# 2 Пряма на площині.
# Основні типи рівняння прямої



зміст

## *2.1 Рівняння з двома змінними як рівняння лінії*

Співвідношення $F_1(x; y) = F_2(x; y)$ *називається* ***рівнянням з двома змінними***. Його можна подати у ***стандартному вигляді***

$$F(x; y) = 0.$$

Тут $F_1(x; y)$, $F_2(x; y)$ і $F(x; y)$ – деякі вирази.

Зображення множини розв'язків даного рівняння на координатній площині $Oxy$ називається ***графіком*** цього рівняння.

Звичайно графіком рівняння служить деяка лінія.

Наприклад,

а) графіком рівняння $x^2+y^2=1$ є коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом $R = 1$ (***дійсна лінія***);

б) графіком рівняння $x^2+y^2=0$ є одна точка – початок координат $O(0;0)$ (***вироджена лінія***);

в) рівняння $x^2+y^2 = -1$ ніякого графіка не має (***уявна лінія***).

Зауваження 1. Вигляд рівняння лінії залежить як від самої лінії, так і від вибору системи координат.

Зауваження 2. Говорять, що лінія ***задана неявно***, якщо її рівняння має вигляд $F(x;y)=0$ або $F_1(x;y)=F_2(x;y)$. Якщо рівняння лінії розв'язане відносно змінної $y$, то говорять, що лінія ***задана явно*** рівнянням $y=f(x)$, де $f(x)$ – деякий вираз. Лінія може задаватись системою рівнянь $x=x(t)$ і $y=y(t)$, де $t$ – допоміжна змінна (параметр), і $x(t)$, $y(t)$ – деякі вирази. Тоді говорять, що лінія ***задана параметрично***. Наприклад, траєкторія руху матеріальної точки в механіці часто задається в параметричній формі, при цьому роль параметра відіграє час.

Правило 1. *Щоб встановити, чи лежить указана точка* $M_0(x_0;y_0)$ *на даній лінії* $l$: $F(x;y)=0$, *треба перевірити, чи задовольняють координати точки рівняння лінії*:

$$F(x_0;y_0)=0 \Leftrightarrow M_0 \in l;\ F(x_0;y_0)\neq 0 \Leftrightarrow M_0 \notin l.$$

Правило 2. *Щоб встановити, чи перетинаються дві дані лінії* $l_1$: $F_1(x;y)=0$, $l_2$: $F_2(x;y)=0$, *і знайти точки перетину (спільні точки), треба скласти систему рівнянь*

$$\begin{cases} F_1(x;y)=0 \\ F_2(x;y)=0 \end{cases}$$

*і розв'язати її.*

Правило 3. *Щоб скласти рівняння даної лінії треба:*

1) *ввести систему координат;*

2) *знайти співвідношення між координатами довільної (поточної, бігучої) точки $M(x;\ y)$ цієї лінії та відомими сталими величинами, що визначають саме цю лінію, на основі характеристичної властивості даної лінії;*

3) *за допомогою рівносильних перетворень звести одержане рівняння до найбільш простого вигляду.*

