Приклад 1

Приклад 1

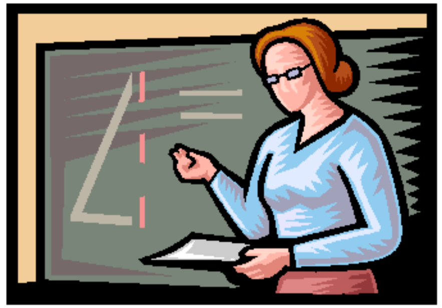
Переконатись, що рівняння $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$ є рівнянням гіперболи. Знайти вершини гіперболи та її асимптоти. Зобразити ескіз гіперболи.

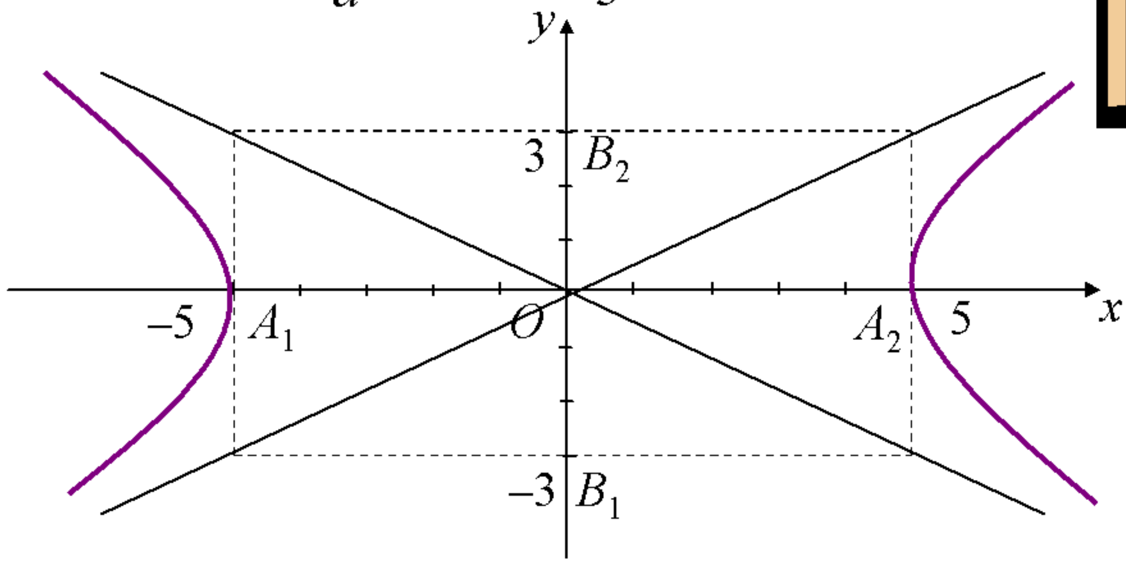
$9x^2 - 25y^2 = 225;\quad \frac{9x^2}{225} - \frac{25y^2}{225} = 1;\quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ – гіпербола з вершинами:

дійсні вершини гіперболи: $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$,

уявні вершини гіперболи: $B_1(-3;0)$, $B_2(3;0)$,

асимптоти: $y = \pm \frac{b}{a}x;\quad y = \pm \frac{3}{5}x.$





Приклад 2

Знайти рівняння гіперболи l_g, якщо її ексцентриситет $\varepsilon_g=2$, а фокуси збігаються з фокусами еліпса l_e: $x^2/100 + y^2/36 = 1$.

$$l_e:\quad x^2/100+y^2/36=1;\quad a_e^2=100;\quad b_e^2=36;\quad c_e^2=a_e^2-b_e^2;$$

$$c_e^2=100-36=64;\quad c_g=c_e=8;\quad \varepsilon_g=c_g/a_g;\quad a_g=c_g/\varepsilon_g;$$

$$a_g=8/2=4;\quad a_g^2=16;\quad b_g^2=c_g^2-a_g^2;\quad b_g^2=8^2-4^2=48;$$

$$l_g:\quad x^2/16-y^2/48=1.$$

Приклад 3

Точка $M\left(-8;6\sqrt{3}\right)$ належить гіперболі

$$x^2/a^2-y^2/b^2=1,$$

а її асимптоти $y=\pm(3/2)x$. Знайти канонічне рівняння, ексцентриситет і директриси гіперболи.

Оскільки точка M належить гіперболі, то $(-8)^2/a^2-\left(6\sqrt{3}\right)^2/b^2=1.$

З рівняння асимптот маємо $b/a=3/2$. Розв'язуючи одержану систему двох рівнянь з двома невідомими a і b (зробіть це самостійно), знаходимо $a=4$ і $b=6$.

