$= \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f(x_k) + (q-1)\Delta^3 f(x_k) + (12q^2 + 36q + 22)\frac{\Delta^4 f(x_k)}{4!} + \ldots\right).$$

Покладемо $x = x_k$, тобто $q = 0$, і отримаємо наступні формули для апроксимації першої та другої похідних у вузлі x_k:

$$f'(x_k) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta f(x_k) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(x_k) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(x_k) - \frac{1}{4}\Delta^4 f(x_k) + \ldots\right);$$
$$f''(x_k) \approx \left(1/h^2\right)\left(\Delta^2 f(x_k) - \Delta^3 f(x_k) + (11/12)\Delta^4 f(x_k) + \ldots\right).$$

Число доданків у цих співвідношеннях залежить від кількості вузлів у вибраному шаблоні.

<u>Приклад</u>. Функція $f(x) = sh\,2x$ задана наступною таблицею значень $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ ($n = 5$) на рівномірній сітці з кроком $h = 0{,}05$:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
$f(x_k)$	0,00000	0,10017	0,20134	0,30452	0,41075	0,52110

Наближено знайти значення похідних f' і f'' у точці $x_0 = 0{,}00$ за шаблоном з п’яти вузлів при заданому кроці $h = 0{,}05$.

□ Складемо таблицю скінчених різниць:

k	x_k	$f(x_k)$	$\Delta f(x_k)$	$\Delta^2 f(x_k)$	$\Delta^3 f(x_k)$	$\Delta^4 f(x_k)$
0	0,00	0,00000	0,10017	0,00100	0,00101	0,00003
1	0,05	0,10017	0,10117	0,00201	0,00104	0,00003
2	0,10	0,20134	0,10318	0,00305	0,00107	–
3	0,15	0,30452	0,10623	0,00412	–	–
4	0,20	0,41075	0,11035	–	–	–
5	0,25	0,52110	–	–	–	–

Запишемо формули для апроксимації першої та другої похідних у вузлі x_0, використовуючи шаблон з п’яти вузлів:

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left(\Delta f(x_0) - (1/2)\Delta^2 f(x_0) + (1/3)\Delta^3 f(x_0) - (1/4)\Delta^4 f(x_0)\right);$$

$$f''(x_0) \approx \left(1/h^2\right)\left(\Delta^2 f(x_0) - \Delta^3 f(x_0) + (11/12)\Delta^4 f(x_0)\right).$$

Тоді дістанемо

$$f'(0) \approx 20 \cdot (0{,}10017 - 0{,}0005 + 0{,}00033667 - 0{,}0000075) = 1{,}9999;$$

$$f''(0) \approx 400 \cdot (0{,}001 - 0{,}00101 + 0{,}0000275) = 0{,}007.$$

Для порівняння наведемо точні значення цих похідних:

$$f'(x) = 2ch2x;\ \ f'(0) = 2;\ \ f''(x) = 4sh2x;\ \ f''(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Застосовуючи інтерполяційний поліном Ньютона, дістаємо вирази для похідних через скінченні різниці. Проте на практиці часто зручніше обчислювати похідні безпосередньо через значення функції $f(x)$ у вузлах. Для одержання таких формул можна скористатися многочленом Лагранжа.

Знаходження вищих похідних можна звести до послідовного обчислення першої похідної $f'(x)$. Розглянемо побудову наближених формул для $f'(x)$ за допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа з рівномірним розміщенням вузлів.

Запишемо інтерполяцію многочленом Лагранжа другого порядку (за ***шаблоном*** з трьох вузлів x_{k-1}, x_k і x_{k+1})

$$L_2(x) = \big((x-x_k)(x-x_{k+1})y_{k-1} - 2(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})y_k +$$
$$+(x-x_{k-1})(x-x_k)y_{k+1}\big)\big/(2h^2)$$

з залишковим членом

$$R_2(x) = f(x) - L_2(x) = \big(1/3!\big) f'''(c(x))(x-x_{k-1})(x-x_k)(x-x_{k+1}) \; .$$

Тоді $f'(x) = L'_2(x) + R'_2(x) = \big((2x - x_k - x_{k+1})y_{k-1} -$

$$-2(2x - x_{k-1} - x_{k+1})y_k + (2x - x_{k-1} - x_k)y_{k+1}\big)\big/(2h^2) + R'_2(x)\,;$$

$$R'_2(x) = \big(1/3!\big) f'''(c(x))\big(3x^2 - 2(x_{k-1} + x_k + x_{k+1})x +$$
$$+ x_{k-1}x_k + x_k x_{k+1} + x_{k-1}x_{k+1}\big)$$

Як правило, формули чисельного диференціювання застосовують для обчислення похідних у вузлах x_k, $k = \overline{0,n}$. Підставляючи в одержані вирази послідовно значення x_{k-1}, x_k і x_{k+1}, маємо:

$$f'(x_{k-1}) = (-3y_{k-1} + 4y_k - y_{k+1})\big/(2h) + (h^2/3) f'''(c_{k-1})\,;$$

$$f'(x_k) = (-y_{k-1} + y_{k+1})\big/(2h) - (h^2/6) f'''(c_k)\,;$$

$$f'(x_{k+1}) = (y_{k-1} - 4y_k + 3y_{k+1})\big/(2h) + (h^2/3) f'''(c_{k+1})\,,$$

де останні доданки відображають похибку апроксимації похідної; c_{k-1}, c_k і c_{k+1} – деякі невідомі точки з інтервалу $(x_{k-1}; x_{k+1})$.

Якщо скористатися інтерполяційним поліномом Лагранжа четвертого порядку (за шаблоном з п’яти вузлів x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1} і x_{k+2}), то одержимо наступні формули для похідних у вузлах:

$$f'(x_{k-2}) = (-25y_{k-2} + 48y_{k-1} - 36y_k + 16y_{k+1} - 3y_{k+2})\big/(12h) +$$
$$+ (h^4/5) f^{(5)}(c_{k-2})\,;$$

$$f'(x_{k-1}) = (-3y_{k-2} - 10y_{k-1} + 18y_k - 6y_{k+1} + y_{k+2})\big/(12h) -$$

$$-(h^4/20)f^{(5)}(c_{k-1});$$

$$f'(x_k)=(y_{k-2}-8y_{k-1}+8y_{k+1}-y_{k+2})/(12h)+(h^4/30)f^{(5)}(c_k);$$

$$f'(x_{k+1})=(-y_{k-2}+6y_{k-1}-18y_k+10y_{k+1}+3y_{k+2})/(12h)+$$
$$+(h^4/20)f^{(5)}(c_{k+1});$$

$$f'(x_{k+2})=(3y_{k-2}-16y_{k-1}+36y_k-48y_{k+1}+25y_{k+2})/(12h)+$$
$$+(h^4/5)f^{(5)}(c_{k+2}),$$

де c_i, $i=\overline{k-2,k+2}$ – деякі невідомі точки з $(x_{k-2};x_{k+2})$.

Зауваження. При непарному числі вузлів інтерполяції та парному степені поліному Лагранжа найбільш прості вирази і найменші коефіцієнти у залишкових членах одержуються для похідної у центральному вузлі. Указані співвідношення є ***апроксимаціями похідної за допомогою центральних різниць***. Такі скінченно-різницеві наближення широко використовуються на практиці.

5.1.2. Уточнення наближеного значення похідної

Порядок точності скінченно-різницевих апроксимацій похідної зростає зі збільшенням числа вузлів, за якими вони будуються. Проте при великому числі використаних вузлів ці співвідношення стають досить громіздкими, що обумовлює значне зростання обчислювальних витрат. Крім того, ускладнюється оцінка похибки апроксимації.

Можна оцінити абсолютну похибку апроксимації похідної й уточнити наближене значення останньої, не змінюючи шаблону, якщо застосувати ***метод Рунге*** (***метод подвоєння кроку***).

Нехай $f'(x)$ – похідна, наближене значення якої треба знайти; $F'(x,h)$ – її скінченно-різницева апроксимація на рівномірній сітці з кроком h, що має r-й порядок точності; $R'(x,h)$ – похибка апроксимації, головний член якої можна подати у вигляді $h^r\varphi(x)$, тобто $R'(x,h)=h^r\varphi(x)+O(h^{r+1})$, де $\varphi(x)\neq 0$. Тоді

$$f'(x)=F'(x,h)+h^r\varphi(x)+O(h^{r+1}).$$

Скористаємося цим співвідношенням у тій же точці x при подвоєному кроці $2h$ і дістанемо

$$f'(x) = F'(x,2h) + 2^r h^r \varphi(x) + O(2^{r+1} h^{r+1})$$

Прирівнюючи праві частини двох останніх рівностей, знаходимо вираз для головного члена похибки апроксимації

$$h^r \varphi(x) = \left(F'(x,h) - F'(x,2h)\right) \big/ (2^r - 1) + O(h^{r+1})\,.$$

Звідси для абсолютної похибки $\Delta_1 = |R'(x,h)|$ апроксимації похідної маємо наближену ***першу формулу Рунге***

$$\boxed{\Delta_1 \approx \left|F'(x,h) - F'(x,2h)\right| \big/ (2^r - 1)}.$$

Підставляючи вираз для $h^r \varphi(x)$ у співвідношення для $f'(x)$ при кроці h, дістаємо ***другу формулу Рунге***

$$\boxed{f'(x) = F'(x,h) + \left(F'(x,h) - F'(x,2h)\right) \big/ (2^r - 1) + O(h^{r+1})},$$

яка дозволяє за двома наближеннями похідної з кроками h і $2h$ з r-м порядком точності знайти уточнене значення цієї похідної з підвищеним порядком точності $r+1$.

<u>Зауваження</u>. Для підтвердження умови $\varphi(x) \neq 0$ на практиці перевіряють виконання нерівності

$$\boxed{\left| 2^r \left(F'(x,h/2) - F'(x,h)\right) / \left(F'(x,h) - F'(x,2h)\right) - 1 \right| < 0{,}1},$$

лише у випадку справедливості якої рекомендується застосовувати метод Рунге.

<u>Приклад</u>. Функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$, де $a = 1$ і $b = 3{,}1$, наступною таблицею значень $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ ($n = 7$) у рівновіддалених вузлах з кроком $h = (b-a)/n = 0{,}3$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
y_k	-1,15	-1,5	-1,6	-1,8	-1,7	-1,75	-2,05	-2,3

Знайти наближене значення $f'(x_3)$ похідної $f'(x)$ у вузлі

$x_3 = 1{,}9$ за формулою $f'(x_k) \approx F'(x_k, h) = (-y_{k-1} + y_{k+1})/(2h)$, що має порядок точності $r = 2$: $R'(x_k, h) = -(h^2/6) f'''(c_k)$, з кроком $h = 0{,}3$. Користуючись методом Рунге, оцінити абсолютну похибку Δ_1 апроксимації та уточнити значення похідної $f'(x_3)$.
Вказівка. Похибками у вхідних даних і похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до трьох десяткових знаків після коми.

□ При кроці $h = 0{,}3$ маємо:

$$f'(x_3) \approx F'(x_3, h) = (-y_2 + y_4)/(2h) = -0{,}167.$$

Згідно з методом Рунге обчислимо наближене значення $f'(x_3)$ за тією ж формулою при подвоєному кроці $2h = 0{,}6$:

$$f'(x_3) \approx F'(x_3, 2h) = (-y_1 + y_5)/(4h) = -0{,}208.$$

Далі знайдемо оцінку абсолютної похибки Δ_1 і уточнене значення похідної:

$$\Delta_1 = \left| R'(x_k, h) \right| \approx \left| \left(F'(x_3, h) - F'(x_3, 2h) \right) / (2^r - 1) \right| =$$

$$= \left| (-0{,}167 + 0{,}208)/(2^2 - 1) \right| = 0{,}014;$$

$$f'(x_3) \approx F'(x_3, h) + \left(F'(x_3, h) - F'(x_3, 2h) \right) / (2^r - 1) =$$

$$= -0{,}167 + 0{,}014 = -0{,}153. \quad \blacksquare$$

5.1.3. Вибір оптимального кроку чисельного диференціювання

Повна абсолютна похибка Δ знаходження похідної $f'(x)$ складається з абсолютної похибки $\Delta_1 = | R'(x, h) |$ власне вибраного методу апроксимації, абсолютної похибки Δ_2, зумовленої наближеним заданням значень $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$, і похибок заокруглення. Припустимо, що задані значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0, n}$ мають однакові граничні абсолютні похибки Δ^*, а похибками заокруглення знехтуємо.

Для визначеності розглянемо наступну скінченно-різницеву апроксимацію похідної

$$f'(x_k) \approx (y_{k-2} - 8y_{k-1} + 8y_{k+1} - y_{k+2})/(12h);$$

$$\Delta_1 = |R'(x,h)| = (h^4/30)|\,f^{(5)}(c_k)|.$$

Залишкову абсолютну похибку Δ_1 можна оцінити так:

$$\Delta_1 \le \Delta_1^* = M_5 h^4/30, \text{ де } M_5 = \max_{x\in[a;b]}\left|f^{(5)}(x)\right|.$$

Гранична сумарна абсолютна похибка Δ_2^*, породжена неточністю вхідних даних $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$, визначається як абсолютна похибка алгебраїчної суми і добутку:

$$\Delta_2^* = (\Delta^* + 8\cdot\Delta^* + 8\cdot\Delta^* + \Delta^*)/(12h) = 3\Delta^*/(2h).$$

Гранична повна абсолютна похибка $\Delta^*(h)$ даної формули чисельного диференціювання знаходиться додаванням Δ_1^* і Δ_2^*:

$$\Delta^*(h) = \Delta_1^* + \Delta_2^* = M_5 h^4/30 + 3\Delta^*/(2h).$$

Перша складова Δ_1^* похибки $\Delta^*(h)$ зменшується зі зменшенням кроку h, але при цьому зростає її друга складова Δ_2^*. Оптимальна величина кроку h^*, що забезпечує мінімум повної похибки $\Delta^*(h)$, визначається з необхідної умови екстремуму $\Delta^*{}'(h) = 0$:

$$\Delta^*{}'(h) = 2M_5 h^3/15 - 3\Delta^*/(2h^2) = 0; \quad \boxed{h^* = \sqrt[5]{45\Delta^*/(4M_5)}}.$$

<u>Приклад</u>. Функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$, де $a = 0{,}5$ і $b = 1{,}1$, наступною таблицею значень $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ ($n = 6$), що вірні в написаних чотирьох десяткових знаках після коми, у рівновіддалених вузлах з кроком $h = (b-a)/n = 0{,}1$:

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1
y_k	0,6193	0,6328	0,6402	0,6514	0,6647	0,6705	0,6619

Знайти наближене значення $f'(x_3)$ похідної $f'(x)$ у вузлі $x_3 = 0{,}8$ за допомогою скінченно-різницевої апроксимації

$$f'(x_k) \approx (y_{k-2} - 8y_{k-1} + 8y_{k+1} - y_{k+2})/(12h),$$

яка має порядок точності $r = 4$: $R'(x_k, h) = (h^4/30) f^{(5)}(c_k)$. Оцінити граничну повну абсолютну похибку $\Delta^*(h)$ і визначити оптимальний крок h^* чисельного диференціювання.

Вказівка. Похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ За поданим скінченно-різницевим співвідношенням обчислимо наближення для шуканої похідної:

$$f'(x_3) \approx (y_1 - 8y_2 + 8y_4 - y_5)/(12h) =$$

$$= (0{,}6328 - 8 \cdot 0{,}6402 + 8 \cdot 0{,}6647 - 0{,}6705)/(12 \cdot 0{,}1) = 0{,}1319.$$

Гранична залишкова абсолютна похибка Δ_1^* для даного наближення визначається за формулою

$$\Delta_1^* = M_5 h^4 / 30, \text{ де } M_5 = \max_{x \in [a;b]} \left| f^{(5)}(x) \right|.$$

Щоб оцінити M_5, складемо для даної функції $y = f(x)$ таблицю скінченних різниць:

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$	$\Delta^5 y_k$
0	0,5	0,6193	0,0135	- 0,0061	0,0099	- 0,0116	0,0037
1	0,6	0,6328	0,0074	0,0038	- 0,0017	- 0,0079	0,0106
2	0,7	0,6402	0,0112	0,0021	- 0,0096	0,0027	–
3	0,8	0,6514	0,0133	- 0,0075	- 0,0069	–	–
4	0,9	0,6647	0,0058	- 0,0144	–	–	–
5	1	0,6705	- 0,0086	–	–	–	–
6	1,1	0,6619	–	–	–	–	–

Дістанемо $M_5 \approx \left(1/h^5\right) \max_{x_k \in [a;b]} \left| \Delta^5 y_k \right| = 0{,}0106/0{,}1^5 = 1060$.

Тоді $\Delta_1^* = 1060 \cdot 0{,}1^4 / 30 = 0{,}0035$.

