МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

М. П. Данилевський,
А. В. Якунін,
Г. А. Кузнецова

ЕЛЕМЕНТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни “Вища математика ІІ”
(*для студентів 1 курсу денної та 2 курсу заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.030504 “Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”*)

з дисципліни “Вища математика”
(для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050702 “Електромеханіка”)

Харків
ХНАМГ
2012

Данилевський М. П. Елементи обчислювальної математики: Конспект лекцій з дисципліни **“Вища математика ІІ”** (для студентів 1 курсу денної та 2 курсу заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.030504 “Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”), з дисципліни “**Вища математика”** (для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050702 “Електромеханіка”) / М. П. Данилевський, А. В. Якунін, Г. А. Кузнецова; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2012. – 156 с.

Автори: М. П. Данилевський,
А. В. Якунін,
Г. А. Кузнецова

Рецензент: *к.ф.-м.н., доц. Л. Б. Коваленко*

Конспект лекцій відповідає навчальним програмам курсів **“Вища математика ІІ”** для студентів напрямів підготовки 6.030504 “Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”, “**Вища математика”** для студентів напряму підготовки 6.050702 – "Електромеханіка". Згідно з модульною технологією навчання лекційний матеріал доповнено зразками розв’язання типових задач, запитаннями для поточного контролю і самоперевірки, а також індивідуальними розрахунково-графічними завданнями до самостійної роботи.

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол №5 від 22.12.2010 р.

© Данилевський М. П., Якунін А. В.,
Кузнецова Г. А., 2012
© ХНАМГ, 2012

ПЕРЕДМОВА

Конспект лекцій містить розділи, які відповідають четвертому семестру курсу «Вища математика» для студентів напряму підготовки 6.050702 – "Електромеханіка", а також розділи курсу «Вища математика ІІ” для студентів напрямів підготовки 6.030504 “Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Частина матеріалу розрахована на самостійне опрацювання. Згідно з модульною технологією навчання додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання.

Конспект лекцій також може використовуватися для самоосвіти практикуючих фахівців.

Критичні зауваження і пропозиції щодо посібника надсилайте на кафедру вищої математики за адресою:

61002, Україна, Харків, вул. Революції, 12, ХНАМГ,
каф. Вищої математики;
e-mail: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

1. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИМИ МЕТОДАМИ. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

1.1. Математична задача та її розв’язок

Дослідження того чи іншого соціально-економічного процесу математичними методами розпочинається з побудови відповідної математичної моделі – його формалізованого опису мовою математики.

Під ***математичною моделлю*** процесу розуміють систему математичних співвідношень (алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь і нерівностей і т.п.), які визначають характеристики стану і властивості цього об’єкта і його функціонування залежно від параметрів компонентів, вхідних збуджень і часу.

Детермінована математична модель описує функціональну залежність між вихідними залежними змінними, через які відображається функціонування об’єкта, незалежними (такими, як час) і змінюваними змінними (параметри компонентів), а також прикладеними вхідними збудженнями. Математична модель повинна відображати найважливіші характеристики об’єкта та зв’язки між ними.

Для кожної математичної моделі формулюється ***математична задача***: встановлюють, які характеристики моделі є вхідними змінними, які – параметрами, а які – вихідними змінними. Проводиться аналіз поставленої задачі з точки зору існування , єдиності та стійкості розв’язку.

Розв’язок задачі називається ***стійким*** за вхідними даними, якщо він неперервно залежить від них, тобто, малій зміні вхідних даних відповідає мала зміна розв’язку.

Математична задача поставлена ***коректно*** (***правильно***), якщо виконано наступні три умови:

1) розв’язок існує при довільних допустимих вхідних даних;

2) розв’язок єдиний;

3) розв’язок стійкий по відношенню до малих змін вхідних даних.

Якщо хоча б одна з цих умов не справджується, то задача називається ***некоректною***.

Наприклад, задача обчислення визначеного інтеграла – коректна, а задача обчислення похідної – некоректна (не виконується третя умова).

Далі розглядаються такі базові типи математичних задач:

– розв’язування нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь;

– апроксимація масиву даних або функції набором стандартних, простих функцій;

– чисельне інтегрування і диференціювання;

– розв’язування звичайних диференціальних рівнянь.

1.2. Чисельні методи. Загальні поняття

Для поставленої математичної задачі вибирається метод її розв’язування. У багатьох випадках знайти її точний розв’язок досить важко або взагалі не вдається. Складні математичні задачі великої розмірності вимагають застосування наближених методів, що вивчаються в даному курсі.

Під ***чисельними*** (***числовими***, ***обчислювальними***) ***методами*** розуміють наближені процедури, що дозволяють одержувати розв’язок у вигляді набору конкретних числових значень.

Вивчення чисельних методів сприяє переосмисленню і поглибленому розумінню математики в цілому, оскільки вони зводять класичні методи вищої математики до виконання простих операцій.

Розрізняють прямі та ітераційні обчислювальні методи.

Метод називається ***прямим***, якщо він дозволяє одержувати розв’язок після виконання скінченного числа елементарних операцій. Інколи прямі методи називають ***точними***, маючи на увазі, що при відсутності похибок у вхідних даних і при виконанні елементарних операцій результат буде точним. Проте при комп’ютерній реалізації методу неминучі похибки заокруглення і, як наслідок, наявність обчислювальної похибки.

Далі розглядатимемо ***ітераційні методи***, суть яких полягає в побудові послідовних наближень до розв’язку задачі. Спочатку вибирають одно чи декілька початкових наближень, а потім послідовно, використовуючи знайдені раніше наближення і однотипну процедуру розрахунку, будують нові наближення. У результаті такого ітераційного процесу теоретично можна побудувати нескінченну послідовність наближень. Якщо ця послідовність збігається (що не гарантовано), то говорять, що ітераційний метод ***збіжний***. Окремий крок ітераційного процесу називається ***ітерацією***.

Проте практичні обчислення не можуть тривати нескінченно довго. Тому необхідно задати ***критерій закінчення*** ітераційного процесу, що зв'язаний з вимогами точності наближення.

Оцінки точності наближення, одержані до проведення обчислень за вибраним методом, називають ***апріорними***, а відповідні оцінки, одержані в результаті обчислень, називають ***апостеріорними***.

Для вибраного обчислювального методу складається ***алгоритм*** – послідовність виконання необхідних арифметичних і логічних операцій. Алгоритм, що реалізує ітераційний метод, повинен бути рекурсивним і складатися з відносно невеликих блоків, які багаторазово виконуються для різних вхідних даних.

Для розв'язування однієї й тієї ж задачі можна використати різні чисельні методи і різні їх програмні реалізації, тому треба вміти оцінювати якість різних методів і ефективність їх застосування для даної задачі. Правильність вибору безпосередньо залежить від знання і розуміння особливостей і обмежень, властивих чисельним методам, що реалізовані у відповідному програмному пакеті.

Чисельні методи:

– передбачають проведення великої кількості рутинних арифметичних обчислень за допомогою рекурсивних співвідношень, що використовуються для організації ітерацій, тобто повторюваних циклів обчислень зі зміненими початковими умовами для поліпшення результату;

– направлені на локальне спрощення задачі;

– значно залежать від близькості початкового наближення до розв'язку, від властивостей нелінійних функцій, які використовуються в математичних моделях, що накладає обмеження на їх диференційованість, величину похідної та ін.

Ітераційний процес називається ***однокроковим***, якщо для обчислення чергового наближення x_k використовується тільки одне попереднє наближення x_{k-1}, і m***-кроковим***, якщо для обчислення чергового наближення x_k використовуються m попередніх наближень x_{k-m}, x_{k-m+1}, …, x_{k-1}.

Чисельні методи характеризуються:

– різною ***швидкістю збіжності***, тобто числом ітерацій, виконання яких необхідне для отримання заданої точності розв'язку;

– різною ***стійкістю***, тобто збереженням достовірності розв'язку під час подальших ітерацій (при цьому чим точніше задаються числа для обробки, тим точніший одержується результат, і для довільної точності результату можна вказати таку точність вхідних і проміжних даних, що метод приведе до результату саме з цією заданою точністю;

– різною ***точністю*** одержуваного розв'язку в разі виконання однакового числа ітерацій або циклів обчислень.

Чисельні методи розрізняються:

– за широтою і легкістю застосування, тобто за ступенем своєї ***універсальності*** та ***інваріантності*** для розв'язування різних математичних задач;

– за ***складністю*** **їх програмування**;

– за ***можливостями використання*** у разі їх реалізації ***наявних бібліотек*** функцій і процедур, створених для підтримки різних алгоритмічних мов;

– за ***складністю*** **комп'ютерної реалізації** з точки зору затрат пам'яті і часу;

– за ***ступенем чутливості*** до некоректних задач, коли малим змінам вхідних даних можуть відповідати великі зміни розв'язку.

Говорять, що ***метод має*** p***-й порядок збіжності***, якщо $| x_k - X | \le C | x_{k-1} - X |^p$, де x_{k-1} і x_k – послідовні наближення, отримані в ході ітераційного процесу, X – точний розв'язок, C – додатна константа, що не залежить від номера ітерації k.

Говорять, що ***метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником*** $q < 1$, якщо для всіх k справедлива оцінка $| x_k - X | \le C q^k$.

Побудова алгоритму, що реалізує відповідний метод, може бути виконана розбиттям задачі на блоки так, щоб вихідні дані попереднього блоку були вхідними для наступного.

Складність обчислень, передбачених алгоритмом, оцінюється ***сигнальними функціями***, що визначають час роботи алгоритму через кількість n необхідних елементарних операцій. При цьому розрізняють два типи алгоритмів:

1) ***поліноміальний*** алгоритм, сигнальна функція якого зростає зі збільшенням n не швидше, ніж деякий поліном.

2) ***Комбінаторний*** алгоритм, коли сигнальна функція змі-

нюється зі збільшенням n як експонента або містить у собі оцінки операцій перебору, перестановок, сполучень, знаходження факторіалу і т.п.

Чисельні методи забезпечують системний формалізований підхід до розв'язування математичних задач і служать інструментарієм, за допомогою якого задачі формулюються у вигляді, зручному для розв'язування на комп'ютері. Для обрання ефективного способу розв'язування конкретної задачі потрібні глибокі знання і певні навички. Освоївши такі методи, майбутній фахівець набуде здатності до системного аналізу через математичне моделювання складних задач зі сфери професійної діяльності. Він ознайомиться зі впливом похибок обчислень на результат і навчиться контролювати ці похибки.

2. НАБЛИЖЕНІ ЧИСЛА. ПОХИБКИ ТА ЇХ ОБЧИСЛЕННЯ

Наближеним числом x називається таке, що несуттєво відрізняється від точного числа X і замінює останнє в обчисленнях.

При розв'язанні прикладних задач, в основному, використовуються дійсні числа. У пам'яті комп'ютера вони зберігаються у ***формі з плаваючою точкою***. Десяткове число x у цій формі записується так $x = \pm m \cdot 10^n$, де m і n – відповідно ***мантиса*** числа і його ***порядок***. Наприклад, число $x = 358{,}5$ можна записати в одному з таких виглядів: $3585 \cdot 10^{-1}$, $3.585 \cdot 10^2$ чи $0.3585 \cdot 10^3$. Останній запис, де мантиса подана у вигляді $m = 0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, $\alpha_1 \neq 0$, називається ***нормалізованою формою числа з плаваючою точкою***. Звичайний запис числа у вигляді 358.5 називається ***формою з фіксованою точкою*** і в комп'ютерах використовується тільки на етапах введення і виведення. Зберігання й обробка дійсних чисел здійснюється саме у формі з плаваючою точкою.

Під час роботи з наближеними величинами обчислювач повинен:

– давати математичні характеристики точності наближених величин;

– знаючи міру точності вхідних даних, оцінити міру точності результату;

– брати вхідні дані з такою мірою точності, щоб забезпечити задану міру точності результату і позбавитись від марних розрахунків;

– правильно побудувати обчислювальний процес, щоб позбавити його тих викладок, які не будуть чинити вплив на точні цифри результату.

2.1. Джерела похибок. Класифікація похибок

Відхилення дійсного X значення від наближеного x називається ***похибкою***.

Основна задача теорії похибок – знаходження області невизначеності результату.

Чисельне розв'язування задач супроводжується похибками, викликаними наступними причинами:

1) створенням математичної моделі (будь-яка модель має свій ступінь адекватності об'єкту дослідження);

2) отриманням вхідних даних, оскільки вони є результатом або вимірювань (отже, виникають вимірювальні похибки), або розв'язування деяких допоміжних задач;

3) застосуванням наближеного методу, оскільки отримання точного розв'язку вимагає необмеженої або неприйнятно великої кількості елементарних операцій, а в багатьох випадках і просто неможливо;

4) використанням обчислювальної техніки (неточності при вводі-виводі даних до комп'ютера і при виконанні математичних операцій, що обумовлено обмеженістю його розрядної сітки).

Відповідно до цих джерел похибки можна поділити на три групи:

1) ***неусувні похибки***, що включають ***похибки моделі*** та ***вхідних даних***;

2) ***похибки методу*** (наприклад, заміняють інтеграл сумою, затратну для оперування функцію – многочленом, похідну – скінченною різницею і т.п., обмежують максимальну кількість ітерацій);

3) ***похибки обчислень*** (заокруглювання під час обчислень, локальні відсікання, похибки зображення чисел у комп'ютері).

Зауваження 1. Неусувну поохибку і похибку методу необхідно контролювати, щоб не здійснювати розрахунки з надмірною точністю. Похибку методу треба вибирати так, щоб вона була не більш, ніж на порядок менша неусувних, оскільки велика похибка методу знижує точність розв'язку, а мала вимагає значного збільшення об'єму обчислень.

Зауваження 2. Обчислювальні похибки тільки накопичуються, незалежно від типу виконуваної операції. При цьому частково взаємно компенсуються, оскільки мають різні знаки. Точність проведення розрахунків можна регулювати програмно. Наприклад, зробити так, щоб комп'ютер здійснював обчислення з точністю до трьох знаків після десяткової коми.

2.2. Абсолютна та відносна похибки

Нехай X – точне значення деякої величини, а x – її відоме наближене значення.

Під ***похибкою*** наближеного числа x розуміють величину, що характеризує точність наближення і дорівнює різниці між відповідним точним числом X та його наближенням x: $\Delta x = X - x$.

У більшості випадків знак похибки Δx невідомий, тому вводиться поняття ***абсолютної похибки*** Δ_x як модуля похибки Δx: $\Delta_x = |\Delta x| = |X - x|$.

Як правило, точне значення X невідоме й абсолютну похибку Δ_x знайти неможливо. Тому для оцінки зверху Δ_x використовується поняття ***граничної абсолютної похибки*** Δ_x^*, яка визначається з нерівності $\Delta_x \le \Delta_x^*$.

Нехай $X \ne 0$. Важливою характеристикою точності наближення є абсолютна похибка, що припадає на одиницю величини числа X, – ***відносна похибка*** δ_x. Вона дорівнює відношенню абсолютної похибки Δ_x до модуля точного числа X: $\delta_x = \Delta_x / |X|$.

Зауваження 1. Для $X = 0$ відносна похибка невизначена.

Верхньою оцінкою для δ_x служить ***гранична відносна похибка*** δ_x^*, що визначається з нерівності $\delta_x \le \delta_x^*$.

Звідси $\Delta_x / |X| \le \delta_x^*$; $\Delta_x \le |X| \delta_x^*$. Отже, можна покласти

$\Delta_x^* = |X|\,\delta_x^*$. Оскільки $X = x$ з достатньою для практики точністю, то звичайно приймають $\boxed{\Delta_x^* = |x|\,\delta_x^*}$. Аналогічно $\boxed{\Delta_x = |x|\,\delta_x}$.

Нехай для визначеності $\Delta_x^* < |X|$. Тоді $\delta_x = \Delta_x \big/ |X| \le$ $\le \Delta_x^* \big/ (|x| - \Delta_x^*)$. Тобто можна покласти $\delta_x^* = \Delta_x^* \big/ (|x| - \Delta_x^*)$. Як правило, $\Delta_x^* << |x|$, тому на практиці звичайно користуються формулою $\boxed{\delta_x^* = \Delta_x^* \big/ |x|}$. Аналогічно $\boxed{\delta_x = \Delta_x \big/ |x|}$.

Зауваження 2. Абсолютна похибка є розмірною величиною, а відносна – безрозмірною, її часто виражають у відсотках.

2.3. Форми запису наближених даних

Будь-яке додатне число x можна подати у вигляді скінченного чи нескінченного десяткового дробу

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots,$$

де α_i, $i = 1, 2, \ldots$ – цифри у запису числа x, причому $\alpha_1 \ne 0$; m – старший десятковий розряд числа x.

Усі десяткові знаки α_i, $i = 1, 2, \ldots$ такого подання наближеного числа x називаються його ***значущими цифрами***. Іншими словами, ***значущими цифрами*** наближеного числа називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва, включаючи всі нулі справа, що є представниками збережених розрядів. Решта нулів, що входять у його запис та служать лише для позначення його десяткових розрядів, не зараховуються до значущих цифр.

Наприклад, у числах $\underline{4{,}570315}$, $0{,}00\underline{7214}$, $0{,}0\underline{3105800}$, $\underline{2730000}$, $0{,}\underline{30400} \cdot 10^6$ тільки підкреслені цифри є значущими.

Точність подання наближеного числа x залежить від кількості його значущих цифр.

Значуща цифра α_i називається ***вірною*** (***правильною***) ***у вузькому сенсі***, якщо абсолютна похибка Δ_x^* числа x не перевищує половини одиниці $(m - i + 1)$-го розряду, що відповідає цій цифрі. У противному разі цифра α_i називається ***сумнівною***.

Якщо цифра α_n вірна, то усі попередні до неї цифри теж вірні. Отже, при умові

$$\boxed{0{,}5\cdot 10^{m-n} < \Delta_x^* \le 0{,}5\cdot 10^{m-n+1}},$$

за визначенням, перші n значущих цифр α_i, $i=\overline{1,n}$ є вірними у вузькому сенсі, а всі інші – сумнівними. При цьому можна покласти

$$\boxed{\Delta_x^* = 0{,}5\cdot 10^{m-n+1}}.$$

Зауваження 1. Якщо додатне наближене число x має n вірних значущих цифр у вузькому сенсі α_i, $i=\overline{1,n}$, то за граничну відносну похибку δ_x^* можна взяти $\boxed{\delta_x^* = 0{,}5\cdot 10^{1-n}/\alpha_1}$.

Значуща цифра α_i називається ***вірною*** (***правильною***) ***у широкому сенсі***, якщо абсолютна похибка Δ_x^* числа x не перевищує одиниці ($m-i+1$)-го розряду, що відповідає цій цифрі. При умові

$$\boxed{1\cdot 10^{m-n} < \Delta_x^* \le 1\cdot 10^{m-n+1}},$$

за визначенням, перші n значущих цифр α_i, $i=\overline{1,n}$ є вірними у широкому сенсі, а всі інші – сумнівними.

Точне число X через його наближення x можна записати у різному вигляді:

– з використанням межових значень $x_1 \le X \le x_2$, де $x_1 = x-\Delta_x^*$ і $x_2 = x+\Delta_x^*$, наприклад, $1{,}351 \le X \le 1{,}357$;

– з використанням абсолютної похибки $X = x \pm \Delta_x^*$, наприклад, $X = 1{,}354 \pm 0{,}003$, тобто $1{,}354-0{,}003 \le X \le 1{,}354+0{,}003$;

– з використанням відносної похибки $X = x(1\pm\delta_x^*)$, наприклад, $X = 1{,}354(1\pm 0{,}002)$ або $X = 1{,}354(1\pm 0{,}2\%)$.

Приклад. Скільки вірних значущих цифр у вузькому і широкому сенсі має дане число x, якщо:

а) $x = 14{,}3820$ і $\Delta_x^* = 0{,}06$; б) $x = 8{,}677193$ і $\Delta_x^* = 3\cdot 10^{-4}$;

в) $x = 0{,}046719$ і $\Delta_x^* = 0{,}008$; г) $x = 103{,}265(1\pm 0{,}000076)$;

д) $x = 0{,}096027$ і $\Delta_x^* = 0{,}006$; е) $x = 1373{,}174(1 \pm 0{,}00082)$.

□ а) Маємо $0{,}5 \cdot 10^{-1} < \Delta_x^* = 0{,}6 \cdot 10^{-1} \le 0{,}5 \cdot 10^{0}$. Отже, у вузькому сенсі у числа x вірними є дві значущі цифри $1, 4$, а цифри $3, 8, 2, 0$ – сумнівні. Оскільки $1 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0{,}6 \cdot 10^{-1} \le 1 \cdot 10^{-1}$, то у широкому сенсі число x має три вірні значущі цифри $1, 4$ і 3, а цифри $8, 2, 0$ – сумнівні.