Звідси $x^2/16 - y^2/36 = 1$ – канонічне рівняння; $c^2=a^2+b^2$; $c^2=16+36=52$;

$c=2\sqrt{13}$; $\varepsilon=c/a$; $\varepsilon=\left(2\sqrt{13}\right)/4=\sqrt{13}/2$ – ексцентриситет;

$x=\pm4/\left(\sqrt{13}/2\right)$, $x=\pm\left(8\sqrt{13}\right)/13$ – директриси.

На початок розділу

$$\begin{cases} (-8)^2/a^2 - \left(6\sqrt{3}\right)^2/b^2 = 1 \\ b/a = 3/2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 64/a^2 - 108\cdot 4/9a^2 = 1 \\ b = 3/2a \end{cases};$$

$$\begin{cases} 64/a^2 - 48/a^2 = 1 \\ b = 3/2a \end{cases};$$

$$\begin{cases} a^2 = 64 - 48 = 16 \\ b = 3/2a \end{cases};$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \end{cases}.$$

3.5 Парабола

Параболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини F (***фокуса*** параболи) дорівнює відстані до заданої прямої l_d (***директриси*** параболи), що не проходить через фокус.

Для довільної точки $M(x; y)$ параболи (рис. 20) $r=d$,

де $r = MF$ – ***фокальний радіус*** точки $M(x; y)$; d – відстань від точки $M(x; y)$ до директриси l_d : $x = –p/2$; $F(p/2;0)$ – фокус; p – ***параметр*** параболи (відстань від фокуса до директриси), $p > 0$. Тоді

$$\sqrt{(x-p/2)^2+(y-0)^2}=x-(-p/2).$$

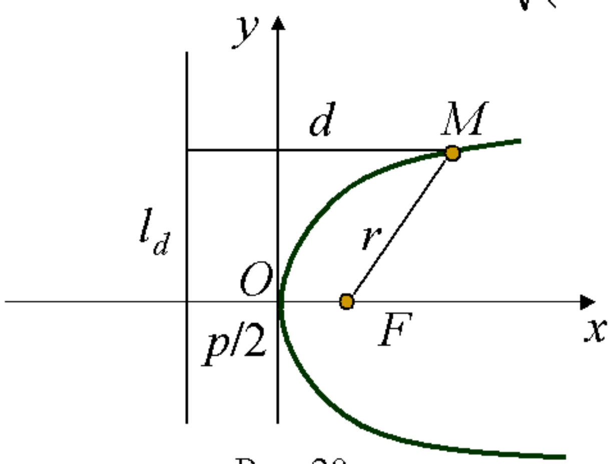


Рис. 20

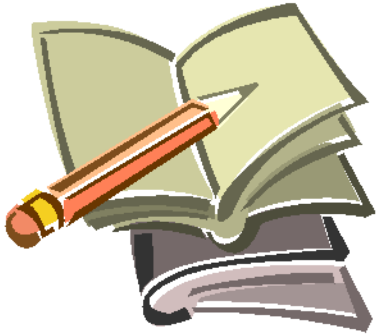
Підносячи до квадрата і спрощуючи (пророби́ть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння параболи*** $y^2 = 2px$.

Очевидно, що $x \geq 0$.

Парабола має форму нескінченної гілки, яка симетрична відносно ***осі*** параболи OF. Точка $O(0,0)$ на осі симетрії (початок координат) називається ***вершиною*** параболи. Асимптот парабола не має.

Зауваження 1. Згідно з означенням параболи і властивостями директрис еліпса і гіперболи, прийнято, що ***ексцентриситет*** параболи дорівнює одиниці $\varepsilon = 1$.

Зауваження 2. На практиці часто зустрічаються параболи з іншим розміщенням відносно системи координат. На рис. 21 – 24 наведені основні випадки і відповідні канонічні рівняння.