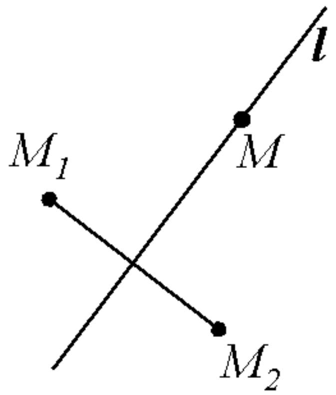



Рис. 9

**Зауваження 3. Тип лінії визначають, зводячи її рівняння до відповідного стандартного вигляду.**

**Приклад**

**Скласти рівняння серединного перпендикуляра $l$ до відрізка $M_1M_2$, де $M_1(-3;4)$, $M_2(3,-1)$ (рис. 9).**

**Довільна точка $M(x;\ y)$ шуканої лінії рівновіддалена від кінців відрізка $M_1M_2$: $M_1M = M_2M$;**

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}\quad \Big|\uparrow 2$$

$$x^2+6x+9+y^2-8y+16=x^2-6x+9+y^2+2y+1$$

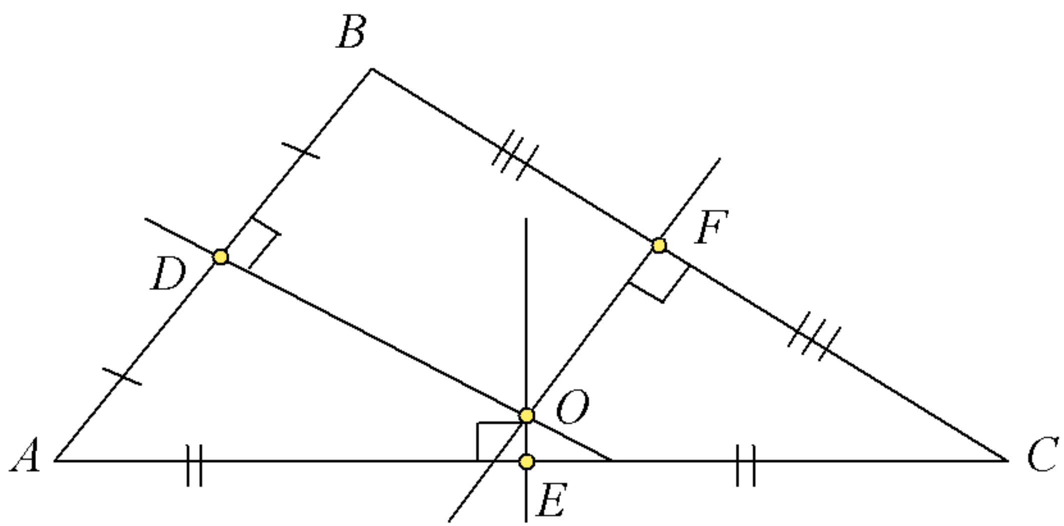
$$l:\quad 12x-10y+15=0$$ – пряма лінія.

*На початок розділу*

# Серединний перпендикуляр

Серединний перпендикуляр трикутника – це перпендикуляр, який проходить через середину сторони трикутника.

Три серединні перпендикуляри перетинаються в одній точці, яка є центром описаного кола.




*OD*, *OF*, *OE* – серединні перпендикуляри
*O* – центр описаного кола

## *2.2 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

Нехай ***похила пряма*** $l$ утворює кут $\alpha$ з віссю $Ox$ і перетинає вісь $Oy$ у точці $B(0;b)$ (рис. 10). Тангенс кута нахилу $\alpha$ називають ***кутовим коефіцієнтом*** $k$ прямої $l$: $k=tg\alpha$. Число $b$ називають ***початковою ординатою*** прямої $l$.

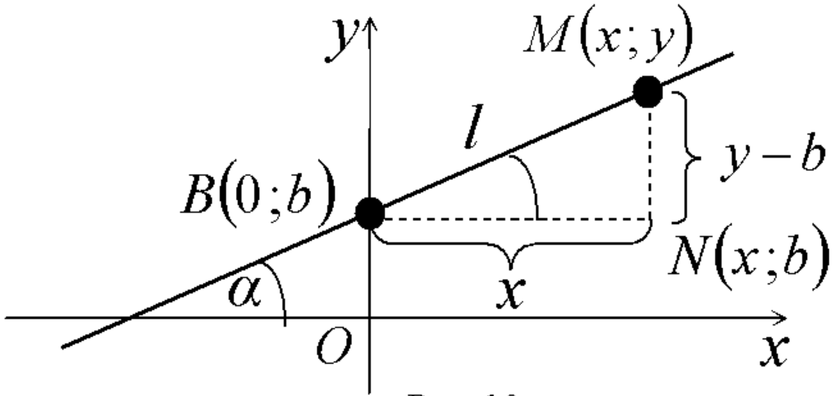



Рис. 10

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка прямої $l$. У прямокутному $\Delta BNM$ $\angle MBN=\alpha$. Тоді