б) Оскільки $0{,}5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0{,}3 \cdot 10^{-3} \le 0{,}5 \cdot 10^{-3}$, то x у вузькому сенсі має вірні три значущі цифри після коми, тобто вірними будуть чотири значущі цифри $8, 6, 7, 7$, а цифри $1, 9, 3$ – сумнівні. З нерівності $1 \cdot 10^{-4} < \Delta_x^* = 0{,}3 \cdot 10^{-3} \le 1 \cdot 10^{-3}$ випливає, що у широкому сенсі число x також має ті самі чотири вірні значущі цифри $8, 6, 7, 7$, а цифри $1, 9, 3$ – сумнівні.

в) Маємо $0{,}5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0{,}8 \cdot 10^{-2} \le 0{,}5 \cdot 10^{-1}$. Отже, у вузькому сенсі у числа x немає ні однієї вірної значущої цифри, всі вони сумнівні. Оскільки $1 \cdot 10^{-3} < \Delta_x^* = 0{,}8 \cdot 10^{-2} \le 1 \cdot 10^{-2}$, то у широкому сенсі число x має одну вірну значущу цифру 4, а всі інші цифри $6, 7, 1, 9$ – сумнівні.

г) Гранична відносна похибка $\delta_x^* = 0{,}000076$, тоді гранична абсолютна похибка $\Delta_x^* = |x|\, \delta_x^* = 103{,}265 \cdot 0{,}000076 = 0{,}0078$. Оскільки $0{,}5 \cdot 10^{-2} < \Delta_x^* = 0{,}78 \cdot 10^{-2} \le 0{,}5 \cdot 10^{-1}$, то у вузькому сенсі $x = 103{,}265$ має чотири вірні значущі цифри $1, 0, 3, 2$, а цифри $6, 5$ – сумнівні. У широкому сенсі це число x має п’ять вірних значущих цифр $1, 0, 3, 2, 6$, а цифра 5 – сумнівна, що випливає з нерівності $1 \cdot 10^{-3} < \Delta_x^* = 0{,}78 \cdot 10^{-2} \le 1 \cdot 10^{-2}$.

(Завдання д) і е) розв’язати самостійно). ■

Зауваження 2. У математичних таблицях усі наведені значущі цифри вірні у вузькому сенсі. Надалі, якщо не зазначено інше, поняття вірної цифри розглядається у вузькому сенсі.

2.4. Похибки округлення

В обчислювальному пристрої числа наводять з обмеженою кількістю розрядів, максимальне число яких визначається довжиною його розрядної сітки.

Заокруглюванням називається заміна числа наближеним числом з меншою кількістю значущих цифр. При цьому виникає ***похибка округлення***. Щоб вона була мінімальною, треба застосовувати наступне правило симетричного заокруглювання:

якщо цифра старшого розряду, що відкидається, менше 5, то попередня до нього цифра не змінюється;

якщо цифра старшого розряду, що відкидається, дорівнює або більше 5, то попередня до нього цифра збільшується на 1.

При використанні цього правила ***абсолютна похибка округлення*** $\Delta_{x\,окр}$ числа

$$x = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \alpha_3 \cdot 10^{m-2} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \ldots$$

до p значущих цифр не перевищує половини одиниці розряду останньої залишеної цифри α_p, тобто за ***граничну абсолютну похибку округлення*** $\Delta^*_{x\,окр}$ можна взяти $\Delta^*_{x\,окр} = 0{,}5 \cdot 10^{m-p+1}$.

Під час заокруглювання наближеного числа x_1 отримуємо нове наближене число x_2, абсолютна похибка Δ_{x_2} якого визначається за формулою:

$$\boxed{\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2\,окр}},$$

де Δ_{x_1} – абсолютна похибка числа x_1; $\Delta_{x_2\,окр} = |\,x_1 - x_2\,|$ – абсолютна похибка округлення числа x_2.

Аналогічною формулою зв’язані граничні значення цих похибок:

$$\boxed{\Delta^*_{x_2} = \Delta^*_{x_1} + \Delta^*_{x_2\,окр}}.$$

Зауваження 1. Інколи вважають, якщо цифра старшого розряду, що відкидається, дорівнює 5, а попередня до нього цифра парна, то вона не змінюється, якщо ж попередня цифра непарна, то вона збільшується на 1.

Зауваження 2. При заокруглюванні цілого числа відкинуті знаки не можна заміняти нулями, а потрібно застосовувати множення на відповідний степінь 10.

Зауваження 3. У деяких випадках також застосовують заокруглювання з недостачею, коли зайві цифри просто відкидаються, і заокруглювання з надлишком, коли остання справа залишена цифра збільшується на одиницю. Зокрема, такі правила заокруглювання можуть використовуватися при знаходженні граничних оцінок точності наближення.

Приклад 1. Нехай а) $x_1 = 7{,}8497621$ і б) $x_1 = 348{,}453275$.

Заокруглити ці числа, відкидаючи послідовно t ($t = 1, 2, 3, \ldots$) останні цифри.

□ Відповідно дістанемо:

а) $x_2 = 7{,}849762$ і б) $x_2 = 348{,}45328$ ($t = 1$); а) $x_2 = 7{,}84976$ і б) $x_2 = 348{,}4533$ ($t = 2$); а) $x_2 = 7{,}8498$ і б) $x_2 = 348{,}453$ ($t = 3$); а) $x_2 = 7{,}850$ і б) $x_2 = 348{,}45$ ($t = 4$); а) $x_2 = 7{,}85$ і б) $x_2 = 348{,}5$ ($t = 5$); а) $x_2 = 7{,}8$ і б) $x_2 = 348$ ($t = 6$); а) $x_2 = 8$ і б) $x_2 = 3{,}5 \cdot 10^2$ ($t = 7$); а) $x_2 = 1 \cdot 10^1$ і б) $x_2 = 3 \cdot 10^2$ ($t = 8$). ■

Приклад 2. Округлити сумнівні цифри даного числа x_1 і знайти абсолютну Δ_{x_2} і відносну δ_{x_2} похибки результату x_2:

$$\text{а) } x_1 = 34{,}124 \pm 0{,}021; \quad \text{б) } x_1 = 91{,}735(1 \pm 0{,}0000082).$$

□ а) Наближене число x_1 має три вірні цифри: 3, 4, 1, тому що $0{,}005 < \Delta_{x_1} = 0{,}021 \le 0{,}05$. Використовуючи правило заокруглювання, знайдемо наближене значення x_2, зберігаючи вірні десяткові знаки: $x_2 = 34{,}1$. Обчислимо похибку округлення $\Delta_{x_2\,окр}$, абсолютну Δ_{x_2} і відносну δ_{x_2} похибки числа x_2:

$$\Delta_{x_2\,окр} = |\,x_1 - x_2\,| = |\,34{,}124 - 34{,}1\,| = 0{,}024; \;\; \Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2\,окр} =$$

$= 0{,}021 + 0{,}024 = 0{,}045$; $\delta_{x_2} = \Delta_{x_2} / |x_2| = 0{,}045/|34{,}1| = 0{,}0013$.

Оскільки $0{,}005 < \Delta_{x_2} = 0{,}045 \le 0{,}05$, то всі значущі цифри числа x_2 вірні. Отже, $x_2 = 34{,}1 \pm 0{,}045$.

б) Оскільки відносна похибка $\delta_{x_1} = 0{,}0000082$, то абсолютна похибка $\Delta_{x_1} = |x_1|\,\delta_{x_1} = 91{,}735 \cdot 0{,}0000082 = 0{,}00075$. Значить, число $x_1 = 91{,}735$ має чотири вірні значущі цифри: 9, 1, 7 і 3, тому що $0{,}5 \cdot 10^{-3} < \Delta_{x_1} = 0{,}00075 \le 0{,}5 \cdot 10^{-2}$. Знайдемо наближене значення x_2 з чотирма десятковими знаками, використовуючи правило заокруглювання: $x_2 = 91{,}74$. Обчислимо похибку округлення $\Delta_{x_2\,окр}$, абсолютну Δ_{x_2} і відносну δ_{x_2} похибки числа x_2:

$$\Delta_{x_2\,окр} = |x_1 - x_2| = |91{,}735 - 91{,}74| = 0{,}005;$$

$$\Delta_{x_2} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2\,окр} = 0{,}00075 + 0{,}005 = 0{,}006;$$

$$\delta_{x_2} = \Delta_{x_2} / |x_2| = 0{,}006/|91{,}74| = 0{,}7 \cdot 10^{-4}.$$

Оскільки $0{,}5 \cdot 10^{-2} < \Delta_{x_2} = 0{,}006 \le 0{,}5 \cdot 10^{-1}$, то вірними значущими цифрами числа x_2 є тільки перші три 9, 1 і 7, а остання цифра 4 – сумнівна. Отже, $x_2 = 91{,}74 \pm 0{,}006$. ■

2.5. Пряма задача теорії похибок. Похибка функції. Похибки арифметичних операцій

Пряма задача теорії похибок. При оперуванні з наближеними числами важливою задачею є оцінка ступеня впливу похибок вхідних даних на точність кінцевого результату, що необхідно як для правильного врахування похибок, так і для визначення можливих шляхів їх зменшення. Зокрема, при обчисленні значень функцій, аргументами яких служать наближені числа, постає питання про похибку одержаних значень.

Визначення величини похибки кінцевого результату за відомими похибками вхідних даних складає ***пряму задачу теорії похибок***.

Похибка функції. Розглянемо неперервно диференційовну на відрізку $[a;b]$ функцію однієї змінної $y=f(x)$. Припустимо, що потрібно знайти наближення y для її точного значення Y при $X\in[a;b]$, що задане наближеним числом $x\in[a;b]$ з абсолютною похибкою Δ_x, і оцінити відповідну абсолютну похибку функції $\Delta_y=|Y-y|$.

За наближене значення функції $Y=f(X)$ можна взяти $\boxed{y=f(x)}$. При цьому абсолютну похибку Δ_y можна розглядати як модуль її приросту, викликаного приростом аргументу $\pm\Delta_x$. Застосовуючи формулу скінченних приростів Лагранжа, для абсолютної похибки Δ_y дістанемо $\Delta_y=|f'(c)|\cdot\Delta_x$, де $c\in(x;X)$.

Звідси для абсолютної похибки Δ_y та її граничного значення Δ_y^* випливають співвідношення

$$\boxed{\Delta_y\le B\Delta_x}\ \text{ і }\ \boxed{\Delta_y^*=B\Delta_x^*},\ \text{ де }\ \boxed{B=\max_{x-\Delta_x^*\le c\le x+\Delta_x^*}|f'(c)|}.$$

Оскільки приріст аргументу ($\pm\Delta_x$ чи $\pm\Delta_x^*$) відносно невеликий, то при практичних розрахунках з достатньою точністю можна використовувати ***лінійні оцінки***:

$$\boxed{\Delta_y=|f'(x)|\cdot\Delta_x}\ \text{ і }\ \boxed{\Delta_y^*=|f'(x)|\cdot\Delta_x^*},$$

що рівносильне заміні приросту функції диференціалом. При цьому нехтуються члени другого та вищих порядків мализни порівняно з приростом аргументу.

Ці формули безпосередньо узагальнюються на випадок неперервно диференційовної функції n змінних $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$:

$$\boxed{y=f(x_1,x_2,...,x_n)};\quad \boxed{\Delta_y\le\sum_{i=1}^{n}B_i\,\Delta_{x_i}}\ \text{ і }\ \boxed{\Delta_y^*=\sum_{i=1}^{n}B_i\,\Delta_{x_i}^*},$$

$$\text{де}\quad \boxed{B_i=\max_{x_k-\Delta_{x_k}^*\le c_k\le x_k+\Delta_{x_k}^*,\,k=\overline{1,n}}\left|\frac{\partial f(c_1,c_2,...,c_n)}{\partial x_i}\right|};$$

$$\boxed{\Delta_y=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1,\,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_i}\right|\cdot\Delta_{x_i}}\ \text{і}\ \boxed{\Delta^*_y=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1,\,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_i}\right|\cdot\Delta^*_{x_i}}.$$

На основі одержаного наближеного значення функції та лінійної оцінки її абсолютної похибки дістанемо лінійні оцінки відносної похибки δ_y та її граничного значення δ^*_y.

а) У випадку функції однієї змінної $y=f(x)$:

$$\delta_y=\frac{\Delta_y}{|y|}=\frac{|f'(x)|\cdot\Delta_x}{|f(x)|}=\frac{|f'(x)|\cdot|x|\cdot\delta_x}{|f(x)|}=\left|x\frac{d\ln f(x)}{dx}\right|\delta_x,$$

тобто $\boxed{\delta_y=\left|x\frac{d\ln f(x)}{dx}\right|\delta_x}$ і $\boxed{\delta^*_y=\left|x\frac{d\ln f(x)}{dx}\right|\delta^*_y}$.

б) У випадку функції n змінних $y=f(x_1,\,x_2,\dots,x_n)$:

$$\delta_y=\frac{\Delta_y}{|y|}=\frac{1}{|f(x_1,\,x_2,\dots,x_n)|}\sum_{i=1}^{n}\left|\partial f(x_1,\,x_2,\dots,x_n)/\partial x_i\right|\cdot\Delta_{x_i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1,\,x_2,\dots,x_n)/\partial x_i}{f(x_1,\,x_2,\dots,x_n)}\right|\left|x_i\right|\delta_{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial\ln f(x_1,\,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_i}\right|\delta_{x_i},$$

тобто

$$\boxed{\delta_y=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial\ln f(x_1,\,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_i}\right|\delta_{x_i}}$$

$$\text{і}\ \boxed{\delta^*_y=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\frac{\partial\ln f(x_1,\,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_i}\right|\delta^*_{x_i}}.$$

Зауваження 1. За одержаними формулами знаходяться неусувні похибки обчислення функції, породжені похибками аргументів. Похибки заокруглювання тут не враховуються.

Похибки арифметичних операцій. Використовуючи одержані формули, можна визначити лінійні оцінки похибок результатів арифметичних операцій як окремих випадків функції двох змінних.

а) Похибка суми. Нехай $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Оскільки $\partial f(x_1, x_2)/\partial x_i = 1$ і $\partial \ln f(x_1, x_2)/\partial x_i = 1/(x_1 + x_2)$, $i = 1,2$, то дістанемо

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \left| \frac{x_1}{x_1 + x_2} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right| \delta_{x_2} \ .$$

Абсолютна похибка суми дорівнює сумі абсолютних похибок доданків.

Аналогічно знаходяться похибки для інших результатів арифметичних операцій.

б) Похибка різниці. $y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

$$\Delta_y = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \left| \frac{x_1}{x_1 - x_2} \right| \delta_{x_1} + \left| \frac{x_2}{x_1 - x_2} \right| \delta_{x_2} \ .$$

Абсолютна похибка різниці дорівнює сумі абсолютних похибок зменшуваного і від’ємника.

в) Похибка добутку. $y = f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$.

$$\Delta_y = |\, x_2 \,| \Delta_{x_1} + |\, x_1 \,| \Delta_{x_2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} \ .$$

Відносна похибка добутку дорівнює сумі відносних похибок співмножників.

г) Похибка частки. $y = f(x_1, x_2) = x_1/x_2$.

$$\Delta_y = \frac{|\, x_2 \,| \Delta_{x_1} + |\, x_1 \,| \Delta_{x_2}}{(x_2)^2} \quad \text{і} \quad \delta_y = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} \ .$$

Відносна похибка частки дорівнює сумі відносних похибок діленого і дільника.

Зауваження 2. При додаванні великої кількості доданків оцінка абсолютної похибки як суми абсолютних похибок доданків виявляється сильно завищеною. У цьому випадку часто застосовують ***статистичну оцінку***: $\boxed{\Delta_{x_1 + x_2 +,,, + x_n} = \sqrt{3n} \cdot 0{,}5 \cdot 10^p}$, де n – число доданків; p – номер десяткового розряду, до якого заокруглюється результат. Цю формулу застосовують при $n > 10$.

Зауваження 3. У разі віднімання двох близьких чисел може значно зрости відносна похибка результату. А при діленні на досить мале за модулем число може значно зрости абсолютна похибка. Таких ситуацій треба уникати, відповідним чином перетворюючи обчислювальну схему.

Зауваження 4. При додаванні чи відніманні наближених чисел бажано, щоб вони мали однакові абсолютні похибки, тобто однакову кількість вірних знаків після десяткової коми. Наприклад, при додаванні двох наближених чисел $x_1 = 27{,}417$ і $x_2 = 5{,}2$, у запису яких залишені тільки вірні цифри, одержимо результат $32{,}617$ з одним вірним у широкому сенсі знаком після десяткової коми, оскільки його абсолютна похибка $1 \cdot 10^{-2} < \Delta_{x_1 + x_2} \le 1 \cdot 10^{-1}$. Таким чином, врахування більшого числа десяткових розрядів в одному доданку при меншому в іншому не приводить до підвищення точності результату. *Підсумування потрібно проводити, починаючи з менших доданків. У протилежному випадку може мати місце значна втрата значущих цифр.*

Зауваження 5. При множенні чи діленні наближених чисел кількість значущих цифр доцільно вирівнювати відповідно найменшому за модулем з них.

Правила підрахунку цифр:

1) *При знаходженні суми й різниці наближених чисел у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх моє компонент операції з найменшим числом десяткових знаків.*

2) *При знаходженні добутку й частки наближених чисел у результаті слід зберігати стільки значущих цифр, скільки їх моє компонент операції з найменшим числом значущих цифр.*

Приклад 1. Знайти абсолютну Δ_u і відносну δ_u похибки обчислення значення функції $u = x^2 z / y^3$, якщо $x = 0{,}15 \pm 0{,}005$, $y = 2{,}12 \pm 0{,}01$, $z = 1{,}16 \pm 0{,}007$.

□ За формулою для лінійної оцінки абсолютної похибки результату отримаємо:

$$\Delta_u = \left| \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} \right| \Delta_x + \left| \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} \right| \Delta_y + \left| \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} \right| \Delta_z =$$

$$=\left|\frac{2xz}{y^3}\right|\Delta_x+\left|\frac{3x^2z}{y^4}\right|\Delta_y+\left|\frac{x^2}{y^3}\right|\Delta_z=\frac{2\cdot 0{,}15\cdot 1{,}16}{2{,}12^3}\cdot 0{,}005+$$

$$+\frac{3\cdot 0{,}15^2\cdot 1{,}16}{2{,}12^4}\cdot 0{,}01+\frac{0{,}15^2}{2{,}12^3}\cdot 0{,}007=0{,}0001826+$$

$$+0{,}0001163+0{,}00001653=0{,}00032=3{,}2\cdot 10^{-4}.$$

Знайдемо наближене значення функції:

$$u=0{,}15^2\cdot 1{,}16\big/2{,}12^3=0{,}002739.$$

Тоді $\delta_u=\Delta_u/|u|=3{,}2\cdot 10^{-4}\big/0{,}002739=0{,}12$. ■

Приклад 2. Висота h та радіус основи R циліндра виміряні з точністю до $0{,}2\%$. Яка відносна похибка при обчисленні об'єму V циліндра, якщо взято $\pi=3{,}14$?

□ $V=\pi R^2 h$. Для числа π більш точне значення $\pi=3{,}14159265$. Тоді $\Delta_\pi=3{,}14159265-3{,}14=0{,}16\cdot 10^{-2}$, а $\delta_\pi=0{,}16\cdot 10^{-2}/3{,}14=0{,}05\cdot 10^{-2}=0{,}05\%$. За формулою відносної похибки добутку дістанемо

$$\delta_V=\delta_\pi+2\delta_R+\delta_h=0{,}05\%+2\cdot 0{,}2\%+0{,}2\%=0{,}65\%. \quad ■$$

2.6. Обернена задача теорії похибок

На практиці часто необхідно дістати результат обчислень так, щоб його похибка знаходилась в певних допустимих межах.

Обернена задача теорії похибок полягає в наступному: з якою граничною точністю $\Delta^*_{x_i}$ ($\delta^*_{x_i}$), $i=\overline{1,n}$ потрібно взяти наближені значення аргументів $x_1, x_2,\dots,x_n$, щоб абсолютна (відносна) похибка обчислення значення функції $y=f(x_1, x_2,\dots,x_n)$ не перевищувала заданої величини Δ^*_y (δ^*_y).