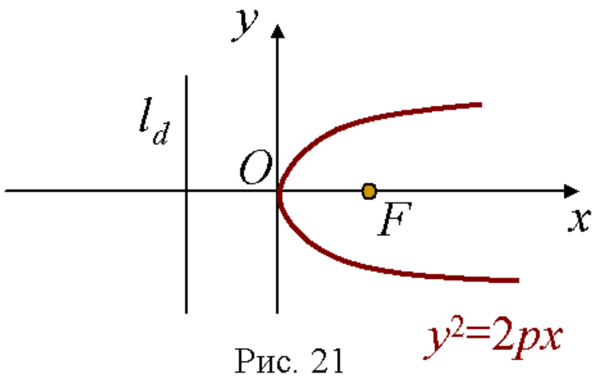


Рис. 21

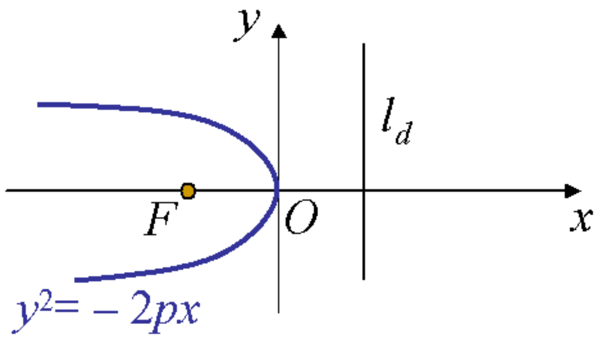


Рис. 22

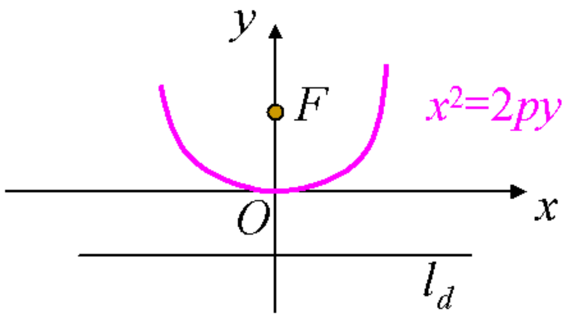


Рис. 23

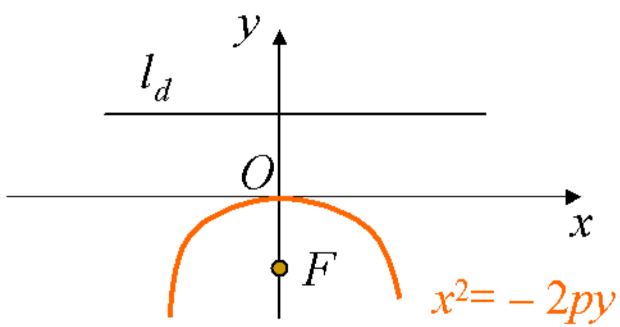
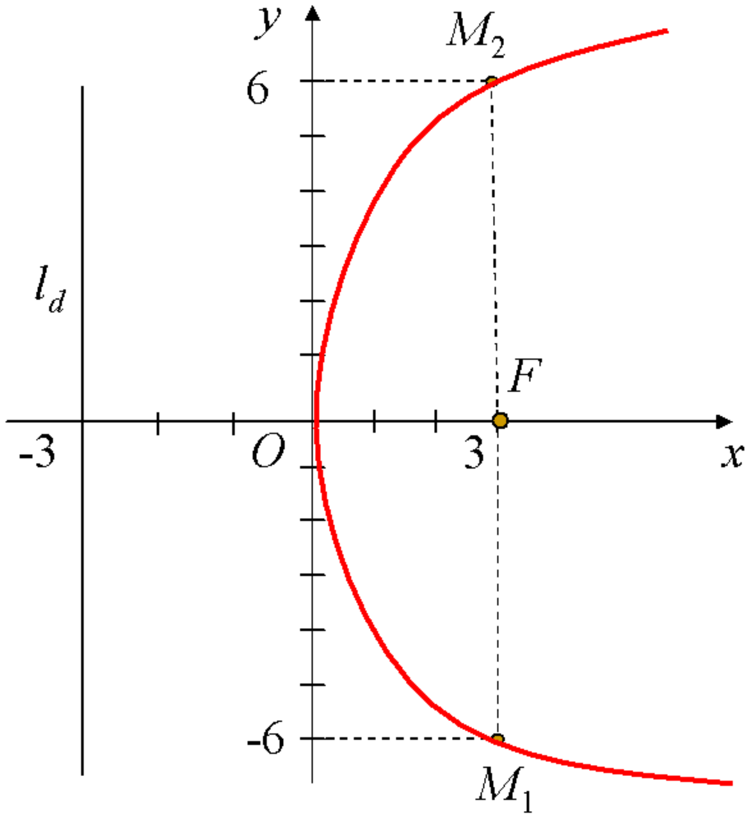


Рис. 24

Приклад 1

Визначити координати фокуса $F(p/2;0)$ і рівняння директриси l_d параболи $y^2=12x$. Знайти кінці $M_1(p/2;-p)$ і $M_2(p/2;\ p)$ хорди $M_1M_2=2p$, яка проходить через фокус параболи і перпендикулярна до її осі. Зобразити ескіз параболи, провівши плавну лінію через її вершину O і точки $M_1(p/2;-p)$, $M_2(p/2;\ p)$.