$$\frac{NM}{BN}=tg\ \angle MBN;\qquad \frac{y-b}{x}=tg\ \alpha=k;$$

$$y-b=kx.$$

Звідси маємо ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом***

$$y=kx+b.$$

Зауваження 1. Якщо $b=0$, то пряма $y=kx$ проходить через початок координат $O(0;0)$. Якщо $k=0$, то пряма $y=b$ паралельна осі $Ox$ (***горизонтальна***).

Зауваження 2. Якщо пряма паралельна осі $Oy$ ($\alpha=90^{\circ}$), то її кутовий коефіцієнт не існує ($k=tg\,90^{\circ}=\infty$), і її рівняння не можна подати у відповідному вигляді. ***Рівняння вертикальної прямої*** має вигляд $x=a$, де $a$ – абсциса точки перетину $A(a;0)$ з віссю $Ox$.

# Приклад

Побудувати пряму за її рівнянням:

а) $y=3x-2$; б) $y=-3x$; в) $y=2$; г) $x=-3$.

а) $x=0 \rightarrow y=3\cdot 0-2=-2;$
$x=1 \rightarrow y=3\cdot 1-2=1$

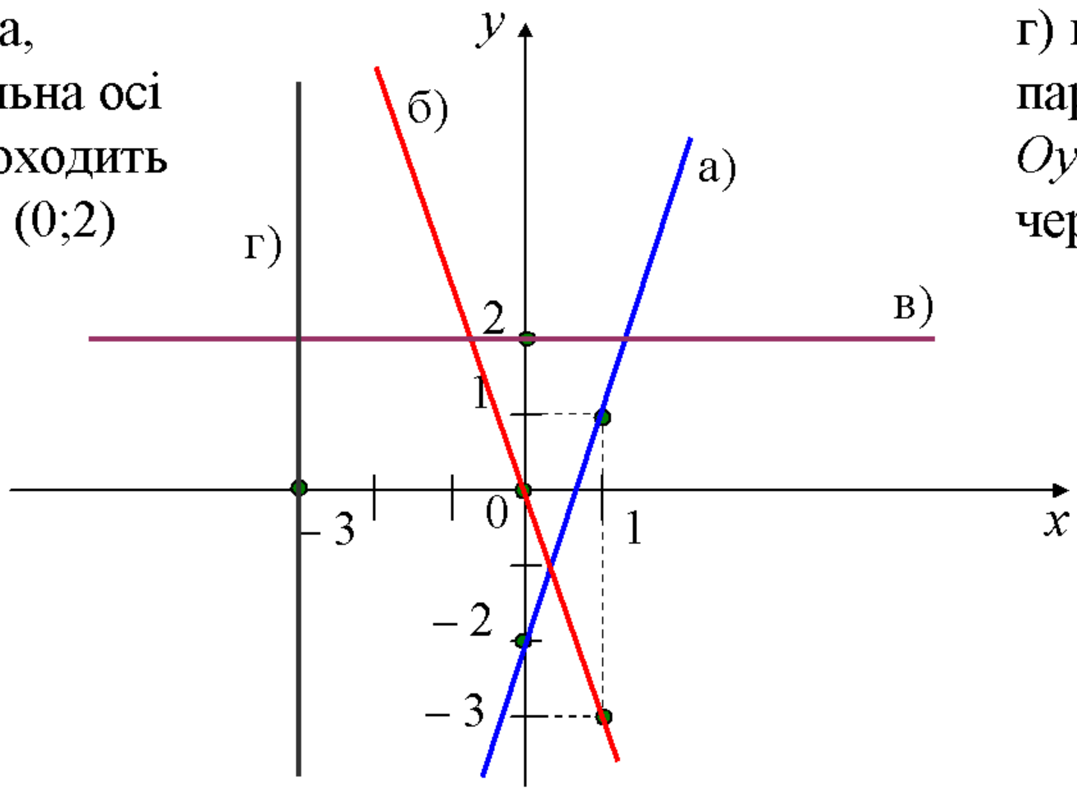
| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | – 2 | 1 |