Для функції однієї змінної $y=f(x)$ граничну абсолютну похибку аргументу можна обчислити за формулою

$$\boxed{\Delta_x^* = \Delta_y^* \big/ |\, f\,'(x) \,|}.$$

Для функції декількох змінних $y = f(x_1,\, x_2, ..., x_n)$ задача математично невизначена, оскільки задану похибку Δ_y^* можна забезпечити при довільному наборі граничних абсолютних похибок аргументів $\Delta_{x_i}^*$, $i = \overline{1, n}$, що задовольняють умові

$$\Delta_y^* = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left| \partial f / \partial x_i \right| \cdot \Delta_{x_i}^* \,.$$

У цьому випадку задача розв’язується за допомогою наступних рекомендацій:

а) ***принцип рівних впливів***: вважають, що вклади всіх аргументів у формування абсолютної похибки функції однакові, тобто в останній формулі всі доданки $c_i = \left| \partial f / \partial x_i \right| \cdot \Delta_{x_i}^*$, $i = \overline{1, n}$ рівні між собою. Тоді граничні абсолютні похибки аргументів визначаються за формулою

$$\boxed{\Delta_{x_i}^* = \frac{\Delta_y^*}{n \left| \partial f / \partial x_i \right|}, \;\; i = \overline{1, n}}\,.$$

б) ***принцип рівних абсолютних похибок***: вважають усі граничні абсолютні похибки аргументів рівними, тобто покладають

$$\boxed{\Delta_{x_i}^* = \Delta_x^* = \Delta_y^* \Big/ \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left| \partial f / \partial x_i \right|, \;\; i = \overline{1, n}}\,.$$

в) ***принцип рівних відносних похибок***: вважають усі граничні відносні похибки аргументів рівними, тобто покладають

$$\boxed{\delta_{x_i}^* = \delta_x^* = \Delta_y^* \Big/ \sum\nolimits_{i=1}^{n} \left| x_i \cdot \partial f / \partial x_i \right|, \;\; i = \overline{1, n}}\,.$$

<u>Зауваження</u>. Частіше використовують принцип рівних впливів. Але може статися таке: похибки окремих аргументів настільки малі, що виміряти чи обчислити ці величини з відповідною точністю неможливо. Тоді застосовують один з принципів рівних похибок. Інколи відступають від цих принципів, наприклад, допускаючи збільшення граничних абсолютних похибок для одних аргументів за рахунок одночасного зменшення їх для інших.

Приклад 1. Сторона квадрата $x = 4\,м$. З якою граничною абсолютною похибкою Δ_x^* її потрібно виміряти, щоб абсолютна похибка знаходження площі S не перевищувала $\Delta_y^* = 0{,}1 \cdot 10^{-3}\,м^2$?

□ Оскільки $S = x^2$, то $S' = 2x$; $S'(4) = 2 \cdot 4 = 8$. Тоді

$$\Delta_x^* = \Delta_y^* \big/ |S'| = 0{,}1 \cdot 10^{-3} \big/ 8 = 0{,}125 \cdot 10^{-4}\,(м). \quad ■$$

Приклад 2. З якою кількістю вірних значущих цифр потрібно взяти вільний член квадратного рівняння $x^2 - 2x + \lg 6 = 0$, щоб отримати корені рівняння з чотирма вірними значущими цифрами?

□ Корені рівняння $x_1 = 1 + \sqrt{1 - \lg 6}$ і $x_2 = 1 - \sqrt{1 - \lg 6}$. Оскільки $\lg 6 \approx 0{,}78$, то $\sqrt{1 - \lg 6} \approx 0{,}35$, $x_1 \approx 1{,}35$ і $x_2 \approx 0{,}65$. Тоді за змістом задачі x_1 і x_2 потрібно визначити так, щоб $\Delta_{x_1}^* = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ і $\Delta_{x_2}^* = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Позначимо $t = \lg 6$ і розглянемо функцію $x_1 = 1 + \sqrt{1 - t}$. З’ясуємо, з якою точністю потрібно обчислити t в околі точки $t = 0{,}78$ щоб забезпечити $\Delta_{x_1}^* = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$. Оскільки в цій точці $x_1' = -(1/2) \big/ \sqrt{1 - t} = -(1/2)/0{,}35 = -1{,}4$, то дістанемо

$$\Delta_t^* = \Delta_{x_1}^* \big/ |x_1'| = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \big/ 1{,}4 = 0{,}36 \cdot 10^{-3} \le 0{,}5 \cdot 10^{-3}.$$

Звідси випливає, що для знаходження кореня x_1 з чотирма вірними значущими знаками потрібно обчислити $\lg 6$ з трьома вірними значущими цифрами після коми, тобто $\lg 6 = 0{,}778$.

Аналогічно, розглядаючи функцію $x_2 = 1 - \sqrt{1 - t}$ отримаємо:

$$x_2' = (1/2) \big/ \sqrt{1 - t} = (1/2)/0{,}35 = 1{,}4;$$

$$\Delta_t^* = \Delta_{x_2}^* \big/ |x_2'| = 0{,}5 \cdot 10^{-4} \big/ 1{,}4 = 0{,}36 \cdot 10^{-4} \le 0{,}5 \cdot 10^{-4}.$$

Отже, для знаходження кореня x_2 з чотирма вірними значущими цифрами потрібно обчислити $\lg 6$ з чотирма вірними значущими знаками після коми, тобто $\lg 6 = 0{,}7782$. ■

Приклад 3. Знайти граничні абсолютні Δ_x^*, Δ_y^*, Δ_z^* і відносні δ_x^*, δ_y^*, δ_z^* похибки аргументів, необхідні для одержання значення функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ з m_u вірними значущими цифрами при вказаних значеннях аргументів. Спираючись на знайдені абсолютні похибки Δ_x^*, Δ_y^* і Δ_z^*, вказати потрібну кількість вірних значущих цифр m_x, m_y і m_z у заданні аргументів. Задачу розв'язати трьома способами: а) за принципом рівних впливів; б) за принципом рівних абсолютних похибок; в) за принципом рівних відносних похибок.

$$u = (x^2 + y^3)/\cos z\,;\;\; x \approx 28{,}2\,;\;\; y \approx 7{,}46\,;\;\; z \approx 0{,}7855\,;\;\; m_u = 5\,.$$

□ Обчислимо: $x^2 = 28{,}2^2 = 795{,}2$; $y^3 = 7{,}46^3 = 415{,}2$;

$$\cos z = \cos 0{,}7855 = 0{,}7070\,;\;\; x^2 + y^3 = 795{,}2 + 415{,}2 = 1210{,}4\,;$$

$$u = 1210{,}4 / 0{,}7070 = 1712{,}0\,,$$

де у значенні функції всі залишені $m_u = 5$ значущих цифр вважатимемо вірними. Тоді

$$\Delta_u^* = 0{,}5 \cdot 10^{m - m_u + 1} = 0{,}5 \cdot 10^{3-5+1} = 0{,}5 \cdot 10^{-1}\,;$$

$$\delta_u^* = 0{,}5 \cdot 10^{1 - m_u} / \alpha_1 = 0{,}5 \cdot 10^{1-5} / 1 = 0{,}5 \cdot 10^{-4}\,.$$

Знайдемо похідні:

$$\partial u / \partial x = 2x / \cos z = 2 \cdot 28{,}2 / 0{,}7070 = 79{,}77\,;$$

$$\partial u / \partial y = 3y^2 / \cos z = 3 \cdot 7{,}46^2 / 0{,}7070 = 236{,}15\,;$$

$$\partial u / \partial z = (x^2 + y^3) \sin z / \cos^2 z = u \; tg\, z =$$

$$= 1712{,}0 \cdot tg\, 0{,}7855 = 1712{,}0 \cdot 1{,}0002 = 1712{,}3\,.$$

а) Використовуючи принцип рівних впливів, дістанемо допустимі абсолютні похибки аргументів:

$$\Delta_x^* = \Delta_u^* / \left(n \,|\partial u / \partial x|\right) = 0{,}5 \cdot 10^{-1} / (3 \cdot 79{,}77) = 0{,}2 \cdot 10^{-3} \geq 0{,}5 \cdot 10^{-4}\,;$$

$$\Delta_y^* = \Delta_u^* / \left(n \,|\partial u / \partial y|\right) = 0{,}5 \cdot 10^{-1} / (3 \cdot 236{,}15) = 0{,}7 \cdot 10^{-4} \geq 0{,}5 \cdot 10^{-4}\,;$$

$$\Delta_z^* = \Delta_u^* \Big/ \big(n\,|\partial u/\partial z|\big) = 0{,}5\cdot10^{-1} \Big/ (3\cdot1712{,}3) = 0{,}1\cdot10^{-4} \ge 0{,}5\cdot10^{-5}.$$

Тоді допустимі відносні похибки аргументів:

$$\delta_x^* = \Delta_x^* \Big/ |x| = 0{,}2\cdot10^{-3} \Big/ 28{,}2 = 0{,}7\cdot10^{-5};$$

$$\delta_y^* = \Delta_y^* \Big/ |y| = 0{,}7\cdot10^{-4} \Big/ 7{,}46 = 0{,}9\cdot10^{-5};$$

$$\delta_z^* = \Delta_z^* \Big/ |z| = 0{,}1\cdot10^{-4} \Big/ 0{,}7855 = 0{,}1\cdot10^{-4}.$$

Спираючись на одержані нерівності для абсолютних похибок Δ_x^*, Δ_y^* і Δ_z^*, одержимо потрібну кількість вірних значущих цифр m_x, m_y і m_z у заданні аргументів: $m_x = 6$; $m_y = 5$; $m_z = 5$.

б) Застосовуючи принцип рівних абсолютних похибок, одержимо допустимі абсолютні похибки аргументів:

$$\Delta_x^* = \Delta_y^* = \Delta_z^* = \Delta_u^* \Big/ \big(|\partial u/\partial x| + |\partial u/\partial y| + |\partial u/\partial z|\big) =$$

$$= 0{,}5\cdot10^{-1} \Big/ (79{,}77 + 236{,}15 + 1712{,}3) = 0{,}2\cdot10^{-3} \ge 0{,}5\cdot10^{-4};$$

Тоді допустимі відносні похибки аргументів:

$$\delta_x^* = \Delta_x^* \Big/ |x| = 0{,}2\cdot10^{-3} \Big/ 28{,}2 = 0{,}7\cdot10^{-5};$$

$$\delta_y^* = \Delta_y^* \Big/ |y| = 0{,}2\cdot10^{-3} \Big/ 7{,}46 = 0{,}2\cdot10^{-4};$$

$$\delta_z^* = \Delta_z^* \Big/ |z| = 0{,}2\cdot10^{-3} \Big/ 0{,}7855 = 0{,}2\cdot10^{-3}.$$

Спираючись на одержану нерівність для абсолютних похибок Δ_x^*, Δ_y^* і Δ_z^*, отримаємо потрібну кількість вірних значущих цифр m_x, m_y і m_z у заданні аргументів: $m_x = 6$; $m_y = 5$; $m_z = 4$.

в) Використовуючи принцип рівних відносних похибок, одержимо допустимі відносні похибки аргументів:

$$,\ \delta_x^* = \delta_y^* = \delta_z^* = \Delta_u^* \Big/ \big(x\cdot|\partial u/\partial x| + y\cdot|\partial u/\partial y| + z\cdot|\partial u/\partial z|\big) =$$

$$= 0{,}5\cdot10^{-1} \Big/ (28{,}2\cdot79{,}77 + 7{,}46\cdot236{,}15 + 0{,}7855\cdot1712{,}3) =$$

$$= 0{,}5\cdot10^{-1} \Big/ (2249{,}51 + 1761{,}68 + 1345{,}01) = 0{,}9\cdot10^{-5};;$$

Тоді допустимі абсолютні похибки аргументів:

$$\Delta_x^* = |x|\,\delta_x^* = 0{,}9\cdot 10^{-5}\cdot 28{,}2 = 0{,}3\cdot 10^{-3} \ge 0{,}5\cdot 10^{-4};$$

$$\Delta_y^* = |y|\,\delta_y^* = 0{,}9\cdot 10^{-5}\cdot 7{,}46 = 0{,}7\cdot 10^{-4} \ge 0{,}5\cdot 10^{-4};$$

$$\Delta_z^* = |z|\,\delta_z^* = 0{,}9\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}7855 = 0{,}7\cdot 10^{-5} \ge 0{,}5\cdot 10^{-5}.$$

Спираючись на одержані нерівності для абсолютних похибок Δ_x^*, Δ_y^* і Δ_z^*, дістанемо потрібну кількість вірних значущих цифр m_x, m_y і m_z у заданні аргументів: $m_x = 6$; $m_y = 5$; $m_z = 5$. ■

3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ДІЙСНИХ КОРЕНІВ СКІНЧЕННИХ РІВНЯНЬ

3.1. Дослідження рівняння і відокремлення коренів

Рівнянням з однією змінною x називається рівність

$$\boxed{f(x) = 0},$$

яка справджується при певних значеннях x, що називаються ***коренями*** рівняння. Вважають, що корінь x^* має кратність k, якщо

$$f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = \ldots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \text{ але } f^{(k)}(x^*) \ne 0.$$

Розв’язування рівняння полягає в знаходженні його коренів.

Зауваження 1. Рівносильними перетвореннями рівняння $f(x) = 0$ можна звести до вигляду $\boxed{x = \varphi(x)}$. Тим самим знаходження кореня рівняння $f(x) = 0$ (***нуля функції*** $f(x)$) зводиться до пошуку ***нерухомої точки*** відображення φ − такого значення x, яке відображенням φ переводиться само в себе.

Зауваження 2. Надалі обмежимося розглядом тільки дійсних коренів дійсних рівнянь.

Наближене обчислення кожного з дійсних коренів складається з наступних етапів:

а) дослідження кількості й розташування коренів на числовій прямій, з’ясування їх кратності; виділення області пошуку D коренів, яка відповідає умовам поставленої задачі;

б) ***відокремлення*** (***ізоляція***, ***локалізація***) кореня x^*, тобто знаходження як можна меншого відрізку $[a;b]$ з області пошуку D, в межах якого лежить один і тільки один цей корінь, і вибір його початкового наближення x_0;

в) ***уточнення*** значення кореня x^*, тобто обчислення його з необхідною точністю.

Необхідність проведення попереднього дослідження рівняння до його безпосереднього розв'язування обумовлена тим, що при відсутності аналітичного розв'язку завчасно важко визначити кількість коренів і виявити їх природу − скільки серед них дійсних чи комплексних, додатних чи від'ємних, простих чи кратних. Пошук коренів "навмання" без попереднього дослідження приводить до значних витрат і не гарантує правильність відповіді. Крім того, деякі корні можуть не мати предметного (геометричного, фізичного і т.п.) смислу, тому не треба їх відшукувати.

Не існує універсального методу локалізації коренів. У деяких випадках допомагають фізичні міркування та інші відомості з предметної області, описом якої служить рівняння.

Найчастіше відокремлення коренів здійснюється аналітичним чи графічним способами.

Основою ***аналітичного способу*** служить наступна

теорема. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і приймає значення різних знаків на його кінцях, тобто* $f(a)\cdot f(b)<0$, *то усередині цього відрізка міститься хоча б один корінь* x^* *рівняння* $f(x)=0$. *Цей корінь буде єдиним, якщо на інтервалі* $(a;b)$ *похідна* $f'(x)$ *зберігає постійний знак.*

У найпростішому випадку формують таблицю, в яку заносять послідовно розміщенні на осі Ox точки x_i, $i=1,2,...$ з досить малим кроком $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ і обчислені в них значення $f(x_i)$ лівої частини рівняння $f(x)=0$. Потім у таблиці вибирають ті пари сусідніх значень аргументу x_i і x_{i+1}, між якими функція $f(x)$ змінює знак.

Зауваження 3. Подібний аналіз таблиці не гарантує відокремлення всіх коренів. Зокрема, корінь парної кратності так локалізувати не можна, оскільки в околі такого кореня функція $f(x)$ зберігає знак. Крім того, функція $f(x)$ зберігає знак, якщо на відповідному проміжку розміщене парне число простих коренів. Якщо функція розривна, то вона може змінювати знак при переході через точку розриву.

При ***графічному способі*** будують графік функції $y=f(x)$ і приблизно виявляють ділянки його перетину з віссю Ox. Або, перетворивши вхідне рівняння $f(x)=0$ до вигляду $f_1(x)=f_2(x)$, будують графіки двох функцій $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ і приблизно визначають проміжки, яким належать абсциси їх точок перетину між собою.

Приклад 1. Графічно знайти проміжки ізоляції коренів рівняння $2\sqrt{x}\ln x-1=0$.

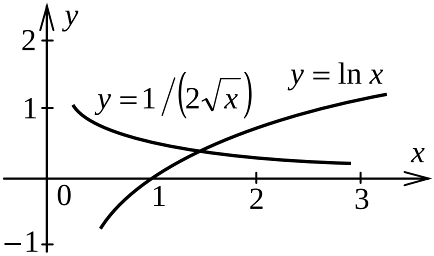

Рис. 1

□ Областю допустимих значень є промінь $(0;+\infty)$. Подамо рівняння у вигляді $\ln x=1/(2\sqrt{x})$. Тоді корені можуть бути знайдені як абсциси точок перетину ліній $y=\ln x$ і $y=1/(2\sqrt{x})$. Побудуємо ці графіки (рис. 1) і за ними визначимо кількість коренів та інтервали їх ізоляції.

З рис. 1 видно, що корінь єдиний і знаходиться на відрізку $[1;2]$. Якщо взяти по осі Ox менший крок, то і проміжок локалізації можна знайти точніше. ■

Приклад 2. Для рівняння $2^x+x^2-2=0$ знайти інтервали ізоляції його коренів, що лежать на проміжку $[-2;2]$, аналітичним способом (на основі аналізу зміни знаків функції у таблиці значень лівої частини $f(x)=2^x+x^2-2$ рівняння), а потім проконтролювати результат графічним методом.

□ Побудуємо таблицю значень, де $y=f(x)=2^x+x^2-2$.

x	-2	-1	0	1	2
y	2,25	- 0,5	-1	1	6

З таблиці значень видно, що відрізку $[-2;2]$ функція $y=f(x)$ двічі змінює знак, тому можна припустити, що рівняння має два корені, проміжки локалізації яких $[-2;-1]$ і $[0;1]$.

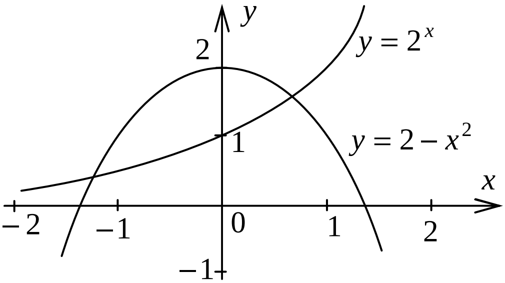

Рис. 2

Для контролю розв’яжемо задачу графічно. Подамо рівняння у вигляді $2^x=2-x^2$ і побудуємо графіки лівої $y=2^x$ та правої $y=2-x^2$ частин (рис. 2). Перетин графіків на рис. 2 показує, що коренів два і вони розміщені на відрізках $[-2;-1]$ і $[0;1]$. ■

3.2. Методи уточнення наближених значень коренів

На етапі уточнення кореня x^* рівняння $f(x)=0$ обчислюють його наближене значення з заданою точністю.

Для цього використовують різні ітераційні методи (методи послідовних наближень), суть яких полягає у послідовному обчисленні, виходячи з початкового наближення x_0, за однією й тією ж схемою (за допомогою відповідного рекурентного співвідношення

$$x_k=\varphi_k(x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}),\ k=1,2,...$$

значень $x_1,x_2,...,x_k,...$, що наближаються до кореня x^*: $\lim_{k\to\infty} x_k=x^*$ (це забезпечується вибором φ_k).

Критеріями закінчення ітераційного процесу можуть служити:

а) досягнення заданої точності за аргументом: $\left|x_k - x^*\right| < \delta$, де $\delta > 0$ – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного значення x_k кореня x^*;

б) досягнення заданої точності за функцією: $\left|f(x_k)\right| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – задана гранична абсолютна похибка знаходження наближеного нульового значення $f(x_k)$ функції $f(x)$;

в) досягнення заданого максимально допустимого числа ітерацій $k_{\max}$: $k = k_{\max}$.

Зауваження 1. Найчастіше використовується набір з критеріїв а) і в). Ітераційний процес зупиняється при виконанні хоча б одного з них.

Зауваження 2. Позитивною стороною всіх ітераційних методів є відсутність накопичення похибок обчислень.

Далі розглянемо найпоширеніші ітераційні методи уточнення наближеного значення кореня.

3.2.1. Метод поділу навпіл (дихотомії, бісекції)

Метод дихотомії (***бісекції***, ***поділу навпіл***) є досить простим і надійним способом розв'язування нелінійних рівнянь.

Нехай з попереднього аналізу відомо, що корінь x^* рівняння $f(x) = 0$ належить відрізку $[a_0; b_0]$: $x^* \in [a_0; b_0]$, причому функція $f(x)$ неперервна на цьому відрізку і приймає на його кінцях різні за знаком значення, тобто $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

На першому кроці ($k = 1$) розділимо відрізок $[a_0; b_0]$ навпіл точкою $x_1 = (a_0 + b_0)/2$ (рис. 3). Якщо $f(x_1) = 0$, то x_1 – шуканий корінь і задача розв'язана: $x^* = x_1$. Якщо $f(x_1) \neq 0$, то треба визначити, на кінцях якого з відрізків $[a_0; x_1]$ чи $[x_1; b_0]$ функція приймає різні за знаком значення. Позначимо цей відрізок $[a_1; b_1]$. Оскільки $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$, то $x^* \in [a_1; b_1]$ і довжина відрізка $[a_1; b_1]$ удвічі менша, ніж довжина попереднього відрізка $[a_0; b_0]$.

