Приклад

У тупокутному ΔABC ($\angle A$ – тупий) задано рівняння сторін AB: $y = -3x + 5$, AC: $y = 2x - 10$ і координати вершини $C(2; -6)$.

Знайти: а) $\angle A$; б) рівняння висоти CN; в) рівняння середньої лінії ML, що паралельна AB, де M – середина сторони AC. (рис. 14)

а) Знайдемо гострий кут між прямими AB і AC:

$$k_{AB} = -3;\ k_{AC} = 2;\quad \varphi_г = arctg\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = arctg\left|\frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}\right| = arctg\,1 = \pi/4.$$

Тоді $\angle A = \pi - \varphi_г = \pi - \pi/4 = 3\pi/4.$

б) $CN \perp AB \iff k_1 k_2 = -1;\quad k_{AB} = -3;\ k_{CN} = -1/k_{AB} = 1/3;$

$$C \in CN;\ CN:\ y - y_0 = k(x - x_0);\quad y + 6 = \frac{1}{3}(x-2);\ \ y = \frac{1}{3}x - \frac{20}{3}.$$

в) $A = AB \cap AC$: $\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = 2x - 10 \end{cases};\ \ A(3; -4).$

M – середина сторони AC: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{5}{2};\quad y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = \dfrac{-4-6}{2} = -5;$

$$M(5/2; -5).$$

$ML \parallel AB;\quad k_{ML} = k_{AB} = -3;\ M \in ML;$

$$ML:\ y - y_0 = k(x - x_0);\ y + 5 = -3(x - 5/2);\quad y = -3x + \frac{5}{2}.$$

Ілюстрація до прикладу

AB: $y = -3x + 5$,

x	0	1
y	5	2

AC: $y = 2x - 10$

x	5	4
y	0	–2

$C(2; -6)$.