б) $x=0 \rightarrow y=-3\cdot 0=0;$
$x=1 \rightarrow y=-3\cdot 1=-3$

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 0 | – 3 |

в) пряма, паралельна осі $Ox$ і проходить через т. (0;2)

г) пряма, паралельна осі $Oy$ і проходить через т. (– 3;0)




*На початок розділу*

## *2.3 Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку. Пучок прямих*

Нехай пряма $l$ проходить через задану точку $M_0(x_0;\ y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт $k$. Тоді для прямої $l$ маємо

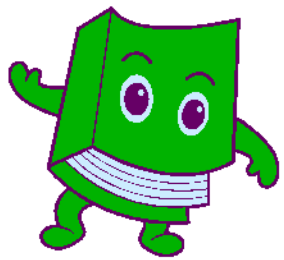
$$y=kx+b;\ M_0(x_0\ ;\ y_0)\in l\ \Rightarrow\ y_0=kx_0+b;$$
$$b=y_0-kx_0\ ;\ y=kx+y_0-kx_0\ .$$

Звідси отримуємо ***рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку***

$$y-y_0=k\,(x-x_0).$$

<u>*Зауваження.*</u> ***Пучок прямих*** з центром у точці $M_0(x_0;\ y_0)$ задається сукупністю рівнянь

$$\left[\begin{array}{c} y-y_0=k\left(x-x_0\right),\ k\in\left(-\infty;+\infty\right) \\ x=x_0\ . \end{array}\right.$$



# Приклад

Написати рівняння і побудувати пряму, що належить пучку з центром у точці $M_1(-3,1)$, якщо: а) пряма паралельна осі $Ox$; б) пряма паралельна осі $Oy$; в) пряма нахилена до осі $Ox$ під кутом $\alpha=60^{\circ}$.

а) якщо пряма паралельна осі $Ox$, то $k = 0$: $y - 1 = 0$, $y = 1$;

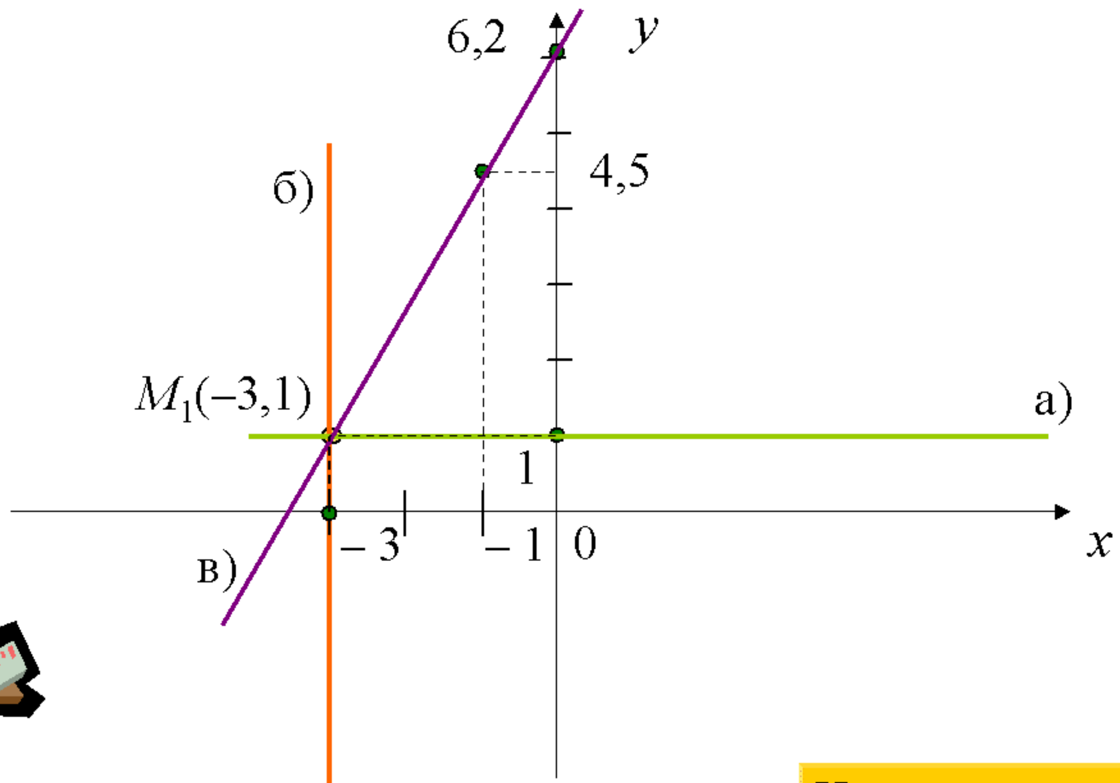
б) якщо пряма паралельна осі $Oy$, то її рівняння має вигляд $x = -3$;