З умови задачі випливає, що вхідні дані мають однакові граничні абсолютні похибки $\Delta^* = 0{,}00005$. Обчислимо граничну сумарну абсолютну похибку Δ_2^*, породжену неточністю вхідних даних:

$$\Delta_2^* = 3\Delta^* \big/ (2h) = 3 \cdot 0{,}00005 \big/ (2 \cdot 0{,}1) = 0{,}0008 .$$

Знайдемо граничну повну абсолютну похибку

$$\Delta^*(h) = \Delta_1^* + \Delta_2^* = 0{,}0035 + 0{,}0008 = 0{,}0043 .$$

Визначимо оптимальний крок:

$$h^* = \sqrt[5]{45\Delta^* \big/ (4M_5)} = \sqrt[5]{45 \cdot 0{,}00005 \big/ (4 \cdot 1060)} = 0{,}0556 . \quad \blacksquare$$

5.2. Чисельне інтегрування функцій

При математичному моделюванні різноманітних процесів часто виникає потреба в наближених обчисленнях визначеного інтеграла $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, якщо: а) підінтегральна функція $f(x)$ задана графічно, таблично чи іншим неаналітичним способом; б) первісна $F(x)$ не є елементарною функцією; в) первісна $F(x)$ хоч і є елементарною функцією, але знаходження її значень досить громіздке.

5.2.1. Постановка задачі. Способи побудови формул чисельного інтегрування

Постановка задачі. Нехай необхідно знайти наближене значення $I_n(f)$ визначеного інтеграла $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$, де $f(x)$ – задана функція.

В основі ***чисельних наближених методів*** розв'язування цієї задачі лежить подання визначеного інтеграла як границі інтегральної суми

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) h_k ,$$

де $h_k = x_k - x_{k-1} = \mathrm{var}$ – нерівномірний крок сітки (розбиття)

$\omega_n = \{x_k : a = x_0 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b\}$; $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$, причому точки x_k і ξ_k вибираються довільно.

Якщо наближення $I_n(f)$ до інтеграла $I(f)$ будувати у вигляді аналогічної суми, тобто лінійної комбінації скінченного числа значень підінтегральної функції $f(x)$, то дістанемо ***квадратурну формулу***

$$\boxed{I(f) \approx I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k)},$$

де x_k, $k = \overline{0,n}$ – ***вузли***; c_k, $k = \overline{0,n}$ – ***ваги*** (***коефіцієнти***).

Методи ***чисельного інтегрування*** різняться способами вибору вузлів x_k і ваг c_k, $k = \overline{0,n}$, а також наближень для значень підінтегральної функції у вузлах $f(x_k)$. Вибрані значення повинні, по-перше, мінімізувати (у певному смислі) ***похибку*** (***залишковий член***) $R_n(f) = I(f) - I_n(f)$ квадратурної формули, а по-друге, забезпечити достатню швидкість збіжності обчислювальної процедури.

Зафіксуємо число вузлів n і будемо підбирати ваги так, щоб квадратурна формула була точною для многочленів якнайвищого степеня m. Квадратурна формула має m***-й порядок алгебраїчної точності***, якщо вона дає точний результат для всіх поліномів $P_m(x)$ m-го степеня, тобто $R_n(P_m) = 0$ та існує такий многочлен $P_{m+1}(x)$ $(m+1)$-го степеня, обчислення якого здійснюється з відмінною від нуля похибкою $R_n(P_{m+1}) \neq 0$. Указані умови можна подати в більш зручній для перевірки формі:

$$R_n(x^i) = 0, \ i = \overline{0,m}; \quad R_n(x^{m+1}) \neq 0.$$

Нехай вузли утворюють сітку Δ_n зі сталим кроком h. Тоді похибка $R_n(f)$ залежить від h і її можна подати у вигляді $R_n(f) = O(h^r)$, тобто $|R_n(f)| < Ch^r$, де $C > 0$ і C не залежить від h. Показник степеня r називається ***порядком точності за кроком*** h квадратурної формули. Квадратурна формула повинна бути такою, щоб для довільної інтегровної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$

при $n \to \infty$ наближене значення $I_n(f)$ інтеграла збігалося до його точного $I(f)$. Тобто, щоб виконувалася умова $r > 0$.

Основні підходи до побудови квадратурних формул:

1) Наближено замінити підінтегральну функцію $f(x)$ інтерполяційним многочленом $f(x) \approx P_m(x)$ по деяких вузлах x_k, $k = \overline{0,m}$, а потім проінтегрувати одержаний поліном. Ці вузли, як правило, фіксовані, причому частина з них може лежати поза відрізком інтегрування $[a;b]$. Даний спосіб приводить до квадратурних формул ***інтерполяційного типу***.

2) Зафіксувати число вузлів $n+1$, а потім підібрати розміщення вузлів x_k, $k = \overline{0,n}$ і значення коефіцієнтів c_k, $k = \overline{0,n}$ з умови $R_n(x^i) = 0$, $i = \overline{0,m}$ так, щоб формула мала найвищий m-й порядок алгебраїчної точності ($m < 2n$).

3) Якщо відомий клас F функцій, для яких призначена квадратурна формула, то при фіксованому n вибір вузлів x_k, $k = \overline{0,n}$ і коефіцієнтів c_k, $k = \overline{0,n}$ можна здійснювати з умови досягнення найменшого значення величини $\overline{R}_n = \sup\limits_{f \in F} R_n(f)$ – точної верхньої грані значень похибок $R_n(f)$ для всіх функцій f даного класу F. Цей спосіб приводить до квадратурних формул ***найвищої точності для даного класу функцій***.

4) Якщо відрізок інтегрування $[a;b]$ розбити на окремі частини (наприклад, рівномірно), а потім на кожній ділянці використати деяку формулу (невисокого порядку точності), одержану одним з вказаних вище способів, то дістанемо квадратурну формулу ***складеного типу***.

Зауваження 1. Квадратурні формули інтерполяційного типу мають алгебраїчний порядок точності $m \geq n$.

Зауваження 2. При застосуванні квадратурної формули основний об’єм роботи припадає на обчислення значень підінтегральної функції $f(x)$ у вузлах, оскільки значення коефіцієнтів c_k, $k = \overline{0,n}$ табульовані. Тому з формул, які забезпечують задану точність, рекомендується вибирати ту, що використовує найменше число вузлів.

Зауваження 3. Якщо кожне значення $f(x_k)$ підінтегральної функції обчислюється з абсолютною похибкою Δ_f, то неусувна абсолютна похибка квадратурної формули може досягти величини $\Delta_f \sum_{k=0}^{n} |c_k|$. Для інтерполяційних формул ця неусувна похибка значно збільшується з ростом n, оскільки при підвищенні порядку інтерполяційного многочлена $n \to \infty$ маємо $\max\limits_k |c_k| \to \infty$ і при цьому серед коефіцієнтів c_k зустрічаються числа обох знаків. Тому не можна застосовувати інтерполяцію поліномом високого степеня. Краще використовувати складені квадратурні формули, що мають малі за абсолютною величиною коефіцієнти.

Зауваження 4. За умови мінімізації впливу похибок значень $f(x_k)$ підінтегральної функції всі коефіцієнти c_k, $k = \overline{0,n}$ квадратурної формули повинні бути невід'ємними.

Далі розглянемо найбільш прості квадратурні формули, що у випадку невід'ємної підінтегральної функції $f(x) \geq 0$ мають ясний геометричний зміст – наближене обчислення площі $S = \int_a^b f(x)\,dx$ відповідної криволінійної трапеції при рівномірному розбитті відрізка $[a;b]$, $a < b$ зі сталим ***кроком*** $\Delta x_i = h = (b-a)/n$, $i = \overline{1,n}$. Ці співвідношення можна віднести до складених формул інтерполяційного типу.

5.2.2. Метод прямокутників

Нехай треба наближено обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, де функція $f(x)$ невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$ (рис. 19).

Будемо спиратися на геометричний зміст інтеграла: $\int_a^b f(x)\,dx = S$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин з

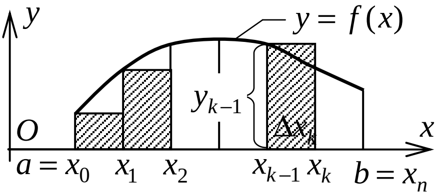

Рис. 19

кроком $h = (b-a)/n$ точками $x_0 = a$, $x_k = x_{k-1} + h$, $k = \overline{1,n}$. Кожну k-у частинну криволінійну трапецію наближено замінимо прямокутником з основою $\Delta x_k = h$ і висотою $y_{k-1} = f(x_{k-1})$, що є значенням функції $y = f(x)$ у крайній лівій точці елементарного відрізка $[x_{k-1}; x_k]$. Площа цього прямокутника $\Delta S_k = y_{k-1}h$. Тоді площа S всієї криволінійної трапеції:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}h = h\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} .$$

Маємо ***формулу лівих прямокутників*** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) + R_n},$$

де R_n – похибка.

Якщо за висоти частинних прямокутників узяти значення функції $y = f(x)$ у крайніх правих точках елементарних відрізків $[x_{k-1}; x_k]$, $k = \overline{1,n}$, то дістанемо ***формулу правих прямокутників***:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)(y_1 + y_2 + ... + y_n) + R_n},$$

де R_n – похибка.

Коли функція $f(x)$ монотонно зростає на відрізку $[a;b]$, то формули лівих і правих прямокутників дають наближене значення інтеграла відповідно з недостачею і з надлишком.

<u>Зауваження</u>. Формули прямокутників ґрунтуються на наближенні функції $f(x)$ кусково-сталою.

Якщо похідна $f'(x)$ існує й обмежена на відрізку $[a;b]$, то істинну абсолютну похибку $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за цими формулами можна оцінити граничною абсолютною похибкою

Δ_n^* за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_n = |R_n| \le \Delta_n^* = ((b-a)^2/(2n))M_1},$$

де $M_1 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$. Тобто, похибка формул прямокутників має порядок $1/n$. Іншими словами, ці формули характеризуються першим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 1$.

5.2.3. Метод трапецій

Як і в попередньому пункті, розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин. Сполучимо відрізком кінці кожної частинної дуги даної лінії $y = f(x)$, як показано на рис. 20.

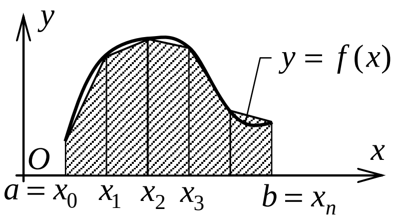

Рис. 20

Кожну k-у частинну криволінійну трапецію наближено замінимо звичайною трапецією з висотою $\Delta x_k = h$ і основами $y_{k-1} = f(x_{k-1})$ та $y_k = f(x_k)$, що має площу $\Delta S_k = (y_{k-1} + y_k)h/2$.

Тоді площа S всієї криволінійної трапеції

$$S \approx \sum\nolimits_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum\nolimits_{k=1}^{n}(y_{k-1} + y_k)h/2 = h\sum\nolimits_{k=1}^{n}(y_{k-1} + y_k)/2.$$

Дістаємо ***формулу трапецій*** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)\cdot(y_0/2 + y_1 + ... + y_{n-1} + y_n/2) + R_n},$$

де R_n – похибка.

Зауваження. Формула трапецій базується на наближенні функції $f(x)$ кусково-лінійною – вписаною ламаною.

Якщо друга похідна $f''(x)$ існує й обмежена на відрізку $[a;b]$, то істинну абсолютну похибку $\Delta_n = |R_n|$ обчислення інтеграла за формулою трапецій можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ_n^* за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_n = | R_n | \le \Delta_n^* = ((b-a)^3/(12n^2))M_2},$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in[a;b]} | f''(x)|$. Тобто, похибка формули трапецій має порядок $1/n^2$. Іншими словами, ця формула характеризується другим порядком точності: $\Delta_n^* = O(h^r)$, де $r = 2$.

5.2.4. Метод Симпсона (парабол)

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на парне число $n = 2m$ рівних частин з кроком $h = (b-a)/n$ точками $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ..., $x_{2i-1} = x_{2i-2} + h$, $x_{2i} = x_{2i-1} + h$, ..., $x_n = b$, $i = \overline{1,m}$.

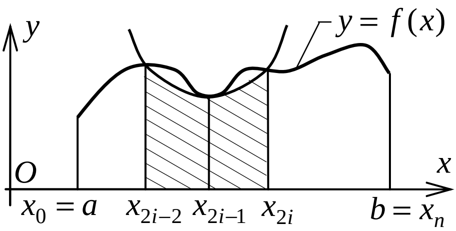

Рис. 21

Як показано на рис. 21, дві сусідні елементарні криволінійні трапеції, що спираються на спарені відрізки $[x_{2i-2}; x_{2i-1}]$ і $[x_{2i-1}; x_{2i}]$, наближено замінимо однією криволінійною трапецією, обмеженою зверху дугою вертикальної параболи $y = A_i(x - x_{2i-1})^2 + B_i(x - x_{2i-1}) + C_i$. Ця парабола проходить через три верхні вершини даних частинних трапецій, що породжує лінійну алгебраїчну систему, з якої однозначно знаходяться невідомі коефіцієнти A_i, B_i, C_i:

$$A_i = (y_{2i-2} - 2y_{2i-1} + y_{2i})\big/(2h^2);\quad B_i = (y_{2i} - y_{2i-2})\big/(2h);$$

$$C_i = y_{2i-1}.$$

Тоді площа ΔS_{pi} елементарної параболічної трапеції:

$$\Delta S_{pi} = \int_{-h}^{h} \Big(A_i(x - x_{2i-1})^2 + B_i(x - x_{2i-1}) + C_i\Big)\,dx = (h/3)\times$$

$$\times(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}).$$

Підсумовуючи ΔS_{pi} за всіма $i=\overline{1,m}$, дістаємо наближений вираз для площі S всієї криволінійної трапеції:

$$S\approx\sum_{i=1}^{m}\Delta S_{pi}=\sum_{i=1}^{m}(h/3)(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i}).$$

Маємо ***формулу Симпсона*** (***формулу парабол***) для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\boxed{\begin{gathered}\int_a^b f(x)\,dx=((b-a)/(3n))\cdot(y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+\\ +2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2}))+R_n,\end{gathered}}$$

де R_n – похибка.

<u>Зауваження</u>. В основі формули Симпсона лежить неперервне кусково-параболічне наближення підінтегральної функції $f(x)$ вписаною лінією.

Якщо на відрізку $[a;b]$ існує обмежена четверта похідна $f^{IV}(x)$, то істинна абсолютна похибка $\Delta_n=|R_n|$ обчислення інтеграла за формулою парабол оцінюється граничною абсолютною похибкою Δ_n^* так:

$$\boxed{\Delta_n=|R_n|\le\Delta_n^*=((b-a)^5/(180n^4))M_4},$$

де $M_4=\max\limits_{x\in[a;b]}|f^{IV}(x)|$. Тобто, похибка формули Симпсона має порядок $1/n^4$. Іншими словами, ця формула характеризується четвертим порядком точності: $\Delta_n^*=O(h^r)$, де $r=4$.

<u>Зауваження 4</u>. Усі розглянуті формули тим точніші, чим густіше розбиття: $R_n\to 0$ при $n\to\infty$. При одному й тому ж значенні n формула Симпсона – найбільш точна з них. При практичному застосуванні чисельного інтегрування треба віддати перевагу формулі парабол, коли підінтегральна функція $f(x)$ досить гладка, тобто має неперервні похідні високих порядків. Якщо ж функція

$f(x)$ має лише кусково-гладку першу похідну, то кращою може бути формула трапецій. У загальному випадку, ефективність тієї чи іншої квадратурної формули залежить від поведінки функції $f(x)$ та її похідних на відрізку інтегрування.

Приклад 1. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^1 (x+2)^{-1} dx$, застосовуючи при $n = 4$ формули: а) лівих прямокутників, б) трапецій, в) Симпсона. Оцінити допущені абсолютні похибки. Обчислення проводити з округленням до п'ятого десяткового знака після коми. Одержані результати порівняти з точним значенням інтеграла, обчисленим за формулою Ньютона – Лейбниця:

$$I = \int_0^1 (x+2)^{-1} dx = \ln|x+2| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2 \approx 0{,}40547 .$$

□ Розіб'ємо заданий відрізок інтегрування [0;1] на $n = 4$ рівних частин точками $x_0 = a = 0$, $x_1 = 0{,}25$, ..., $x_4 = b = 1$. Обчислимо значення y_0, y_1, ..., y_4 підінтегральної функції $y = 1/(x+2)$, що відповідають указаним точкам, і запишемо результат у таблицю:

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0,25	0,5	0,75	1
y_k	0,5	0,44444	0,4	0,36364	0,33333

а) Знайдемо значення інтеграла за допомогою формули лівих прямокутників:

$$I_n \approx ((b-a)/4)(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = ((1-0)/4) \times$$

$$\times (0{,}5 + 0{,}44444 + 0{,}4 + 0{,}36364) = 1{,}70808/4 \approx 0{,}42702 .$$

Знайдемо і порівняємо граничну Δ_n^* та істинну $\Delta_n = |I - I_n|$ абсолютні похибки.