$$y^2 = 2px;\ y^2 = 12x;\ 2p = 12;\ p = 6;$$

$$F(p/2;\ 0);\ F(3;0);$$

$$l_d\colon x = -p/2;\ x = -3;$$

$$M_1(3;\ -6),\ M_2(3,6).$$

Приклад 2

Скласти рівняння параболи l_p: $y^2 = 2px$, якщо її фокус збігається з правою дійсною вершиною гіперболи l_g: $x^2/4 - y^2/6 = 1$. Знайти точки перетину цих ліній.

$$l_g: \; x^2/4 - y^2/6 = 1; \quad a_g^2 = 4; \quad F(p/2;0) = A_2(a_g;0);$$

$$p/2 = a_g = 2; \quad p = 4; \quad l_p: \; y^2 = 2px; \; y^2 = 8x;$$

$$\begin{cases} x^2/4 - y^2/6 = 1 \\ y^2 = 8x \end{cases};$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{8x}{6} = 1; \;\; 3x^2 - 16x - 12 = 0;$$

$x_1 = 6$; $x_2 = -2/3$ – не задовольняє умову $x \geq 0$;

$$y^2 = 8 \cdot 6; \quad y_1 = 4\sqrt{3}; \quad y_2 = -4\sqrt{3};$$

$$M_1(6; -4\sqrt{3}); \quad M_2(6; 4\sqrt{3}).$$

На початок розділу

3.6 Лінії другого порядку як конічні перерізи та їх оптична властивість

Будь-яка дійсна суттєво крива лінія другого порядку може бути одержана як перетин кругового конуса площиною, що не проходить через його вершину. Зокрема:

1) якщо площина перпендикулярна до осі конуса, то в перерізі – коло;

2) якщо площина перетинає лише одну порожнину конуса і не паралельна жодній його твірній, то в перерізі – еліпс;

3) якщо площина паралельна осі конуса, то в перерізі – гіпербола;

4) якщо площина паралельна твірній конуса, то в перерізі – парабола. (рис. 25)

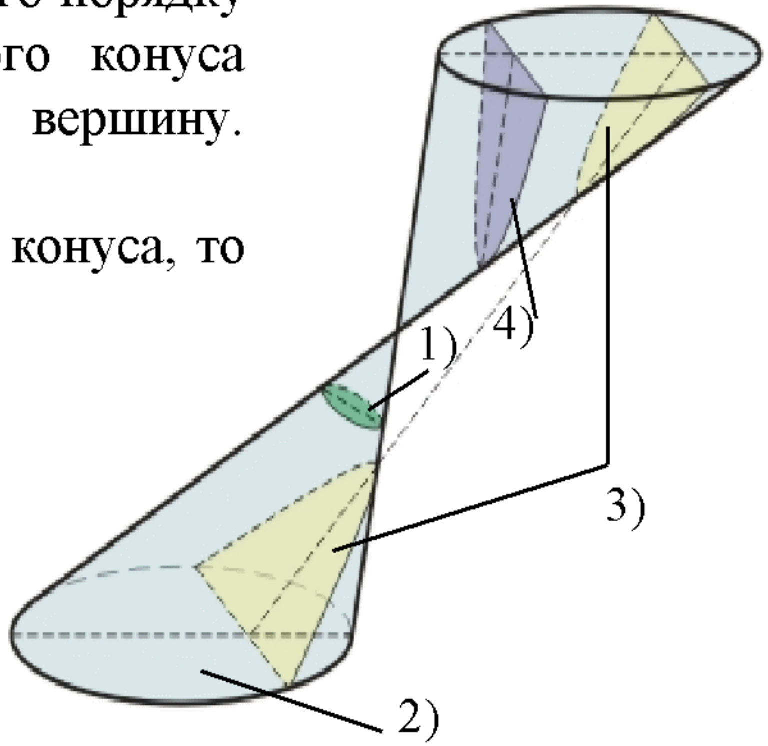
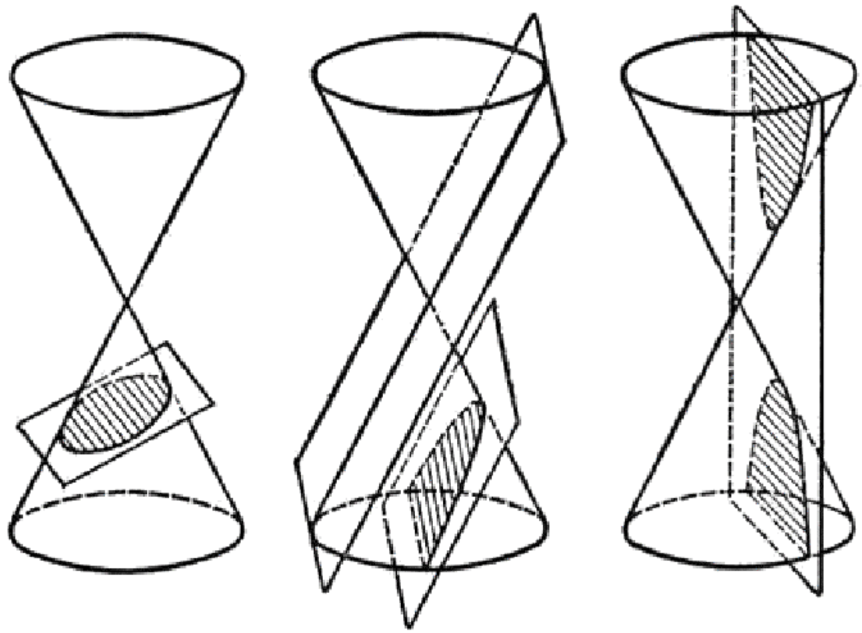