в) якщо пряма нахилена до осі $Ox$ під кутом $\alpha=60^{\circ}$, то $k = tg\,60^{\circ} = \sqrt{3}$:

$$y - 1 = \sqrt{3}\,(x+3);$$

$$y = \sqrt{3}\,x + 3\sqrt{3} + 1$$

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *0* | *-1* |
| *y* | *6,2* | *4,5* |




*На початок розділу*

## *2.4 Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки*

Нехай пряма $l$ проходить через дві задані точки $M_1(x_1\,;y_1)$ і $M_2(x_2\,;y_2)$. Оскільки пряма $l$ проходить через точку $M_1(x_1\,;y_1)$, то $y-y_1=k\,(x-x_1)$. Тоді

$$M_2(x_2\,;y_2)\in l \quad\Rightarrow\quad y_2-y_1=k(x_2-x_1);$$

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1};$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Звідси маємо ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

# Приклад

Трикутник $ABC$ задано координатами вершин $A(1;-2)$, $B(-5;1)$, $C(3;-1)$. Побудувати $\Delta ABC$ в системі координат (рис. 11).

Знайти рівняння бісектриси $AL$.

$$AB=\sqrt{(-5-1)^2+(1-(-2))^2}=3\sqrt{5};$$

$$AC=\sqrt{(3-1)^2+(-1-(-2))^2}=\sqrt{5}.$$

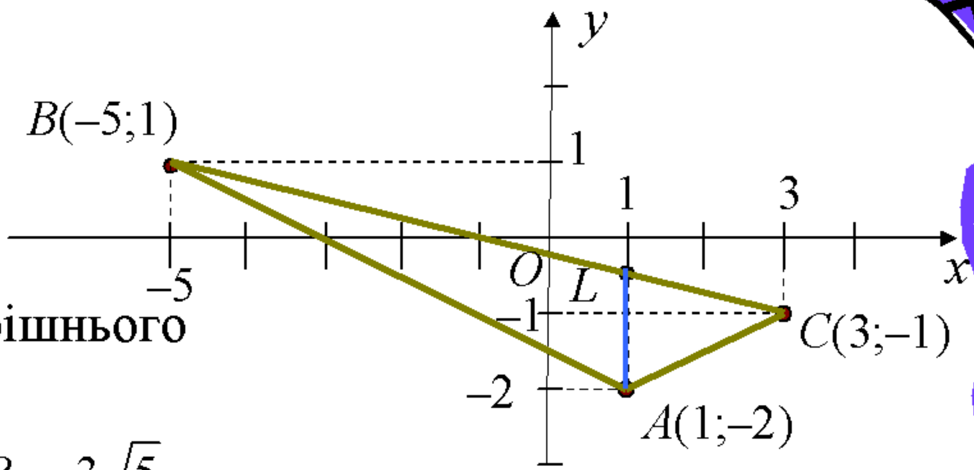



Рис. 11

За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника

$$\lambda=\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=3.$$

Тоді

$$L:\quad x=\frac{-5+3\cdot 3}{1+3}=1;\quad y=\frac{1+3\cdot(-1)}{1+3}=-\frac{1}{2};\quad L\left(1;\,-\frac{1}{2}\right).$$

