Приклад 4

Використовуючи формули переходу, записати рівняння заданих ліній у полярній системі координат і побудувати їх ескізи. (Розглядати тільки головні значення полярних координат):

а) ***лемніската*** $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a = \text{const} > 0$;

б) ***кардіоїда*** $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, $a = \text{const} > 0$. (Розв'язати самостійно. Значення аргументу взяти з кроком $\pi/4$, починаючи з $\varphi = 0$).

а) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$; $((\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2)^2 = a^2((\rho\cos\varphi)^2 - (\rho\sin\varphi)^2)$; $\rho^4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$; $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$; $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Допустимі значення полярного кута визначаються системою обмежень $\rho \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\cos 2\varphi \ge 0$.

Звідси $D(\rho)$: $\varphi \in [0;\ \pi/4] \cup [3\pi/4;\ 5\pi/4] \cup [7\pi/4;\ 2\pi]$

Надаючи аргументу φ значення з області визначення $D(\rho)$ через проміжок $\pi/8$, починаючи з $\varphi = 0$, побудуємо точки за їх координатами із табл. 2, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо ескіз лемніскати (рис. 28).

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Таблиця 2

φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$7\pi/8$
ρ	a	$a\sqrt[4]{8}/2$	0	0	$a\sqrt[4]{8}/2$
φ	π	$9\pi/8$	$7\pi/4$	$15\pi/8$	2π
ρ	a	$a\sqrt[4]{8}/2$	0	$a\sqrt[4]{8}/2$	a

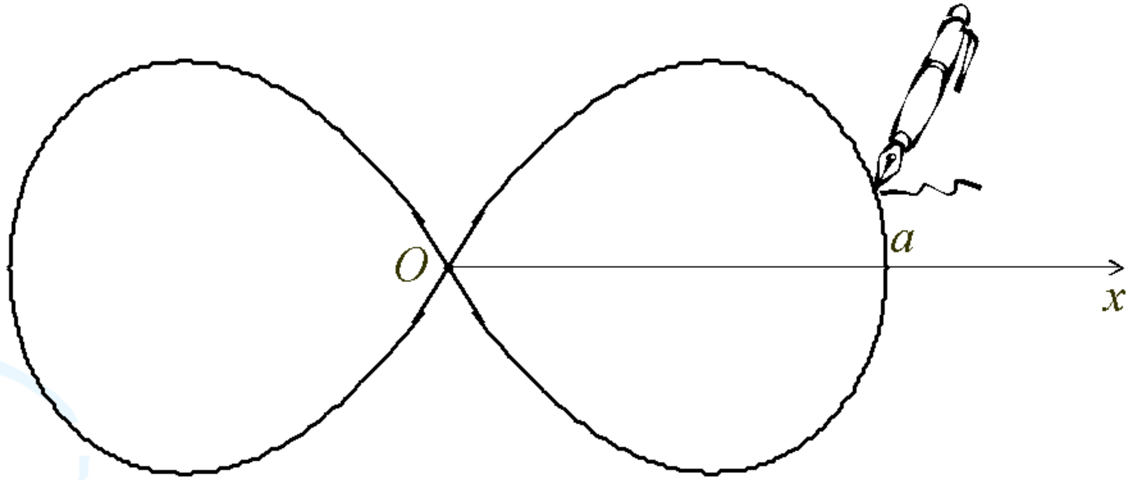


Рис. 28

б)

На початок розділу

б) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$; $(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - a\rho\cos\varphi)^2 = a^2(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)$; $(\rho^2 - a\rho\cos\varphi)^2 = a^2\rho^2$; $\rho^2(\rho - a\cos\varphi)^2 = a^2\rho^2$; $\rho - a\cos\varphi = a$; $\rho = a + a\cos\varphi$; $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Допустимі значення полярного кута визначаються системою обмежень

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Надаючи аргументу φ значення з області визначення $D(\rho)$ через проміжок $\pi/4$, починаючи з $\varphi = 0$, побудуємо точки за їх координатами із табл. 3, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо ескіз лемніскати (рис. 29).

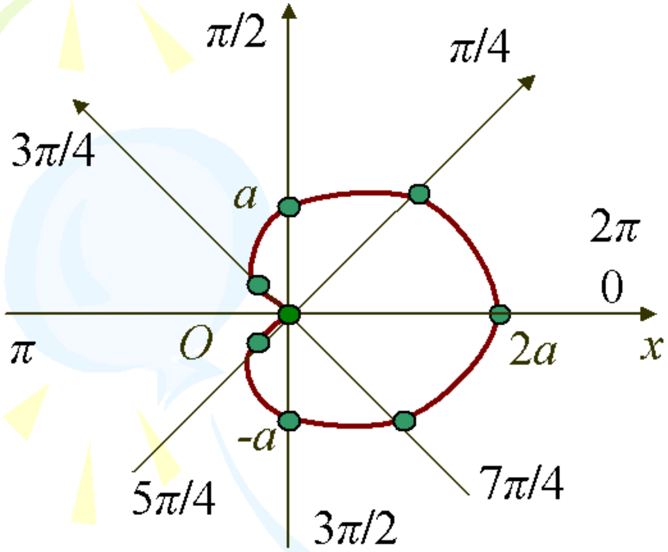


Рис. 29

Таблиця 3

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
ρ	$2a$	$a(1+\sqrt{2}/2)$	a	$a(1-\sqrt{2}/2)$	0
φ		$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
ρ		$a(1-\sqrt{2}/2)$	a	$a(1+\sqrt{2}/2)$	$2a$