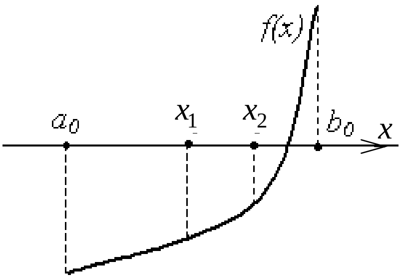

Рис. 3

Далі ($k=2$) зробимо аналогічні дії на відрізку $[a_1;b_1]$ (поділимо його навпіл і т.д.). У результаті отримаємо корінь x^* або його відповідне наближення

$$x_2=(a_1+b_1)/2$$

і новий відрізок ізоляції $[a_2;b_2]$ і т.д. На k-му кроці обчислення проводяться за схемою:

$$\boxed{x_k=(a_{k-1}+b_{k-1})/2; \quad f(a_{k-1})\ f(b_{k-1})<0 \quad (k=1,2,...)},$$

де x_k – наближення до шуканого кореня x^*; $[a_{k-1};b_{k-1}]$ – попередній проміжок ізоляції кореня. Якщо $k=k_{\max}$, то покласти $x^*=x_k$ і закінчити обчислення. Якщо $f(x_k)=0$, то покласти $x^*=x_k$ і закінчити обчислення. Якщо $f(x_k)\cdot f(a_{k-1})>0$, то покласти $a_k=x_k$; $b_k=b_{k-1}$, інакше – $a_k=a_{k-1}$; $b_k=x_k$. Далі присвоїти $k:=k+1$ і продовжити обчислення.

На k-му кроці довжина одержаного відрізка ізоляції $[a_k;b_k]$ дорівнює $(b_0-a_0)/2^k$. Оскільки $x^*\in[a_k;b_k]$, то маємо оцінку

$$\boxed{\left|x_k-x^*\right|\le b_k-a_k=(b_0-a_0)/2^k},$$

яка характеризує похибку методу ділення відрізка навпіл і вказує на швидкість збіжності: *метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії, знаменник якої* $q=1/2$.

Оскільки $|x_k-x^*|\le b_k-a_k=|x_k-x_{k-1}|$, то обчислення закінчують, коли буде виконана нерівність $|x_k-x_{k-1}|<\delta$, де $\delta>0$ – задана точність.

<u>Зауваження 1</u>. Необхідну кількість ітерацій для досягнення заданої точності $\delta>0$ можна оцінити попередньо: зі співвідношення $\left|x_k-x_{k-1}\right|=(b_0-a_0)/2^k<\delta$ випливає $k>\log_2\left((b_0-a_0)/\delta\right)$. Для

одержання кожних 3 вірних десяткових знаків необхідно зробити близько 10 ітерацій. На практиці ітераційний процес закінчують, коли два рази підряд одержуються однакові з заданою точністю числа (перестають змінюватися десяткові знаки, які треба зберегти у відповіді). Проміжні обчислення здійснюють з одним чи двома запасними десятковими знаками.

Зауваження 2. Метод дихотомії є досить простим і надійним способом розв'язування нелінійних рівнянь. Він не накладає ніяких вимог на гладкість функції $f(x)$: функція $f(x)$ може бути недиференційовною, достатньо лише її неперервності. Якщо при локалізації кореня допущена помилка і на відрізку $\left[a_0; b_0\right]$ знаходиться кілька коренів, то процес дихотомії збігається до одного з них.

Зауваження 3. До недоліків методу можна віднести невисоку швидкість збіжності. Крім того, він не застосовний для знаходження коренів парної кратності. Хоча у випадку кореня високої непарної кратності метод збігається, але при цьому має зменшену точність і невисоку стійкість до похибок обчислень.

Метод дихотомії застосовують тоді, коли вимагається висока надійність, а швидкість збіжності несуттєва.

Приклад. Знайти наближено $x = \sqrt[8]{2}$ з точністю $\delta = 0{,}01$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 10$.

□ Задача еквівалентна відшуканню додатного кореня рівняння $x^8 - 2 = 0$ (знаходженню додатного нуля функції $f(x) = x^8 - 2$). За початковий проміжок локалізації $\left[a_0; b_0\right]$ можна взяти відрізок $[1; 2]$, оскільки на кінцях цього відрізка функція $f(x)$ приймає значення з різними знаками: $f(1) < 0$ і $f(2) > 0$.

Для уточнення кореня застосуємо метод дихотомії.

Оцінимо число k поділів відрізка $[1; 2]$, що необхідні для досягнення заданої точності $\delta = 0{,}01$:

$$k > \log_2\left((b_0 - a_0)/\delta\right) = \log_2\left((2-1)/0{,}01\right) = \log_2 100; \quad k \geq 7$$

Очікуємо, що після сьомої ітерації знайдемо $\sqrt[8]{2}$ з потрібною точністю.

Оскільки $\delta = 0{,}01$, тобто результат треба знайти з двома вірними значущими десятковими цифрами після коми, то проміжні обчислення виконуємо з чотирма десятковими знаками після коми (дві цифри запасні).

Результати обчислень подані у наступній таблиці:

k	1	2	3	4	5	6	7
a_k	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0625	1,0625	1,0781
b_k	2,0000	1,5000	1,2500	1,1250	1,1250	1,0937	1,0937
x_k	1,5000	1,2500	1,1250	1,0625	1,0937	1,0781	1,0859
Знак $f(a_k)$	-	-	-	-	-	-	-
Знак $f(b_k)$	+	+	+	+	+	+	+
Знак $f(x_k)$	+	+	+	-	+	-	-
$\|x_k - x_{k-1}\|$	—	0,2500	0,1250	0,0625	0,0312	0,0156	0,0078

Отже, $x = \sqrt[8]{2} = x_7 = 1{,}09 \pm 0{,}01$. ■

3.2.2. Метод хорд (пропорційних частин)

Як у методі дихотомії, припускаємо, що корінь x^* рівняння $f(x) = 0$ належить відрізку $[a_0; b_0]$, причому функція $f(x)$ неперервна на цьому відрізку і $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

Метод хорд (***пропорційних частин***) полягає в поділі відрізка локалізації $[a_{k-1}; b_{k-1}]$ ($k = 1, 2, \ldots$) такого, що $f(a_{k-1})\ f(b_{k-1}) < 0$, на частини, пропорційні значенням функції на його кінцях:

$$(a_{k-1} - x_k)/(b_{k-1} - x_k) = f(a_{k-1})/f(b_{k-1}) \cdot$$

Звідси для k-го кроку ($k = 1, 2, \ldots$)маємо розрахункову схему:

$$\boxed{x_k = a_{k-1} - \frac{f(a_{k-1}) \cdot (b_{k-1} - a_{k-1})}{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})}; \quad f(a_{k-1})\ f(b_{k-1}) < 0},$$

де x_k – наближення до шуканого кореня x^*; $[a_{k-1}; b_{k-1}]$ – попередній проміжок ізоляції кореня. Якщо $k = k_{\max}$, то покласти $x^* = x_k$

і закінчити обчислення. Якщо $f(x_k)=0$, то покласти $x^*=x_k$ і закінчити обчислення. Якщо $f(x_k)\cdot f(a_{k-1})>0$, то покласти $a_k=x_k$; $b_k=b_{k-1}$, інакше – $a_k=a_{k-1}$; $b_k=x_k$. Далі присвоїти $k:=k+1$ і продовжити обчислення.

Геометрично метод пропорційних частин еквівалентний заміні дуги $A_{k-1}B_{k-1}$ графіка функції $f(x)$ хордою, що сполучає її кінці $A_{k-1}(a_{k-1};\ f(a_{k-1}))$ і $B_{k-1}(b_{k-1};\ f(b_{k-1}))$, та вибору за наближене значення кореня x^* точки перетину хорди з віссю Ox (рис. 4).

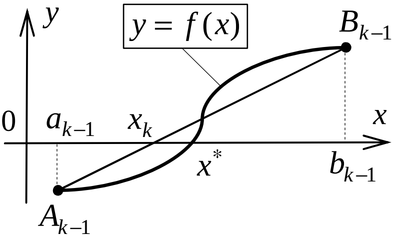

Рис. 4

Як у методі дихотомії, обчислення закінчують, коли буде виконана нерівність $|x_k-x_{k-1}|<\delta$, де $\delta>0$ – задана точність.

При умові, що на відрізку $[a_{k-1};b_{k-1}]$ перша похідна відмінна від нуля $f'(x)\neq 0$, а друга похідна $f''(x)$ зберігає знак, оцінка абсолютної похибки наближення визначається за формулою

$$|x_k-x^*|\le|f(x_k)|/\mu,\ \text{де}\ \mu=\min_{x\in[a_{k-1};b_{k-1}]}|f'(x)|.$$

Зауваження 1. Метод хорд аналогічний методу поділу навпіл, але забезпечує більш швидку збіжність.

Приклад. Методом хорд знайти наближено корінь заданого рівняння з указаною точністю: $x^3-2^{-x}+0{,}5=0$; $\delta=0{,}001$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max}=10$.

□ Маємо $f(x)=x^3-2^{-x}+0{,}5$. Оскільки $f(0)=-0{,}5<0$, $f(1)=1>0$ і для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$ похідна зберігає знак $f'(x)=3x^2+2^{-x}\ln 2>0$, то на відрізку $[0;1]$ знаходиться єдиний корінь x^* рівняння.

Проведемо уточнення кореня методом хорд для $k=1,2,\ldots$. Обчислення зупинимо, коли буде виконана нерівність

$|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0{,}001$ або досягнуто максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 10$. Оскільки $\delta = 0{,}001$, то проміжні обчислення виконуємо з п'ятьма десятковими знаками після коми (дві цифри запасні).

Результати обчислень подані у наступній таблиці.

Отже, шукане значення кореня $x^* = x_8 = 0{,}562 \pm 0{,}001$ досягнуто після восьми ітерацій. ■

k	1	2	3	4	5
a_k	0,00000	0,33333	0,46949	0,52579	0,54804
b_k	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
$f(a_k)$	-0,50000	-0,25666	-0,11873	-0,04922	-0,01935
$f(b_k)$	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
x_k	0,33333	0,46949	0,52579	0,54804	0,55662
$f(x_k)$	-0,25666	-0,11873	-0,04922	-0,01935	-0,00744
$\|x_k - x_{k-1}\|$	—	0,13616	0,05630	0,02225	0,00858

k	6	7	8	9	10
a_k	0,55662	0,55989	0,56114		
b_k	1,00000	1,00000	1,00000		
$f(a_k)$	-0,00744	-0,00108	-0,00108		
$f(b_k)$	1,00000	1,00000	1,00000		
x_k	0,55989	0,56114	0,56161		
$f(x_k)$	-0,00108	-0,00108	-0,00041		
$\|x_k - x_{k-1}\|$	0,00327	0,00124	0,00047		

<u>Зауваження 2</u>. Якщо на відрізку локалізації $[a_0;b_0]$ друга похідна $f''(x)$ зберігає знак, то при обчисленнях за методом хорд один з кінців відрізків локалізації $[a_k;b_k]$ ($k = 1, 2, \ldots$), де знак функції $f(x)$ збігається зі знаком другої похідної, залишається неру-

хомим. При цьому послідовні наближення $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ лежать по ту сторону від кореня, де знак функції протилежний знакові $f''(x)$.

3.2.3. Метод простих ітерацій

Метод простих ітерацій застосовується до розв'язування рівняння вигляду $x = \varphi(x)$.

Виберемо довільно початкове наближення $x_0 \in [a;b]$ кореня x^* рівняння $x = \varphi(x)$ й обчислимо послідовно наступні наближення за схемою: $\boxed{x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, ...}$.

Достатню умову збіжності методу простих ітерацій установлює наступна

теорема. *Якщо в інтервалі, який містить корінь* x^* *рівняння* $x = \varphi(x)$ *і його послідовні наближення* $x_0, x_1, ..., x_k, ...,$ *які обчислюються за формулою* $x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, ...,$ *виконується умова* $\boxed{|\varphi'(x)| \le q < 1}$, *то* $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x^*$, *тобто ітераційний процес збігається, і справджується нерівність* $\boxed{\left| x_k - x^* \right| \le q^k \left| x_0 - x^* \right|}$.

Оцінка похибки $\left| x_k - x^* \right| \le q^k \left| x_0 - x^* \right|$ показує, що *метод простих ітерацій збігається зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником* q. *Швидкість збіжності тим більша, чим менше* q.

Умова $|\varphi'(x)| < 1$ є достатньою для збіжності методу простих ітерацій: її виконання гарантує збіжність. Але ця умова не є необхідною: якщо вона не виконується, то це не означає, що ітераційний процес обов'язково буде розбігатись.

Метод простих ітерацій має прозору геометричну інтерпретацію. Побудуємо графіки функцій $y = x$ і $y = \varphi(x)$. Коренем рівняння $x = \varphi(x)$ є абсциса точки їх перетину. Від початкового наближення x_0 будуємо ламану, абсциси вершин якої є послідовними наближеннями $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ до кореня x^*.

На рис. 5 – 8 показано чотири випадки взаємного розташування ліній $y = x$, $y = \varphi(x)$ і відповідної ламаної, що описує ітераційний процес. Рис. 5 і 6 відповідають випадку $|\varphi'(x)| \le q < 1$, коли ітераційний процес збігається. Рис. 7 і 8 відповідають випадку $|\varphi'(x)| > 1$, коли ітераційний процес розбігається.

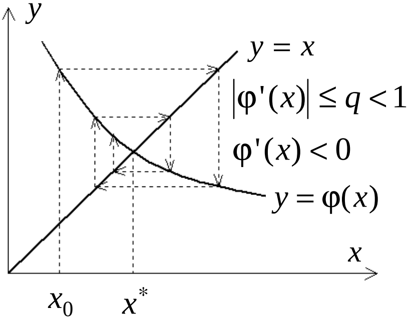

Рис. 5

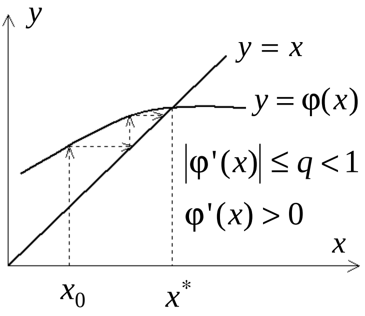

Рис. 6

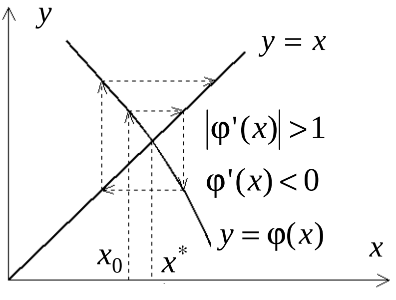

Рис. 7

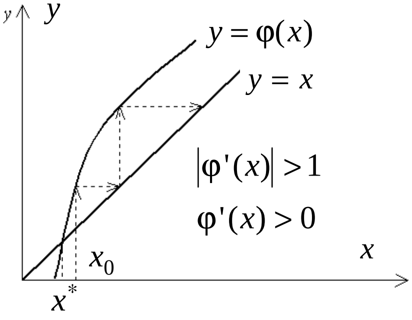

Рис. 8

Зауваження 1. Якщо не виконана ні одна з умов $|\varphi'(x)| < 1$ чи $|\varphi'(x)| > 1$, то ітераційний процес може зациклюватися.

Похибка методу і критерій закінчення. Якщо відома величина q в умові $|\varphi'(x)| \le q < 1$, то застосовують оцінку похибки

$$\left|x_k - x^*\right| \le \left(q/(1-q)\right)\left|x_k - x_{k-1}\right|,\ k \ge 1,$$

з якої витікає наступний критерій закінчення ітераційного процесу: обчислення необхідно продовжувати до виконання нерівності $\left|x_k - x_{k-1}\right| < \delta q/(1-q)$, , де $\delta > 0$ – задана точність.

Зауваження 2. Якщо $q \le 0{,}5$, то можна користуватись більш простим критерієм закінчення: $\left|x_k - x_{k-1}\right| < \delta$.

Зауваження 3. Надати рівнянню $f(x) = 0$ вигляду $x = \varphi(x)$ можна багатьма способами. Успіх методу простих ітерацій залежить від того, наскільки вдало вибрана функція $\varphi(x)$. Найпростіше безпосередньо додати x до обох частин рівняння $f(x) = 0$: $x = x + f(x)$. Часто застосовується ***модифікація методу простих ітерацій***: $\boxed{x = x + \alpha f(x)}$, де α – параметр, значення якого підбирається експериментально так, щоб справджувалася умова збіжності $|\varphi'(x)| < 1$ (звичайно, з діапазону $|\alpha| = 0{,}1 \div 1$, пам’ятаючи, що чим менше значення $|\alpha|$, тим повільніше збігається ітераційна послідовність). Якщо на відрізку $[a_0; b_0]$ функція $f(x)$ диференційовна і похідна $f'(x)$ зберігає знак, то можна покласти $\alpha = \pm 1/M$, де $M = \max\limits_{x \in [a_0; b_0]} \left|f'(x)\right|$ і знак вибирається протилежним знаку похідної $f'(x)$.

Приклад. Методом простих ітерацій розв’язати рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = 2x^2\sqrt{x} + x^2 - 4$, з точністю $\delta = 0{,}001$ з додатковою вимогою $\left|f(x_k)\right| < \varepsilon$, де $\varepsilon = 0{,}01$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$.

□ Областю допустимих значень даного рівняння є закритий промінь $[0; +\infty)$.

Оскільки $f(1) = -1 < 0$, а $f(2) = 11{,}3 > 0$, тобто функція $f(x)$ на кінцях відрізка $[1; 2]$ має різні знаки, то всередині цього відрізка є корінь x^*. Так як для всіх $x \in (0; +\infty)$ похідна $f'(x)$

зберігає знак $f'(x) = 5x\sqrt{x} + 2x > 0$, то на відрізку $[1;2]$ знаходиться єдиний корінь x^* рівняння.

Проведемо уточнення кореня методом простих ітерацій.

Перетворимо рівняння до вигляду $x = \varphi(x)$:

$$x^2 = 4\Big/\left(2\sqrt{x}+1\right); \quad x = 2\Big/\sqrt{2\sqrt{x}+1}. \text{ Отже, } \varphi(x) = 2\Big/\sqrt{2\sqrt{x}+1}.$$

На рис. 9 показано розташування кореня x^*. Видно, що корінь розміщений значно ближче до лівого кінця відрізка $[1;2]$, ніж до правого. Тому за початкове наближення оберемо $x_0 = 1{,}1$.

Обчислимо першу та другу похідні функції $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)^{3/2}}; \quad \varphi''(x) = \frac{3\left(5\sqrt{x}+1\right)}{4x\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)^{5/2}}.$$

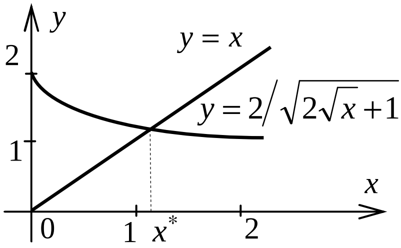

Рис. 9

Оскільки на відрізку $[1;2]$ друга похідна $\varphi''(x)$ додатна, то перша похідна $\varphi'(x)$ монотонно зростає на цьому відрізку і приймає найменше та найбільше значення на його кінцях:

$$\min_{x\in[a_0;b_0]} \varphi'(x) = \varphi'(1) = -0{,}192;$$

$$\max_{x\in[a_0;b_0]} \varphi'(x) = \varphi'(2) = -0{,}094.$$

Тоді справедлива оцінка $\left|\varphi'(x)\right| \le \max\limits_{x\in[a_0;b_0]} \left|\varphi'(x)\right| = 0{,}192 < 1$.

Таким чином, умова збіжності $\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1$ справджується, причому $q = 0{,}192 \le 0{,}5$. Обчислення зупинимо, коли буде задовольнятися система нерівностей $|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0{,}001$ і $\left|f(x_k)\right| < \varepsilon = 0{,}01$ або досягнуто максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$. Отримані за формулою $x_k = \varphi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots$ наближення показані у наступній таблиці:

k	1	2	3	4	5
x_k	1,13636	1,13011	1,13117	1,13099	
$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	0,03636	0,00625	0,00106	0,00018	
$\lvert f(x_k) \rvert$	0,0444	0,0075	0,0013	0,0002	

Оскільки $\delta = 0{,}001$ і $\varepsilon = 0{,}01$, то проміжні обчислення виконані з п’ятьма десятковими знаками після коми (дві-три цифри запасні). Характер збіжності відповідає рис. 5.