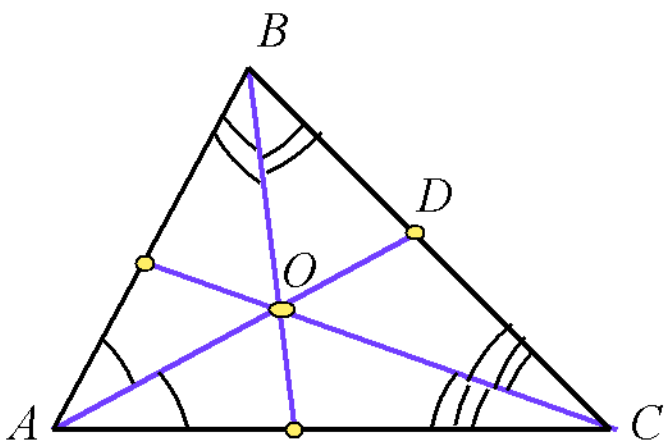
$$AL:\quad \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1};\quad \frac{y-(-2)}{-1/2-(-2)}=\frac{x-1}{1-1};\quad x=1.$$

*На початок розділу*

# Бісектриса

**Бісектриса кута** — пряма, що проходить через вершину кута і ділить його навпіл. Кожна точка бісектриси однаково віддалена від сторін кута.

**Бісектриса трикутника** — відрізок бісектриси одного з кутів цього трикутника від вершини кута до перетину з протилежною стороною.




Бісектриси трьох кутів трикутника перетинаються в одній точці, яка є центром кола, вписаного в трикутник.

Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону у відношенні, рівному відношенню двох прилеглих сторін.

Наприклад, бісектриса кута $BAC$ ділить сторону $BC$ у відношенні $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

$AO$, $BO$, $CO$ – бісектриси кутів трикутника
$O$ – центр кола, вписаного в трикутник

## *2.5 Загальне рівняння прямої та його окремі випадки*

Кожна пряма описується деяким рівнянням першого степеня. Навпаки, кожне рівняння першого степеня є рівнянням деякої прямої.

***Загальним рівнянням*** прямої називається рівняння першого степеня вигляду

$$Ax + By + C = 0,$$

де $A$, $B$ і $C$ – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел $A$, $B$ відмінне від нуля, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$.

Зауваження 1. Загальне рівняння прямої записується з точністю до сталого множника. По можливості його зводять до вигляду, де всі коефіцієнти – цілі числа, причому перший ненульовий коефіцієнт додатний.

Зауваження 2. У залежності від значень сталих $A$, $B$ і $C$ можливі наступні окремі випадки:

$C = 0$, тоді пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат;

$A = 0$, тоді пряма $By + C = 0$ паралельна осі $Ox$. Її рівняння можна подати у вигляді $y = b$, де $b = -C/B$;

$B = 0$, тоді пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі $Oy$. Її рівняння можна подати у вигляді $x = a$, де $a = -C/A$;

$A = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $y = 0$ співпадає з віссю $Ox$;

$B = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $x = 0$ співпадає з віссю $Oy$.