Щоб обчислити граничну абсолютну похибку Δ_n^*, знайдемо похідну підінтегральної функції: $y' = -1/(x+2)^2$. Найбільше за модулем значення цієї похідної на відрізку [0;1] дорівнює $M_1 = |y'(0)| = 0{,}25$. Тоді $\Delta_n^* = ((1-0)^2/(2\cdot 4))\cdot 0{,}25 \approx 0{,}03125$.

Істинна абсолютна похибка $\Delta_n = |0{,}40547 - 0{,}42702| \approx$ $\approx 0{,}02155$. Можемо переконатися, що істинна похибка не перевищує граничної: $\Delta_n = 0{,}02155 < 0{,}03125 = \Delta_n^*$.

б) Обчислимо наближене значення інтеграла за формулою трапецій:

$$I_n \approx ((b-a)/4)\cdot(y_0/2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4/2) = ((1-0)/4)\times$$
$$\times(0{,}5/2 + 0{,}44444 + 0{,}4 + 0{,}36364 + 0{,}33333/2) \approx 0{,}40619.$$

Знайдемо граничну Δ_n^* та істинну Δ_n абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y''(x) = 6/(x+2)^4; \quad M_2 = |y''(0)| = 0{,}25;$$
$$\Delta_n^* = ((1-0)^3/(12\cdot 4^2))\cdot 0{,}25 \approx 0{,}0013;$$
$$\Delta_n = |0{,}40547 - 0{,}40619| \approx 0{,}00072; \;\; \Delta_n < \Delta_n^*.$$

в) Обчислимо наближене значення визначеного інтеграла за формулою Симпсона:

$$I_n \approx ((b-a)/(3\cdot 4))\cdot(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) =$$
$$= ((1-0)/(3\cdot 4))\cdot(0{,}5 + 0{,}33333 + 4\cdot(0{,}44444 +$$
$$+ 0{,}36364) + 2\cdot 0{,}4) = 4{,}86565/12 \approx 0{,}40547$$

Знайдемо граничну Δ_n^* та істинну Δ_n абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y^{IV} = 24/(x+2)^5; \quad M_4 = |y^{IV}(0)| = 0{,}75;$$
$$\Delta_n^* = ((1-0)^5/(180\cdot 4^4))\cdot 0{,}75 \approx 0{,}00002;$$
$$\Delta_0 = |0{,}40547 - 0{,}40547| \approx 0{,}00000; \;\; \Delta_n < \Delta_n^*.$$

Порівнюючи результати обчислень, можна зробити висновок, що найближче до точного значення інтеграла, як очікувалося, дає формула парабол. ■

Приклад 2. Застосовуючи формулу Симпсона, обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^1 x^3 e^{x^3} dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$.

□ За умовою треба знайти значення інтеграла до третього десяткового знака після коми (з точністю $\varepsilon = 0{,}001$). Тому обчислення будемо проводити з округленням до четвертого (запасного) знака після коми.

Продиференціюємо підінтегральну функцію $y = x^3 e^{x^3}$:

$$y' = 3e^{x^3}(x^5 + x^2); \quad y'' = 3e^{x^3}(3x^7 + 8x^4 + 2x); \quad y''' = 6e^{x^3}(9x^9 +$$

$$+ 45x^6 + 38x^3 + 2); \quad y^{IV} = 3e^{x^3}(27x^{11} + 216x^8 + 384x^5 + 120x^2).$$

Оскільки четверта похідна $y^{IV} > 0$ і на відрізку інтегрування $[0;1]$ її похідна (п'ята)

$$y^{(5)} = 3e^{x^3}(81x^{13} + 945x^{10} + 2880x^7 + + 2280x^4 + 240x) \geq 0,$$

то $|y^{IV}| = y^{IV}$ монотонно зростає і набуває найбільшого значення при $x = 1$:

$$M_4 = \max_{x\in[0;1]} |y^{IV}(x)| = y^{IV}(1) = 2241e \approx 6091{,}6655.$$

Отже, гранична абсолютна похибка:

$$\Delta_n^* = ((1-0)^5/(180n^4))M_4 \approx 33{,}8426/n^4.$$

Нерівність $\Delta_n^* \leq \varepsilon$ розв'язуємо підбором:

$$33{,}8426/n^4 \leq 0{,}001; \quad n = 14: \ 33{,}8426/14^4 < 0{,}0009 < 0{,}001;$$

а при $n = 13$: $33{,}8426/13^4 > 0{,}0011 > 0{,}001$, отже при $n \geq 14$ виконується нерівність $\Delta_n^* < 0{,}001$.

Візьмемо $n = 20$. Такий вибір виправданий тим, що при цьому значенні n крок інтегрування h буде скінченним десятковим дробом: $h = 1/20 = 0{,}05$. Таким чином, розіб'ємо відрізок інтегрування $[0;1]$ на $n = 20$ рівних частин точками $x_0 = a = 0$, $x_1 = 0{,}05$, $x_2 = 0{,}1$, ..., $x_{20} = b = 1$. Обчислимо значення y_0, y_1, ..., y_{20} підінтегральної функції $y = x^3 e^{x^3}$ у відповідних точках і занесемо результат у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
y_k	0	0,0001	0,001	0,0034	0,0081	0,0159

k	6	7	8	9	10	11	12
x_k	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6
y_k	0,0277	0,0448	0,0682	0,0998	0,1416	0,1965	0,2681

k	12	13	14	15	16	17
x_k	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85
y_k	0,2681	0,3614	0,4833	0,6433	0,8534	1,1349

k	18	19	20
x_k	0,9	0,95	1
y_k	1,5112	2,0208	2,7183

Далі за формулою парабол знайдемо наближене значення інтеграла:

$$I_n \approx ((b-a)/(3\cdot 20))\cdot(y_0 + y_{20} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 + y_{11} +$$
$$+ y_{13} + y_{15} + y_{17} + y_{19}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10} + y_{12} + y_{14} +$$
$$+ y_{16} + y_{18})) = (1/60)\cdot(0 + 2{,}7183 + 4(0{,}0001 + 0{,}0034 +$$
$$+ 0{,}0159 + 0{,}0448 + 0{,}0998 + 0{,}1965 + 0{,}3614 + 0{,}6433 + 1{,}1349 +$$
$$+ 2{,}0208) + 2\cdot(0{,}001 + 0{,}0081 + 0{,}0277 + 0{,}0682 + 0{,}1416 +$$
$$+ 0{,}2681 + 0{,}4833 + 0{,}8534 + 1{,}5112)) = 0{,}458785 \approx 0{,}459. \ \blacksquare$$

5.2.5. Вибір кроку інтегрування і практична оцінка похибки

Величина кроку h повинна бути такою, щоб забезпечити задану точність ε обчислення за прийнятою квадратурною формулою, не допускаючи при цьому значних перевитрат обчислювальних ресурсів. Розглянемо основні способи вибору кроку інтегрування. При цьому похибками значень функції у вузлах і похибками заокруглення знехтуємо.

Вибір кроку за аналітичною оцінкою залишкового члена. Нехай потрібно обчислити інтеграл з точністю ε за квадратурною формулою, для якої відомий аналітичний вираз граничної абсолютної похибки Δ_h^*, що служить оцінкою залишкового члена R_n: $|R_n| \le \Delta_h^*$. Вибирають крок h таким, щоб виконувалась нерівність $\Delta_h^* < \varepsilon$.

Практична оцінка похибки і вибір кроку за правилом Рунге. В аналітичні вирази оцінки похибки розглянутих квадратурних формул входять величини $M_r = \max\limits_{x \in [a;b]} |f^{(r)}(x)|$ ($r = 1$ – для формул лівих і правих прямокутників, $r = 2$ – для формули трапецій, $r = 4$ – для формули Симпсона), знаходження яких нерідко приводить до громіздких обчислень або взагалі неможливе. Тоді можна скористатися методом Рунге (методом подвоєння кроку), який розглянутий вище в пункті 5.1. Згідно з ним обчислюють інтеграл I за вибраною квадратурною формулою два рази: спочатку з кроком $2h$, потім з кроком h, тобто подвоюють число n. Як результат отримують два значення інтеграла I_{2h} та I_h. Для наближеної оцінки граничної абсолютної похибки використовують першу формулу Рунге

$$\boxed{\Delta_h^* \approx \left|I_h - I_{2h}\right| \big/ (2^r - 1)}.$$

Якщо $\Delta_h^* \approx \left|I_h - I_{2h}\right| \big/ (2^r - 1) < \varepsilon$, то h – шукане значення кроку. При цьому за другою формулою Рунге знаходять уточнене значення інтеграла

$$\boxed{I_{ym} \approx I_h + \left(I_h - I_{2h}\right) \big/ (2^r - 1)}.$$

Якщо ж $\Delta_h^* \approx |I_h - I_{2h}| \big/ (2^r - 1) \ge \varepsilon$, то розрахунок повторюють з вдвічі меншим кроком $h/2$ і т.д.

За початковий крок можна прийняти $h \approx \sqrt[r]{\varepsilon}$.

<u>Зауваження 1</u>. Для підтвердження можливості застосування методу Рунге до прийнятої квадратурної формули на практиці перевіряють справедливість нерівності

$$\boxed{\left| 2^r \left(I_{h/2} - I_h\right) \big/ \left(I_h - I_{2h}\right) - 1 \right| < 0{,}1}.$$

<u>Зауваження 2</u>. Розглянуті вище квадратурні формули прямокутників, трапецій і парабол зручні тим, що при зменшенні вдвоє кроку h всі обчислені раніше значення підінтегральної функції можуть бути використані повторно.

<u>Приклад</u>. Знайти наближено за формулою Симпсона визначений інтеграл $I = \int\limits_0^1 \dfrac{2x\,dx}{1+x^2}$, поклавши $n = 8$. Оцінити граничну абсолютну похибку Δ_h^* одержаного наближення I_h, користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку). За цим же методом знайти уточнене наближене значення інтеграла $I_{ут}$. Обчислити абсолютну похибку $\Delta_{ут}$ цього наближення $I_{ут}$, одержавши точне значення інтеграла I за формулою Ньютона – Лейбниця.

<u>Вказівка</u>. Похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до сьомого десяткового знака після коми.

□ Розіб'ємо заданий відрізок інтегрування $[0;1]$ на $n = 8$ рівних частин з кроком $h = (b-a)/n = (1-0)/8 = 0{,}125$ точками x_k, $k = \overline{0,n}$ і обчислимо відповідні значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ підінтегральної функції $f(x)$. Запишемо результат у таблицю:

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0,125	0,25	0,375	0,5
y_k	0,0000000	0,2461538	0,4705882	0,6575342	0,8000000

k	5	6	7	8
x_k	0,625	0,75	0,875	1
y_k	0,8988764	0,9600000	0,9911504	1,0000000

Далі за формулою парабол при кроці $h = 0{,}125$ дістанемо наближені значення інтеграла I_h і I_{2h}:

$$I_h = (h/3)\cdot(y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)) =$$
$$= (0{,}125/3)\cdot(0 + 1 + 4(0{,}2461538 + 0{,}6575342 + 0{,}8988764 +$$
$$+ 0{,}9911504 + 2(0{,}4705882 + 0{,}8 + 0{,}96)) = 0{,}6931682\,;$$
$$I_{2h} = (2h/3)\cdot(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) = (2\cdot 0{,}125/3)\cdot(0 +$$
$$+ 1 + 4(0{,}4705882 + 0{,}96) + 2\cdot 0{,}8) = 0{,}6935294\,.$$

Тоді за першою формулою Рунге

$$\Delta_h^* \approx \frac{|I_h - I_{2h}|}{2^r - 1} = \frac{|0{,}6931682 - 0{,}6935294|}{2^4 - 1} = 0{,}0000241\,.$$

Оскільки $\Delta_h^* \approx 0{,}0000241 < 0{,}5\cdot 10^{-4}$,то значення I_h повинно бути вірним до четвертого знака після коми.

Знайдемо уточнене значення інтеграла I_{ym} за другою формулою Рунге:

$$I_{ym} \approx I_h + \left(I_h - I_{2h}\right)\big/(2^r - 1) = 0{,}6931682 + \big(0{,}6931682 -$$
$$- 0{,}6935294\big)\big/(2^4 - 1) = 0{,}6931441\,.$$

За формулою Ньютона – Лейбниця обчислимо точне значення інтеграла I:

$$I = \int_0^1 \frac{2x\,dx}{1 + x^2} = \left| u = 1 + x^2;\ du = 2x\,dx;\ u_1 = 1;\ u_2 = 2 \right| = \int_1^2 \frac{du}{u} =$$
$$= \ln|u|\Big|_1^2 = \ln 2 = 0{,}6931472\,.$$

Тоді

$$\Delta_{ym} = \left| I - I_{ym} \right| = \left| 0{,}6931472 - 0{,}6931441 \right| = 0{,}0000031. \quad \blacksquare$$

5.2.6. Чисельне інтегрування методом Монте-Карло

Згідно з ***методом статистичних випробувань*** (***методом Монте-Карло***) розглядається деяка випадкова величина η, ***математичне сподівання*** якої $M[\eta]$ дорівнює шуканій величині z: $M[\eta]=z$. Проводиться серія n незалежних випробувань випадкової величини η і одержується ***вибірка*** – послідовність випадкових чисел η_k, $k=\overline{1,n}$, за якою обчислюється ***вибіркове середнє***

$$\overline{\eta}_n=(1/n)\sum\nolimits_{k=1}^{n}\eta_k$$

– статистична оцінка $M[\eta]$. Тоді за наближене значення z_n шуканої величини z приймається вказана оцінка:

$$z_n=\overline{\eta}_n=(1/n)\sum\nolimits_{k=1}^{n}\eta_k\ .$$

Зазначимо, що при $n>10$ з досить близькою до одиниці ймовірністю P ($P\approx 0{,}997$) для абсолютної похибки $\Delta_n=|\,z-z_n\,|$ (за відомим правилом "трьох сигм") справджується нерівність

$$\Delta_n<3\sigma_n\big/\sqrt{n}\ ,\quad \text{де}\quad \sigma_n=\sqrt{(1/(n-1))\sum\nolimits_{k=1}^{n}(\eta_k-\overline{\eta}_n)^2}$$

– статистична оцінка ***середнього квадратичного відхилення*** випадкової величини η.

Нехай необхідно знайти наближене значення $I_n(f)$ визначеного інтеграла $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$. Перейдемо до нової змінної t за допомогою рівності $x=a+(b-a)t$ і одержимо

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1\varphi(t)\,dt\ ,\ \text{де}\ \varphi(t)=f\big(a+(b-a)t\big).$$

Розглянемо рівномірно розподілену на відрізку $[0;1]$ випадкову величину ν зі щільністю розподілу $p_\nu(t)$:

$$p_\nu(t)=\begin{cases}1,\ x<0\ \textit{або}\ x>1;\\ 0,\ \ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Тоді функція $\eta=\varphi(\nu)$ також буде випадковою величиною. За означенням математичного сподівання дістанемо

$$M[\eta]=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,p_\nu(t)\,dt=\int_0^1\varphi(t)\cdot 1dt=\int_0^1\varphi(t)\,dt\,.$$

Читаючи цю рівність справа наліво, приходимо до висновку: визначений інтеграл $\int_0^1\varphi(t)\,dt$ дорівнює математичному сподіванню випадкової величини $\eta=\varphi(\nu)$. Тоді за методом Монте-Карло дістанемо:

$$\int_0^1\varphi(t)\,dt\approx\overline{\eta}_n=(1/n)\sum_{k=1}^n\eta_k=(1/n)\sum_{k=1}^n\varphi(\nu_k)\,.$$

Звідси для початкового інтеграла $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$ одержимо наближену рівність

$$I(f)=(b-a)\int_0^1\varphi(t)\,dt\approx\big((b-a)/n\big)\sum_{k=1}^n\varphi(\nu_k)$$

або $\boxed{I_n(f)=\big((b-a)/n\big)\sum_{k=1}^n f(x_k)}$,

де $\boxed{x_k=a+(b-a)\nu_k}$, $k=\overline{1,n}$; ν_k, $k=\overline{1,n}$ – незалежні реалізації рівномірно розподіленої на відрізку $[0;1]$ випадкової величини ν.

Відповідно гранична абсолютна похибка Δ_n^* цього наближення $I_n(f)$ визначається з імовірністю $P\approx 0{,}997$ за формулою

$$\boxed{\Delta_n^*=3\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^n\big((b-a)f(x_k)-I_n(f)\big)^2}}.$$

<u>Зауваження 1</u>. Для генерації послідовності незалежних випадкових величин ν_k, $k=\overline{1,n}$ найчастіше використовуються спеціальні комп’ютерні процедури – ***датчики випадкових чисел***, що формують серії псевдовипадкових чисел, які мають властиві випадковим величинам статистичні характеристики.