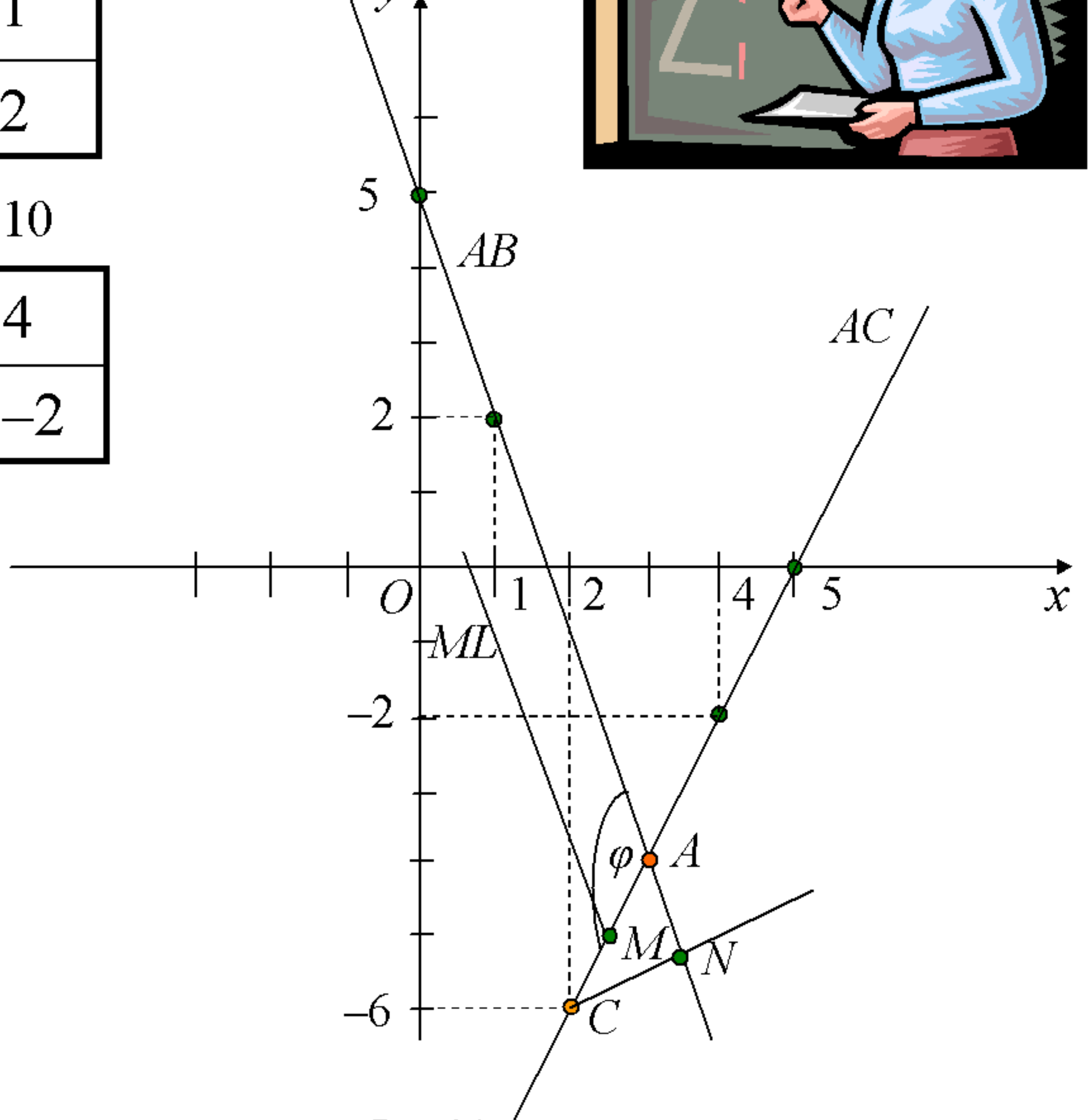


Рис. 14

На початок розділу

2.8 Відстань від точки до прямої

Нехай задані точка $M_0(x_0;\ y_0)$ і пряма l своїм загальним рівнянням $Ax+By+C=0$ (рис. 15).

Відстанню d від точки до прямої називається довжина перпендикуляра M_0N, опущеного з даної точки на дану пряму.

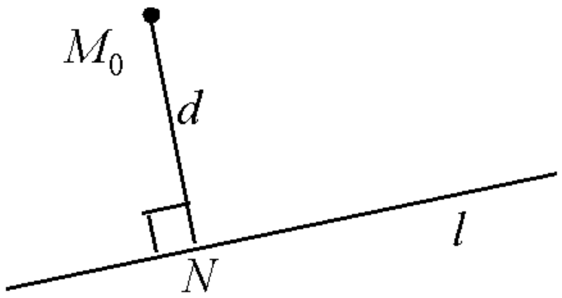


Рис. 15

Скориставшись умовою перпендикулярності, знайдемо рівняння цього перпендикуляра $l_\perp$. Склавши і розв'язавши систему рівнянь прямих l і $l_\perp$, одержимо точку перетину N. Довжину перпендикуляра M_0N знайдемо як відстань між двома точками. В результаті (проробіть указані операції самостійно) одержимо формулу для ***відстані d від точки до прямої***

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$k_1 = -A/B, \text{ тоді } k_{MN} = B/A.$$

Рівняння прямої MN:

$$y - y_0 = (B/A)\,(x - x_0); \quad \frac{y-y_0}{B} = \frac{x-x_0}{A}.$$

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ \dfrac{x-x_0}{A} = \dfrac{y-y_0}{B} \end{cases}, \qquad \frac{y-y_0}{B} = \frac{x-x_0}{A} = t,$$

$$x = x_0 + At,\; y = y_0 + Bt,$$

$$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C = 0,$$

$$t = -(Ax_0 + By_0 + C)/(A^2 + B^2).$$

Тоді

$$x = x_0 - A\,\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}, \quad y = y_0 - B\,\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}.$$

Відстань між точками M і N: $d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$,

$$d = \sqrt{\left(A\,\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(B\,\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

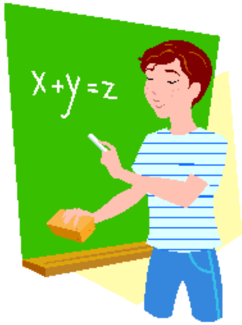
Приклад 1

У трикутнику ABC задано рівняння сторони AB: $x/4 - y/3 = 1$ і координати вершини $C(-2; -5)$. Знайти довжину висоти CN.