Отже, шукане значення кореня $x^* = x_4 = 1{,}131 \pm 0{,}001$ досягнуто після чотирьох ітерацій. ■

Зазначимо, що у розглянутому прикладі можна застосувати інші способи зведення рівняння до вигляду $x = \varphi(x)$, відстежуючи виконання умови збіжності $\lvert \varphi'(x) \rvert < 1$. Наприклад, наступна схема: $\sqrt{x} = \dfrac{4 - x^2}{2x^2}$; $x = \dfrac{(4 - x^2)^2}{4x^4}$; $\varphi(x) = \dfrac{(4 - x^2)^2}{4x^4}$ на відрізку $[1;2]$ цю умову не задовольняє. (Переконайтеся самостійно).

3.2.4. Метод Ньютона (метод дотичних, метод лінеаризації)

Найбільш ефективним методом розв’язування нелінійних рівнянь є ***метод Ньютона*** (***метод дотичних*** або ***метод лінеаризації***).

Нехай корінь $x^* \in [a;b]$, причому $f(a) \cdot f(b) < 0$, а функція $f(x)$ неперервна на відрізку локалізації $[a;b]$ і двічі неперервно диференційовна на інтервалі $(a;b)$, де друга похідна $f''(x)$ зберігає знак. За початкове наближення x_0 візьмемо той кінець відрізка $[a;b]$, для якого $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ (знаки функції та другої похідної співпадають).

Покладемо, для визначеності, $f''(x) > 0$ і $f(b) > 0$. Тоді $x_0 = b$. Проведемо дотичну до графіка функції $y = f(x)$ у точці $B_0(x_0; f(x_0))$ (рис. 10). Рівняння цієї дотичної:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Знайдемо точку перетину дотичної з віссю Ox, абсциса якої буде першим наближенням до кореня: $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

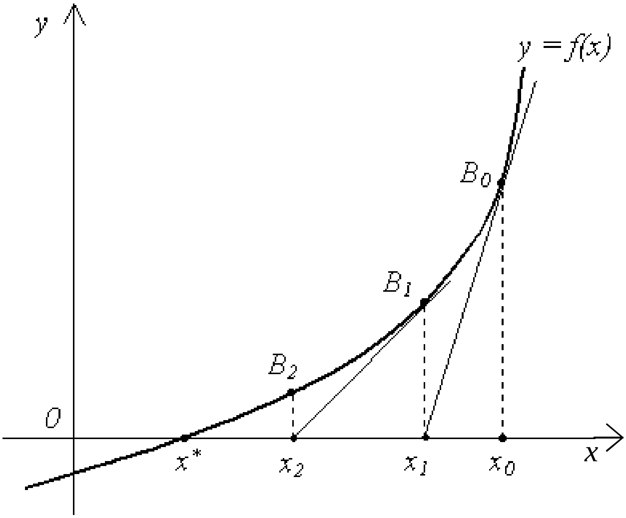

Рис. 10

У точці $B_1(x_1; f(x_2))$ знову проведемо дотичну до кривої й отримаємо наступне наближення. Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність наближень $x_0, x_1, ..., x_k, ...,$ де

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1});\ k = 1, 2, ...}.$$

Це співвідношення є ***ітераційною формулою*** методу Ньютона.

Зауваження 1. Одержану ітераційну формулу можна вивести наступним чином. Нехай маємо деяке наближення x_{k-1} до кореня x^*. Лінеаризуємо функцію $f(x)$ в околі точки x^*, застосовуючи формулу Лагранжа про скінченні прирости, і дістанемо:

$$f(x^*) = f(x_{k-1}) + f'(\xi)(x^* - x_{k-1}) = 0, \text{ де } \xi \in (x^*; x_{k-1}).$$

Наближено замінюючи $f'(\xi)$ на значення похідної у відомій точці

x_{k-1}, звідси знаходимо $x^* \approx x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})$.

Зауваження 2. Метод Ньютона можна розглядати як окремий випадок методу простих ітерацій, для якого $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$. Тоді ***умова збіжності*** $|\varphi'(x)| < 1$ матиме вигляд $\boxed{|f \cdot f''| < (f')^2}$.

Достатню умову збіжності методу дотичних встановлює наступна

теорема. *Нехай* $[a;b]$ *– відрізок, який містить корінь* x^* *рівняння* $f(x) = 0$. *Якщо* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *причому* $f'(x)$ *і* $f''(x)$ *відмінні від нуля та зберігають знак на* $[a;b]$, *то виходячи з довільного початкового наближення* $x_0 \in [a;b]$, *що задовольняє умову* $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, *ітераційний процес методу Ньютона* $x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *монотонно збігається до єдиного на відрізку* $[a;b]$ *кореня* x^*, *який можна обчислити з будь-яким ступенем точності.*

Зауваження 3. Збіжність методу Ньютона суттєво залежить від того, чи достатньо близько до кореня взято початкове наближення.

Похибка методу. Для дослідження швидкості збіжності скористаємося поданням функції $f(x)$ в околі точки x_{k-1} за формулою Тейлора до членів другого порядку включно й отримаємо:

$$f(x^*) = f(x_{k-1}) + f'(x_{k-1})(x^* - x_{k-1}) + (1/2) f''(\xi)(x^* - x_{k-1})^2 = 0,$$

де $\xi \in (x^*;\, x_{k-1})$. Звідси

$$f(x_{k-1}) = -f'(x_{k-1})(x^* - x_{k-1}) - (1/2) f''(\xi)(x^* - x_{k-1})^2.$$

Підставимо цей вираз у формулу методу Ньютона і дістанемо

$$x_{k-1} = x^* + (1/2)\big(f''(\xi)/f'(x_{k-1})\big)(x^* - x_{k-1})^2.$$

Тоді для похибки k-го наближення маємо

$$x_{k-1} - x^* = (1/2)\big(f''(\xi)/f'(x_{k-1})\big)(x^* - x_{k-1})^2.$$

Позначимо $m = \min\limits_{x \in [a;b]} |f'(x)| \neq 0;\ M = \max\limits_{x \in [a;b]} |f''(x)|$. Тоді для абсолютної похибки k -го наближення дістанемо оцінку

$$\boxed{\left|x_k - x^*\right| \le \left(M/(2m)\right)\left|x_{k-1} - x^*\right|^2}.$$

Це означає, що *метод Ньютона має квадратичну швидкість збіжності*, тобто похибка чергового наближення пропорційна до квадрата похибки попереднього наближення.

Зауваження 4. На практиці звичайно користуються такою оцінкою похибки: $\boxed{|x_k - x^*| \le |x_k - x_{k-1}|}$. У кращих випадках число вірних десяткових знаків у черговому наближенні подвоюється, тобто процес збігається дуже швидко.

Критерій закінчення. Попередня оцінка дозволяє сформулювати такий критерій закінчення ітерацій: обчислення треба вести доти, доки не буде виконана нерівність $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, де $\delta > 0$ – задана точність.

Зауваження 5. Для підвищення стійкості ітераційного процесу застосовується наступна ***модифікація методу Ньютона***:

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - \alpha\, f(x_{k-1}) / f'(x_{k-1});\ k = 1,2,...},$$

де α – параметр, значення якого підбирається експериментально (звичайно, з діапазону $\alpha = 0{,}1 \div 1$).

Зауваження 6. Недоліком методу дотичних є необхідність обчислювати в кожній точці не тільки значення функції, але і значення похідної. Якщо обчислення похідної складне, то часто застосовують спрощений ***метод однієї дотичної***:

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1}) / f'(x_0);\ k = 1,2,...},$$

що характеризується збіжністю лише зі швидкістю геометричної прогресії.

Приклад 1. Методом Ньютона з точністю $\delta = 0{,}001$ знайти додатний корінь x^* рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = e^{-x} - 2x^2 + 1$, з додатковою вимогою $\left|f(x_k)\right| < \varepsilon$, де $\varepsilon = 0{,}0001$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$.

□ Подамо дане рівняння у вигляді $e^{-x} = 2x^2 - 1$, дослідимо перетин графіків $y = e^{-x}$ і $y = 2x^2 - 1$ при $x \in [0; +\infty)$. У результаті одержимо, що додатний корінь x^* лежить на відрізку $[0,5;1]$. (Проробіть це самостійно).

На кінцях відрізка $f(0,5) = 1{,}11 > 0$ і $f(1) = -0{,}63 < 0$.

Обчислимо першу та другу похідні функції $f(x)$:

$$f'(x) = -e^{-x} - 4x; \quad f''(x) = e^{-x} - 4.$$

На відрізку $[0,5;1]$ справджуються нерівності $f'(x) < 0$ і $f''(x) < 0$. Оскільки виконується умова $f'(1) f''(1) > 0$, то за початкове наближення візьмемо $x_0 = 1$. Обчислення зупинимо, коли буде задовольнятися система нерівностей $| x_k - x_{k-1} | < \delta = 0{,}001$ і $|f(x_k)| < \varepsilon = 0{,}0001$ або досягнуто максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$. Виходячи з того, що $\delta = 0{,}001$ і $\varepsilon = 0{,}0001$, проміжні обчислення здійснюємо з п'ятьма десятковими знаками після коми (одна-дві цифри запасні).

Результати обчислень наведені у наступній таблиці.

Отже, шукане значення кореня $x^* = x_3 = 0{,}845 \pm 0{,}001$ досягнуто після трьох ітерацій. ■

k	0	1	2	3	4
x_k	1,00000	0,85528	0,84544	0,84540	
$\| x_k - x_{k-1} \|$	—	0,14472	0,00984	0,00005	
$f(x_k)$	-0,63212	-0,03784	-0,00017	-0,00000	
$f'(x_k)$	-4,36788	-3,84628	-3,81113	—	

Приклад 2. Методом Ньютона з точністю $\delta = 0{,}001$ розв'язати рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = 2/(x^2 + 1) - x^3 + 1$, з додатковою вимогою $|f(x_k)| < \varepsilon$, де $\varepsilon = 0{,}0001$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$.

(Розв'язати самостійно). Відповідь: $x^* = 1{,}218 \pm 0{,}001$.

3.2.5. Метод січних

Метод Ньютона потребує для своєї реалізації обчислення похідної, що обмежує його застосування. Цей недолік усуває наступна його модифікація – ***метод січних***.

Якщо в схемі методу дотичних замінити похідну $f'(x_{k-1})$ її різницевим наближенням “назад”:

$$f'(x_{k-1}) \approx \big(f(x_{k-1}) - f(x_{k-2}) \big) / \big(x_{k-1} - x_{k-2} \big),$$

то дістанемо ***ітераційну формулу*** методу січних:

$$\boxed{x_k = x_{k-1} - (x_{k-1} - x_{k-2})\, f(x_{k-1}) / \big(f(x_{k-1}) - f(x_{k-2}) \big);\ k = 2, 3, ...}.$$

Це означає, що замість дотичних використовуються січні: наступне наближення x_k отримують як точку перетину з віссю Ox січної, що з’єднує дві точки графіка функції $f(x)$ з координатами $\big(x_{k-2};\ f(x_{k-2})\big)$ і $\big(x_{k-1};\ f(x_{k-1})\big)$ (рис. 11).

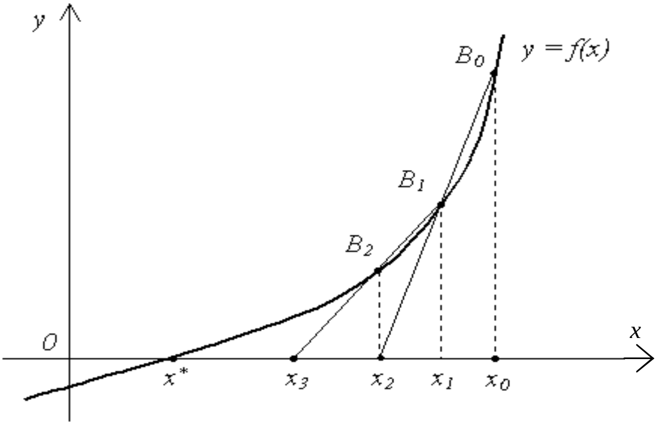

Рис. 11

Метод січних є двокроковим: для обчислення чергового наближення x_k необхідно знати два попередніх x_{k-1} і x_{k-2}. При цьому запуск ітераційного процесу передбачає задання двох початкових значень x_0 і x_1.

Зауваження 1. Часто вказується тільки одне початкове наближення x_0. Тоді потрібні для запуску m-крокового методу ($m \geq 2$) інші наближення x_1, x_2, …, x_{m-1} попередньо обчислюються за допомогою деякого однокрокового методу.

Збіжність методу січних підтверджує наступна

теорема. *Нехай функція* $f(x)$ *двічі неперервно диференційовна у деякому околі кореня* x^* *рівняння* $f(x)=0$, *причому* $f''(x^*) \neq 0$. *Тоді знайдеться такий малий* δ*-окіл кореня* x^*, *що при довільному виборі початкових наближень* x_0 *і* x_1 *з цього околу ітераційна послідовність, яка визначається за формулою*

$$x_k = x_{k-1} - (x_{k-1} - x_{k-2})\, f(x_{k-1}) / \big(f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})\big); \;\; k = 2,3, \ldots,$$

збігається до x^* і справджується оцінка $\boxed{\left| x_k - x^* \right| \leq C \left| x_{k-1} - x_{k-2} \right|^p}$,

де $C = \delta^{-1}$; $p = ((\sqrt{5}+1)/2) \approx 1{,}618$; $k = 2,3, \ldots$.

Критерій закінчення у методі січних такий же, як у методі Ньютона: обчислення треба вести доти, доки не буде виконана нерівність $| x_k - x_{k-1} | < \delta$, де $\delta > 0$ – задана точність.

Зауваження 2. На відміну від методу дотичних, метод січних збігається не так швидко, оскільки $p < 2$, причому збіжність може бути немонотонною не тільки далеко від кореня, а й поблизу. Проте у методі Ньютона на кожній ітерації треба обчислювати як функцію, так і похідну, а у методі січних – тільки функцію. Тому при однаковому об'ємі обчислень у методі січних можна зробити приблизно удвічі більше ітерацій і отримати більш високу точність.

Зауваження 3. При невдалому виборі початкових наближень метод січних, як і метод Ньютона, може розбігатися. Крім того, наявність у знаменнику ітераційної формули різниці значень функції приводить до втрати стійкості обчислювального процесу поблизу кореня, де ця різниця стає досить малою.

Зауваження 4. Якщо метод січних доповнити додатковою вимогою, що шуканий корінь x^* локалізований на відрізку $[x_0; x_1]$, причому на кінцях відрізка $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$, і в ітераційній формулі замість x_{k-2} взяти x_s – наближення з найбільшим номером s з $x_0, x_1, ..., x_{k-2}$, яке задовольняє умову $f(x_s) \cdot f(x_{k-1}) < 0$ (тобто корінь x^* розміщений між x_{k-1} і x_s), то дістанемо розрахункову схему $x_k = x_{k-1} - (x_{k-1} - x_s)\, f(x_{k-1}) / \big(f(x_{k-1}) - f(x_s)\big)$, що відповідає методу хорд.

Приклад. Методом січних з точністю $\delta = 0{,}001$ знайти додатний корінь x^* рівняння $f(x) = 0$, де $f(x) = 3 - 4x^2 - e^x$, з додатковою вимогою $|f(x_k)| < \varepsilon$, де $\varepsilon = 0{,}001$. Максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$.

□ Подамо дане рівняння у вигляді $e^x = 3 - 4x^2$, дослідимо перетин ліній $y = e^x$ і $y = 3 - 4x^2$ при $x \in [0; +\infty)$. Дістанемо, що додатний корінь x^* лежить на відрізку $[a; b] = [0; 1]$, причому $f(0) = 2 > 0$ і $f(1) = -1 - e < 0$. (Проробіть це самостійно). Друга похідна функції: $f''(x) = -8 - e^x$. Умова $f(x) f''(x) > 0$ виконується для правого кінця $x = 1$ відрізка $[0;1]$, тому за перше початкове наближення візьмемо $x_0 = 1$. За друге початкове значення оберемо середину відрізка $[0;1]$ – точку $x_1 = 0{,}5$.

Процес зупинимо, коли буде задовольнятися система нерівностей $|x_k - x_{k-1}| < \delta = 0{,}001$ і $|f(x_k)| < \varepsilon = 0{,}001$ або досягнуто максимально допустиме число ітерацій $k_{\max} = 5$. Оскільки $\delta = 0{,}001$ і $\varepsilon = 0{,}001$, проміжні обчислення здійснюємо з п'ятьма десятковими знаками після коми (дві цифри запасні).

Результати обчислень наведені у наступній таблиці.

Отже, $x^* = x_4 = 0{,}559 \pm 0{,}001$. ■

k	0	1	2	3	4
x_k	1,00000	0,50000	0,54316	0,55997	0,55918
$\|x_k - x_{k-1}\|$	—	—	0,04316	0,01681	0,00080
$f(x_k)$	-3,71828	0,35128	0,09848	-0,00489	0,00006

4. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ

4.1. Загальна постановка задачі апроксимації

Задача ***апроксимації*** (наближення) функцій полягає у тому, щоб для заданої функції $y = f(x)$ побудувати ***апроксимуючу*** (наближену) функцію (модель) $y = F(x)$, значення якої достатньо близькі до значень даної функції. ***Відхилення*** $R(x) = f(x) - F(x)$ характеризує якість наближення.

Наведемо найбільш типові ситуації, коли на практиці виникає така задача:

– функція $y = f(x)$ задана таблицею значень $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …, $y_n = f(x_n)$ для скінченної множини точок $x_0, x_1, ..., x_n$, а обчислення $y = f(x)$ треба зробити в інших точках;

– функція $y = f(x)$ задана аналітично, але обчислювати її за відповідними формулами важко.

Знаходження апроксимуючої функції $y = F(x)$ включає наступні етапи:

1) вибір ***критерію близькості*** вхідної $y = f(x)$ і наближеної $y = F(x)$ функцій (вимога збігу значень обох функцій на заданій сукупності точок $x_0, x_1, ..., x_n$ – ***інтерполяція*** (***колокація***), мінімізація середньоквадратичного відхилення – ***середньоквадратична апроксимація***, мінімізація максимального за модулем відхилення – ***рівномірне наближення*** та ін.);

2) вибір вигляду наближеної функції $y = F(x)$ – ***структурна ідентифікація*** (***параметризація моделі*** – визначення певної параметричної сім'ї функцій $y = F(x, a_0, a_1, ..., a_n)$, де $a_0, a_1, ..., a_n$ – невідомі коефіцієнти);

3) знаходження за вибраним критерієм оптимальних оцінок параметрів $a_0, a_1, ..., a_n$ – ***параметрична ідентифікація*** (вибір і реалізація методу обчислення з заданою точністю найкращих за певним критерієм значень коефіцієнтів наближеної функції).

Нехай на відрізку $[a;b]$ зміни аргументу x задано одновимірну сітку $\omega_n = \{x_k : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b\}$ (з нерівномірним, у загальному випадку, кроком $h_k = x_k - x_{k-1} = \mathrm{var}$, $k = \overline{1,n}$), у всіх вузлах x_k, $k = \overline{0,n}$ якої відомі значення $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ вхідної функції $y = f(x)$. Звичайно припускають, що вузли x_k, $k = \overline{0,n}$ визначені точно.

Якщо знехтувати похибками у значеннях функції $y = f(x)$, то за критерій узгодженості з нею апроксимуючої залежності $y = F(x)$ можна вибрати вимогу, щоб у всіх вузлах сітки обидві функції давали однакові результати: $F(x_k) = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$.

Такий спосіб наближення називають ***інтерполяцією***, відповідну модель $y = F(x)$ – ***інтерполяційною функцією***, а точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – ***вузлами інтерполяції***.

У вузькому смислі задача ***інтерполювання*** полягає у знаходженні наближених значень $y = F(x)$ таблично заданої функції $y = f(x)$ у точках x ***проміжку інтерполювання*** $[a;b] = [x_0, x_n]$, що не співпадають з вузловими. Якщо ж x лежить за межами цього проміжку, то відшукання відповідного наближення $f(x) \approx F(x)$ називають задачею ***екстраполювання***.

Зауваження 1. До екстраполяційних наближень треба ставитися дуже обережно, оскільки вони стосуються області з невідомою поведінкою вхідної функції.

Якщо похибки задання вузлових значень функції $y = f(x)$ суттєві, то вимога обов'язкового збігу з ними відповідних значень моделі $y = F(x)$ втрачає сенс. Тоді апроксимуючу функцію $y = F(x)$ можна вибрати з умови, щоб ***відхилення*** (***нев'язки***) $f(x) - F(x)$ у вузлах сітки x_k, $k = \overline{0,n}$ були найменшими у певному розумінні. Маємо більш загальну постановку задачі апроксимації, розв'язання якої в окремих випадках може привести до виконання системи співвідношень $R(x_k) = f(x_k) - F(x_k) = 0$, $k = \overline{0,n}$, що відповідають умовам інтерполяції.