<u>Зауваження 2</u>. Перевагою розглянутого методу чисельного інтегрування є те, що його точність не залежить від гладкості підінтегральної функції, Недолік такого способу полягає в імовірнісному характері результату.

Приклад. Поклавши $n = 22$, за методом Монте-Карло знайти наближене значення I_n визначеного інтеграла $I = \int_0^2 \left(1/(1+x^2)\right)dx$ і відповідну граничну абсолютну похибку Δ_n^*. Обчислити абсолютну похибку Δ_n цього наближення I_n, одержавши точне значення інтеграла I за формулою Ньютона – Лейбниця.
Вказівка. Похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ За допомогою генератора випадкових чисел сформуємо послідовність ν_k, $k = \overline{1,n}$, де $n = 22$, знайдемо відповідні точки $x_k = a + (b-a)\nu_k = 0 + (2-0)\nu_k = 2\nu_k$, в яких обчислимо значення підінтегральної функції $y_k = f(x_k) = 1/\left(1 + x_k^2\right)$. Складемо таблицю:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
ν_k	0,158	0,105	0,343	0,918	0,807	0,097	0,168	0,719
x_k	0,316	0,210	0,686	1,836	1,614	0,194	0,336	1,438
y_k	0,909	0,958	0,680	0,229	0,277	0,964	0,899	0,326

k	8	9	10	11	12	13	14	15
ν_k	0,945	0,560	0,198	0,420	0,361	0,600	0,964	0,314
x_k	1,890	1,120	0,396	0,840	0,722	1,200	1,928	0,628
y_k	0,219	0,444	0,864	0,586	0,657	0,410	0,212	0,717

k	16	17	18	19	20	21	22
ν_k	0,677	0,305	0,273	0,449	0,318	0,033	0,892
x_k	1,354	0,610	0,546	0,898	0,636	0,066	1,784
y_k	0,353	0,729	0,770	0,554	0,712	0,996	0,239

За методом Монте-Карло знаходимо:

$$I_n = \left((b-a)/n\right)\sum_{k=1}^{n} y_k = \left((2-0)/22\right)\cdot(0{,}909 + 0{,}958 + 0{,}680 +$$

$$+0{,}229+0{,}277+0{,}964+0{,}899+0{,}326+0{,}219+0{,}444+0{,}864+$$
$$+0{,}586+0{,}657+0{,}410+0{,}212+0{,}717+0{,}353+0{,}729+0{,}770+$$
$$+0{,}554+0{,}712+0{,}996+0{,}239)=1{,}246\,;$$

$$\Delta_n^*=3\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left((b-a)f(x_k)-I_n\right)^2}=0{,}280\,.$$

За формулою Ньютона – Лейбниця обчислимо точне значення інтеграла I :

$$I=\int_0^2\frac{dx}{1+x^2}=arctg\,x\,\Big|_0^2=arctg\,2=1{,}107\,.$$

Знайдемо абсолютну похибку Δ_n одержаного наближення I_n:

$$\Delta_n=|\,I-I_n\,|=|\,1{,}107-1{,}246\,|=0{,}139\,.\quad\blacksquare$$

6. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

6.1. Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

Нехай ***звичайне диференціальне рівняння першого порядку*** $F(x,y(x),y'(x))=0$ можна подати у ***нормальній формі***

$$y'(x)=f(x,y(x))\,.$$

Його ***розв'язком*** є диференційовна функція $y(x)$, що при підстановці в рівняння перетворює його у вірну тотожність. На рис. 22 наведено графік розв'язку диференціального рівняння, який називається ***інтегральною кривою***.

Геометричною інтерпретацією похідної $y'(x)$ у кожній точці (x,y) є тангенс кута α нахилу дотичної до інтегральної кривої, що проходить через цю точку, тобто: $k=tg\,\alpha=f(x,y)$ (рис. 22).

Рівняння $y'(x)=f(x,y(x))$ має цілу сім'ю розв'язків ***–за-***

гальний розв'язок $y = y(x,C)$, де C – довільна стала. При конкретному значенні C із загального розв'язку одержуємо ***частинний розв'язок***. Щоб виділити один певний частинний розв'язок, диференціальне рівняння найчастіше доповнюють ***початковою умовою*** $y(x_0) = y_0$, де x_0 – задане ***початкове значення аргументу***, а y_0 – відповідно задане ***початкове значення функції***.

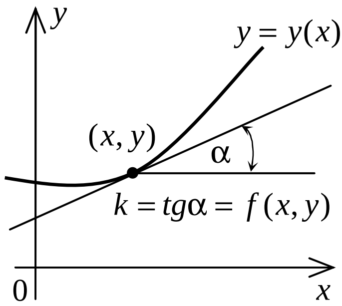

Рис. 22

Задача Коші полягає у тому, щоб відшукати функцію $y = y(x)$, яка задовольняє рівнянню $y'(x) = f(x, y(x))$ і початковій умові $y(x_0) = y_0$. Геометричний зміст цієї задачі: знайти інтегральну криву $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$. Звичайно визначають розв'язок задачі Коші на відрізку, який розташований праворуч від початкового значення x_0, тобто для $x \in [x_0, X]$, де $X > x_0$.

Теорема. *Нехай права частина* $f(x, y)$ *диференціального рівняння* $y'(x) = f(x, y(x))$ *визначена і неперервна при* $x_0 \le x \le X$, $-\infty < y < +\infty$ *і задовольняє* ***умові Ліпшиця*** *для* y

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right|,$$

де L *– деяка константа* (***стала Ліпшиця***), *а* y_1, y_2 *– довільні значення. Тоді для кожного початкового значення* y_0 *існує єдиний розв'язок* $y(x)$ *задачі Коші для* $x \in [x_0, X]$. (Без доведення).

Зауваження 1. Ця теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші неконструктивна – не вказує способу побудови існуючого розв'язку.

Приклад. Розв'язати аналітично задачу Коші: знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = x / y^2$, який задовольняє заданій початковій умові $y(0) = 1$.

Обчислити значення $y(x_k)$ отриманого аналітичного розв'язку $y(x)$ на відрізку $[0;1]$ у рівновіддалених вузлах $x_k = x_{k-1} + h$; $x_0 = 0$; $k = 1,2,...,n$; $n = 10$ зі сталим кроком $h = 0{,}1$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік аналітичного розв'язку $y = y(x)$.

□ Розв'яжемо задану задачу Коші аналітично. Дане рівняння допускає відокремлення змінних: $y^2 dy = x dx$. Далі проінтегруємо ліву і праву частини: $y^3/3 = x^2/2 + C/3$. Звідси дістанемо $y = \sqrt[3]{1{,}5x^2 + C}$ – загальний розв'язок даного диференціального рівняння. Підставимо у нього початкову умову $y(0) = 1$: $1 = \sqrt[3]{C}$ $\Rightarrow$ $C = 1$. Тоді $y = \sqrt[3]{1{,}5x^2 + 1}$ – шуканий частинний розв'язок.

Обчислимо значення $y(x_k)$ отриманого аналітичного розв'язку $y(x)$ на відрізку $[0;1]$ у рівновіддалених вузлах з кроком $h = 0{,}1$ і складемо відповідну таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y(x_k)$	1	1,005	1,0196	1,0431	1,0743	1,1120

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y(x_k)$	1,1548	1,2016	1,2515	1,3035	1,3572

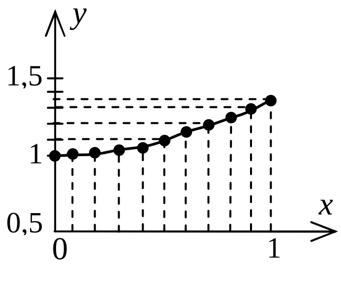

Рис. 23

Побудуємо інтегральну криву – графік аналітичного розв'язку $y = y(x)$ (рис. 23), сполучивши послідовні точки плавною лінією. ■

Зауваження 2. Досі невідомі загальні методи точного аналітичного розв'язування диференціальних рівнянь. Тому до більшості з них застосовні тільки наближені методи.

6.2. Метод послідовних наближень. Поняття про чисельні методи розв'язування задачі Коші

Метод послідовних наближень (***метод Пікара***) відноситься до ***наближених аналітичних способів*** розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. За цим методом здійснюється перехід до еквівалентного ***інтегрального рівняння***

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt},$$

яке розв'язується за допомогою послідовних наближень аналогічно методу простих ітерацій розв'язування скінченних рівнянь.

Шуканий розв'язок $y(x)$ знаходиться як границя послідовності функцій $y_0(x), y_1(x), ..., y_n(x), ...$ ($n = 0, 1, 2, ...$):

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x),$$

де $y_0(x) = y_0$; $y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt$; $y_2(x) = y_0 +$

$$+ \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt\ ; \ \ ...; \ \ \boxed{y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt}.$$

Абсолютна похибка $\Delta_n = |R_n(x)| = |y(x) - y_n(x)|$ оцінюється за співвідношенням

$$\Delta_n = |R_n(x)| = |y(x) - y_n(x)| \le \Delta_n^* = M(KC)^n \big/ (K\, n!),$$

де $\left|\partial f / \partial y\right| \le K$; $|f(x, y)| \le M$; $|x - x_0| \le A$; $|y - y_0| \le B$; $C = \min\{A,\ B/M\}$.

Практично число необхідних ітерацій n визначається з умови $\max\limits_{x \in [x_0\,;\, X]} \left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \le \varepsilon$, де $[x_0\,; X]$ – відрізок, на якому розв'язується задача Коші; ε – максимально допустима абсолютна похибка обчислень.

<u>Приклад</u>. Методом Пікара знайти третє наближення $y_3(x)$ до розв'язку задачі Коші: $y' = y/x^2 - 4x$, $y(1) = -1$.

□ За умовою $y_0(x) = -1$. Далі за методом Пікара знаходимо:

$$y_1(x) = -1 + \int_1^x (-1/t^2 - 4t)\,dt = -1 + (1/t - 2t^2)\Big|_1^x = 1/x - 2x^2;$$

$$y_2(x) = -1 + \int_1^x (1/t^3 - 2 - 4t)\,dt = -1 + \left(-1/(2t^2) - 2t - 2t^2\right)\Big|_1^x =$$

$$= 7/2 - 1/(2x^2) - 2x - 2x^2; \quad y_3(x) = -1 + \int_0^x \Big(7/(2t^2) - 1/(2t^4) -$$

$$- 2/t - 2 - 4t\Big)dt = -1 + \left(-7/(2t) + 1/(6t^3) - 2\ln|t| - 2t - 2t^2\right)\Big|_1^x =$$

$$= 19/3 - 7/(2x) + 1/(6x^3) - 2\ln|x| - 2x - 2x^2. \quad ■$$

Зауваження 1. Метод Пікара особливо зручний, коли відповідні інтеграли обчислюються аналітично (в замкненій формі), проте для інтегрування можна використовувати також квадратурні формули. Із-за складності обчислень на практиці цей метод застосовується для знаходження лише декількох перших наближень.

Навіть для простих диференціальних рівнянь першого порядку не завжди можна отримати аналітичний розв'язок. Тому значне застосування мають чисельні методи розв'язування, що дозволяють визначити наближені значення шуканого розв'язку $y(x)$ на відрізку $[x_0, X]$ у ***вузлах*** x_k, $k = 0,1,...,n$ деякої одновимірної ***сітки*** $\omega_n = \{x_k : x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_n = X\}$ з нерівномірним, у загальному випадку, ***кроком*** $h_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1,...,n$. При цьому ***наближений розв'язок*** отримують у вигляді ***сіткової функції*** y_k, $k = 0,1,...,n$, що задається таблицею, в якій кожному вузлу x_k сітки ω_n відповідає наближене значення розв'язку $y_k \approx y(x_k)$.

Чисельні методи розв'язування задачі Коші діляться на: ***однокрокові*** та ***багатокрокові***, ***явні*** та ***неявні***.

Однокроковий метод використовує дані про розв'язок $y(x)$ тільки в одній попередній точці. Проте деякі з них передбачають обчислення значень правої частини $f(x, y)$ у проміжних точках.

А m***-кроковий метод*** для обчислення поточного значення розв'язку y_k потребує даних про розв'язок у m попередніх точках x_{k-i}, $i = 1, 2, ..., m$, $m \geq 1$.

В ***явних методах*** поточне значення розв'язку виражається в явній формі і знаходиться безпосередньо через його відомі значення на попередніх кроках за допомогою скінченного числа операцій. (Ці методи не потребують ітерацій).

У ***неявних методах*** знаходження поточного значення розв'язку зводиться до наближеного розв'язування скінченного рівняння. Звичайно, для цього застосовують метод простих ітерацій або метод Ньютона.

Нехай $y(x)$ – точний розв'язок задачі Коші, а y_k, $k = 0,1,...,n$ – її наближений чисельний розв'язок. ***Глобальною похибкою*** (або просто ***похибкою***) чисельного методу називають сіткову функцію $R_k = y(x_k) - y_k$, $k = 0,1,...,n$, задану у вузлах x_k сітки ω_n, $k = 0,1,...,n$. За ***абсолютну похибку*** приймають величину $\Delta_n = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |R_k|$. ***Локальною похибкою*** на k-му кроці ***однокрокового методу*** називають $l_k = \tilde{y}_k - y(x_k)$, де $\tilde{y}_k$ – чисельний розв'язок, отриманий при умові, що за наближення y_{k-1} до розв'язку на попередньому кроці взято його точне значення: $y_{k-1} = y(x_{k-1})$. ***Локальною похибкою*** на k-му кроці m ***-крокового методу*** називають величину $l_k = \tilde{y}_k - y(x_k)$, де $\tilde{y}_k$ – чисельний розв'язок, одержаний при умові, що за наближення y_{k-i}, $i = 1, 2, ..., m$ до розв'язку на m попередніх кроках взято його точні значення: $y_{k-i} = y(x_{k-i})$, $i = 1, 2, ..., m$.

Для оцінки якості наближення на відрізку $[x_0; x_n]$ також використовується ***середньоквадратичне відхилення*** σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$, яке обчислюється за формулою

$$\boxed{\sigma_n = \sqrt{(1/n)\sum\nolimits_{k=1}^{n} (y(x_k) - y_k)^2}}.$$

Чисельний метод розв'язування задачі Коші називається ***збіж-***

ним, якщо при необмеженому згущенні сітки ω_n абсолютна похибка Δ_n прямує до нуля: $\lim\limits_{h\to 0} \Delta_n = 0$, де $h = \max\limits_{1\le k\le n} h_k$.

Чисельний метод має r***-й порядок точності*** ($r > 0$), якщо для абсолютної похибки Δ_n справджується оцінка $\Delta_n \le Ch^r$, де C – деяка додатна стала.

Зауваження 2. Похибка наближеного розв'язку тим чи іншим чисельним методом виражається через похідні шуканого розв'язку, які наперед невідомі. Крім того, попередні оцінки похибки, як правило, є сильно завищеними. Тому на практиці у випадку рівномірної сітки двічі проводять розрахунки за однією й тією ж схемою r-го порядку точності при кроках h і $2h$. Як результат отримують відповідно два наближення $y(x,h)$ і $y(x,2h)$ до точного розв'язку $y(x)$. Використовуючи першу формулу Рунге, для оцінки граничної абсолютної похибки Δ_n^* наближеного розв'язку $y(x,h)$ на густішій сітці можна дістати співвідношення

$$\boxed{\Delta_n^* \approx \left(1/(2^r - 1)\right)\max_x |\, y(x,h) - y(x,2h)\,|},$$

де максимум береться за всіма співпадаючими вузлами x обох сіток. Часто застосовують також більш грубу оцінку

$$\boxed{\Delta_n^* \approx \max_x |\, y(x,h) - y(x,2h)\,|}.$$

6.3. Чисельні явні однокрокові методи розв'язування задачі Коші

6.3.1. Явний метод Ейлера

Явний метод Ейлера є найпростішим чисельним методом розв'язування задачі Коші.

Нехай треба розв'язати задачу Коші $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ на відрізку $x \in [x_0, X]$, де $X > x_0$. Візьмемо сталий крок $h = (X - x_0)/n$ і побудуємо рівномірну сітку з вузлами $x_k = x_0 + kh$, $k = 0,1,2,...,n$.

У кожному вузлі x_{k-1}, $k=1,...,n$ замінимо похідну y' скінченною різницею вперед $y'_{k-1} \approx (y_k - y_{k-1})/h$, а праву частину $f(x,y)$ обчислимо в точці (x_{k-1}, y_{k-1}). Тоді на кожному елементарному відрізку $[x_{k-1}, x_k]$ дістанемо наближену рівність

$$(y_k - y_{k-1})/h = f(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k=1,...,n.$$

Звідси отримаємо $y_k = y_{k-1} + h\, f(x_{k-1}, y_{k-1})$ $(k=1,...,n)$ – ***різницеве рівняння***, що служить наближенням даного диференціального рівняння з локальною похибкою другого порядку: $l_k = O(h^2)$. Абсолютна похибка має перший порядок: $\Delta_n = O(h)$.