Перетворимо рівняння прямої AB до загального вигляду:

$$x/4 - y/3 = 1;\ 3x - 4y = 12;\ 3x - 4y - 12 = 0.$$

Знайдемо довжину висоти CN як відстань від точки C до прямої AB:



$$CN = \left|3\cdot(-2) - 4\cdot(-5) - 12\right| \Big/ \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 2/5.$$

Приклад 2

У трикутнику ABC задано рівняння висот: $x + y - 2 = 0$, $9x - 3y - 4 = 0$ і координати вершини $A(2; 2)$. Знайти рівняння сторін трикутника. (Розв'язати самостійно)

На початок розділу

Нехай $9x - 3y - 4 = 0$ – рівняння висоти BB_1, а $x + y - 2 = 0$ – рівняння висоти CC_1. Точка A не належить жодній з них.

Знайдемо рівняння сторони AC, яка проходить через точку A перпендикулярно BB_1:

$$k_{BB1}=3, \quad k_{AC} = -1/3.$$

Тоді рівняння сторони AC:

$$y - 2 = -1/3(x - 2),$$

$$x + 3y - 8 = 0.$$

Аналогічно рівняння AB:

$$y = x.$$

Розв'язавши системи рівнянь

$$\begin{cases} 9x - 3y - 4 = 0 \\ y = x \end{cases}; \qquad \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases};$$

знайдемо координати вершин трикутника:

$$B(2/3;\ 2/3),\ C(-1;\ 3).$$

Тоді рівняння сторони BC:

$$\frac{y - 2/3}{3 - 2/3} = \frac{x - 2/3}{-1 - 2/3};$$

$$7x + 5y - 8 = 0.$$

3 Лінії другого порядку

зміст

3.1 Загальне рівняння лінії другого порядку

Пряма – це єдина лінія першого порядку. Її загальним рівнянням є алгебраїчне рівняння першого степеня.

Лінії другого порядку відповідає рівняння другого степеня, загальний вигляд якого

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

де A, B, C, D, E, F – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел A, B і C відмінне від нуля, тобто

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Існують чотири типи ліній другого порядку – ***коло, еліпс, гіпербола і парабола***.

Зауваження. Надалі будемо розглядати тільки ***суттєво криві дійсні лінії*** другого порядку. Випадки виродження та уявні лінії вивчати не будемо.

На початок розділу

3.2 Коло

Колом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини C (***центра*** кола) дорівнює заданому сталому числу r (***радіусу*** кола).

Розглянемо коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом r (рис. 16).

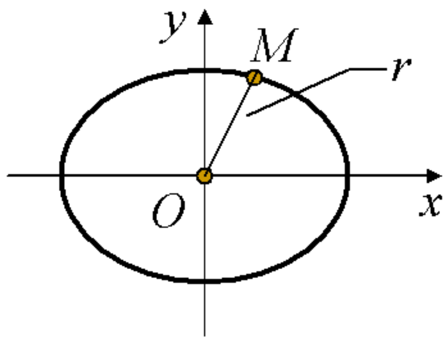


Рис.16

Для довільної точки $M(x\,;\,y)$ кола:

$$MO = r\ ; \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r\ ; \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Одержане співвідношення

$$x^2 + y^2 = r^2$$

називається ***канонічним*** (найпростішим) ***рівнянням кола***.

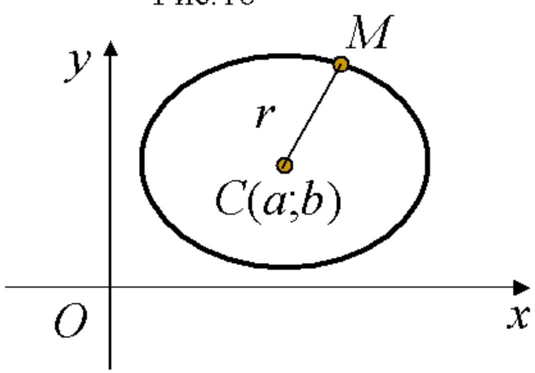
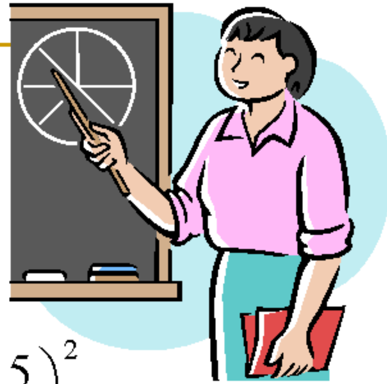