Якщо задача передбачає мінімізацію суми квадратів відхилень моделі $y = F(x)$ від вхідної функції $y = f(x)$ у всіх вузлах сітки: $\rho_2(f, F) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x_k) - F(x_k) \right)^2 \to \min$, то говорять про ***середньоквадратичну апроксимацію*** (наближення за ***методом найменших квадратів*** (***МНК***)).

Якщо задача передбачає мінімізацію максимального за модулем відхилення моделі $y = F(x)$ від вхідної функції $y = f(x)$ у всіх вузлах сітки: $\rho_1(f, F) = \max\limits_{k=\overline{0,n}} \left| f(x_k) - F(x_k) \right| \to \min$, то говорять про ***рівномірне наближення*** (***чебишовську апроксимацію***).

Зауваження 2. Рівномірне наближення породжує досить складні обчислювальні процедури. На практиці його застосовують, коли треба гарантувати розміщення відхилення $R(x) = f(x) - F(x)$ у певних жорстких межах: $|R(x)| = |f(x) - F(x)| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$. Найпоширенішою є апроксимація за МНК, несумнівні переваги якої – простота реалізації та високі характеристики якості моделі у більшості практичних застосувань. Одним з її недоліків є переважний внесок у сумарний критерій більших за модулем відхилень. Для його подолання вводять у критерій відповідні вагові множники.

Зауваження 3. Використовують інші критерії близькості, зокрема, мінімізацію суми модулів відхилень: $\sum_{k=0}^{n} \left| f(x_k) - F(x_k) \right|$.

Структурна ідентифікація, безсумнівно, є ключовим етапом, від вдалої реалізації якого визначально залежить якість відновлення заданої функції $y = f(x)$ її наближенням $y = F(x)$. На жаль, дотепер не існує системи обґрунтованих методів ефективного її проведення. Можна сформулювати лише деякі рекомендації:

– спиратися на апріорну інформацію про змістовну (фізичну, економічну і т.п.) суть відновлюваної функції;

– проводити попередній аналіз геометричної структури вхідних даних, на яких базується шукана залежність (наявність асимптот, інтервалів монотонності, екстремумів, проміжків опуклості й угнутості, точок перегину і т.п.);

– застосовувати різні прийоми обробки вхідної інформації (згладжування, усереднення, відсів грубих помилок – викидів, лінійні та нелінійні перетворення);

– використовувати експертні оцінки спеціалістів відповідної предметної області (економіки, фізики, техніки і т.д.).

Як правило, апроксимуюча функція $y = F(x)$ будується у вигляді узагальненого полінома $F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x)$, де $\{\varphi_i(x)\}$ – деяка фіксована система лінійно незалежних базисних функцій; $a_0, a_1, ..., a_m$ – невідомі коефіцієнти. Базисними системами $\{\varphi_i(x)\}$ найчастіше служать:

– степеневі функції $\varphi_i(x) = x^i$ (у цьому випадку $F(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$ – алгебраїчний многочлен m-го степеня з шуканими параметрами $a_0, a_1, ..., a_m$);

– тригонометричні функції $\{\varphi_i(x)\} = \{\cos ix, \sin ix\}$ (тоді $F(x) = a_0/2 + \sum_{i=1}^{m}(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$ – тригонометричний поліном з шуканими параметрами $a_0, a_1, ..., a_m$, $b_1, b_2, ..., b_m$).

Для параметризації апроксимуючої залежності $y = F(x)$ використовують також дробово-раціональні, експоненціальні, логарифмічні та інші функції.

Для реалізації етапу параметричної ідентифікації розроблені досить ефективні процедури, що знайшли відображення у сучасних програмних пакетах символьних обчислень.

4.2. Інтерполяція многочленами

Для практики вельми важливим випадком є наближення функції $f(x)$ інтерполяційним многочленом $P_n(x)$. Його застосовують не тільки тоді, коли значення функції $f(x)$ відомі лише в окремих точках, але й тоді, коли $f(x)$ відома в кожній точці деякого проміжку $[a;b]$, проте її аналітичний вираз настільки складний, що викликає значні труднощі при розв’язуванні конкретної задачі, де приймає участь ця функція. Тоді часто доцільно замінити $f(x)$ її інтерполяційним многочленом $P_n(x)$, що співпадає з $f(x)$ тільки на деякій системі точок $x_k \in [a;b]$, $k = \overline{0,n}$, а в інших точках $x \in [a;b]$ лише наближено дорівнює $f(x)$.

Нехай значення функції $y = f(x)$ задані в $n+1$ різних точках $x_k \in [a;b]$, причому $a = x_0$, $b = x_n$, і $y_k = f(x_k)$ $(k = \overline{0,n})$.

Розглядається <u>інтерполяційна задача</u>: побудувати многочлен $P_n(x)$ (степеня не вище за n), значення якого в $n+1$ різних точках $x_0, x_1, ..., x_n$ співпадали би зі значеннями в них функції $f(x)$:

$$P_n(x_k) = y_k\,, \text{ де } y_k = f(x_k)\,,\ k = \overline{0,n}.$$

<u>Геометричний зміст</u>: знайти такий многочлен $P_n(x)$, графік якого проходить через задані точки $M_0(x_0;y_0)$, $M_1(x_1;y_1)$, …, $M_n(x_n;y_n)$, що лежать на графіку функції $y = f(x)$ (рис. 12).

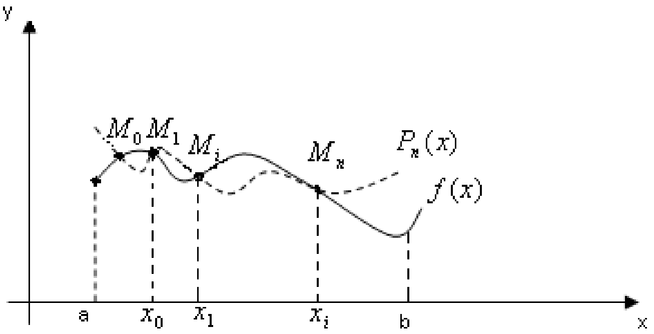

Рис. 12

Теоретичною базою можливості побудови многочлена $P_n(x)$ при достатньо великій кількості $n+1$ вузлів інтерполяції (і відповідному порядку n многочлена) так, щоб точність наближення була як завгодно високою є

<u>теорема Вейєрштрасса</u>. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *то для будь-якого* $\varepsilon. > 0$ *знайдеться поліном* $P_n(x)$ *достатньо високого степеня* $n = n(\varepsilon)$ *такий, що*

$$\max_{x\in[a;b]} \left| f(x) - P_n(x) \right| < \varepsilon\,.$$

Зауваження. З цієї теореми випливає можливість рівномірного наближення функцій в класі многочленів. Проте навіть коли вдається побудувати такий многочлен, то, як правило, настільки високого порядку, що його практичне застосування стає нереальним. Крім того, теорема не дає відповіді на питання про існування прийнятого інтерполяційного многочлена для заданої множини точок $\{x_k; y_k\}_{k=0}^{n}$ і не вказує способи його побудови.

Якщо інтерполяційний многочлен подати в стандартному вигляді $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, то невідомі коефіцієнти a_0, a_1, ..., a_n можна знайти з системи рівнянь

$$a_0 + a_1 x_k + ... + a_n x_k^n = y_k ; \quad k = \overline{0,n} .$$

Оскільки визначник цієї системи при $x_k \neq x_l , k \neq l$, $k,l = \overline{0,n}$ відмінний від нуля, то вона має єдиний розв'язок. Знайшовши стандартними процедурами невідомі коефіцієнти a_0, a_1, ..., a_n можна записати інтерполяційний поліном $P_n(x)$.

Але така побудова цього єдиного інтерполяційного многочлена $P_n(x)$ при великому числі вузлів інтерполяції викликає значні труднощі, оскільки потрібно розв'язувати систему високого порядку. Далі розглянемо більш прості в практичній реалізації методи синтезу $P_n(x)$.

4.2.1. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Відомо багато форм запису єдиного інтерполяційного многочлена $P_n(x)$. Розглянемо побудову так званого інтерполяційного полінома Лагранжа.

Нехай досліджувана функція $f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$ своїми значеннями в $n+1$ (у загальному випадку, нерівновіддалених) вузлах $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ і $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$.

Наближену функцію $y = F(x)$ відшукуємо у вигляді інтерполяційного многочлена $F(x) = L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k P_{n,k}(x)$, де $P_{n,k}(x)$

– допоміжний поліном n-го степеня (***коефіцієнт Лагранжа***) такий, що

$$P_{n,k}(x_j)=\begin{cases}0, & k\neq j;\\ 1, & k=j.\end{cases}$$

Оскільки точки $x_0, x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n$ є коренями многочлена $P_{n,k}(x)$, то його можна записати у формі

$$P_{n,k}(x)=A_k(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)\,.$$

Приймемо $x=x_k$ і враховуючи, що $P_{n,k}(x_k)=1$, дістанемо

$$1=A_k(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)\,,$$

звідки $A_k=1/\big((x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)\big)$.

Тоді коефіцієнт Лагранжа $P_{n,k}(x)$ набуває вигляду

$$P_{n,k}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}\,,$$

а інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ можна подати у формі:

$$\boxed{L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}},$$

яку називають ***інтерполяційним многочленом*** (***формулою***) ***Лагранжа***.

Коефіцієнти Лагранжа $P_{n,k}(x)$ і відповідний інтерполяційний многочлен $L_n(x)$ можна записати у стислому вигляді:

$$P_{n,k}(x)=\prod_{j\neq k}\frac{x-x_j}{x_k-x_j},\ k=\overline{0,n};\quad \boxed{L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\prod_{j\neq k}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}}.$$

Для $n=1$ формула Лагранжа має вигляд

$$L_1(x)=y_0\,(x-x_1)/(x_0-x_1)+y_1\,(x-x_0)/(x_1-x_0)$$

і називається ***лінійною інтерполяцією*** за Лагранжем.

Для $n = 2$ отримаємо формулу ***квадратичної інтерполяції*** за Лагранжем:

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} .$$

Приклад 1. Для функції $y = f(x)$, що задана таблицею

k	0	1	2	3
x_k	0	0,5	1	2
y_k	1	2	3	4

побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа.

□ Степінь многочлена Лагранжа при $n+1$ вузлах дорівнює n. Для нашого прикладу $n = 3$, тобто многочлен Лагранжа має третій порядок. Конкретизуємо формулу $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$:

$$L_3(x) = \frac{y_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + \frac{y_1(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$$

$$+ \frac{y_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{y_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} .$$

Підставимо значення з таблиці в отриману формулу:

$$L_3(x) = \frac{1 \cdot (x - 0{,}5)(x - 1)(x - 2)}{(0 - 0{,}5)(0 - 1)(0 - 2)} + \frac{2 \cdot (x - 0)(x - 1)(x - 2)}{(0{,}5 - 0)(0{,}5 - 1)(0{,}5 - 2)} +$$

$$+ \frac{3 \cdot (x - 0)(x - 0{,}5)(x - 2)}{(1 - 0)(1 - 0{,}5)(1 - 2)} + \frac{4 \cdot (x - 0)(x - 0{,}5)(x - 1)}{(2 - 0)(2 - 0{,}5)(2 - 1)} =$$

$$= (31/3)x^3 - (63/2)x^2 + (139/6)x + 1 . \quad \blacksquare$$

Коли інтерполяційний многочлен Лагранжа $L_n(x)$ будують для відомої функції $f(x)$, то можна визначити відхилення

$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ – ***залишковий член*** (***похибку***) ***інтерполювання***. Якщо функція $f(x)$ $(n+1)$ разів диференційовна на відрізку $[a;b]$ і $x, x_0, ..., x_n \in [a;b]$, то

$$R_n(x) = \left(f^{(n+1)}(c)/(n+1)!\right) \cdot (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n),$$

де $c = c(x)$ – деяка невідома точка з інтервалу $(a;b)$.

Тоді абсолютна похибка Δ_y має таку оцінку:

$$\boxed{\Delta_y = |R_n(x)| \le \left(M_{n+1}/(n+1)!\right) \cdot \left|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)\right|},$$

де $\boxed{M_{n+1} = \max\limits_{x \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|}$.

Зауваження. Аналіз одержаної оцінки показує, що абсолютна похибка інтерполяції в середньому буде тим більша, чим ближче лежить точка x до лівого чи правого кінця відрізка $[a;b]$. Якщо ж використовувати інтерполяційний поліном для наближеного знаходження значення функції поза відрізком $[a;b]$ (для екстраполяції), то похибка зростає дуже суттєво.

Приклад 2. З якою точністю можна обчислити $\sqrt{114}$ за допомогою многочлена Лагранжа для функції $f(x) = \sqrt{x}$, вибравши за вузли інтерполяції $a = x_0 = 100,\ x_1 = 121,\ b = x_2 = 144$?

□ Знайдемо першу, другу і третю похідні функції $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}};\quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}};\quad f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}.$$

Тоді $M_3 = \max\limits_{x \in [100;144]} |f'''(x)| = \dfrac{3}{8\sqrt{100^5}} = \dfrac{3}{8} \cdot 10^{-5}$.

Для абсолютної похибки Δ_y інтерполювання дістаємо оцінку:

$$\Delta_y = |R_2(x)| \le \left(M_3/3!\right) \cdot \left|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right| = (3/8) \cdot 10^{-5} \times$$

$$\times (1/6)\left|(114-100)(114-121)(114-144)\right| \approx 1{,}8 \cdot 10^{-3}. \ ■$$

4.2.2. Інтерполяційний многочлен Ньютона для нерівновіддалених вузлів

У практичних розрахунках іноді зручніше використовувати інтерполяційні многочлени Ньютона, степені яких можна послідовно змінювати (шляхом задавання нових вузлів $M_{n+1}(x_{n+1};y_{n+1})$, $M_{n+2}(x_{n+2};y_{n+2})$ і т.д. чи відкидання наявних). На відміну від полінома Лагранжа, де при появі додаткових вузлів треба заново знаходити всі коефіцієнти, у многочлені Ньютона просто з'являються нові доданки, а старі залишаються попередніми. Таким чином, формула Ньютона дозволяє легко зменшувати чи збільшувати число вузлів, що використовуються для інтерполяції, без повторення всіх обчислень.

Нехай на відрізку $[a;b]$ задано одновимірну сітку (з нерівномірним, у загальному випадку, кроком $h_k = x_k - x_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$), у всіх вузлах x_k, $k=\overline{0,n}$ якої відомі значення $y_k = f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$ вхідної функції $y = f(x)$. На сітці визначимо ***розділені різниці*** m-***го порядку*** ($m=\overline{1,n}$) за допомогою наступних рекурентних співвідношень:

$$m=1: \ \ f(x_k;x_{k+1}) = (f(x_{k+1}) - f(x_k))/(x_{k+1}-x_k), \ \ k=\overline{0,n-1};$$

$$m=\overline{2,n}: \ \ f(x_k;x_{k+1};...;x_{k+m}) = \big(f(x_{k+1};x_{k+2};...;x_{k+m}) -$$

$$- f(x_k;x_{k+1};...;x_{k+m-1})\big)/(x_{k+m}-x_k), \ \ k=\overline{0,n-m}.$$

Зауваження 1. $f(x_k;x_{k+1};...;x_{k+m})$ – розділена різниця m-го порядку у точці x_k – дає наближене значення відповідно для m-ї похідної функції $f(x)$ у цій точці.

Для $m=1$ маємо

$$f(x_k;x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k} = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}} + \frac{f(x_{k+1})}{x_{k+1}-x_k} = f(x_{k+1};x_k),$$

тобто розділена різниця першого порядку є симетричною функцією двох своїх аргументів x_k і x_{k+1}.

Застосовуючи метод математичної індукції, можна довести відповідну властивість для розділеної різниці довільного m-го порядку, зокрема,

розділену різницю k*-го порядку* ($k=\overline{1,n}$) *в точці* x_0 *можна виразити через значення функції у* $k+1$ *вузлах інтерполяції у вигляді наступної симетричної функції своїх аргументів*:

$$f(x_0;x_1;...;x_k)=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_k)}.$$

Далі розглянемо многочлен Лагранжа, який подамо у вигляді

$$N_n(x)=L_n(x)=L_0+(L_1-L_0)+(L_2-L_1)+...+(L_n-L_{n-1}).$$

Різниця L_k-L_{k-1} обертається в нуль у точках $x_0;x_1;...;x_{k-1}$. Тому $L_k-L_{k-1}=A_k(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})$, де константу A_k можна знайти, поклавши $x=x_k$. Тоді $L_k=f(x_k)$ і дістанемо $f(x_k)-L_{k-1}(x_k)=A_k(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})$. Звідси, враховуючи формулу інтерполяційного многочлена Лагранжа і одержаний вище вираз для розділеної різниці, маємо $A_k=f(x_0;x_1;...;x_k)$.

Тоді

$$L_k-L_{k-1}=f(x_0;x_1;...;x_k)(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1}),\ k=\overline{1,n}.$$

Підставимо отриманий результат у останній вираз для $L_n(x)$ і дістанемо ***інтерполяційний многочлен*** (***формулу***) ***Ньютона для нерівновіддалених вузлів***:

$$\boxed{N_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0;x_1;x_2)+}$$
$$\boxed{+...+(x-x_0)...(x-x_{n-1})f(x_0;x_1;...;x_n)}.$$

Зауваження 2. Похибка даної формули така ж, як і для полінома Лагранжа.

Зауваження 3. Ті з вузлів, які лежать ближче до точки інтерполювання x, мають більший вплив на інтерполяційний многочлен, ніж вузли, що розміщені далеко. Тому доцільно за x_0 і x_1 обрати найближчі до x вузли, розташовані по різні боки від x, і провести спочатку інтерполяцію за цими вузлами, а потім поступово залучати наступні найменш віддалені вузли таким чином, щоб вони розташовувались найбільш симетрично відносно точки x.

Приклад. Для функції $y = f(x)$, що задана на нерівномірній сітці з $n+1$ вузлами, де $n = 3$, наступною таблицею

k	0	1	2	3
x_k	-1	-0,5	1	2
y_k	1,5	-2	-3,5	1

побудувати інтерполяційний многочлен Ньютона $N_n(x)$. Обчислити наближене значення $\overline{y} = N_n(x)$ функції у точці $x = 0,5$.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Для розділених різниць складемо таблицю вигляду:

k	x_k	$f(x_k)$	$f(x_k;x_{k+1})$	$f(x_k;x_{k+1};x_{k+2})$	$f(x_k;x_{k+1};x_{k+2};x_{k+3})$
0	x_0	$f(x_0)$	$f(x_0;x_1)$	$f(x_0;x_1;x_2)$	$f(x_0;x_1;x_2;x_3)$
1	x_1	$f(x_1)$	$f(x_1;x_2)$	$f(x_1;x_2;x_3)$	–
2	x_2	$f(x_2)$	$f(x_2;x_3)$	–	–
3	x_3	$f(x_3)$	–	–	–

Дістанемо:

k	x_k	$f(x_k)$	$f(x_k;x_{k+1})$	$f(x_k;x_{k+1};x_{k+2})$	$f(x_k;x_{k+1};x_{k+2};x_{k+3})$
0	-1	1,5	-7	3	-0,2667
1	-0,5	-2	-1	2,2	–
2	1	-3,5	4,5	–	–
3	2	1	–	–	–

Конкретизуємо інтерполяційний поліном Ньютона

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})f(x_0;x_1;...;x_k)$$

для $n=3$: $N_3(x)= f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;x_1)+(x-x_0)(x-x_1)\times$

$$\times f(x_0;x_1;x_2)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f(x_0;x_1;x_2;x_3).$$

Підставимо значення з таблиці в отриману формулу:

$$N_3(x)=1{,}5+(x+1)(-7)+(x+1)(x+0{,}5)\cdot 3+(x+1)(x+0{,}5)\times$$

$$\times(x-1)(-0{,}2667)=-0{,}2667x^3+2{,}8667x^2+4{,}7667x-4{,}1333.$$

Обчислимо наближене значення функції у точці $x=0{,}5$:

$$\bar{y}=N_3(0{,}5)=-0{,}2667\cdot 0{,}5^3+2{,}8667\cdot 0{,}5^2+$$

$$+4{,}7667\cdot 0{,}5-4{,}1333=-1{,}0665. \quad \blacksquare$$

4.2.3. Інтерполяційний многочлен Ньютона для рівновіддалених вузлів

Нехай вузли інтерполювання x_k, $k=\overline{0,n}$ визначені на відрізку $[a;b]$ рівномірно зі сталим кроком $h=x_k-x_{k-1}=const>0$, $k=\overline{1,n}$. Тоді можна записати, що $x_k=x_0+kh$, $k=\overline{1,n}$. У всіх вузлах x_k, $k=\overline{0,n}$ сітки відомі значення $y_k=f(x_k)$, $k=\overline{0,n}$ вхідної функції $y=f(x)$.

Введемо поняття скінченних різниць.