Додаючи початкову умову $y_0 = y(x_0)$, одержимо ***різницеву задачу Коші***, що апроксимує відповідну диференціальну задачу.

Таким чином, метод Ейлера задається розрахунковими формулами:

$$\boxed{y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,,\ \Delta y_k = h\, f(x_{k-1}, y_{k-1})\,,\ k=1,...,n}$$

і забезпечує перший порядок точності ($r=1$).

Геометрична інтерпретація: якщо кожну пару сусідніх точок $M_{k-1}(x_{k-1}; y_{k-1})$ і $M_k(x_k; y_k)$, $k=1,...,n$ сполучити відрізком прямої, то шукана інтегральна крива $y=y(x)$, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, наближено замінюється ***ламаною Ейлера*** $M_0 M_1 M_2 ... M_n$. Кожна ланка $M_{k-1}M_k$ цієї ламаної має напрям, який співпадає з напрямом дотичної в точці M_{k-1} до тієї інтегральної кривої, що проходить через цю точку.

Зауваження. Описаний метод Ейлера – явний і однокроковий зі сталою довжиною кроку h. Він досить грубий і використовується, в основному, для отримання орієнтовних значень шуканого розв'язку.

Приклад. Чисельно розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = x/y^2$ з початковою умовою $y(0)=1$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h=0{,}1$ методом Ейлера і побудувати графік наближеного розв'язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$. За формулою Рунге оцінити граничну абсолютну похибку Δ_n^*.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Оскільки $f(x,y) = x/y^2$, $y(0)=1$, то за методом Ейлера маємо:

$$y_0 = y(x_0) = y(0) = 1;\ f(x_0, y_0) = 0;\ \Delta y_1 = 0{,}1 \cdot 0 = 0;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_1 = 1;\ f(x_1, y_1) = 0{,}1/1 = 0{,}1;\ \Delta y_2 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01;$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_2 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01;\ f(x_2, y_2) = 0{,}2/1{,}01^2 = 0{,}1961;$$

$$\Delta y_3 = 0{,}1 \cdot 0{,}1961 = 0{,}0196; \quad y_3 = y_2 + \Delta y_3 = 1{,}01 + 0{,}0196 =$$

$$= 1{,}0296; \ f(x_3, y_3) = 0{,}2/1{,}0296^2 = 0{,}283; \ \Delta y_4 = 0{,}1 \cdot 0{,}283 =$$

$$= 0{,}0283; \quad y_4 = y_3 + \Delta y_4 = 1{,}0296 + 0{,}0283 = 1{,}0579;$$

$$f(x_4, y_4) = 0{,}4/1{,}0579^2 = 0{,}3574; \ \Delta y_5 = 0{,}1 \cdot 0{,}3574 = 0{,}0357;$$

$$y_5 = y_4 + \Delta y_5 = 1{,}0579 + 0{,}0357 = 1{,}0936; \ f(x_5, y_5) = 0{,}5:$$

$$:1{,}0936^2 = 0{,}4181; \ \Delta y_6 = 0{,}1 \cdot 0{,}4180 = 0{,}0418; \ y_6 = y_5 + \Delta y_6 =$$

$$= 1{,}0936 + 0{,}0418 = 1{,}1354; \ f(x_6, y_6) = 0{,}6/1{,}1354^2 = 0{,}4654;$$

$$\Delta y_7 = 0{,}1 \cdot 0{,}4654 = 0{,}0465; \ y_7 = y_6 + \Delta y_7 = 1{,}1354 + 0{,}0465 =$$

$$= 1{,}1819; \ f(x_7, y_7) = 0{,}7/1{,}1819^2 = 0{,}5011; \ \Delta y_8 = 0{,}1 \cdot 0{,}5011 =$$

$$= 0{,}0501; \ y_8 = y_7 + \Delta y_8 = 1{,}1819 + 0{,}0501 = 1{,}2320;$$

$$f(x_8, y_8) = 0{,}8/1{,}232^2 = 0{,}5271; \ \Delta y_9 = 0{,}1 \cdot 0{,}5271 = 0{,}0527;$$

$$y_9 = y_8 + \Delta y_9 = 1{,}232 + 0{,}0527 = 1{,}2847;$$

$$f(x_9, y_9) = 0{,}9/1{,}2847^2 = 0{,}5453; \ \Delta y_{10} = 0{,}1 \cdot 0{,}5453 = 0{,}0545;$$

$$y_{10} = y_9 + \Delta y_{10} = 1{,}2847 + 0{,}0545 = 1{,}3392.$$

Одержані значення запишемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	1	1	1,01	1,0296	1,0579	1,0936
$f(x_k, y_k)$	0	0,1	0,1961	0,283	0,3574	0,4181

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	1,1354	1,1819	1,2320	1,2847	1,3392
$f(x_k, y_k)$	0,4654	0,5011	0,5271	0,5453	–

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 24), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з прикладу пункту 6.1:

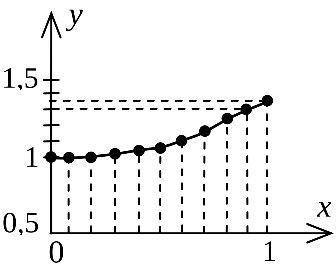

Рис. 24

$$\sigma_n = \Big((1/10)((1{,}005-1)^2 + (1{,}0196-1{,}01)^2 + (1{,}0431-1{,}0296)^2 + (1{,}0743-1{,}0579)^2 + (1{,}112-1{,}0936)^2 + (1{,}1548-1{,}1354)^2 + (1{,}2016-1{,}1819)^2 + (1{,}2515-1{,}2320)^2 + (1{,}3035-1{,}2847)^2 + (1{,}3572-1{,}3392)^2)\Big)^{1/2} \approx 0{,}0167.$$

Аналогічно провівши розрахунки наближеного розв'язку з подвоєним кроком $2h = 0{,}2$ (зробіть це самостійно), за формулою Рунге дістанемо оцінку граничної абсолютної похибки:

$$\Delta_n^* \approx \left(1/(2^1-1)\right) \max\{|1{,}01-1|, |1{,}0579-1{,}04|, |1{,}1354-1{,}114|, |1{,}232-1{,}2107|, |1{,}3392-1{,}3199|\} \approx 0{,}02. \quad \blacksquare$$

6.3.2. Явний метод Рунге – Кутта

Серед методів високої точності одним з найпоширеніших є ***метод Рунге – Кутта***. Він базується на розвиненні шуканого розв'язку $y(x)$ в ряд Тейлора в околі точки $x = x_k$ до членів r-го порядку включно. Не відтворюючи громіздкі доведення, приведемо розрахункові формули ***явного методу Рунге – Кутта четвертого порядку точності*** ($r = 4$) для випадку сталого кроку інтегрування:

$$\boxed{\begin{gathered} y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,,\ \ \Delta y_k = (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6\,; \\ K_1 = h\,f(x_{k-1}, y_{k-1})\,;\ \ K_2 = h\,f(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_1/2)\,; \\ K_3 = h\,f(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_2/2)\,; \\ K_4 = h\,f(x_{k-1} + h, y_{k-1} + K_3)\,,\ \ k = 1,2,3,\ldots. \end{gathered}}$$

Зауваження 1. Метод Рунге – Кутта легко реалізувати, проте він потребує додаткових обчислень правих частин $f(x, y)$ у проміжних точках інтервалу $[x_{k-1}, x_k]$. Цей метод є однокроковим, оскільки не використовує інформації про значення розв'язку у попередніх вузлах, крім найближчого.

Зауваження 2. Метод Ейлера можна розглядати як окремий простий варіант методу Рунге – Кутта.

Зауваження 3. Метод Рунге – Кутта, як і метод Ейлера, можна перенести на випадок системи звичайних диференціальних рівнянь.

Приклад. Чисельно розв'язати вказану задачу Коші на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ методом Рунге–Кутта четвертого порядку точності та побудувати графік наближеного розв'язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$.

а) $y' = x/y^2$, $y(0) = 1$; б) $y' = y^2/(x^2 + 1)$, $y(0) = -1$.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ а) Проведемо обчислення за методом Рунге – Кутта й одержані значення занесемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
K_1	–	0,0000	0,0099	0,0192	0,0276	0,0347
K_2	–	0,0050	0,0147	0,0236	0,0313	0,0378
K_3	–	0,0050	0,0146	0,0235	0,0312	0,0377
K_4	–	0,0099	0,0192	0,0276	0,0347	0,0404
Δy_k	–	0,0050	0,0146	0,0235	0,0312	0,0377
y_k	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0743	1,1120

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
K_1	0,0404	0,0450	0,0485	0,0511	0,0530
K_2	0,0429	0,0469	0,0499	0,0521	0,0537
K_3	0,0428	0,0468	0,0499	0,0521	0,0537
K_4	0,0450	0,0485	0,0511	0,0530	0,0543
Δy_k	0,0428	0,0468	0,0499	0,0521	0,0537
y_k	1,1548	1,2016	1,2515	1,3036	1,3573

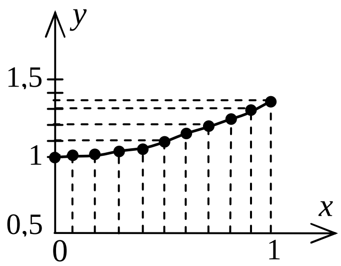

Рис. 25

Побудуємо графік наближеного розв’язку (рис. 25), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв’язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з прикладу пункту 6.1. Дістанемо $\sigma_n \approx 0{,}0000$.

б) Розв’язати самостійно. Точний аналітичний розв’язок одержується методом відокремлення змінних і має вигляд

$$y = -1/(arctg\, x + 1). \quad \blacksquare$$

6.4. Чисельні багатокрокові методи розв'язування задачі Коші

6.4.1. Явний чотирикроковий метод Адамса

Якщо в диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ підставити його частинний розв'язок $y = y(x)$, що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, то одержимо вірну тотожність $y' = f(x, y(x))$, де права частина є складеною функцією x: $F(x) = f(x, y(x))$. Для екстраполяції справа в околі кожного вузла x_k, $k = 0, 1, 2, ...$ рівномірної сітки зі сталим кроком h наближено замінимо цю функцію $F(x) = f(x, y(x))$ інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполяції назад:

$$f(x, y(x)) \approx N_k(x) = f(x_k, y_k) + \frac{q}{1!}\Delta f(x_{k-1}, y_{k-1}) + \frac{q(q+1)}{2!}\times$$

$$\times \Delta^2 f(x_{k-2}, y_{k-2}) + ... + \frac{q(q+1)...(q+k-1)}{k!}\Delta^k f(x_0, y_0),$$

де $y_k = y(x_k)$, $q = (x - x_k)/h$, $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 0, 1, 2, ...$.

Проінтегруємо одержану тотожність на кожному елементарному відрізку $[x_{k-1}, x_k]$, застосовуючи вказані наближення, і дістанемо

$$y_k = y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y(x))\, dx \approx y_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} N_{k-1}(x)\, dx = y_{k-1} +$$

$$+ h\int_0^1 N_{k-1}(x_{k-1} + qh)\, dq = y_{k-1} + h\int_0^1 \big(f(x_{k-1}, y_{k-1}) +$$

$$+ q\Delta f(x_{k-2}, y_{k-2}) + (1/2)q(q+1)\Delta^2 f(x_{k-3}, y_{k-3}) + (1/6)(q+1)\times$$

$$\times (q+2)\Delta^3 f(x_{k-4}, y_{k-4}) + ... \big) dq = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}) +$$

$$+ (h^2/2)\Delta f(x_{k-2}, y_{k-2}) + (5h^3/12)\Delta^2 f(x_{k-3}, y_{k-3}) +$$

$$(3h^4/8)\Delta^3 f(x_{k-4}, y_{k-4}) + ...$$

Якщо обмежитися скінченними різницями третього порядку і виразити їх через значення функції, то після зведення подібних членів отримаємо розрахункові формули ***явного чотирикрокового методу Адамса***

$$\boxed{\begin{aligned} y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,;\quad \Delta y_k = (h/24)\big(55\,f(x_{k-1}, y_{k-1}) - 59\times \\ \times f(x_{k-2}, y_{k-2}) + 37\,f(x_{k-3}, y_{k-3}) - 9\,f(x_{k-4}, y_{k-4})\big),\ k = 4, 5, \ldots,\end{aligned}}$$

що має четвертий порядок точності.

Зауваження 1. Якщо обмежитися двома членами у многочлені Ньютона, то отримаємо явний метод Ейлера.

Зауваження 2. Метод Адамса порівняно з методом Рунге – Кутта тієї ж точності є більш економічним, оскільки на кожному кроці потрібно обчислювати лише одне значення правої частини, а не чотири. Проте цей метод незручний тим, що неможливо розпочати розрахунки, маючи лише одне відоме значення $y(x_0) = y_0$. Для запуску методу Адамса потрібно додатково визначити y_1, y_2 і y_3, наприклад, тим же методом Рунге – Кутта. Це суттєво ускладнює процедуру. Крім того, на відміну від однокрокових, більшість багатокрокових методів, включаючи метод Адамса, не дозволяє легко змінювати крок h у процесі обчислень.

Приклад. Чисельно розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = x/y^2$ з початковою умовою $y(0) = 1$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ чотирикроковим методом Адамса і побудувати графік наближеного розв’язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв’язку від точних $y(x_k)$.

Вказівка. Необхідні для запуску методу Адамса значення y_1, y_2 і y_3 попередньо знайти за допомогою методу Рунге – Кутта (використати результати прикладу з пункту 6.3.2). Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ З умови задачі маємо $f(x, y) = x/y^2$, $y_0 = 1$, а приклад з пункту 6.3.2 додатково дає значення $y_1 = 1{,}0050$, $y_2 = 1{,}0196$ і $y_3 = 1{,}0431$, одержані за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами методу Адамса й отримані значення занесемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0742	1,1118
$f(x_k, y_k)$	0	0,0990	0,1924	0,2757	0,3466	0,4045
Δy_k	–	–	–	–	0,0311	0,0376

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	1,1546	1,2014	1,2513	1,3034	1,3571
$f(x_k, y_k)$	0,4501	0,4850	0,5109	0,5298	–
Δy_k	0,0428	0,0468	0,0499	0,0521	0,0537

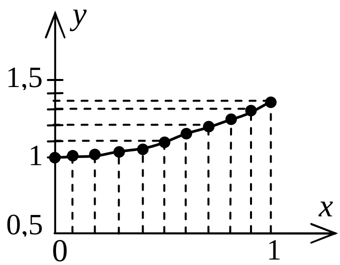

Рис. 26

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 26), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з прикладу пункту 6.1. Дістанемо $\sigma_n \approx 0{,}0001$. ■

6.4.2. Метод прогнозування і корекції Хеммінга

Ідея методів ***прогнозування та корекції*** (***предиктор – коректор***) полягає у тому, що кожний крок розбивається на два етапи: спочатку за допомогою явного методу (***предиктор***) за відомими значеннями розв'язку в попередніх вузлах знаходять його грубе наближення $y_k^{(0)}$ в новому k-му вузлі (***прогнозування***), а потім, використовуючи неявний метод (***коректор***), ітераційно уточнюють отримане значення $y_k^{(1)}$, $y_k^{(2)}$, ... (***корекція***).

Розглянемо одну зі схем. Для прогнозування застосуємо явний двокроковий метод другого порядку

$$y_k^{(0)} = y_{k-2} + 2h\, f(x_{k-1}, y_{k-1})\,.$$

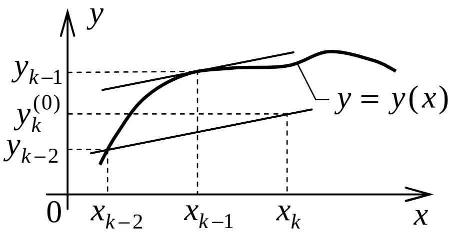

Рис. 27

Геометрична інтерпретація: визначаємо нахил інтегральної кривої в точці (x_{k-1}, y_{k-1}), а за ним – приріст функції на подвоєному кроці $2h$ (рис. 27).

Для запуску методу (визначення y_1) можна використати метод Рунге – Кутта.

Корекцію проведемо за формулою

$$y_k^{(1)} = y_{k-1} + (h/2)\Big(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{(0)})\Big).$$

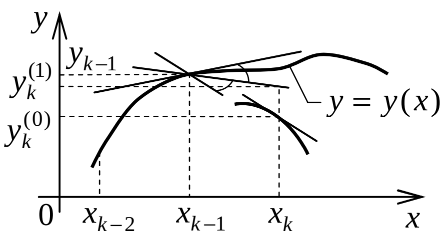

Рис. 28

Геометрична інтерпретація: визначаємо нахили інтегральних кривих в точках (x_{k-1}, y_{k-1}) і $(x_k, y_k^{(0)})$. Обчислюємо середній нахил і, виходячи з точки (x_{k-1}, y_{k-1}), визначаємо нове наближення $y_k^{(1)}$ (рис. 28).