## Приклад

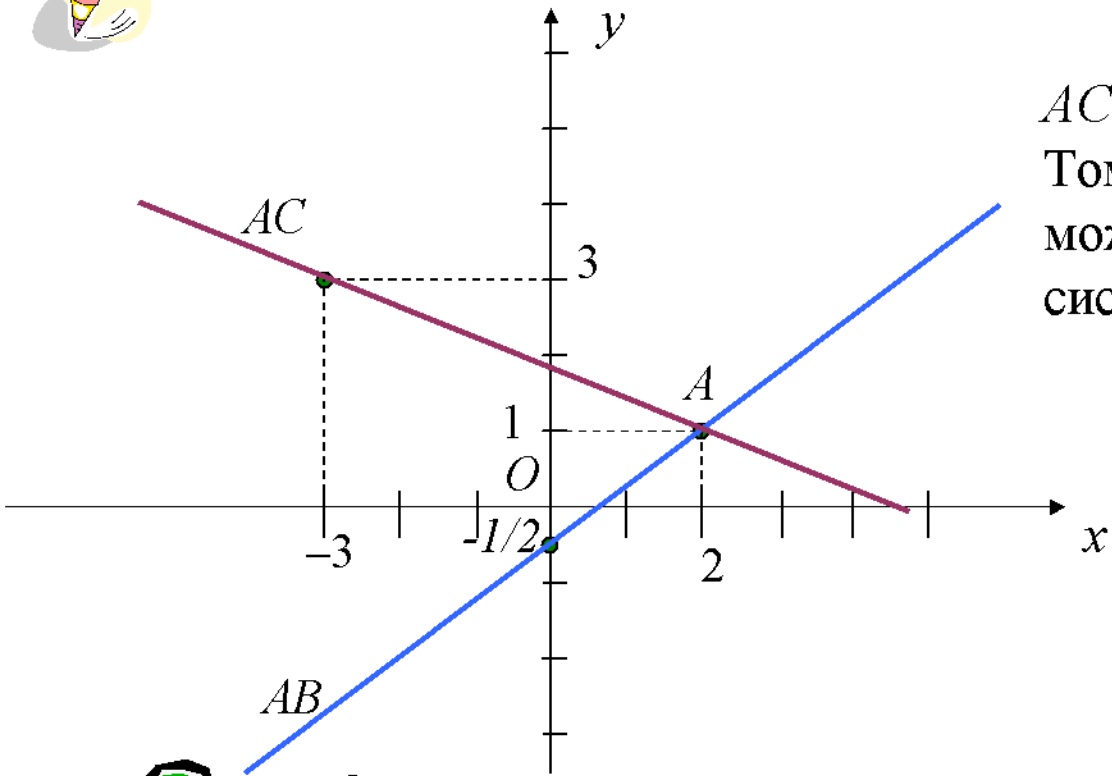
У трикутнику $ABC$ задано рівняння сторін $AB$: $3x - 4y - 2 = 0$ і $AC$: $2x + 5y - 9 = 0$. Знайти координати вершини $A$.

$AB$:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 2 |
| $y$ | $-1/2$ | 1 |

$AC$:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 2 | $-3$ |
| $y$ | 1 | 3 |




Сторони трикутника $AB$ і $AC$ перетинаються в точці $A$. Тому координати точки $A$ можна знайти, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2 = 0 & \big| \cdot 2 \\ 2x + 5y - 9 = 0 & \big| \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 8y - 4 = 0 \\ -6x - 15y + 27 = 0 \end{cases} \Big| +$$

$$-23y = -23$$

$$y = 1$$

$$3x - 4 \cdot 1 - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$A(2;1)$$

*На початок розділу*

## *2.6 Рівняння прямої у відрізках на осях*

Нехай похила пряма $l$ відтинає на осях координат $Ox$ і $Oy$ відповідно відрізки $a$ і $b$, тобто перетинає осі координат у двох заданих точках $A(a;0)$ і $B(0;b)$ (рис. 12).