Рис. 25



<u>Оптична властивість</u> ліній другого порядку: *промінь, що виходить з фокуса, йде вздовж фокального радіуса, відбивається від дзеркальної поверхні, що має твірною лінію другого порядку, а потім йде вздовж іншого фокального радіуса*. У випадку еліпса відбиті промені проходять через другий фокус. У випадку параболи відбиті промені утворюють паралельний пучок, що йде у нескінченність. У випадку гіперболи відбиті промені утворюють пучок, що розсіюється, з центром у другому фокусі.

На початок розділу

4 Полярна система координат. Параметрично задані лінії

зміст

4.1 Полярні координати

У ***полярній системі координат*** (рис. 25) положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою парою чисел $(\rho;\varphi)$ – її ***полярними координатами***. Тут ρ – ***полярний радіус*** OM (відстань від точки до ***полюса*** O), φ – ***полярний кут*** $\angle xOM$ (кут між ***полярною віссю*** – напрямленою півпрямою Ox із заданим масштабом $OE=1$ – і полярним радіусом).

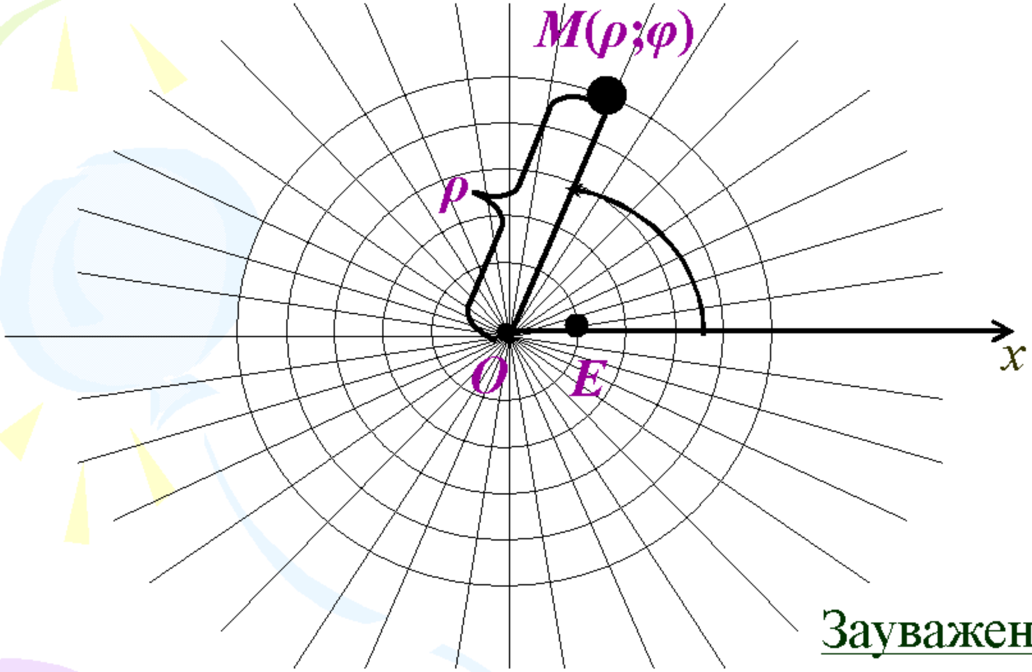


Рис. 25

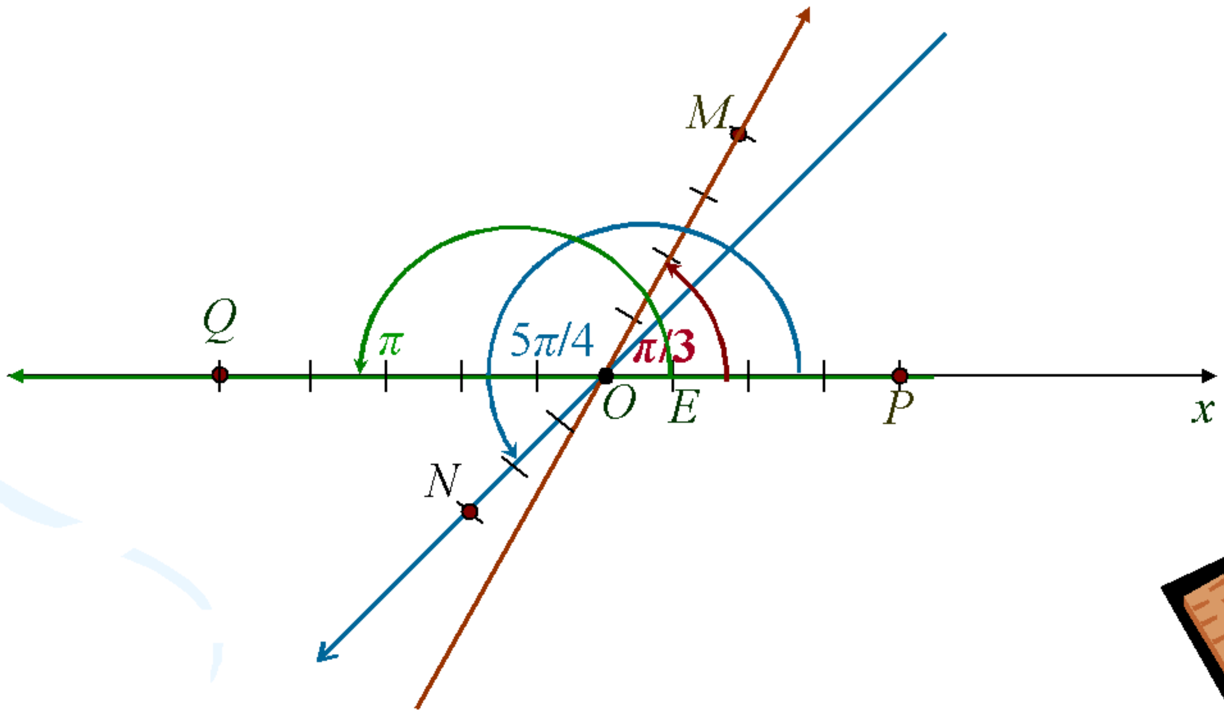
Сукупність півпрямих $\varphi=C_1=const$, що виходять з полюса, і концентричних кіл $\rho=C_2=const$ зі спільним центром у полюсі, утворює ***координатну сітку*** полярної системи координат.

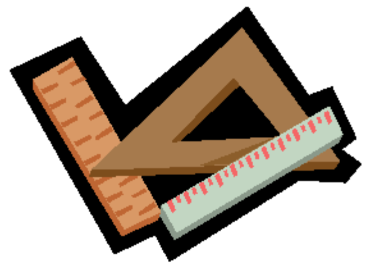
Зауваження 1. Полярна система координат широко застосовується у механіці та інших областях при вивченні обертових рухів.

Зауваження 2. Надалі обмежимось розглядом тільки ***головних значень полярних координат*** $(\rho;\ \varphi)$, що задовольняють умови $\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Приклад 1

Побудувати точки у полярній системі координат: а) $M(4;\ \pi/3)$; б) $N(3;\ 5\pi/4)$; в) $P(4;\ 0)$; г) $Q(5;\ \pi)$.





Приклад 2

Побудувати задану дугу ***спіралі Архімеда*** $\rho = (4/\pi)\varphi$, $0 \le \varphi \le 3\pi$, надаючи аргументу φ значення з відрізка $[0;\ 3\pi]$ через проміжок $\pi/4$, починаючи з $\varphi = 0$.