Рис.17

Зауваження. Якщо центром кола служить точка $C(a;b)$, то маємо ***рівняння кола зі зміщеним центром*** (рис. 17)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Приклад 1



Переконатись, що рівняння

$3x^2 + 3y^2 + 6x - 5y - 9 = 0$

є рівнянням кола. Знайти його центр $C(a;b)$ і радіус r.

$$x^2 + y^2 + 2x - (5/3)y - 3 = 0; \quad x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 2\cdot\frac{5}{6}y + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 3 = 0;$$

$$(x + 1)^2 + (y - 5/6)^2 = (13/6)^2; \quad C(-1;\ 5/6); \quad r = 13/6.$$

Приклад 2

Дано дві точки $A(2; -3)$ і $B(-6; 1)$. Скласти рівняння кола l, для якого відрізок AB служить діаметром.

Центром кола l є середина C діаметра AB, а радіус кола $r = AB/2$. Тоді:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + (-6)}{2} = -2; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1;$$

$$C(-2;\ -1); \ AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - (-6))^2 + (-3 - 1)^2} = 4\sqrt{5};$$

$$r = 2\sqrt{5}.$$

Рівняння кола $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20.$

3.3 Еліпс

Еліпсом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** еліпса) дорівнює заданому сталому числу $2a$, більшому за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x\,;\,y)$ еліпса (рис. 18) $r_1 + r_2 = 2a$,

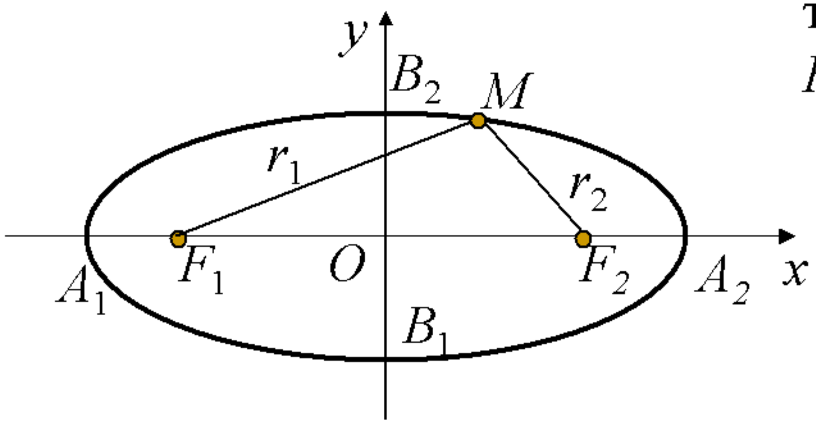


Рис. 18

де $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x;\,y)$; $F_1(-\,c;\,0)$, $F_2(\,c;\,0)$ – фокуси, $F_1F_2 = 2c < 2a$. Тоді

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a.$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи, (пробробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння еліпса***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx,$$

$$16a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)=16a^4-32a^2cx+16c^2x^2,$$

$$16a^2x^2-32a^2xc+16a^2c^2+16a^2y^2=16a^4-32a^2cx+16c^2x^2,$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Еліпс має форму овалу, який симетричний відносно ***великої осі*** $A_1A_2 = 2a$ і ***малої осі*** $B_1B_2 = 2b$, а також центрально симетричний відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** еліпса. Точки перетину з осями координат $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ називаються ***вершинами*** еліпса.

Відношення ***міжфокусної відстані*** $F_1F_2=2c$ до великої осі $A_1A_2=2a$ називається ***ексцентриситетом*** еліпса і позначається ε : $\varepsilon=c/a$.

Зауваження. Ексцентриситет характеризує форму еліпса, при цьому $0 \le \varepsilon < 1$. Якщо $\varepsilon=0$, то маємо окремий випадок еліпса – коло, при цьому $a=b=r$. Чим більше значення ε, тим сильніше витягнутий еліпс вздовж великої осі.