Зауваження. Корекцію можна продовжити ітераційним процесом

$$y_k^{(i)} = y_{k-1} + (h/2)\Big(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{(i-1)})\Big),\ \ i = 1, 2, ...$$

до виконання умови $\left| y_k^{(i+1)} - y_k^{(i)} \right| < \varepsilon$, де ε – наперед задана точність корекції.

Дослідимо похибку розглянутого двокрокового методу прогнозування і корекції. Розкладемо функцію $y(x)$ в ряд Тейлора в околі точки $x = x_{k-1}$:

$$y(x) = y_{k-1} + y'_{k-1}(x - x_{k-1}) + (1/2)\, y''_{k-1}(x - x_{k-1})^2 +$$

$$+(1/6)\,y'''_{k-1}(x-x_{k-1})^3+\dots .$$

Поклавши в цьому розкладі $x=x_k$ і $x=x_{k-2}$, відповідно дістанемо:

$$y_k = y_{k-1}+h\,y'_{k-1}+(h^2/2)\,y''_{k-1}+(h^3/6)\,y'''_{k-1}+\dots;$$

$$y_{k-2} = y_{k-1}-h\,y'_{k-1}+(h^2/2)\,y''_{k-1}-(h^3/6)\,y'''_{k-1}+\dots .$$

Віднімемо з першої рівності другу й отримаємо формулу прогнозування

$$y_k - y_{k-2} = 2hy'_k+(h^3/3)\,y'''_{k-1}+\dots$$

із залишковим членом (локальною похибкою прогнозування)

$$l_k^{(np)} = (h^3/3)\,y'''_{k-1}+\dots .$$

Формула корекції одержується з рівності $y_k = y_{k-1}+\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t,y(t))\,dt$, в якій інтеграл наближено обчислюється за формулою трапецій (див. пункт 6.5)

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t,y(t))\,dt \approx (h/2)\big(f(x_{k-1},y_{k-1})+f(x_k,y_k)\big),$$

що породжує локальну похибку $l_k^{(kop)} = (h^3/3)\,y'''_{k-1}+\dots$.

Таким чином, даний метод прогнозування та корекції має другий порядок точності.

На практиці частіше застосовують більш точний ***чотирикроковий метод прогнозування і корекції Хеммінга***:

$$\boxed{\begin{gathered} y_k^{(0)} = y_{k-4}+(4h/3)\big(2f(x_{k-1},y_{k-1})-f(x_{k-2},y_{k-2})+ \\ +2f(x_{k-3},y_{k-3})\big); \qquad y_k=(1/8)\,(9y_{k-1}-y_{k-3})+(3h/8)\times \\ \times\big(f(x_k,y_k^{(0)})+2f(x_{k-1},y_{k-1})-f(x_{k-2},y_{k-2})\big); \quad k=4,5,6,\dots, \end{gathered}}$$

де корекція обмежується однією ітерацією.

<u>Приклад</u>. Чисельно розв’язати вказану задачу Коші на відрізку $[0;1]$ з кроком $h=0{,}1$ чотирикроковим методом прогнозування і корекції Хеммінга і побудувати графік наближеного розв’язку $\tilde{y}=\tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених

значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$.

а) $y' = x/y^2$, $y(0)=1$; б) $y' = (3+2x)e^{-x} - y$, $y(0)=1$.

Вказівка. Необхідні для запуску методу Хеммінга значення y_1, y_2 і y_3 попередньо знайти за допомогою методу Рунге – Кутта (використати результати прикладу з пункту 6.3.2). Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ а) З умови задачі маємо $f(x,y) = x/y^2$, $y_0 = 1$, а додаткові значення $y_1 = 1{,}0050$, $y_2 = 1{,}0196$ і $y_3 = 1{,}0431$ дістаємо з прикладу пункту 6.3.2, де вони одержані за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами методу прогнозування і корекції Хеммінга й отримані значення занесемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_k	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0743	1,1120
$f(x_k, y_k)$	0	0,0990	0,1924	0,2757	0,3466	0,4044
$y_k^{(0)}$	–	–	–	–	1,0743	1,1120
$f(x_k, y_k^{(0)})$	–	–	–	–	0,3466	0,4044

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k	1,1548	1,2016	1,2514	1,3035	1,3572
$f(x_k, y_k)$	0,4499	0,4848	0,5109	0,5297	0,5429
$y_k^{(0)}$	1,1547	1,2016	1,2514	1,3036	1,3572
$f(x_k, y_k^{(0)})$	0,4500	0,4848	0,5109	0,5296	0,5429

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 29), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з

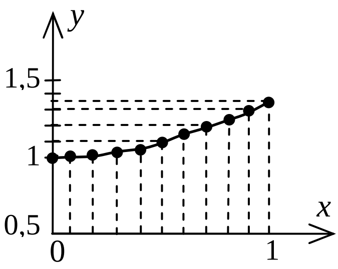

Рис. 29

прикладу пункту 6.1. Дістанемо

$$\sigma_n \approx 0{,}0000.$$

б) Розв'язати самостійно. Точний аналітичний розв'язок даного лінійного диференціального рівняння одержується за допомогою підстановки Бернуллі та має вигляд

$$y = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}. \quad ■$$

6.5. Поняття про неявні різницеві методи

Приклад неявного методу можна отримати, якщо на кожному елементарному інтервалі $[x_{k-1}, x_k]$ перейти від диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ до еквівалентного інтегрального

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx,$$

де інтеграл наближено обчислити за формулою трапецій. Дістанемо

$$y_k = y_{k-1} + (h/2)\big(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)\big).$$

Розв'язуючи це скінченне рівняння, можна визначити y_k – наближене значення шуканого розв'язку $y(x_k)$. При цьому за початкове наближення $y_k^{(0)}$ розв'язку звичайно приймається його значення у попередньому вузлі: $y_k^{(0)} = y_{k-1}$.

Цей метод є однокроковим і забезпечує другий порядок точності. Він дозволяє проводити обчислення з нерівномірним кроком і не потребує спеціальних прийомів для початку обчислення.

Але у нього є серйозні недоліки. По-перше, невідомо, чи має рівняння $y_k = y_{k-1} + (h/2)\big(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)\big)$ дійсний корінь, тобто чи має задача розв'язки. Наприклад, нехай $f(x, y) = y^2 - y$ і $y(0) = 2$, тоді на першому кроці дістаємо квадратне рівняння $y_1 = 2 + (h/2)(2 + y_1^2 - y_1)$, що при $h > 2/7$ не має дійсних коренів. Тобто, якщо крок h – великий, то коренів немає.

По-друге, якщо корінь існує, то як його знайти? Як правило, розв'язати різницеве рівняння аналітично неможливо. Треба застосовувати наближені ітераційні методи. Метод Ньютона, як один з найефективніших, використовувати небажано, оскільки для цього треба диференціювати праву частину $f(x,y)$. Простий і дуже надійний метод ділення навпіл не узагальнюється на системи рівнянь. Тому найчастіше застосовується метод простих ітерацій

$$y_k^{(i)} = y_{k-1} + (h/2)\Big(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{(i-1)})\Big),\ \ i = 1, 2, \ldots.$$

Але він збігається до кореня тільки при умові $h\left| f(x,y)\right| < 2$, тобто при достатньо малому кроці. Якщо ж у процесі обчислень значення правої частини $f(x,y)$ зростають, то ітераційний процес може припинити збігатись.

Від розбіжності ітерацій можна позбавитись і при цьому зменшити об′єм обчислень, якщо завчасно зафіксувати число ітерацій m і розглядати співвідношення

$$y_k^{(i)} = y_{k-1} + (h/2)\Big(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^{(i-1)})\Big),\ \ i = 1,2,\ \ldots, m$$

як самостійну явну схему. Тоді питання про існування кореня не виникає; $y_k = y_k^{(m)}$ завжди визначається, навіть якщо різницеве рівняння $y_k = y_{k-1} + (h/2)\big(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)\big)$ дійсного кореня не має або такий корінь неєдиний.

<u>Зауваження 1</u>. Неявні методи з фіксованим числом ітерацій мало відрізняються від явних методів Рунге – Кутта і є зручними тільки для деяких нестандартних задач.

<u>Зауваження 2</u>. Для вибору числа ітерацій m існує емпіричне <u>правило</u>: *якщо неявну схему r-го порядку точності розв'язати методом послідовних наближень, то при $m = 1$ одержимо схему першого порядку точності, при $m = 2$ – другого, …, при $m = r$ – r-го порядку точності. Подальше збільшення числа ітерацій m не підвищує порядку точності.*

<u>Приклад</u>. Чисельно розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y' = x/y^2$ з початковою умовою $y(0) = 1$ на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ ***двокроковим неявним методом Адамса***,

що задається формулою

$$y_k = y_{k-1} + (h/12)\big(5f(x_k, y_k) + 8f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})\big),$$
$$k = 2, 3, \ldots,$$

використовуючи при кожному $k = 2, 3, \ldots$ метод послідовних наближень

$$y_k^{(0)} = y_{k-1}; \quad y_k^{(i)} = y_{k-1} + (h/12)\Big(5f(x_k, y_k^{(i-1)}) +$$
$$+ 8f(x_{k-1}, y_{k-1}) - f(x_{k-2}, y_{k-2})\Big), \; i = 1, 2, \ldots, m$$

з фіксованим числом ітерацій $m = 2$. Побудувати графік наближеного розв'язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$.

Вказівка. Необхідне для запуску методу значення y_1 попередньо знайти за допомогою методу Рунге – Кутта (використати результати прикладу з пункту 6.3.2). Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ З умови задачі маємо $f(x, y) = x / y^2$, $y_0 = 1$, а приклад з пункту 6.3.2 додатково дає значення $y_1 = 1{,}0050$, одержане за методом Рунге – Кутта.

Далі проведемо обчислення за розрахунковими формулами вказаного двокрокового неявного методу Адамса й отримані значення занесемо у таблицю:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y_k^{(0)} = y_{k-1}$	–	–	1,0050	1,0196	1,0431	1,0743
$f(x_k, y_k^{(0)})$	–	–	0,1980	0,2886	0,3676	0,4332
$y_k^{(1)}$	–	–	1,0199	1,0436	1,0752	1,1132
$f(x_k, y_k^{(1)})$	–	–	0,1923	0,2755	0,3460	0,4035
$y_k = y_k^{(2)}$	1	1,0050	1,0196	1,0431	1,0743	1,1119
$f(x_k, y_k)$	0	0,0990	0,1924	0,2757	0,3466	0,4044

k	6	7	8	9	10
x_k	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y_k^{(0)} = y_{k-1}$	1,1119	1,1547	1,2015	1,2513	1,3033
$f(x_k, y_k^{(0)})$	0,4853	0,5250	0,5542	0,5748	0,5887
$y_k^{(1)}$	1,1562	1,2032	1,2532	1,3053	1,3589
$f(x_k, y_k^{(1)})$	0,4488	0,4835	0,5094	0,5282	0,5415
$y_k = y_k^{(2)}$	1,1547	1,2015	1,2513	1,3033	1,3569
$f(x_k, y_k)$	0,4500	0,4849	0,5109	0,5299	0,5431

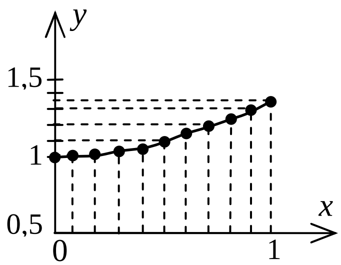

Рис. 30

Побудуємо графік наближеного розв'язку (рис. 30), сполучивши послідовно точки плавною лінією.

Знайдемо середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку $y = y(x)$ від точних $y(x_k)$, які візьмемо з прикладу пункту 6.1. Дістанемо $\sigma_n \approx 0{,}0001$. ■

7. Контрольні запитання

1. Що таке математична модель об'єкта?
2. Який розв'язок задачі називається стійким за вхідними даними?
3. Що таке коректно (правильно) поставлена математична задача?
4. Що розуміють під чисельним (числовим, обчислювальним) методом?
5. Який метод називається прямим? Ітераційним?
6. Дайте означення однокрокового і багатокрокового ітераційного методу.
7. За якими характеристиками розрізняються чисельні методи?
8. Що означає p-й порядок збіжності ітераційного методу?

9. При якій умові ітераційний метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії?
10. Що називається наближеним числом?
11. Що називається похибкою наближення? Укажіть основні джерела похибок. Дайте класифікацію похибок.
12. Дайте означення абсолютної та відносної похибки.
13. У яких формах записуються наближені числа? Що таке значущі цифри? Які з них називаються вірними (правильними) у вузькому і широкому сенсі?
14. Сформулюйте правило симетричного заокруглювання.
15. Як за записом наближеного числа оцінити його абсолютну та відносну похибки?
16. У чому полягає пряма задача теорії похибок?
17. Як обчислюються лінійні оцінки похибки функції?
18. Як обчислюються лінійні оцінки похибок арифметичних операцій? Наведіть відповідні правила підрахунку цифр.
19. У чому полягає обернена задача теорії похибок? Сформулюйте принципи рівних впливів, рівних абсолютних похибок, рівних відносних похибок.
20. У чому полягає локалізація (відокремлення) дійсного кореня скінченного рівняння? Які способи для цього застосовують?
21. Наведіть основні критерії закінчення ітераційного процесу уточнення кореня.
22. У чому суть методу поділу навпіл (дихотомії, бісекції)? Наведіть його переваги та недоліки.
23. У чому полягає метод хорд (пропорційних частин)? Запишіть його розрахункову формулу. Дайте геометричну інтерпретацію.
24. У чому суть методу простих ітерацій? Запишіть достатню умову його збіжності. Дайте геометричну інтерпретацію.
25. У чому полягає метод Ньютона (метод дотичних, метод лінеаризації)? Запишіть його розрахункову формулу. Дайте геометричну інтерпретацію. Запишіть достатню умову його збіжності.
26. У чому полягає метод січних? Запишіть його розрахункову формулу. Дайте геометричну інтерпретацію. Порівняйте цей метод з методом Ньютона.
27. У чому полягає задача апроксимації (наближення) функцій?
28. Який спосіб наближення називають інтерполяцією?
29. У чому полягає задача екстраполяції?

30. Що розуміють під середньоквадратичною апроксимацією (наближенням за методом найменших квадратів)? У чому відмінність цього методу від інтерполяції?
31. Сформулюйте рекомендації щодо проведення структурної ідентифікації моделі.
32. Як здійснюється інтерполяція многочленами? Запишіть інтерполяційний поліном Лагранжа.
33. Як оцінюється похибка інтерполювання?
34. Що таке скінченні та розділені різниці. Запишіть інтерполяційний поліном Ньютона для нерівновіддалених вузлів.
35. Запишіть інтерполяційні многочлени Ньютона для інтерполяції вперед і назад для випадку рівновіддалених вузлів. Який з цих поліномів треба застосовувати на початку проміжку інтерполяції, а який – у кінці?
36. Яку функцію називають поліноміальним сплайном степеня l дефекту гладкості m?
37. У чому переваги сплайн-інтерполяції порівняно з с інтерполяційними многочленами? Дайте геометричну інтерпретацію лінійного і кубічного інтерполяційних сплайнів.
38. Коли застосовують апроксимацію за методом найменших квадратів? Чому цей метод найбільш ефективний у випадку моделі, що лінійна відносно параметрів?
39. Наведіть приклади поліноміальної апроксимації за методом найменших квадратів.
40. Як здійснюється апроксимація кубічним сплайном за методом найменших квадратів?
41. Як здійснюється згладжування (фільтрація) дослідних даних за допомогою апроксимуючого многочлена?
42. Коли застосовується чисельне диференціювання?
43. Як наближено знаходяться похідні за допомогою інтерполяційних многочленів?
44. Як за методом Рунге (методом подвоєння кроку) оцінити похибку апроксимації похідної й уточнити її значення?
45. Як здійснюється вибір оптимального кроку чисельного диференціювання?
46. Сформулюйте основні підходи до побудови квадратурних формул.
47. Запишіть розрахункові формули методу лівих і правих прямокутників.