$\varphi=0,\ \rho=(4/\pi)\cdot 0=0;$

$\varphi=\pi/4,\ \rho=(4/\pi)\cdot(\pi/4)=1;$

$\varphi=\pi/2,\ \rho=(4/\pi)\cdot(\pi/2)=2;$

$\varphi=3\pi/4,\ \rho=(4/\pi)\cdot(3\pi/4)=3;$

$\varphi=\pi,\ \rho=(4/\pi)\cdot\pi=4;$

$\varphi=5\pi/4,\ \rho=(4/\pi)\cdot(5\pi/4)=5;$

$\varphi=3\pi/2,\ \rho=(4/\pi)\cdot(3\pi/2)=6;$

$\varphi=7\pi/4,\ \rho=(4/\pi)\cdot(7\pi/4)=7;$

$\varphi=2\pi,\ \rho=(4/\pi)\cdot(2\pi)=8;$

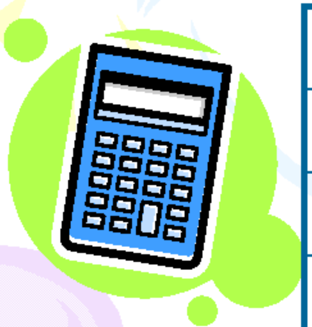
$\varphi=9\pi/4,\ \rho=(4/\pi)\cdot(9\pi/4)=9;$

$\varphi=5\pi/2,\ \rho=(4/\pi)\cdot(5\pi/2)=10;$

$\varphi=11\pi/4,\ \rho=(4/\pi)\cdot(11\pi/4)=11;$

$\varphi=3\pi,\ \rho=(4/\pi)\cdot(3\pi)=12.$

Таблиця 1



φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$
ρ	0	1	2	3	4	5	6
φ	$7\pi/4$	2π	$9\pi/4$	$5\pi/2$	$11\pi/4$	3π	
ρ	7	8	9	10	11	12	

Побудуємо точки за їх координатами із табл. 1, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо задану дугу спіралі Архімеда (Рис. 26).