Дві прямі, що мають рівняння $x=\pm\ a/\varepsilon$, називаються ***директрисами*** еліпса. Оскільки для еліпса $\varepsilon<1$, то права директриса розміщена вертикально правіше від його правої вершини; а ліва директриса – лівіше від його лівої вершини.

Властивість директрис еліпса: Відношення фокального радіуса r довільної точки еліпса до відстані d цієї точки до відповідного фокусу є стала величина, що дорівнює ексцентриситету еліпса $r/d=\varepsilon$.

Приклад 1

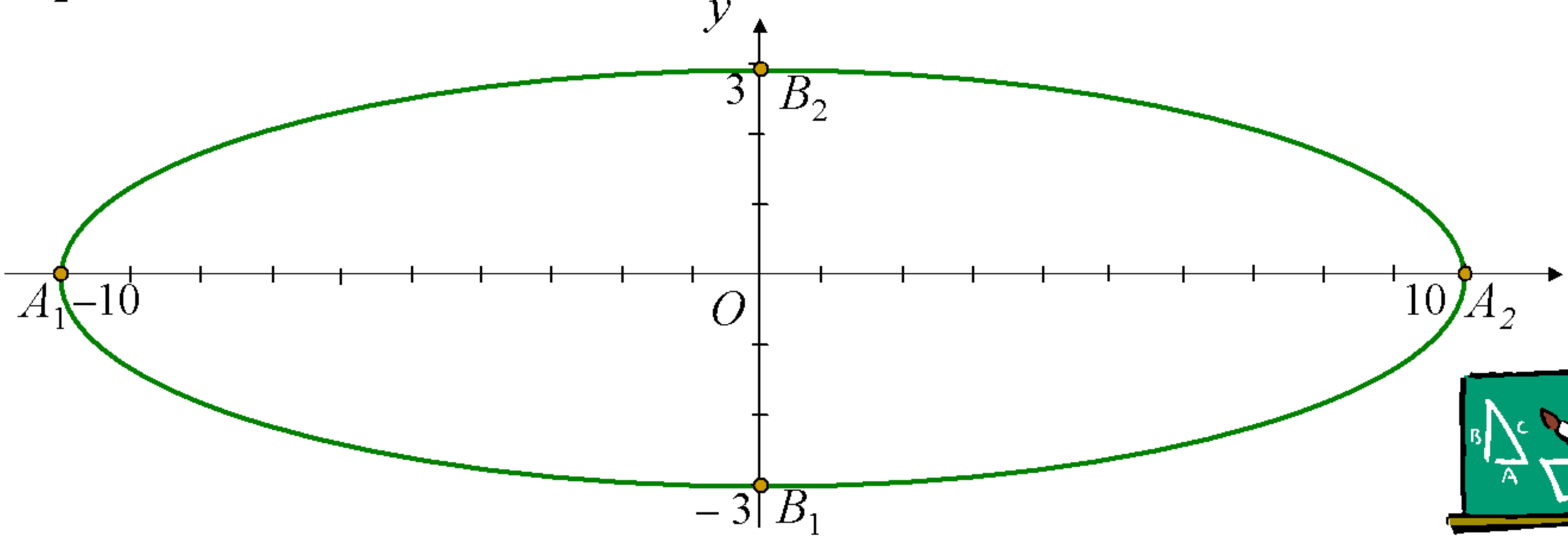
Переконатись, що рівняння

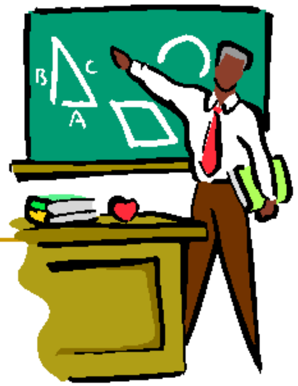
$$9x^2 + 100y^2 - 900 = 0$$

є рівнянням еліпса. Зобразити ескіз еліпса, знайшовши точки його перетину з осями координат (вершини еліпса).

$$9x^2 + 100y^2 = 900; \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 -$$

еліпс, що перетинає осі координат у вершинах $A_1(-10,0)$, $A_2(10,0)$, $B_1(0,-3)$, $B_2(0,3)$.