4.3 Рівняння ліній другого порядку в полярній системі координат

Рівняння ліній другого порядку в полярних координатах набувають найбільш простого вигляду, якщо полюс O розмістити відповідно у центрі кола, у лівому фокусі еліпса, у правому фокусі гіперболи чи у фокусі параболи, а за напрям полярної осі вибрати додатний напрям осі Ox (рис. 30).

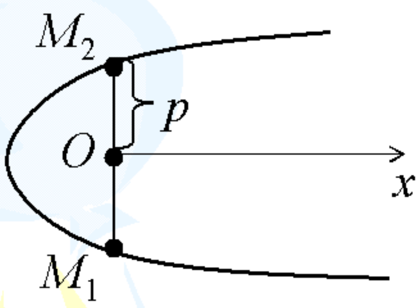


Рис. 30

Нехай $M_1M_2 = 2p$ – хорда, яка проходить через вибраний полюс і перпендикулярна до полярної осі. Число $p = M_1O = M_2O$ називається ***параметром*** лінії, $p > 0$. Для параболи параметр p уже визначений раніше як відстань від фокуса до директриси. Для кола $p = r$, а для еліпса і гіперболи $p = b^2/a$.Тоді рівняння

$$\rho = p\,/(1 - \varepsilon \cos \varphi)$$

визначає відповідно

а) коло, якщо $\varepsilon = 0$;
б) еліпс, якщо $0 < \varepsilon < 1$;
в) параболу, якщо $\varepsilon = 1$;
г) праву гілку гіперболи, якщо $\varepsilon > 1$.

На початок розділу

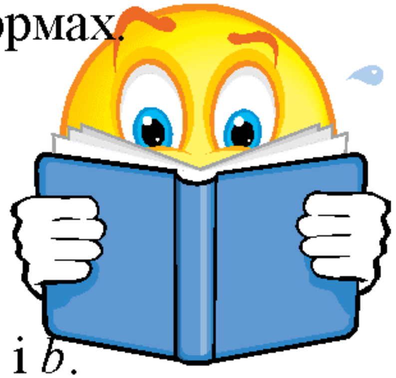
4.4 Рівняння деяких ліній у параметричній формі

Нехай плоска лінія задана у декартовій прямокутній системі координат ***параметричними рівняннями***

$$x = x(t); \qquad y = y(t),$$

де t – допоміжна змінна (***параметр***), $x(t)$ і $y(t)$ – деякі вирази.

Якщо з цих рівнянь удається вилучити параметр t, то одержується рівняння лінії у неявній $F(x, y) = 0$ чи навіть у явній $y = f(x)$ формах.



Приклад 1

Показати, що система параметричних рівнянь

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

де a, $b = const$ причому $a > 0$, $b > 0$ визначає еліпс з півосями a і b.

$$\cos t = x/a, \quad \sin t = y/b;$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Зауваження 1. Якщо $a = b = r$, то маємо параметричні рівняння кола

$$x = r\cos t; \; y = r\sin t,$$

$$r > 0.$$

Приклад 2

Побудувати ескіз дуги ***циклоїди***, що задана в параметричній формі

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}; \quad t \in [0;\ 4\pi]; \quad a > 0.$$

Побудуємо точки за їх координатами із табл. 4, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо задану дугу циклоїди (рис. 31).

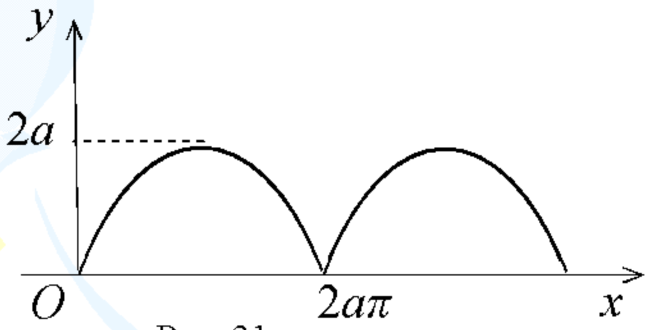


Рис. 31

Таблиця 4

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	
x	0	$a(\pi/2 - 1)$	$a\pi$	$a(3\pi/2+1)$	
y	0	a	$2a$	a	
t	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π
x	$2a\pi$	$a(\pi/2 - 1)$	$3a\pi$	$a(7\pi/2+1)$	$4a\pi$
y	0	a	$2a$	a	0

Приклад 3

Побудувати ескіз ***астроїди***, що задана в параметричній формі

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}; \quad t \in [0;\ 2\pi]; \quad a > 0.$$

(Розв'язати самостійно. Значення параметра t взяти з кроком $\pi/2$, починаючи з $t = 0$).