Ілюстрація до прикладу 1

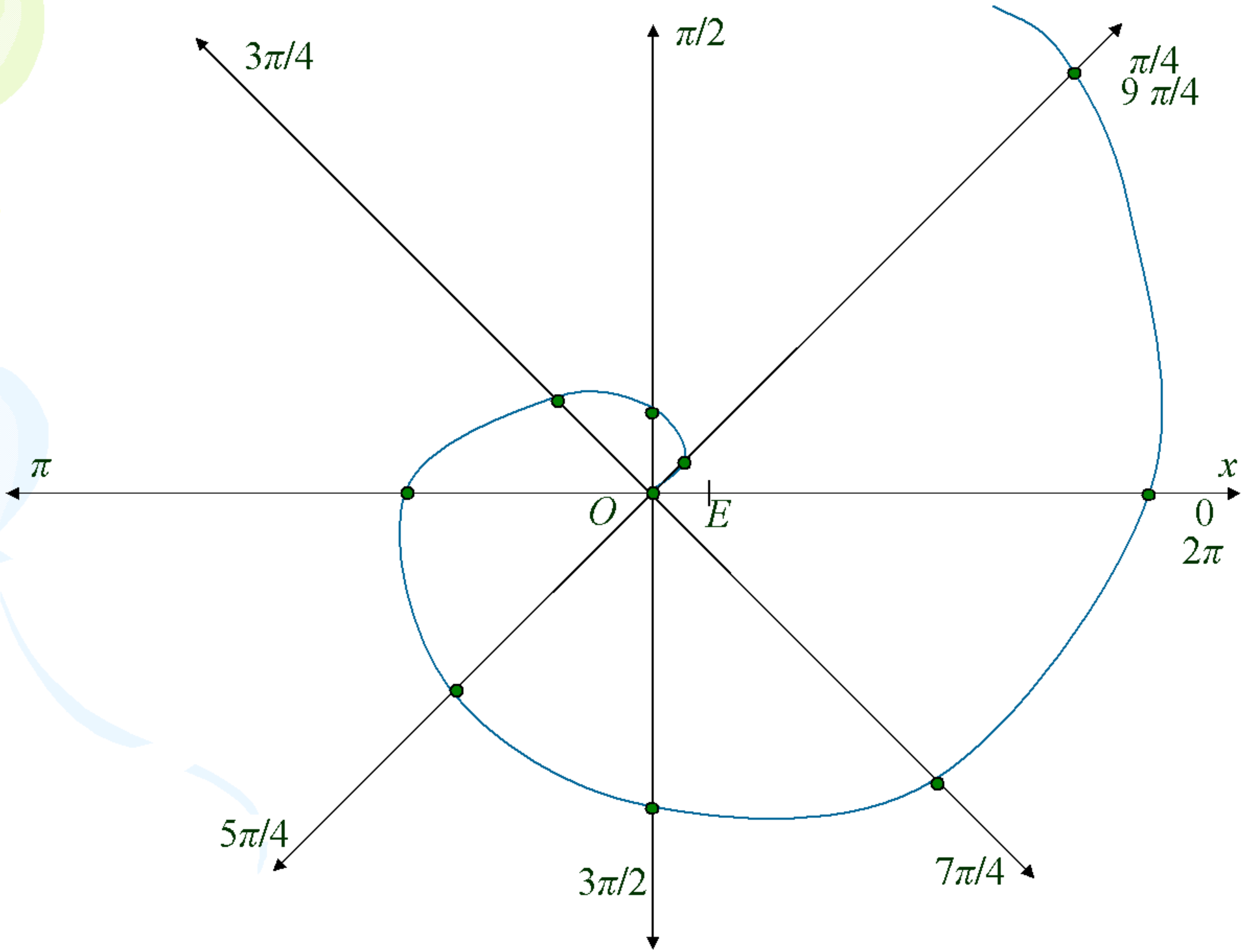


Рис. 26

На початок розділу

4.2 Зв’язок між полярними і прямокутними координатами

Припустимо, що полюс O полярної системи співпадає з початком декартової прямокутної системи координат Oxy, а полярна вісь служить додатною піввіссю абсцис Ox (рис. 27).

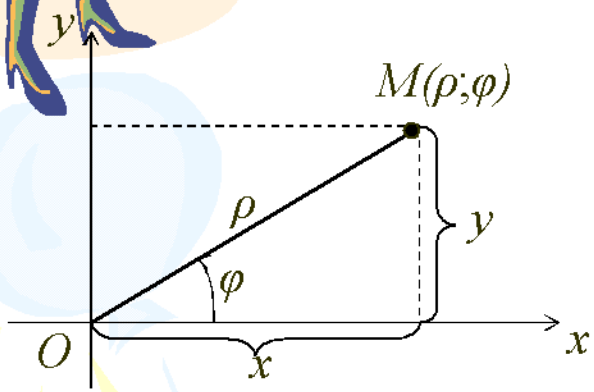


Рис. 27

З прямокутного ΔOMN маємо ***формули переходу від полярних до декартових координат***

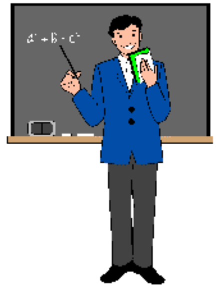
$$x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi$$

а також обернені ***формули переходу від декартових до полярних координат***

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};\ \sin\varphi = y\Big/\sqrt{x^2 + y^2};\ \cos\varphi = x\Big/\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Зауваження. Деякі лінії, що у декартових координатах задаються рівняннями у незручній для дослідження неявній формі, при переході до полярних координат набувають досить простого явного вигляду $\rho = \rho\,(\varphi)$.

Приклад 3



Використовуючи формули переходу, записати рівняння заданих ліній у полярній системі координат:

а) вертикальна пряма $x = a$;

б) горизонтальна пряма $y = b$;

в) коло $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ з центром у точці $C(a;\ 0)$ на осі OX, що проходить через початок координат O;

г) коло $x^2 + (y - b)^2 = b^2$ з центром у точці $C(0;\ b)$ на осі OY, що проходить через початок координат O.

(Пункти б) і г) розв'язати самостійно).

а) $x = a$; $\rho \cos \varphi = a$; $\rho = a/\cos \varphi$;

в) $(x - a)^2 + y^2 = a^2$;

$(\rho \cos \varphi - a)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 = a^2$;

$\rho^2 \cos^2 \varphi - 2\, a\rho \cos \varphi + + a^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi = a^2$;

$\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 2\, a\rho \cos \varphi = 0$; $\rho^2 - 2\, a\rho \cos \varphi = 0$;

$\rho = 2\, a \cos \varphi$;

б)

$$y = b;$$

$$\rho \sin \varphi = b;$$

$$\rho = b/\sin \varphi.$$

г)

$$x^2 + (y - b)^2 = b^2;$$

$$(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi - b)^2 = b^2;$$

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi - 2\, b\rho \sin \varphi + b^2 = b^2;$$

$$\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 2\, b\rho \sin \varphi = 0;$$

$$\rho^2 - 2\, b\rho \sin \varphi = 0;$$

$$\rho = 2\, b \sin \varphi.$$