Скінченною різницею першого порядку функції $y=f(x)$ у точці x_k (з кроком h) називають величину

$$\Delta f(x_k)=f(x_k+h)-f(x_k)=f(x_{k+1})-f(x_k).$$

Скінченну різницю другого порядку функції $y=f(x)$ у точці x_k визначають зі співвідношення

$$\Delta^2 f(x_k)=\Delta(\Delta f(x_k))=\Delta f(x_{k+1})-\Delta f(x_k)=$$

$$=f(x_{k+2})-2f(x_{k+1})+f(x_k).$$

У загальному випадку ***скінченна різниця*** m ***-го порядку*** у точці x_k визначається за рекурентною формулою:

$$\Delta^m f(x_k) = \Delta(\Delta^{m-1} f(x_k)) = \Delta^{m-1} f(x_{k+1}) - \Delta^{m-1} f(x_k)\,.$$

Зауваження 1. Розділена і скінченна різниці m-го порядку у точці x_k зв'язані залежністю

$$\boxed{f(x_k; x_{k+1}; ...; x_{k+m}) = \Delta^m f(x_0) \big/ (m! h^m)}.$$

Для інтерполювання функції в околі точки x_0 введемо безрозмірну змінну $\boxed{q = (x - x_0)/h}$, звідки $x = x_0 + qh$, і, використовуючи формулу $f(x_0; x_1; ...; x_k) = \Delta^k f(x_0) \big/ (k! h^k)$, перетворимо інтерполяційний поліном Ньютона для нерівновіддалених вузлів до форми

$$\boxed{N_n(x) = f(x_0) + \frac{q}{1!}\Delta f(x_0) + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) +}$$

$$\boxed{+ ... + \frac{q(q-1)...(q-n+1)}{n!}\Delta^n f(x_0)},$$

яка називається ***інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполяції вперед***.

Звідси маємо формули ***лінійної*** (для $n = 1$) та ***квадратичної*** (для $n = 2$) ***інтерполяції*** за Ньютоном, відповідно

$$N_1(x) = f(x_0) + q\Delta f(x_0)\,;$$

$$N_2(x) = f(x_0) + q\Delta f(x_0) + \big(q(q-1)/2\big)\,\Delta^2 f(x_0)\,.$$

Для інтерполювання функції в околі точки x_n введемо безрозмірну змінну $\boxed{q = (x - x_n)/h}$, звідки $x = x_n + qh$. За допомогою аналогічних перетворень інтерполяційного полінома Ньютона для нерівновіддалених вузлів, записаного у вигляді

$$N_n(x) = f(x_n) + (x - x_n) f(x_{n-1}; x_n) + (x - x_n)(x - x_{n-1}) \times$$

$$\times f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) + (x - x_n)...(x - x_1) f(x_0; x_1; ...; x_n)\,,$$

дістанемо ***інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполяції назад***:

$$\boxed{N_n(x) = f(x_n) + \frac{q}{1!}\Delta f(x_{n-1}) + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 f(x_{n-2}) +}$$

$$\boxed{+\ldots+\frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n f(x_0)\,.}$$

Похибку формули Ньютона для інтерполяції вперед і назад оцінюють за співвідношеннями, відповідно:

$$\left|R_n(x)\right| \le (M_{n+1}/(n+1)!)h^{n+1}\left|q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)\right|;$$

$$\left|R_n(x)\right| \le (M_{n+1}/(n+1)!)h^{n+1}\left|q(q+1)(q+2)\ldots(q+n)\right|.$$

Тут $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a;b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

Оскільки аналітичний вираз функції $y = f(x)$, як правило, невідомий, то вважаючи, що $\Delta^{n+1} f(x)$ майже сталі, а h достатньо мале, можна припустити, що $f^{(n+1)}(x) \approx (\Delta^{n+1} f(x_0))/h^{n+1}$ і $f^{(n+1)}(x) \approx (\Delta^{n+1} f(x_n))/h^{n+1}$. Тоді похибки многочленів Ньютона для інтерполяції вперед і назад, відповідно, будуть

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{\left|q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)\right|}{(n+1)!}\left|\Delta^{n+1} f(x_0)\right|;$$

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{\left|q(q+1)(q+2)\ldots(q+n)\right|}{(n+1)!}\left|\Delta^{n+1} f(x_n)\right|.$$

Зауваження 2. Інтерполяцію вперед краще використовувати для інтерполяції ближче до лівого кінця відрізка $[a;b]$ і для екстраполяції лівіше точки $x = a$, а інтерполяцію назад – для інтерполяції ближче до правого кінця відрізка $[a;b]$ і для екстраполяції правіше точки $x = b$.

Приклад 1. Функцію $y = f(x) = e^{2x}$ задано таблицею значень

k	0	1	2	3
x_k	1,803	1,808	1,813	1,818
$f(x_k)$	36,81839	37,18843	37,56218	37,93968

Обчислити наближене значення $\bar{y}$ функції у точці $\bar{x} = 1{,}805$ за формулою квадратичної інтерполяції $\bar{y} = N_2(\bar{x})$ і оцінити похибку.

Вказівка. Похибки заокруглення не враховувати. Обчислення здійснювати з точністю до п’яти десяткових знаків після коми.

□ Оскільки точка $\bar{x} = 1{,}805$ розміщена ближче до лівого кінця відрізка інтерполяції, то знаходимо $\bar{q} = (\bar{x} - x_0)/h = 0{,}4$ і застосовуємо формулу квадратичної інтерполяції вперед, використовуючи розміщені по різні боки від цієї точки найближчі три вузла x_0, x_1 і x_2 (вузол x_3 участі не приймає):

$$N_2(x) = f(x_0) + q\Delta f(x_0) + \big(q(q-1)/2\big)\,\Delta^2 f(x_0)\,.$$

Обчислимо необхідні скінченні різниці до другого порядку включно при $h = 0{,}005$ та запишемо їх у таблицю:

k	x_k	$f(x_k)$	$\Delta f(x_k)$	$\Delta^2 f(x_k)$
0	1,803	36,81839	0,37004	0,00371
1	1,808	37,18843	0,37375	–
2	1,813	37,56218	–	–

Тоді $\bar{y} = N_2(\bar{x}) = 36{,}81839 + 0{,}4 \cdot 0{,}37004 +$

$$+\big(0{,}4 \cdot (0{,}4-1)/2\big) \cdot 0{,}00371 = 36{,}96596\,.$$

Похибка має вигляд $\Delta_y = \left|R_2(x)\right| \le (M_3/3!)h^3\left|q(q-1)(q-2)\right|$, де $M_3 = \max\limits_{x \in [1{,}803;1{,}813]}\left|f'''(x)\right| = 8e^{3{,}626}$. Отже, отримаємо

$$\Delta_y \le (8e^{3{,}636}/3!)(0{,}005)^3 \cdot \left|0{,}4 \cdot (0{,}4-1)(0{,}4-2)\right| \approx 0{,}3 \cdot 10^{-5}\,.$$

Значить, у відповіді $\bar{y} = 36{,}96596$ всі цифри є вірними. ■

Приклад 2. На відрізку $[-2;2]$ задана функція $y = f(x)$ набором точок $M_0(-2;-3)$, $M_1(-1;0)$, $M_2(0;3)$, $M_3(1;1)$, що належать її графіку. Користуючись інтерполяційним поліномом Ньютона третього порядку для інтерполяції назад, знайти наближене значення $\bar{y} = N_3(\bar{x})$ функції в точці $\bar{x} = 0{,}5$.

□ (Розв’язати самостійно). Відповідь: $\bar{y} = 2{,}9375$. ■

4.3. Інтерполяція поліноміальними сплайнами

Якщо вхідна функція має особливості в деяких точках інтервалу інтерполяції, то вона погано наближатиметься поліномом на всьому цьому проміжку. При роботі з многочленами в процесі обчислень швидко накопичуються похибки заокруглення, що стають значними вже при $n > 20$. Крім того, графіки поліномів високих степенів, як правило, мають осциляції.

Для подолання вказаних недоліків можна використовувати кусково апроксимуючі функції, сформовані з локальних многочленів. При цьому необхідно ставити вимоги достатньої гладкості спряження графіків цих поліномів: щоб у кожній точці з'єднання сусідніх ділянок многочлени, які належать лівій та правій ділянкам, і похідні від них до певного порядку співпадали.

Цю задачу розв'язують так звані ***поліноміальні сплайни***. Термін ***сплайн*** походить від англійського s*pline* (планка), що означає пружну гнучку лінійку, призначену для проведення гладкої кривої через задані точки.

Сплайн-інтерполяція відрізняється від поліноміальної кращою збіжністю та обчислювальною стійкістю.

Нехай на відрізку $[a;b]$ введено одновимірну сітку

$$\omega_n = \{x_k : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_n = b\}.$$

Функцію $S_{l,m}(x)$ називають ***поліноміальним сплайном степеня*** l ***дефекту гладкості*** m ($0 \le m \le l$) на $[a;b]$, якщо виконуються умови:

1) функція $S_{l,m}(x)$ має на $[a;b]$ неперервні похідні до порядку $l-m$ включно;

2) На кожному елементарному відрізку $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$ функція $S_{l,m}(x)$ є многочленом степеня не вище l.

Сплайн $S_{l,m}(x)$ можна розглядати як скінченну сукупність гладко (до похідних ($l-m$)-го порядку) склеєних у вузлах x_k, $k=\overline{1,n-1}$ поліномів l-го степеня $\boxed{P_{lk}(x) = \sum_{i=0}^{l} a_{ki}(x-x_{k-1})^i}$:

$$\boxed{S_{l,m}(x) = \sum_{k=1}^{n} P_{lk}(x)\big(\eta(x - x_{k-1}) - \eta(x - x_k)\big)},$$

де a_{ki} – сталі коефіцієнти ($k = \overline{1,n}$, $i = \overline{0,l}$); $\eta(t)$ – одинична функція, що визначається формулою $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Точки x_k, $k = \overline{0,n}$ називаються ***вузлами*** сплайна $S_{l,m}(x)$, внутрішні з яких x_k, $k = \overline{1,n-1}$ служать його ***вузлами спряження***, де виконуються умови гладкості:

$$\boxed{S_{l,m}^{(i)}(x_k - 0) = S_{l,m}^{(i)}(x_k + 0); \;\; i = \overline{0,l-m}; \;\; k = \overline{1,n-1}},$$

тобто $\boxed{P_{lk}^{(i)}(x_k) = P_{l(k+1)}^{(i)}(x_k); \;\; i = \overline{0,l-m}; \;\; k = \overline{1,n-1}}$.

Зауваження 1. У крайніх вузлах x_0 і x_n звичайно задаються деякі додаткові умови. Наприклад, ***природні крайові*** (***граничні***) ***умови***: $S_{l,m}^{(l-m)}(x_0) = 0$ і $S_{l,m}^{(l-m)}(x_n) = 0$, тобто $P_{l1}^{(l-m)}(x_0) = 0$ і $P_{ln}^{(l-m)}(x_n) = 0$.

Зауваження 2. Якщо сплайн використовують для екстраполяції, то покладають:

$$S_{l,m}(x) = P_{l1}(x),\; x \in (-\infty, x_0) \;\text{ і }\; S_{l,m}(x) = P_{ln}(x),\; x \in (x_n, +\infty).$$

Зауваження 3. Вибір порядку сплайна, кількості та розміщення вузлів відповідає задачі вибору класу апроксимуючих функцій і для її розв'язування, на жаль, немає точних процедур для всіх можливих випадків. Рекомендується:

– використовувати сплайни невисокого степеня;
– вводити настільки мало вузлів, наскільки це можливо;
– на кожному елементарному проміжку мати не більше однієї точки екстремуму, що лежить поблизу його середини;
– точки перегину повинні знаходитися в околі вузлів.

Зауваження 4. На практиці найчастіше застосовуються поліноміальні сплайни невисокого непарного степеня дефекту один. Надалі обмежимося тільки такими сплайнами і термін "дефект" будемо опускати.

4.3.1. Лінійний інтерполяційний сплайн

Нехай функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[a;b]$ таблично своїми значеннями $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ у вузлах одновимірної сітки $\omega_n = \{x_k : a = x_0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_n = b\}$. На кожному з елементарних відрізків $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$ наближено замінюємо функцію $y = f(x)$ відрізком прямої (лінійною функцією $P_{1k}(x)$):

$$P_{1k}(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}(y_k - y_{k-1}) + y_{k-1}, \quad k = \overline{1,n}.$$

У результаті на відрізку $[a;b]$ крива $y = f(x)$ наближається ламаною з вузлами $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, …, $M_n(x_n; y_n)$. Таким чином, одержуємо інтерполяцію цієї функції ***лінійним сплайном***

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{n} P_{1k}(x)\big(\eta(x - x_{k-1}) - \eta(x - x_k)\big) =$$

$$= \begin{cases} P_{11}(x), \ x \in [x_0; x_1]; \\ P_{12}(x), \ x \in [x_1; x_2]; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_{1n}(x), \ x \in [x_{n-1}; x_n] \end{cases}$$

з $n-1$ вузлами спряження x_k, $k = \overline{1, n-1}$ і крайніми вузлами $x_0 = a$, $x_n = b$.

Зауваження. Кількість вузлів лінійного сплайну дорівнює числу вузлів інтерполяції, причому всі вони відповідно попарно співпадають.

Приклад 1. Функцію $y = f(x)$, що задана таблицею

k	0	1	2	3
x_k	-2	0	2	4
$y_k = f(x_k)$	2,5	1	3,5	-2

інтерполювати лінійним сплайном $y = S_1(x)$.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Побудуємо лінійний інтерполяційний сплайн $S_1(x)$. Для цього розіб'ємо відрізок інтерполяції $[-2;4]$ на $n=3$ елементарні відрізки, які визначаються сусідніми числами другого рядка таблиці, і на кожному з них введемо многочлен першого порядку, тобто замінимо частинну дугу кривої $y=f(x)$ відрізком прямої. Тоді

$$S_1(x)=\begin{cases} P_{11}(x), & x\in[-2;0]; \\ P_{12}(x), & x\in[0;2]; \\ P_{13}(x), & x\in[2;4], \end{cases},$$

де

$$P_{11}(x)=\frac{x-(-2)}{0-(-2)}(1-2{,}5)+2{,}5=\frac{-3x}{4}+1=-0{,}75x+1;$$

$$P_{12}(x)=\frac{x-0}{2-0}(3{,}5-1)+1=1{,}25x+1;$$

$$P_{13}(x)=\frac{x-2}{4-2}(-2-3{,}5)+3{,}5=-2{,}75x+9.$$

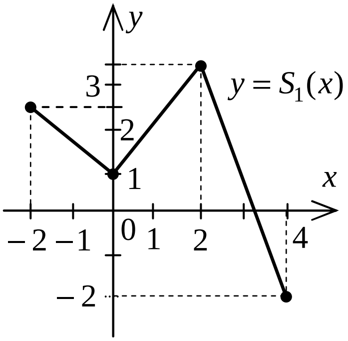

Рис. 13

На рис. 13 зображено графік шуканого лінійного сплайну

$$S_1(x)=\begin{cases} -0{,}75x+1, & x\in[-2;0]; \\ 1{,}25x+1, & x\in[0;2]; \\ -2{,}75x+9, & x\in[2;4]. \end{cases} \quad ■$$

Зауваження 2. Недоліком лінійного сплайну є різка зміна характеру монотонності у вузлах. Для його подолання можна побудувати квадратичний сплайн $S_2(x)$, проте $S_2(x)$ не забезпечує плавності зміни кривини у вузлах. (Тому сплайн $S_2(x)$ не розглядаємо).

Приклад 2. На відрізку $[-4;2]$ задана функція $y = f(x)$ набором точок $M_0(-4;2{,}5)$, $M_1(-2;-1)$, $M_2(0;1{,}5)$, $M_3(2;-1)$, що належать її графіку. Інтерполювати цю функцію лінійним сплайном $y = S_1(x)$. Користуючись одержаним сплайном, знайти наближене значення $\bar{y} = S_1(x)$ функції в точці $x = -1{,}5$.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ (Розв'язати самостійно). ■

4.3.2. Кубічний інтерполяційний сплайн

Якщо на кожному з елементарних відрізків $[x_{k-1}, x_k]$ $k = \overline{1,n}$ між сусідніми вузлами інтерполяції наближено замінити функцію $y = f(x)$ многочленом третього порядку

$$P_{3k}(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3 =$$

$$= a_k + b_k q_k + c_k q_k^2 + d_k q_k^3,\; q_k = x - x_{k-1},$$

то дістанемо інтерполяцію функції $f(x)$ ***кубічним сплайном***

$$S_3(x) = \sum_{k=1}^{n} P_{3k}(x)\big(\eta(x - x_{k-1}) - \eta(x - x_k)\big)$$

з вузлами x_k, $k = \overline{0,n}$, що співпадають з відповідними вузлами інтерполяції.

Для сплайну $S_3(x)$ у вузлах спряження x_k, $k = \overline{1,n-1}$ виконуються умови гладкості:

$$P_{3k}(x_k) = P_{3(k+1)}(x_k);\; P'_{3k}(x_k) = P'_{3(k+1)}(x_k);$$

$$P''_{3k}(x_k) = P''_{3(k+1)}(x_k),$$

а на кінцях відрізка інтерполяції – однорідні граничні умови:

$$P''_{31}(x_0) = 0;\; P''_{3n}(x_n) = 0.$$

Розглянемо процедуру знаходження коефіцієнтів a_k, b_k, c_k і d_k ($k = \overline{1,n}$).

З умов інтерполяції $S_3(x_k) = y_k$ та неперервності сплайну $P_{3k}(x_k) = P_{3(k+1)}(x_k)$ маємо

$$P_{3k}(x_{k-1}) = a_k = y_{k-1}; \quad P_{3k}(x_k) = a_k + b_k q_k + c_k q_k^2 + d_k q_k^3 = y_k.$$

Знайдемо похідні

$$P'_{3k}(x) = b_k + 2c_k q_k + 3d_k q_k^2; \quad P''_{3k}(x) = 2c_k + 6d_k q_k.$$

З умови неперервності похідних $S'_3(x)$ і $S''_3(x)$ маємо

$$b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2 = b_{k+1}; \quad 2c_k + 6d_k h_k = 2c_{k+1}, \ h_k = x_k - x_{k-1}.$$

З граничних умов одержуємо $2c_1 = 0$ і $2c_n + 6d_n h_n = 0$.

Таким чином, $\boxed{a_k = y_{k-1}, \ k = \overline{1,n}}$, а для обчислення інших $3n$ коефіцієнтів b_k, c_k і d_k, $k = \overline{1,n}$ маємо систему з $3n$ лінійних рівнянь. Методом вилучення задача зводиться до знаходження b_k і d_k, $k = \overline{1,n}$ за рекурентними співвідношеннями:

$$\boxed{b_k = (y_k - y_{k-1})/h_k - h_k(c_{k+1} + 2c_k)/3, \ k = \overline{1,n-1}};$$

$$\boxed{b_n = (y_n - y_{n-1})/h_n - 2h_n c_n/3};$$

$$\boxed{d_k = (c_{k+1} - c_k)/(3h_k), \ k = \overline{1,n-1}; \ d_n = -c_n/(3h_n)}$$

після попереднього розв'язання наступного ***різницевого рівняння*** для c_k:

$$\boxed{h_k c_k + 2(h_k + h_{k+1})c_{k+1} + h_{k+1}c_{k+2} = 3\big((y_{k+1} - y_k)/h_{k+1} -}$$

$$\boxed{-(y_k - y_{k-1})/h_k\big), \ k = \overline{1,n-1}}$$

з ***різницевими крайовими умовами***

$$\boxed{c_1 = 0; \ c_{n+1} = 0},$$

де друга рівність $c_{n+1} = 0$ еквівалентна системі, що включає умову $c_n + 3d_n h_n = 0$ і рівняння $c_{k+1} = c_k + 3d_k h_k$ при $k = n$.

Сформульованій ***різницевій крайовій задачі*** для c_k відповідає лінійна система з трьохдіагональною матрицею (ненульовими в ній є тільки елементи головної і двох найближчих сусідніх діагоналей). Такі системи економно розв’язуються ***методом прогонки*** – модифікацією методу Гауса, що враховує особливості їх структури.