48. Запишіть розрахункову формулу методу трапецій.
49. Наведіть формулу Симпсона (формулу парабол) чисельного інтегрування.
50. Як здійснюється вибір кроку інтегрування за аналітичною оцінкою залишкового члена?
51. Як практично оцінюється похибка чисельного інтегрування за правилом Рунге?
52. У чому полягає метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло)? Як він застосовується для наближеного обчислення визначеного інтеграла?
53. Як ставиться задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку?
54. Дайте геометричну інтерпретацію розв'язку задачі Коші та його похідної.
55. У чому полягає метод послідовних наближень (метод Пікара) наближеного обчислення визначеного інтеграла?
56. Що таке локальна і глобальна похибки чисельного методу розв'язування задачі Коші?
57. Як за правилом Рунге практично оцінюється похибка наближеного розв'язку?
58. Запишіть розрахункову формулу явного методу Ейлера. Який його порядок точності? Яка геометрична інтерпретація цього методу?
59. Запишіть розрахункові формули явного методу Рунге – Кутта четвертого порядку точності.
60. Наведіть розрахункові формули явного чотирикрокового методу Адамса. Порівняйте цей метод з методом Рунге – Кутта тієї ж точності.
61. У чому суть методів прогнозування та корекції (предиктор – коректор)?
62. Запишіть розрахункові формули чотирикрокового методу прогнозування і корекції Хеммінга.
63. Наведіть приклад неявного методу розв'язування задачі Коші.
64. У чому полягають недоліки неявних методів? Які підходи застосовуються для їх усунення?
65. На чому ґрунтується вибір числа ітерацій при практичній реалізації неявного методу розв'язування задачі Коші?

8. Індивідуальні завдання до самостійної роботи

Завдання 1. Знайти абсолютну Δ_u і відносну δ_u похибки обчислення значення даної функції $u = f(x, y, z)$, якщо $x = 0{,}18 \pm 0{,}005$, $y = 1{,}27 \pm 0{,}01$, $z = 2{,}16 \pm 0{,}008$.

№ в-та	Функція $u = f(x, y, z)$	№ в-та	Функція $u = f(x, y, z)$
1	$u = (x^2 + z)\ln y$	16	$u = (x/z^2)\, arctg\, y$
2	$u = (x/z^2)\sin y$	17	$u = (y^2 - 3x)\ln(z-1)$
3	$u = (z^3 - x)\ln y$	18	$u = (x/y^2)\, arctg\, z$
4	$u = (y^3/z)\cos x$	19	$u = (y^3 + z)\ln(2y - x)$
5	$u = (z^2 - 2y)\ln(x + y)$	20	$u = (y^2/z)\sin(x + y)$
6	$u = \sqrt{y^2 + xz}\sin y$	21	$u = (x/z^2)\sqrt{z^3 - 3y}$
7	$u = (x^2 + 3y)\ln(z - 1)$	22	$u = \sqrt{y^3 + x}\cos(z - 2y)$
8	$u = \sqrt{z - x^3}\cos(10x - y)$	23	$u = (y^3/z)\sin(x + z)$
9	$u = \sqrt{y^2 + x}\ln(z - y)$	24	$u = \sqrt{y - x^3}\sin(x + z)$
10	$u = (z - x^2)\, arctg\,(y/z)$	25	$u = \sqrt{x}\ln(2z - y^2)$
11	$u = (y^2/z)\sqrt{x^3 + z}$	26	$u = \sqrt{z^2 - x}\ln(y + xz)$
12	$u = \sqrt{y - x^3}\cos(z - 2y)$	27	$u = (z/y^2)\sqrt{z^3 - 2x}$
13	$u = (x/y^2)\sqrt{z^3 - 2y}$	28	$u = x^2\ln(z^2 - 3y)$
14	$u = (x + y^2)\, arctg\,(z/y)$	29	$u = (y^2/z)\cos x$
15	$u = x^3 z\ln(2z - y)$	30	$u = (x^2 + z)\, arctg\, y$

Завдання 2. Дано рівняння $f(x) = 0$. Виконати наступне:

1. Подати задане рівняння у вигляді $f_1(x) = f_2(x)$. Знайти найменший за модулем дійсний корінь x^* рівняння наближено

графічно як абсцису найближчої до осі Oy точки перетину графіків $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$. Вказати проміжок ізоляції $[a_0\,; b_0]$ цього кореня, де $f(a_0)\cdot f(b_0) < 0$. Уточнити найменший за модулем корінь x^* рівняння $f(x) = 0$ вказаним далі методом.

1. Методом поділу навпіл за формулою

$$x_k = (a_{k-1} + b_{k-1})/2; \quad k = 1, 2, \ldots; \quad f(a_{k-1})\ f(b_{k-1}) < 0,$$

де $[a_{k-1}\,; b_{k-1}]$ – попередній проміжок ізоляції кореня. Якщо $f(x_k) = 0$, то покласти $x^* = x_k$ і закінчити обчислення. Якщо $f(x_k)\cdot f(a_{k-1}) > 0$, то покласти $a_k = x_k$; $b_k = b_{k-1}$; $k := k + 1$ і продовжити обчислення. Якщо $f(x_k)\cdot f(b_{k-1}) > 0$, то покласти $a_k = a_{k-1}$; $b_k = x_k$; $k := k + 1$ і продовжити обчислення.

2. Методом хорд (пропорційних частин) за формулою

$$x_k = a_{k-1} - \frac{f(a_{k-1})\cdot(b_{k-1} - a_{k-1})}{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})}; \quad f(a_{k-1})\ f(b_{k-1}) < 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

де $[a_{k-1}\,; b_{k-1}]$ – попередній проміжок ізоляції кореня. Якщо $f(x_k) = 0$, то покласти $x^* = x_k$ і закінчити обчислення. Якщо $f(x_k)\cdot f(a_{k-1}) > 0$, то покласти $a_k = x_k$; $b_k = b_{k-1}$, інакше – $a_k = a_{k-1}$; $b_k = x_k$. Далі присвоїти $k := k + 1$ і продовжити обчислення.

3. Модифікованим методом простих ітерацій за формулою

$$x_k = \varphi(x_{k-1})\,; \quad k = 1, 2, \ldots,$$

подавши задане рівняння $f(x) = 0$ у вигляді $x = \varphi(x)$, де $\varphi(x) = x + \alpha f(x)$, α – параметр, значення якого підбирається експериментально з умови збіжності $|\varphi'(x)| < 1$ (звичайно, з діапазону $|\alpha| = 0{,}1 \div 1$). За початкове наближення x_0 кореня x^* прийняти значення, отримане графічно.

4 Модифікованим методом Ньютона (методом дотичних) за формулою

$$x_k = x_{k-1} - \alpha\, f(x_{k-1}) / f'(x_{k-1});\quad k = 1, 2, \ldots,$$

де α – параметр, значення якого підбирається експериментально (звичайно, з діапазону $\alpha = 0{,}1 \div 1$). За початкове наближення x_0 кореня x^* прийняти довільне значення x з проміжку ізоляції $[a_0; b_0]$, для якого виконується умова $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ (зокрема, за x_0 можна взяти значення, отримане графічно, або один з кінців відрізка ізоляції $[a_0; b_0]$, якщо додержується дана умова).

Критерій закінчення ітераційного процесу визначається виконанням хоча б однієї з умов:

– досягнення заданої точності за аргументом $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, де $\delta > 0$ – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного значення кореня, $\delta = 0{,}01$;

– досягнення заданої точності за функцією: $|f(x_k)| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного нульового значення $f(x_k)$ функції $f(x)$, $\varepsilon = 0{,}001$;

– досягнення заданого максимально допустимого числа ітерацій $k_{\max}$, $k_{\max} = 5$.

<u>Вказівка</u>. Усі обчислення проводити з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми. Усі графіки побудувати в одній системі координат.

№ в-та	Рівняння $f(x)=0$	№ в-та	Рівняння $f(x)=0$
1	$0{,}5 - 0{,}3x\lg(1+x) - 0{,}5x = 0$	16	$0{,}4 - 0{,}3\sin x - 0{,}6x^3 = 0$
2	$0{,}4 - 0{,}2\,arctg\, x - 0{,}5x^3 = 0$	17	$0{,}4 - 0{,}1x\sin x - 0{,}5x = 0$
3	$0{,}6 - 0{,}1x\,arctg\, x - 0{,}7x = 0$	18	$0{,}5 - 0{,}6x - 0{,}2 \cdot 2^x = 0$
4	$0{,}2 + 0{,}1\cos x - 0{,}4x^3 = 0$	19	$0{,}4 - 0{,}5x - 0{,}1x \cdot 2^x = 0$
5	$0{,}3 - 0{,}2\lg(1+x) - 0{,}4x^3 = 0$	20	$0{,}3 - 0{,}1x \cdot 2^x - 0{,}6x^5 = 0$
6	$0{,}5 + 0{,}3x\sin x - 0{,}6x^3 = 0$	21	$0{,}1x\cos x - 0{,}3x + 0{,}2 = 0$

7	$0{,}2+0{,}2\,x\sin x-0{,}3x^3=0$	22	$0{,}2+0{,}2\cdot 2^{-x}-0{,}5x=0$
8	$0{,}5-0{,}3\lg(1+x)-0{,}5x^3=0$	23	$0{,}2\sin x-0{,}5x^3+0{,}4=0$
9	$0{,}5-0{,}2x\lg(1+x)-0{,}6x=0$	24	$0{,}2+0{,}2\sin x-0{,}3x=0$
10	$0{,}3-0{,}1\,x\cos x-0{,}4x^3=0$	25	$0{,}3-0{,}1\cdot 2^{x}-0{,}4x^3=0$
11	$0{,}3-0{,}2\lg(1+x^3)-0{,}4x=0$	26	$0{,}4+0{,}2\sin x-0{,}5x^5=0$
12	$0{,}4-0{,}2\lg(1+x^2)-0{,}5x^3=0$	27	$0{,}5+0{,}2\sin x-0{,}7x^3=0$
13	$0{,}4-0{,}3\lg(1+x)-0{,}5x^5=0$	28	$0{,}4-0{,}2\cos x-0{,}5x^5=0$
14	$0{,}3+0{,}1x\sin x-0{,}4x^3=0$	29	$0{,}4-0{,}1\cdot 2^{x}-0{,}6x^5=0$
15	$0{,}2-0{,}1\,arctg\,x-0{,}3x^5=0$	30	$0{,}3+0{,}2\sin x-0{,}4x^5=0$

Завдання 3. Функція $f(x)$ задана на відрізку $[x_0; x_n]$ своїми значеннями в $n+1$ рівновіддалених вузлах інтерполяції $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n$ згідно таблиці відповідного варіанта, де $n=3$, крок між вузлами $h=(x_n-x_0)/n$. У прямокутній системі координат Oxy побудувати задані в цій таблиці точки (x_k, y_k), $y_k = f(x_k)$, $k=0,1,2,...,n$. Указаним далі методом визначити функцію $F(x)$, яка служить наближенням для вхідної функції $f(x)$: $f(x)\approx F(x)$.

1. Знайти інтерполяцію функції $f(x)$ многочленом стандартного вигляду третього порядку $P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, де значення коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, a_3 визначаються як розв'язки системи

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3=y_0; \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3=y_1; \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+a_3x_2^3=y_2; \\ a_0+a_1x_3+a_2x_3^2+a_3x_3^3=y_3. \end{cases}.$$

2. Знайти інтерполяцію функції $f(x)$ за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа третього порядку

$$L_3(x)=\frac{y_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+\frac{y_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$

$$+\frac{y_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{y_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Обчислити значення інтерполяційного многочлена Лагранжа $L_3(x)$ на відрізку $[-4;4]$ з кроком $h_d=0{,}5$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік $y=L_3(x)$.

3. На кожному з елементарних відрізків $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,...,n$ між сусідніми вузлами наближено замінити функцію $f(x)$ відрізком прямої (лінійною функцією)

$$P_{1k}(x)=\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\left(y_k-y_{k-1}\right)+y_{k-1}$$

і отримати інтерполяцію функції $f(x)$ ламаною – лінійним сплайном

$$S_1(x)=\begin{cases}P_{11}(x),\ x\in(-\infty,x_1];\\ P_{12}(x),\ x\in[x_1,x_2];\\ P_{13}(x),\ x\in[x_2,+\infty)\end{cases}$$

з $n-1=2$ вузлами спряження x_k, $k=1,2$, що співпадають з відповідними вузлами інтерполяції.

Побудувати графік лінійного інтерполяційного сплайна $y=S_1(x)$, сполучивши сусідні вузли відрізком прямої.

4. На кожному з елементарних відрізків $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,...,n$ між сусідніми вузлами наближено замінити функцію $f(x)$ многочленом третього порядку

$$P_{3k}(x)=a_k+b_k(x-x_{k-1})+c_k(x-x_{k-1})^2+d_k(x-x_{k-1})^3=$$

$$=a_k+b_kq_k+c_kq_k^2+d_kq_k^3,\ q_k=x-x_{k-1}$$

і отримати інтерполяцію функції $f\left(x\right)$ кубічним сплайном

$$S_3(x)=\begin{cases} P_{31}(x), & x\in(-\infty,x_1]; \\ P_{32}(x), & x\in[x_1,x_2]; \\ P_{33}(x), & x\in[x_2,+\infty) \end{cases}$$

з $n-1=2$ вузлами спряження x_k, $k=1,2$, що співпадають з відповідними вузлами інтерполяції. Розрахункові формули для коефіцієнтів:

$$a_k=y_{k-1},\ k=\overline{1,3};\ \ b_1=(y_3-6y_2+24y_1-19y_0)/(15h);$$

$$b_2=(-2y_3+12y_2-3y_1-7y_0)/(15h);$$

$$b_3=(7y_3+3y_2-12y_1+2y_0)/(15h);$$

$$c_1=0;\quad c_2=(-y_3+6y_2-9y_1+4y_0)\big/(5h^2);$$

$$c_3=(4y_3-9y_2+6y_1-y_0)\big/(5h^2);$$

$$d_1=c_2/(3h);\ \ d_2=(c_3-c_2)/(3h);\ \ d_3=-c_3/(3h).$$

Обчислити значення отриманого кубічного сплайна $S_3(x)$ на відрізку $[-4;4]$ з кроком $h_d=0{,}5$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік кубічного інтерполяційного сплайна $y=S_3(x)$.

5. Знайти апроксимацію функції $f(x)$ методом найменших квадратів за допомогою лінійної функції (лінійної регресії) $F(x)=a_0+a_1x$, де оптимальні значення коефіцієнтів a_0, a_1 визначаються як розв'язки системи

$$\begin{cases} a_0(n+1)+a_1\sum_{k=0}^{n}x_k=\sum_{k=0}^{n}y_k; \\ a_0\sum_{k=0}^{n}x_k+a_1\sum_{k=0}^{n}x_k^2=\sum_{k=0}^{n}x_ky_k. \end{cases}$$

Обчислити значення отриманої лінійної регресії $y=a_0+a_1x$ на кінцях відрізка $[-4;4]$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік лінійної регресії. Знайти середньоквадратичне відхилення

Δy_s лінійної регресії $y = a_0 + a_1 x$ від заданих значень функції y_k, $k = 0,1,...,n$ за формулою

$$\Delta y_s = \sqrt{\left(1/(n+1)\right) \sum_{k=0}^{n} \left(y_k - (a_0 + a_1 x_k)\right)^2}\ .$$

6. Знайти апроксимацію функції $f(x)$ методом найменших квадратів за допомогою квадратичної функції (квадратичної регресії) $f(x) \approx F(x) = P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, де оптимальні значення коефіцієнтів a_0, a_1 і a_2 визначаються як розв'язки системи

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k + a_2 \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \sum_{k=0}^{n} y_k; \\ a_0 \sum_{k=0}^{n} x_k + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + a_2 \sum_{k=0}^{n} x_k^3 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_k; \\ a_0 \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k^3 + a_2 \sum_{k=0}^{n} x_k^4 = \sum_{k=0}^{n} x_k^2 y_k. \end{cases}$$

Обчислити значення отриманої квадратичної регресії $y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ на відрізку $[-4;4]$ з кроком $h_d = 0{,}5$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік квадратичної регресії $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Знайти середньоквадратичне відхилення Δy_s квадратичної регресії $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ від заданих значень функції y_k, $k = 0,1,...,n$ за формулою

$$\Delta y_s = \sqrt{\left(1/(n+1)\right) \sum_{k=0}^{n} \left(y_k - (a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2)\right)^2}\ .$$

7. Знайти апроксимацію функції $f(x)$ методом найменших квадратів за допомогою кубічного сплайна (кубічної сплайнової регресії)

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{31}(x) = a_1 + b_1(x - x_s) + c_1(x - x_s)^2 + d_1(x - x_s)^3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in (-\infty; x_s]; \\ P_{32}(x) = a_2 + b_2(x - x_s) + c_2(x - x_s)^2 + d_2(x - x_s)^3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in [x_s; +\infty) \end{cases}$$

з одним вузлом спряження $x_s = (a+b)/2$.

Введемо позначення $a_1 = a_2 = \bar{a}$; $b_1 = b_2 = \bar{b}$; $c_1 = c_2 = \bar{c}$.