Побудуємо точки за їх координатами із табл. 5, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо задану дугу циклоїди (рис. 32).

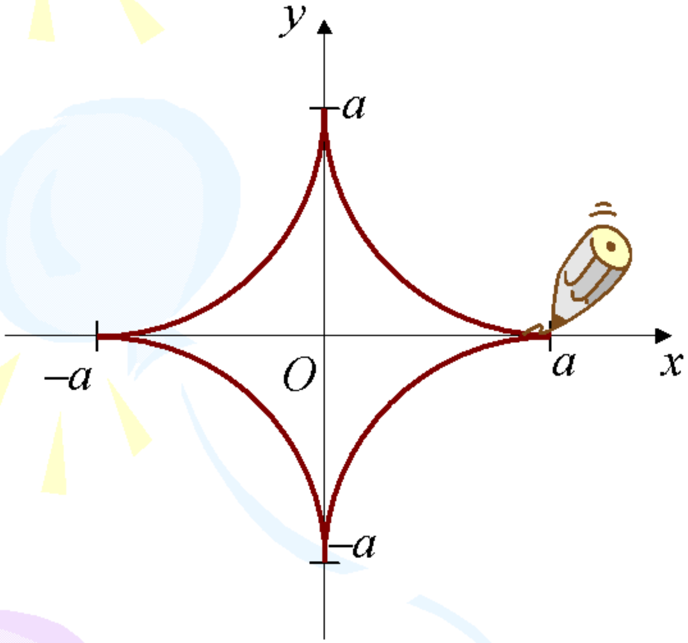


Рис. 32

Таблиця 5

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
x	a	$a(\sqrt{2}/2)^3$	0	$-a(\sqrt{2}/2)^3$	$-a$
y	0	$a(\sqrt{2}/2)^3$	a	$a(\sqrt{2}/2)^3$	0
t		$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
x		$-a(\sqrt{2}/2)^3$	0	$a(\sqrt{2}/2)^3$	a
y		$-a(\sqrt{2}/2)^3$	$-a$	$-a(\sqrt{2}/2)^3$	0

Зауваження 2. Якщо лінія задана явно рівнянням $y = f(x)$, то її можна подати в параметричній формі

$$x = t;\ \ y = f(t).$$

Зауваження 3. Якщо лінія в полярних координатах задана рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, то використовуючи формули переходу $x = \rho\cos\varphi$ і $y = \rho\sin\varphi$, її можна подати в параметричній формі $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$; $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, де роль параметра відіграє полярний кут φ.

Приклад 4 Знайти рівняння лінії $\rho=2p\cos\varphi/\sin^2\varphi$; $p>0$ в декартових координатах і визначити її тип.

Спосіб 1.

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi = \dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\cos\varphi = 2p\,ctg^2\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi = \dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\sin\varphi = 2p\,ctg\,\varphi \end{cases};\quad \mathrm{ctg}^2\varphi = x/(2p);$$

$$y^2 = 4p^2\,\mathrm{ctg}^2\varphi = 4p^2 x/(2p);$$

$$y^2 = 2px \text{ – парабола.}$$

Спосіб 2. $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$; $\sin\varphi = y\big/\sqrt{x^2+y^2}$; $\cos\varphi = x\big/\sqrt{x^2+y^2}$;

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2p\cdot\left(x\big/\sqrt{x^2+y^2}\right):\left(y\big/\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

$$y^2 = 2px \text{ – парабола.}$$

На початок розділу

Список літератури

1. Вища математика. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчик, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1. – М.: Наука, 1997. –304 с.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с.

4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.

5. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 495 с.

6. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.

7. Станішевський С.О. Вища математика. – Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.

8. Станішевський С.О., Якунін А.В., Ситникова В.С. Вища математика для електротехніків. Модуль 1. – Харків: ХНАМГ, 2009. – 308 с.

9. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналити-ческой геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Анатолій Іванович Колосов,
Анатолій Вікторович Якунін,
Світлана Миколаївна Ламтюгова

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРЕЗЕНТАЦІЯХ. ЧАСТИНА ПЕРША: АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Навчальний посібник для студентів
економічних і технічних спеціальностей

Відповідальний за випуск: С.О. Станішевський

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2008, поз. 17 Н

Підп. до друку 12.09.08 Формат 60x84 1/16 Папір офісний
Друк на ризографі. Умовн.-друк.арк 3,0 Обл.-вид.арк. 3,0
Тираж 100 прим. Зам. №

ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ
ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12