Приклад. Функцію $y = f(x)$, що задана на відрізку $[-2;4]$ таблицею

k	0	1	2	3
x_k	-2	0	2	4
$y_k = f(x_k)$	2,5	1	3,5	-2

інтерполювати кубічним сплайном $y = S_3(x)$. Обчислити значення отриманого кубічного сплайна $y = S_3(x)$ на відрізку $[-3;4]$ з кроком $h_d = 0{,}5$ (тобто, застосувати інтерполяцію на відрізку $[-2;4]$ та екстраполяцію за його межами), скласти відповідну таблицю і побудувати графік $y = S_3(x)$, $x \in [-3;4]$.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Вузли інтерполяції x_k, $k = \overline{0,n}$, $n = 3$ розміщені на відрізку $[a;b] = [-2;4]$ з рівномірним кроком $h = (b-a)/n = (4+2)/3 = 2$. Для інтерполяційного кубічного сплайну

$$S_3(x) = \begin{cases} P_{31}(x), & x \in [-2;0]; \\ P_{32}(x), & x \in [0;2]; \\ P_{33}(x), & x \in [2;4], \end{cases}$$

де

$$P_{3k}(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3,\ k = \overline{1,3},$$

одержуємо наступні розрахункові формули для коефіцієнтів:

$$a_k = y_{k-1},\ k = \overline{1,3};\ \ b_1 = (y_3 - 6y_2 + 24y_1 - 19y_0)/(15h);$$

$$b_2 = (-2y_3 + 12y_2 - 3y_1 - 7y_0)/(15h);$$

$$b_3 = (7y_3 + 3y_2 - 12y_1 + 2y_0)/(15h);$$

$$c_1 = 0; \quad c_2 = (-y_3 + 6y_2 - 9y_1 + 4y_0)\big/(5h^2);$$

$$c_3 = (4y_3 - 9y_2 + 6y_1 - y_0)\big/(5h^2);$$

$$d_1 = c_2\big/(3h); \; d_2 = (c_3 - c_2)\big/(3h); \; d_3 = -c_3\big/(3h).$$

Обчислимо значення коефіцієнтів:

$$a_1 = y_0 = 2{,}5; \; a_2 = y_1 = 1; \; a_3 = y_2 = 3{,}5;$$

$$b_1 = (-2 - 6\cdot 3{,}5 + 24\cdot 1 - 19\cdot 2{,}5)/(15\cdot 2) = -1{,}55;$$

$$b_2 = (-2\cdot(-2) + 12\cdot 3{,}5 - 3\cdot 1 - 7\cdot 2{,}5)/(15\cdot 2) = 0{,}85;$$

$$b_3 = (7\cdot(-2) + 3\cdot 3{,}5 - 12\cdot 1 + 2\cdot 2{,}5)/(15\cdot 2) = -0{,}35;$$

$$c_1 = 0; \quad c_2 = (-(-2) + 6\cdot 3{,}5 - 9\cdot 1 + 4\cdot 2{,}5)\big/(5\cdot 2^2) = 1{,}2;$$

$$c_3 = (4\cdot(-2) - 9\cdot 3{,}5 + 6\cdot 1 - 2{,}5)\big/(5\cdot 2^2) = -1{,}8;$$

$$d_1 = 1{,}2/(3\cdot 2) = 0{,}2; \; d_2 = (-1{,}8 - 1{,}2)/(3\cdot 2) = -0{,}5;$$

$$d_3 = -(-1{,}8)/(3\cdot 2) = 0{,}3.$$

Отже, кубічний сплайн $S_3(x)$ для функції $f(x)$ має вигляд:

$$S_3(x) = \begin{cases} 2{,}5 - 1{,}55\cdot(x+2) + 0{,}2\cdot(x+2)^3, \; x \in [-2;0]; \\ 1 + 0{,}85\cdot x + 1{,}2\cdot x^2 - 0{,}5\cdot x^3, \; x \in [0;2]; \\ 3{,}5 - 0{,}35\cdot(x-2) - 1{,}8\cdot(x-2)^2 + 0{,}3\cdot(x-2)^3, \; x \in [2;4]. \end{cases}$$

Обчислимо таблицю значень $y = S_3(x)$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5
$S_3(x)$	3,85	3,25	2,5	1,75	1,15	0,85	1	1,6625

k	8	9	10	11	12	13	14
x_k	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$S_3(x)$	2,55	3,2875	3,5	2,9125	1,65	-0,0625	-2

Графік кубічного сплайну $y = S_3(x)$ на відрізку $[-3;4]$ зображено на рис. 14. ■

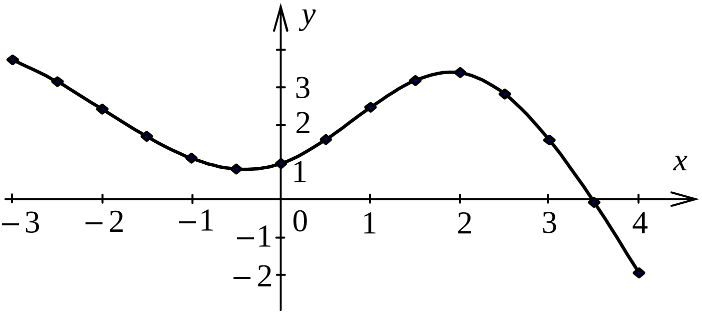

Рис. 14

Зауваження. Кубічні сплайни мають дуже важливу властивість, яка обумовлює високу ефективність сплайн-інтерполяції: *серед усіх інтерполяційних функцій* $y = F(x)$, *які неперервні до другої похідної включно на відрізку* $[a;b]$, *саме кубічний сплайн* $y = S_3(x)$ *з однорідними крайовими умовами* $S_3''(a) = S_3''(b) = 0$ *мінімізує функціонал гладкості* $J(F) = \int_a^b (F''(x))^2 dx$, тобто *кубічний сплайн характеризується найменшою* (*в смислі вказаного функціоналу*) *кривиною.*

4.4. Апроксимація за методом найменших квадратів

Наближення за методом найменших квадратів часто застосовують для згладжування табличних функцій, отриманих у результаті експерименту, а також для зменшення обсягу інформації про табличні функції при невисоких вимогах до точності подання їх значень.

Застосування інтерполяції в цьому випадку невиправдане, оскільки значення вхідної функції у вузлах $y_k = f(x_k)$ є неточними. Інтерполяційна формула повторить всі похибки в експериментальних даних. Крім того, збіг значень у вузлах не гарантує близькості характерів поведінки вхідної $y = f(x)$ та апроксимуючої $y = F(x)$ функцій.

Зауваження 1. Грубі похибки, що явно спотворюють експериментальні дані, звичайно зникають при повторенні дослідів. Їх відкидають і далі не враховують. Систематичні похибки звичайно дають відхилення в один бік від справжнього значення. Їх можна усунути налагодженням вимірювальної апаратури чи введенням відповідних поправок. Випадкові похибки можуть бути зменшені до як завгодно малої величини багатократним повторенням експериментів. Проте це не завжди доцільно, бо може вимагати великих затрат.

Нехай вхідна функція $y = f(x)$ задана таблицею значень $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, …, $y_n = f(x_n)$ для скінченної множини точок $x_0, x_1, ..., x_n$. Припускаємо, що значення функції y_k, $k = \overline{0,n}$ відомі з похибками.

Розглянемо застосування методу найменших квадратів у поширеному на практиці випадку лінійної за невідомими параметрами апроксимуючої функції $y = F(x)$. Нехай наближена функція подана у вигляді узагальненого многочлена $F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x)$, де $\{\varphi_i(x)\}$ – деяка фіксована система лінійно незалежних базисних функцій; $a_0, a_1, ..., a_m$ – невідомі коефіцієнти.

Згідно з МНК оптимальні значення коефіцієнтів $a_0, a_1, ..., a_m$ визначимо з умови, щоб сума квадратів відхилень (нев'язок) $\rho_2(a_0, a_1, ..., a_m)$ значень $F(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ наближеної функції від відповідних значень $f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ вхідної функції – була мінімальною:

$$\rho_2(a_0, a_1, ..., a_m) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(x_k) - F(x_k) \right)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(f(x_k) - \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x_k) \right)^2 \to \min .$$

У випадку лінійно параметризованої моделі $y = F(x)$ сума $\rho_2(a_0, a_1, ..., a_m)$ є квадратичною функцією відносно шуканих коефіцієнтів, що має єдиний екстремум – мінімум. Оскільки в точці мінімуму всі частинні похідні $\partial\rho_2 / \partial a_j$, $j = \overline{0,m}$ перетворюються в нуль, то, використовуючи цей факт – необхідні умови екстремуму, дістанемо систему рівнянь ($m+1$)-го порядку

$$\sum_{k=0}^{n} \left(f(x_k) - \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x_k) \right) \varphi_j(x_k) = 0, \quad j = \overline{0,m}$$

або

$$\sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) \right) a_i = \sum_{k=0}^{n} \varphi_j(x_k) f(x_k), \quad j = \overline{0,m}.$$

Точність апроксимації за МНК оцінюється на основі мінімального значення суми $\rho_2(a_0, a_1, ..., a_m)$ або відповідного ***середньоквадратичного відхилення*** $\boxed{\Delta y_s = \sqrt{\rho_2(a_0, a_1, ..., a_m)/(n+1)}}$.

Зауваження 2. У теорії ймовірностей доводиться, що у випадку, коли відхилення розподілені за нормальним законом, МНК-оцінки параметрів $a_0, a_1, ..., a_m$ є ***спроможними*** (при $n \to \infty$ збігаються за ймовірністю до істинних значень), ***незміщеними*** (не містять систематичних похибок), ***ефективними*** (при заданому об'ємі $n+1$ вхідних даних мають найменші дисперсії).

Нехай за апроксимуючу функцію взято звичайний алгебраїчний многочлен m-го степеня

$$F(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m.$$

Тоді після рівносильних перетворень система необхідних умов екстремуму відносно матриці-стовпця $X = (a_0 \ a_1 \ ... \ a_m)^T$ шуканих коефіцієнтів набуває стандартного вигляду $AX = B$:

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k + ... + a_m \sum_{k=0}^{n} x_k^m = \sum_{k=0}^{n} f(x_k); \\ a_0 \sum_{k=0}^{n} x_k + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + ... + a_m \sum_{k=0}^{n} x_k^{m+1} = \sum_{k=0}^{n} x_k f(x_k); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 \sum_{k=0}^{n} x_k^m + a_1 \sum_{k=0}^{n} x_k^{m+1} + ... + a_m \sum_{k=0}^{n} x_k^{2m} = \sum_{k=0}^{n} x_k^m f(x_k). \end{cases}$$

Елементи a_{ij} $(i, j = \overline{0,m})$ квадратної матриці системи A і компоненти b_i $(i = \overline{0,m})$ матриці-стовпця правих частин B обчислюються за формулами:

$$a_{ij} = \sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j} \ \ (i, j = \overline{0,m}); \ \ b_i = \sum_{k=0}^{n} x_k^i f(x_k). \ (i = \overline{0,m}).$$

Після визначення коефіцієнтів і правих частин лінійну систему $AX = B$ можна розв`язати будь-яким з відомих методів, наприклад методом Гауса.

Зауваження 3. Якщо $F(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$ – алгебраїчний многочлен m-го степеня, то при $m = n$, як окремий випадок, маємо інтерполяцію за $n+1$ вузлами x_k, $k = \overline{0,n}$. На практиці для одержання стійкого ефекту згладжування наближену функцію $F(x)$ вибирають так, що $m << n$ (звичайно, $m \sim n/3 \div n/2$).

Зауваження 4. Коли клас вхідної функції невідомий, то вигляд апроксимуючої функції може бути довільним. Перевага віддається найпростішим лінійно параметризованим моделям, що забезпечують достатню точність. Наближені функції, що нелінійно залежать від шуканих коефіцієнтів, застосовуються значно рідше, оскільки їх параметрична ідентифікація досить складна і вимагає значних зусиль.

Далі розглянемо найбільш поширені випадки поліноміальної апроксимації за МНК за допомогою многочленів до третього порядку включно та кубічного сплайну.

4.4.1. Лінійна апроксимація

Найпростішою (при $m = 1$) є залежність $F(x) = a_0 + a_1 x$ – ***лінійна регресія***. Близькість експериментального розподілу точок $M_0(x_0; y_0)$, $M_1(x_1; y_1)$, …, $M_n(x_n; y_n)$ до ***лінії регресії*** – прямої $y = a_0 + a_1 x$ легко проглядається після їх побудови в одній прямокутній системі координат.

Зауваження. У ряді випадків до лінійної регресії можна звести інші залежності за допомогою заміни змінних $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$, у результаті якої експериментальні точки $M_0(u_0; v_0)$, $M_1(u_1; v_1)$, …, $M_n(u_n; v_n)$ у новій системі координат (u, v) розміщуються приблизно вздовж деякої прямої.

Для лінійної регресії $F(x)=a_0+a_1x$ система необхідних умов екстремуму суми квадратів відхилень $\rho_2(a_0,a_1)$ набуває вигляду

$$\begin{cases} a_0(n+1)+a_1\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} f(x_k); \\ a_0\sum_{k=0}^{n} x_k + a_1\sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \sum_{k=0}^{n} x_k f(x_k). \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, дістанемо оптимальні МНК-оцінки коефіцієнтів a_0 і a_1.

Приклад. Функція $f(x)$ задана таблицею

k	0	1	2	3
x_k	-3	-1	1	3
$y_k = f(x_k)$	-4,5	2,5	-2	-1,5

Знайти апроксимацію цієї функції $f(x)$ лінійною регресією $F(x)=a_0+a_1x$ за методом найменших квадратів. Обчислити значення отриманої лінійної регресії $y=a_0+a_1x$ на кінцях відрізка $[-3;4]$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення Δy_s лінійної регресії від заданих значень вхідної функції.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Застосуємо лінійну апроксимацію $F(x)=a_0+a_1x$. Проведемо попередні обчислення і заповнимо таблицю

k	x_k	$f(x_k)$	x_k^2	$x_k f(x_k)$
0	-3	-4,5	9	13,5
1	-1	2,5	1	-2,5
2	1	-2	1	-2
3	3	-1,5	9	-4,5
$\sum$	0	-5,5	20	4,5

Складемо і розв’яжемо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a_0(3+1)+a_1\cdot 0=-5{,}5; \\ a_0\cdot 0+a_1\cdot 20=4{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a_0=-5{,}5; \\ 20a_1=4{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} a_0=-1{,}375; \\ a_1=0{,}225. \end{cases}$$

Отже, $y=-1{,}375+0{,}225x$ – шукана лінійна регресія.

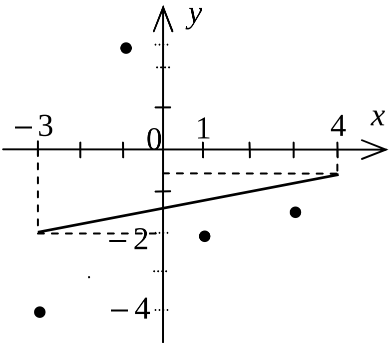

Рис. 15

Обчислимо значення отриманої лінійної апроксимації та складемо відповідну таблицю і побудуємо графік – лінію регресії $y=-1{,}375+0{,}225x$ (рис. 15).

x	-3	4
$y=a_0+a_1x$	-2,05	-0,475

Знайдемо середньоквадратичне відхилення Δy_s:

$$\Delta y_s=\sqrt{\frac{1}{n+1}\rho_2(a_0,a_1,...,a_m)}=$$

$$=\sqrt{\left(1/(n+1)\right)\sum_{k=0}^{n}(y_k-a_0-a_1x_k)^2}=(1/2)\Big((-4{,}5+2{,}05)^2+$$

$$+(2{,}5+1{,}6)^2+(-2+1{,}15)^2+(-1{,}5+0{,}7)^2\Big)^{1/2}=2{,}4584. \ ■$$

4.4.2. Квадратична апроксимація

Розглянемо випадок $m=2$, коли апроксимуюча функція є квадратичним тричленом $F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$. Таке наближення називають ***квадратичною регресією***. Лінією регресії служить парабола. При цьому система необхідних умов екстремуму суми квадратів відхилень $\rho_2(a_0,a_1,a_2)$ набуває вигляду

$$\begin{cases} a_0(n+1)+a_1\sum_{k=0}^{n}x_k+a_2\sum_{k=0}^{n}x_k^2=\sum_{k=0}^{n}f(x_k); \\ a_0\sum_{k=0}^{n}x_k+a_1\sum_{k=0}^{n}x_k^2+a_2\sum_{k=0}^{n}x_k^3=\sum_{k=0}^{n}x_kf(x_k); \\ a_0\sum_{k=0}^{n}x_k^2+a_1\sum_{k=0}^{n}x_k^3+a_2\sum_{k=0}^{n}x_k^4=\sum_{k=0}^{n}x_k^2f(x_k). \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, дістанемо оптимальні значення коефіцієнтів квадратичної апроксимації $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

Приклад. За методом найменших квадратів знайти квадратичну апроксимацію $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ функції $f(x)$, що задана таблицею

k	0	1	2	3
x_k	-3	-1	1	3
$y_k = f(x_k)$	-4,5	2,5	-2	-1,5

Обчислити значення отриманої квадратичної регресії $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ на відрізку $[-3;4]$ з кроком $h_d = 0{,}5$, скласти відповідну таблицю і побудувати графік. Знайти середньоквадратичне відхилення Δy_s наближеної функції від заданих значень вхідної функції.

Вказівка. Обчислення здійснювати з точністю до чотирьох десяткових знаків після коми.

□ Застосуємо апроксимацію $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Проведемо попередні обчислення і запишемо результати в таблицю

k	x_k	$f(x_k)$	x_k^2	$x_k f(x_k)$
0	-3	-4,5	9	13,5
1	-1	2,5	1	-2,5
2	1	-2	1	-2
3	3	-1,5	9	-4,5
$\sum$	0	-5,5	20	4,5

k	x_k^3	$x_k^2 f(x_k)$	x_k^4
0	-27	-40,5	81
1	-1	2,5	1
2	1	-2	1
3	27	-13,5	81
$\sum$	0	-53,5	164

Складемо і розв'яжемо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} a_0\cdot 4+a_1\cdot 0+a_2\cdot 20=-5{,}5; \\ a_0\cdot 0+a_1\cdot 20+a_2\cdot 0=4{,}5; \\ a_0\cdot 20+a_1\cdot 0+a_2\cdot 164=-53{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} a_0=0{,}6563; \\ a_1=0{,}225; \\ a_2=-0{,}4063. \end{cases}$$

Отже, $y=0{,}6563+0{,}225x-0{,}4063x^2$ – шукана квадратична регресія. Обчислимо значення $y=0{,}6563+0{,}225x-0{,}4063x^2$ на відрізку $[-3;4]$ з кроком $h_d=0{,}5$ і складемо відповідну таблицю

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x_k	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	-3,6754	-2,4456	-1,4189	-0,5954	0,0250	0,4422	0,6563	0,6672	0,4750	0,0796	-0,5189	-1,3206	-2,3254	-3,5334	-4,9445

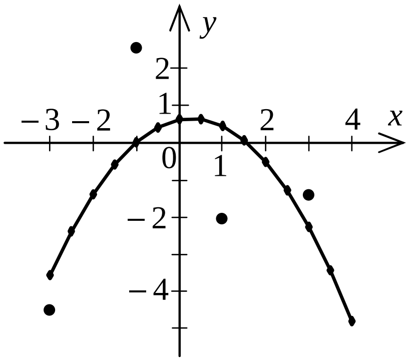

Рис. 16

За даними таблиці будуємо графік квадратичної регресії

$$y=0{,}6563+0{,}225x-0{,}4063x^2$$

(рис. 16).

Знайдемо середньоквадратичне відхилення Δy_s:

$$\Delta y_s=\sqrt{\frac{1}{n+1}\rho_2(a_0,a_1,\ldots,a_m)}=$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(y_k-a_0-a_1x_k-\right.$$

$$-a_2x_k^2)^2\Big)^{1/2}=(1/2)\Big((-4{,}5+3{,}6754)^2+(2{,}5-0{,}025)^2+$$

$$+(-2-0{,}475)^2+(-1{,}5+2{,}3254)^2\Big)^{1/2}=1{,}8447\,.\ \blacksquare$$

4.4.3. Кубічна апроксимація

Розглянемо випадок $m=3$, коли апроксимуюча функція є многочленом третього порядку $F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$. Таке наближення називають ***кубічною регресією***. Лінією регресії служить кубічна парабола. При цьому система необхідних умов екстремуму сума квадратів відхилень $\rho_2(a_0,a_1,a_2,a_3)$ набуває вигляду

$$\begin{cases} a_0(n+1)+a_1\sum\limits_{k=0}^{n}x_k+a_2\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^2+a_3\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^3=\sum\limits_{k=0}^{n}f(x_k); \\ a_0\sum\limits_{k=0}^{n}x_k+a_1\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^2+a_2\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^3+a_3\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^4=\sum\limits_{k=0}^{n}x_kf(x_k); \\ a_0\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^2+a_1\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^3+a_2\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^4+a_3\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^5=\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^2f(x_k); \\ a_0\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^3+a_1\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^4+a_2\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^5+a_3\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^6=\sum\limits_{k=0}^{n}x_k^3f(x_k). \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, отримаємо оптимальні значення коефіцієнтів кубічного наближення $F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$.

Приклад. Функція $f(x)$ задана таблицею

k	0	1	2	3	4
x_k	-3	-1	0	1	3
$y_k=f(x_k)$	-4,5	2,5	2	-2	-1,5

Знайти апроксимацію цієї функції $f(x)$ кубічною регресією $F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ за методом найменших квадратів. Обчислити значення отриманої кубічної апроксимації