Тоді $d_1 = -d_2 = (2/9)\bar{c}/h$ і сплайн набуває вигляду

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{31}(x) = \bar{a} + \bar{b}(x-x_s) + \bar{c}(x-x_s)^2 + \left((2/9)\bar{c}/h\right)(x-x_s)^3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in (-\infty; x_s]; \\ P_{32}(x) = \bar{a} + \bar{b}(x-x_s) + \bar{c}(x-x_s)^2 - \left((2/9)\bar{c}/h\right)(x-x_s)^3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in [x_s; +\infty). \end{cases}$$

Розрахункові формули для оптимальних значень коефіцієнтів

$$\bar{a} = (-4y_0 + 37y_1 + 37y_2 - 4y_3)/46;$$

$$\bar{b} = (-3y_0 - y_1 + y_2 + 3y_3)/(10h); \; \bar{c} = 9(y_0 - y_1 - y_2 + y_3)/(23h^2).$$

Обчислити значення отриманої кубічної сплайнової регресії $y = S_3(x)$ на відрізку $[-4;4]$ з кроком $h_d = 0{,}5$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік сплайнової регресії. Знайти середньоквадратичне відхилення Δy_s сплайнової регресії $y = S_3(x)$ від заданих значень функції y_k, $k = 0,1,\dots,n$ за формулою

$$\Delta y_s = \sqrt{\left(1/(n+1)\right) \sum_{k=0}^{n} \left(y_k - S(x_k)\right)^2}.$$

Вказівка. Усі обчислення проводити з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми. Усі графіки побудувати в одній системі координат.

№ в-та	k	0	1	2	3	№ в-та	k	0	1	2	3
1	x_k	-2	0	2	4	16	x_k	-4	-2	0	2
	y_k	3	2	0	-1		y_k	-2	1	0	2
2	x_k	-3	-1	1	3	17	x_k	-2	0	2	4
	y_k	-1	-2	3	5		y_k	3	2	0	-2

3	x_k	-2	0	2	4	18	x_k	-4	-2	0	2
	y_k	-1	2	1	0		y_k	-2	-1	0	1
4	x_k	-4	-2	0	2	19	x_k	-2	0	2	4
	y_k	-1	2	1	-3		y_k	-3	-2	0	-1
5	x_k	-3	-1	1	3	20	x_k	-4	-2	0	2
	y_k	0	2	-2	3		y_k	2	0	1	-1
6	x_k	-4	-2	0	2	21	x_k	-2	0	2	4
	y_k	-3	-1	1	0		y_k	3	0	-2	2
7	x_k	-4	-2	0	2	22	x_k	-3	-1	1	3
	y_k	0	-2	1	3		y_k	-1	2	0	-2
8	x_k	-2	0	2	4	23	x_k	-4	-2	0	2
	y_k	-2	1	-1	2		y_k	3	2	-1	1
9	x_k	-3	-1	1	3	24	x_k	-2	0	2	4
	y_k	3	0	-2	-1		y_k	-3	-1	0	2
10	x_k	-2	0	2	4	25	x_k	-3	-1	1	3
	y_k	-3	-1	0	1		y_k	2	-2	0	-1
11	x_k	-4	-2	0	2	26	x_k	-2	0	2	4
	y_k	-2	1	-1	0		y_k	3	2	-1	0
12	x_k	-3	-1	1	3	27	x_k	-4	-2	0	2
	y_k	2	3	0	-1		y_k	3	2	-1	-2
13	x_k	-2	0	2	4	28	x_k	-3	-1	1	3
	y_k	-3	-2	0	2		y_k	-2	-3	0	2
14	x_k	-4	-2	0	2	29	x_k	-2	0	2	4
	y_k	3	1	-1	0		y_k	2	3	-1	0
15	x_k	-2	0	2	4	30	x_k	-4	-2	0	2
	y_k	2	-1	1	-2		y_k	2	0	-1	3

Завдання 4. Функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[x_0; x_n]$ своїми значеннями $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ в $n+1$ рівновіддалених вузлах $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n$, $n = 3$ згідно таблиці відповідного варіанта з попереднього завдання 3, крок між вузлами $h = (x_n - x_0)/n$. Знайти наближене значення $f'(x_*)$ похідної $f'(x)$ у відповідній точці x_* згідно наступній таблиці

№ в-та	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_*	-1	-2	-1	-3	-2	-3	-3	-1	-2	-1
№ в-та	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_*	-3	-2	-1	-3	-1	-3	-1	-3	-1	-3
№ в-та	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_*	-1	-2	-3	-1	-2	-1	-3	-2	-1	-3

використовуючи інтерполяційний многочлен Ньютона третього порядку (для інтерполяції вперед)

$$N_3(x) = f(x_0) + q\Delta f(x_0) + \left(q(q-1)/2\right)\Delta^2 f(x_0) +$$
$$+ \left(q(q-1)(q-2)/6\right)\Delta^3 f(x_0), \quad q = (x - x_0)/h.$$

Вказівка. Похибками у вхідних даних і похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

Завдання 5. Дано визначений інтеграл $I = \int_a^b f(x)dx$.

1. Обчислити заданий інтеграл аналітично за формулою Ньютона – Лейбниця. Прийняти результат аналітичного розрахунку I за точне значення інтеграла.

2. Обчислити значення підінтегральної функції $f(x)$ на відрізку інтегрування $[a;b]$ у рівновіддалених вузлах $x_k = x_{k-1} + h$, $x_0 = a$, $k = 1, 2, ..., n$, $n = 8$ з кроком $h = (b-a)/n$. Скласти відповідну таблицю і побудувати графік $y = f(x)$.

3. Використовуючи отримані значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ підінтегральної функції, обчислити наближено заданий інтеграл, застосовуючи при $n = 8$ формули: а) лівих прямокутників, б) правих прямокутників, в) трапецій, г) Симпсона. Для кожного використаного методу оцінити граничну абсолютну похибку Δ_h^* одержаного наближення I_h і знайти уточнене наближене значення інтеграла I_{ym}, користуючись методом Рунге (подвоєнням кроку):

$$\Delta_h^* \approx \left|I_h - I_{2h}\right| \big/ (2^r - 1)\,; \quad I_{ym} \approx I_h + \left(I_h - I_{2h}\right) \big/ (2^r - 1)\,,$$

де r – порядок точності відповідного методу ($r = 1$ – для формул лівих і правих прямокутників, $r = 2$ – для формули трапецій, $r = 4$ – для формули Симпсона). Обчислити абсолютну похибку Δ_{ym} цього наближення I_{ym}: $\Delta_{ym} = \left| I - I_{ym} \right|$.

<u>Вказівка</u>. Похибками заокруглення знехтувати. Обчислення здійснювати з точністю до сьомого десяткового знака після коми.

№ в-та	$\int_a^b f(x)dx$	№ в-та	$\int_a^b f(x)dx$	№ в-та	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_1^4 \frac{\ln(16+x)}{x^3}dx$	11	$\int_1^4 \frac{\sqrt{16+x^2}}{x^3}dx$	21	$\int_1^4 \frac{arctg\, x}{x^2}dx$
2	$\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x}+10}{\sqrt[3]{x^2}+1}dx$	12	$\int_1^4 \frac{\sqrt{16x^2-1}}{x^2}dx$	22	$\int_1^4 \frac{arctg\; x}{\sqrt{x^3}}dx$
3	$\int_1^4 \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$	13	$\int_1^4 \frac{\sqrt{x^2+16}}{x^2}dx$	23	$\int_1^4 arctg\sqrt{x}\,dx$
4	$\int_1^4 \frac{\ln(17-\sqrt{x})}{\sqrt{x^3}}dx$	14	$\int_1^4 \frac{\ln(\sqrt{x}+8)}{\sqrt{x^3}}dx$	24	$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+9}{x+4}dx$
5	$\int_1^4 \frac{\ln(16+x^2)}{x^3}dx$	15	$\int_1^4 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$	25	$\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+1}dx$

6	$\int_1^4 \frac{arctg\sqrt{x}}{x}dx$	16	$\int_1^4 \frac{16-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}+1}dx$	26	$\int_1^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}dx$
7	$\int_1^4 \frac{x+16}{(x+1)\sqrt{x}}dx$	17	$\int_1^4 \frac{\ln(24+\sqrt{x})}{x^2}dx$	27	$\int_1^4 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$
8	$\int_1^4 \frac{16-\sqrt{x}}{(x+1)\sqrt{x}}dx$	18	$\int_1^4 \frac{\ln(x^3+8)}{x^2}dx$	28	$\int_1^4 \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$
9	$\int_1^4 \frac{arctg\sqrt{x}}{x^2}dx$	19	$\int_1^4 \frac{\ln(16+x^2)}{x^2}dx$	29	$\int_1^4 x^3 \ln^2 x\, dx$
10	$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+10}{(x+1)\sqrt{x}}dx$	20	$\int_1^4 \frac{\ln(2x^2-1)}{x^2}dx$	30	$\int_1^4 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$

Завдання 6. Поставлена задача Коші: знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y(0) = y_0$. Розв'язати задачу Коші аналітично. Прийняти результат аналітичного розрахунку $y = y(x)$ за точний розв'язок. Обчислити значення $y(x_k)$, $k = \overline{0, n}$ отриманого аналітичного розв'язку $y = y(x)$ на відрізку $[0;1]$ у рівновіддалених вузлах $x_k = x_{k-1} + h$, $x_0 = 0$, $k = 1, 2, ..., n$; $n = 10$ з кроком $h = 0{,}1$. Скласти відповідну таблицю і побудувати графік аналітичного розв'язку $y = y(x)$. Чисельно розв'язати задачу Коші на відрізку $[0;1]$ з кроком $h = 0{,}1$ указаним далі методом. Для кожного використаного методу отримані наближені значення y_k; $k = \overline{0, n}$, $n = 10$ занести у відповідну таблицю і побудувати графік наближеного розв'язку $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_n наближених значень y_k розв'язку від точних $y(x_k)$ за формулою $\sigma_n = \sqrt{(1/n)\sum_{k=1}^{n} (y(x_k) - y_k)^2}$.

1. Методом Эйлера за формулами:

$$y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,,\ \Delta y_k = h\,f\,(x_{k-1}, y_{k-1})\,,\ \ k = 1,\ldots,n\,.$$

2. Методом Рунге – Кутта четвертого порядку точності за формулами:

$$y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,,\ \ \Delta y_k = (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6\,;$$

$$K_1 = h\,f\,(x_{k-1}, y_{k-1})\,;\ \ K_2 = h\,f\,(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_1/2)\,;$$

$$K_3 = h\,f\,(x_{k-1} + h/2, y_{k-1} + K_2/2)\,;$$

$$K_4 = h\,f\,(x_{k-1} + h, y_{k-1} + K_3)\,,\ \ k = 1,\ldots,n\,.$$

3. Чотирикроковим методом Адамса за формулами:

$$y_k = y_{k-1} + \Delta y_k\,;\quad \Delta y_k = (h/24)\big(55\,f\,(x_{k-1}, y_{k-1}) - 59\times$$

$$\times\, f\,(x_{k-2}, y_{k-2}) + 37\,f\,(x_{k-3}, y_{k-3}) - 9\,f\,(x_{k-4}, y_{k-4})\big),\ k = 4, 5, \ldots.$$

4. Чотирикроковим методом прогнозування і корекції Хеммінга за формулами:

$$y_k^{(0)} = y_{k-4} + (4h/3)\,\big(\,2\,f\,(x_{k-1}, y_{k-1}) - f\,(x_{k-2}, y_{k-2}) +$$

$$+\,2\,f\,(x_{k-3}, y_{k-3})\big);\qquad\quad y_k = (1/8)\ (9y_{k-1} - y_{k-3}) + (3h/8)\times$$

$$\times\big(\,f\,(x_k\,, y_k^{(0)}) + 2\,f\,(x_{k-1}, y_{k-1}) - f\,(x_{k-2}, y_{k-2})\big);\quad k = 4, 5, 6, \ldots.$$

Вказівка. Необхідні для запуску чотирикрокових методів Адамса та Хеммінга значення y_1, y_2 і y_3 попередньо знайти за допомогою методу Рунге – Кутта (використати результати з пункту 1 цього завдання). Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

№ в-та	$y' = f\,(x, y)\,,\ \ y(0) = y_0$	№ в-та	$y' = f\,(x, y)\,,\ \ y(0) = y_0$
1	$y' = -\dfrac{2xy}{x^2+1}\,;\ y(0) = -2$	16	$y' = \dfrac{y^4}{3(x+1)^2}\,;\ y(0) = 1$
2	$y' = \dfrac{y^3+1}{3y^2(x+1)};\ y(0) = 1$	17	$y' = \dfrac{y^2+1}{2y(x+1)};\ \ y(0) = 1$

3	$y' = 6xe^{-x} - y;\ y(0) = 0$	18	$y' = x^2 y^4;\ \ y(0) = -1$
4	$y' = e^{-x} - y;\ y(0) = 1/2$	19	$y' = e^{x} - y;\ y(0) = 0$
5	$y' = y - e^{x}\sin x;\ \ y(0) = 1$	20	$y' = 2xy^2;\ \ y(0) = -1$
6	$y' = -\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+1}}\ ;\ y(0) = 1$	21	$y' = -\dfrac{3x^2y^2}{2\sqrt{x^3+1}};y(0) = 1$
7	$y' = \dfrac{2x(y^3+1)}{3y^2(x^2+1)};\ \ y(0) = 1$	22	$y' = \dfrac{y^2-1}{2y(x+1)}\ ;\ y(0) = 2$
8	$y' = \dfrac{2x\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+1}}\ ;\ y(0) = 1$	23	$y' = \dfrac{\sqrt{y^2+3}}{y\sqrt{x+1}};y(0) = 1$
9	$y' = -\dfrac{y^4}{2}\sqrt{x}\ ;\ y(0) = 1$	24	$y' = \dfrac{y}{x+1}\ ;\ y(0) = 1$
10	$y' = -\dfrac{\sqrt{y^3}}{\sqrt{x+1}}\ ;\ y(0) = 1$	25	$y' = -\dfrac{y^{-2}}{(x+1)^4}\ ;\ y(0) = 1$
11	$y' = -\dfrac{y^2}{x^2+1}\ ;\ y(0) = 1$	26	$y' = \dfrac{y^4}{(x+1)^4}\ ;\ y(0) = 1$
12	$y' = -\dfrac{2\sqrt{y^3}}{x+1};\ y(0) = 1$	27	$y' = \dfrac{2xy^4}{(x^2+1)^4};\ y(0) = 1$
13	$y' = -\dfrac{x^3y^3}{\sqrt{x^4+1}};\ y(0) = 1$	28	$y' = \dfrac{y^2}{(x+1)^3}\ ;\ y(0) = 1$
14	$y' = \dfrac{x\sqrt{y^2+3}}{y\sqrt{x^2+4}};\ y(0) = 1$	29	$y' = \dfrac{-x\,y^4}{3\sqrt{x^2+1}};\ y(0) = 1$
15	$y' = \dfrac{x(y^2+3)}{y(x^2+4)};\ y(0) = 1$	30	$y' = -\dfrac{2xy^2}{x^2+1}\ ;\ y(0) = 1$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. –М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
3. Волков Е.А. Численные методы. – СПб.: Лань, 2004. – 248 с.
4. Данилович В.П. Чисельні методи в задачах та вправах. – К.: ІСДО, 1995. – 247 с.
5. Данилович В., Кутнів М. Чисельні методи. – Львів: Кальварія, 1998. – 224 с.
6. Задачин В.М. Чисельні методи в інформатиці. – Х.: ХНЕУ, 2008. –187 с.
7. Квєтний Р.Н. Основи моделювання та обчислювальних методів. – Вінниця: ВНТУ, 2007. – 150 с.
8. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2006. – 480 с.
9. Литвин О.М., Лобанова Л.С. Математичні методи та моделі в розрахунках на ПЕОМ. – Х.: УІПА, 2002. – 132 с.
10. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
11. Орвис В.Д. Excel для ученых, инженеров и студентов. – К.: Юниор, 1999. – 528 с.
12. Панюкова Т.А. Численные методы. – М.: URSS, 2010. – 224 с.
13. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений. – СПб.: Политехника, 2001. – 239 с.
14. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
15. Фадеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента. – СПб.: Лань, 2008. – 128 с.
16. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.
17. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Вид. група BHV, 2006. – 480 с.
18. Чабан В.Й. Чисельні методи. – Львів: НТУ “Львівська політехніка”, 2001. – 186 с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ДАНИЛЕВСЬКИЙ Микола Прокопович,
ЯКУНІН Анатолій Вікторович,
КУЗНЕЦОВА Ганна Анатоліївна

ЕЛЕМЕНТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

з дисципліни "Вища математика ІІ"
(*для студентів 1 курсу денної та 2 курсу заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.030504 "Економіка підприємства" і 6.030509 "Облік і аудит"*)

з дисципліни "Вища математика"
(для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050702 "Електромеханіка")

Відповідальний за випуск *С. О. Станішевський*
Редактор *З. І. Зайцева*
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2009, поз. 70Л

Підп. до друку 1.12.2011	Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі	Ум. друк. арк. 9,0
Тираж 100 пр.	Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011