Приклад 2

Скласти канонічне рівняння еліпса, мала піввісь якого $b = 4\sqrt{3}$, а лівий фокус знаходиться у точці $F(-4;0)$. Знайти його ексцентриситет і написати рівняння директрис.

За умовою задачі $b = 4\sqrt{3}$, а половина міжфокусної відстані c=4. Тоді

$$c^2 = a^2 - b^2;$$

$$a^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2 = 64;$$

$$a = 8.$$

Звідси

$x^2/64 + y^2/48 = 1$ – канонічне рівняння;

$\varepsilon = 4/8 = 1/2$ – ексцентриситет;

$x = \pm 8/(1/2)$; $x = \pm 16$ – директриси.

На початок розділу

3.4 Гіпербола

Гіперболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** гіперболи) дорівнює заданому сталому числу $2a$, меншому за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x; y)$ гіперболи (рис. 19) $|r_1 - r_2| = 2a$,
де $r_1=MF_1$ і $r_2=MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x; y)$; $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ – фокуси, $F_1F_2 = 2c > 2a$. Тоді

$$\left|\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a.$$

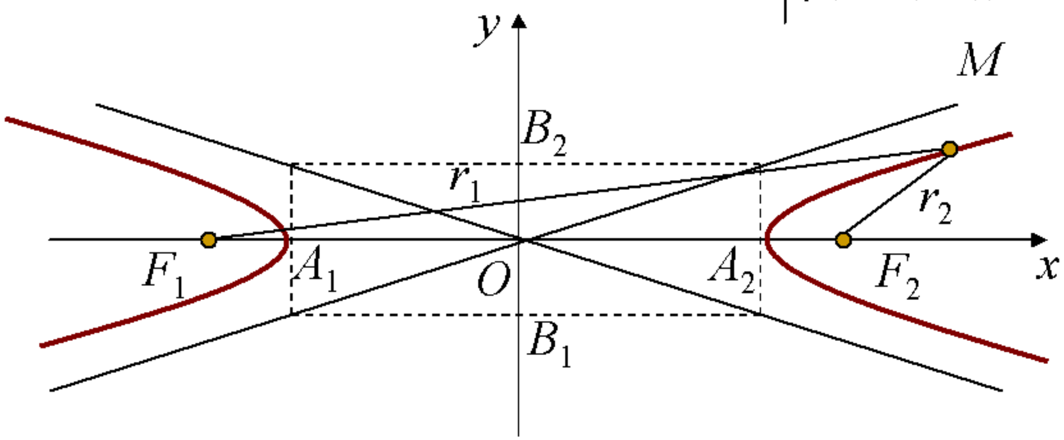


Рис. 19

Підносячи до квадрата і спрощуючи, поклавши $b^2 = c^2 - a^2 > 0$ (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння гіперболи***

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гіпербола складається з двох нескінченних гілок, які симетричні відносно ***дійсної осі*** $A_1A_2=2a$ і ***уявної осі*** $B_1B_2=2b$, а також центрально симетричні відносно точки $O(0; 0)$ – ***центра*** гіперболи.

Дійсні вершини $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ є точками перетину гіперболи з віссю Ox. Через уявні вершини $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ гіпербола не проходить. Прямі

$$y=\frac{b}{a}x; \quad y=-\frac{b}{a}x$$

є ***асимптотами*** гіперболи.

Асимптотою називається пряма, що необмежено зближається з гілкою кривої на нескінченності.

Відношення ***міжфокусної відстані*** $F_1F_2=2c$ до дійсної осі $A_1A_2=2a$ називається ***ексцентриситетом*** гіперболи і позначається ε : $\varepsilon=c/a$.

Зауваження. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи, при цьому $\varepsilon>1$. Чим більше значення ε, тим сильніше витягнута гіпербола вздовж дійсної осі.

Дві прямі, що мають рівняння $x=\pm\ a/\varepsilon$, називаються ***директрисами*** гіперболи. Оскільки для гіперболи $\varepsilon>1$, то права директриса розміщена вертикально між центром і правою вершиною, а ліва директриса – між центром і лівою вершиною.

Властивість директрис гіперболи аналогічна відповідній властивості для еліпса: $r/d=\varepsilon$.