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, отримаємо

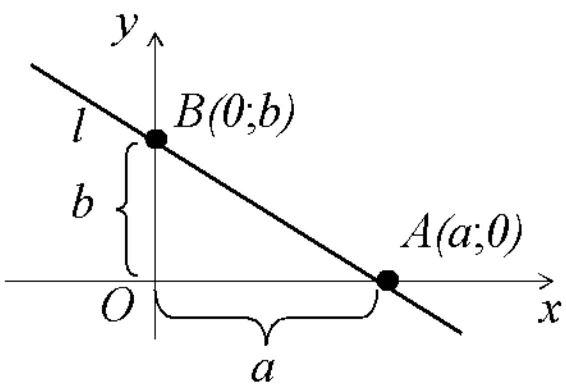



Рис. 12

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}; \qquad \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1.$$

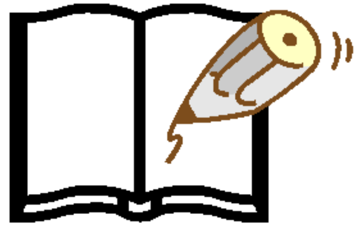
Звідси маємо ***рівняння прямої у відрізках на осях***:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Зауваження 1. У відрізках на осях не можна подати рівняння прямих, які паралельні осям координат.

# Приклад

Пряма $l$ задана своїм загальним рівнянням $3x - 4y - 8 = 0$.
Записати її рівняння:
а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях.



а) $3x - 4y - 8 = 0; \; -4y = -3x + 8; \;\; y = \dfrac{3}{4}x - 2;$

$$k = \frac{3}{4} \;; \quad b = -2.$$

б) $3x - 4y - 8 = 0; \; 3x - 4y = 8; \quad \dfrac{3x}{8} - \dfrac{4y}{8} = 1; \;\; \dfrac{x}{8/3} + \dfrac{y}{-2} = 1;$

$$a = \frac{8}{3} \;; \quad b = -2.$$

*На початок розділу*

## 2.7 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі $l_1$ і $l_2$, що зображені на рис. 13, мають задані кутові коефіцієнти відповідно $k_1$ і $k_2$. Тоді для кута $\varphi$ між ними маємо

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1; \quad tg\ \varphi = \frac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_1 \cdot tg\ \alpha_2}.$$

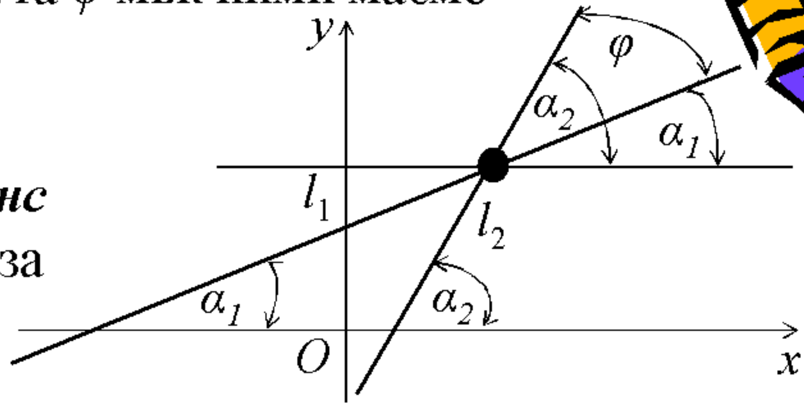



Рис. 13

Оскільки $tg\alpha_1 = k_1$; $tg\alpha_2 = k_2$, то ***тангенс кута між прямими*** знаходиться за формулою

$$tg\ \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Для паралельних прямих $\varphi = 0$, $tg\varphi = 0$, а для перпендикулярних прямих $\varphi = 90^o$, $tg\varphi \to \infty$. З одержаної формули випливає, що

1) ***необхідною і достатньою умовою паралельності*** невертикальних прямих $l_1$ і $l_2$ є рівність $k_1 = k_2$;

2) ***необхідною і достатньою умовою перпендикулярності*** похилих прямих $l_1$ і $l_2$ є рівність $k_1 k_2 = -1$.

<u>Зауваження</u>. Кут між прямими $\varphi$ розуміється як кут повороту. ***Гострий кут*** між прямими знаходиться за формулою

$$\varphi_г = arctg\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$