

і причому єдиний розв'язок.

Нехай $h_1 = h_2 = h$; $M_{kl}(x_k; y_l)$, $x_k = a + kh$, $y_l = c + lh$; $k = 0, 1, 2, \dots, m$, $l = 0, 1, 2, \dots, n$. Вихідній крайовій задачі відповідає наступна система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих u_{kl} :

$$u_{k-1,l} + u_{k,l-1} + u_{k+1,l} + u_{k,l+1} - 4u_{kl} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m-1; l = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.93)$$

$$u_{0l} = f(0, hl) \quad (l = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.94)$$

$$u_{kn} = f(kh; nh) \quad (k = 1, 2, \dots, m-1) \quad (3.95)$$

$$u_{ml} = f(mh; lh) \quad (l = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.96)$$

$$u_{k0} = f(kh; 0) \quad (k = 1, 2, \dots, m-1) \quad (3.97)$$

Сіткова крайова задача включає $(m+1)(n+1)-4$ рівнянь (3.93)–(3.97): $(m-1)(n-1)$ рівнянь (3.93), що апроксимують ДРЧП, і $2(m+n)-4$ рівнянь (3.94)–(3.97), що апроксимують ГУ. Рівняння (3.94)–(3.97) визначають значення змінних u_{kl} на межі області \tilde{D} . Якщо підставити ці значення в (3.93), то одержимо квадратну систему з $(m-1)(n-1)$ неоднорідних лінійних рівнянь з $(m-1)(n-1)$ невідомими u_{kl} ($k = 1, 2, \dots, m-1$; $l = 1, 2, \dots, n-1$).

Цю лінійну алгебраїчну систему можна подати в стандартній матричній формі

$$AU = B \quad (3.98)$$

де U – матриця-стовпець невідомих; B – матриця-стовпець вільних членів; A – квадратна матриця коефіцієнтів системи. Елементами матриці U служать числа u_{kl} , які відповідають внутрішнім точкам M_{kl} області \tilde{D} ; елементами матриці B – числа u_{kl} , які відповідають точкам межі області \tilde{D} .

Випишемо і розв'яжемо сіткову крайову задачу для заданих конкретних значень $h = 0,1$; $m = 3$; $n = 3$. У цьому випадку (рис. 9) внутрішніми точками є $M_{11}(x_1; y_1)$, $M_{12}(x_1; y_2)$, $M_{21}(x_2; y_1)$, $M_{22}(x_2; y_2)$ і система алгебраїчних рівнянь (3.93) – (3.97): має вигляд

$$AU = B \quad (3.99)$$

де

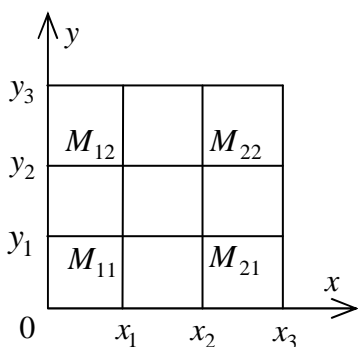


Рис. 9

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0,25 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & -1 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & -1 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -(u_{01} + u_{10})/4 \\ -(u_{02} + u_{13})/4 \\ -(u_{20} + u_{31})/4 \\ -(u_{23} + u_{32})/4 \end{pmatrix};$$

$$U^T = (u_{11} \quad u_{12} \quad u_{21} \quad u_{22}).$$

Значення u_{10} , u_{20} , u_{31} , u_{32} , u_{23} , u_{13} , u_{02} , u_{01} співпадають із заданими значеннями функції $g(x, y) = x - y$ на межі S області \tilde{D} :

$$x_k = 0,1k; \quad y_e = 0,1l; \quad u_{10} = g(x_1, y_0) = 0,1 \cdot 1 - 0,1 \cdot 0 = 0,1;$$

$$u_{20} = g(x_2, y_0) = 0,1 \cdot 2 - 0,1 \cdot 0 = 0,2; \quad u_{31} = g(x_3, y_1) = 0,1 \cdot 3 - 0,1 \cdot 1 = 0,2;$$

$$u_{32} = g(x_3, y_2) = 0,1 \cdot 3 - 0,1 \cdot 2 = 0,1; \quad u_{23} = g(x_2, y_3) = 0,1 \cdot 2 - 0,1 \cdot 3 = -0,1;$$

$$u_{13} = g(x_1, y_3) = 0,1 \cdot 1 - 0,1 \cdot 3 = -0,2; \quad u_{01} = g(x_0, y_1) = 0,1 \cdot 0 - 0,1 \cdot 1 = -0,1;$$

$$u_{02} = g(x_0, y_2) = 0,1 \cdot 0 - 0,1 \cdot 2 = -0,2.$$

$$\text{Тоді } B = \begin{pmatrix} -(-0,1+0,1)/4 \\ -(0,2+(-0,2))/4 \\ -(0,2+0,2)/4 \\ -(-0,1+0,1)/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,2 \\ -0,1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На практиці система (3.98) має велику розмірність і, як правило, розв'язується тим чи іншим ітераційним методом на ЕОМ. В даному модельному випадку систему (3.99) невисокого – четвертого – порядку будемо розв'язувати прямим методом – *методом виключення Гаусса*.

1) Прямий хід:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0,25 & -1 & 0 & 0,25 & 0,1 \\ 0,25 & 0 & -1 & 0,25 & -0,1 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim |S'_2 = S_2 + 0,25S_1; \quad S'_3 = S_3 + 0,25S_1| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & -0,9375 & 0,0625 & 0,25 & 0,1 \\ 0 & 0,0625 & -0,9275 & 0,25 & 0,1 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left| \begin{array}{l} S'_2 = S_4 \\ S'_4 = S_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & -1 & 0 \\ 0 & 0,0625 & -0,9325 & 0,25 & -0,1 \\ 0 & -0,9375 & 0,0625 & 0,25 & 0,1 \end{array} \right) \sim |S'_3 = S_3 - 0,25S_2; \quad S'_4 = S_4 + 3,75S_2| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0,5 & -0,1 \\ 0 & 0 & 1 & -3,5 & 0,1 \end{array} \right) \sim |S'_4 = S_4 + S_3| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0,25 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,25 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0,5 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

2) Зворотний хід:

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_{11} + 0,25u_{12} + 0,25u_{21} = 0; \\ 0,25u_{12} + 0,25u_{21} - u_{22} = 0; \\ -u_{21} + 0,5u_{22} = -0,1; \\ -3u_{22} = 0; \end{array} \right. \quad u_{22} = 0; \quad u_{21} = 0,5u_{22} + 0,1 = 0,1;$$

$$u_{12} = (u_{22} - 0,25u_{21})/0,25 = -0,1; \quad u_{11} = 0,25u_{12} + 0,25u_{21} = -0,025 + 0,025 = 0.$$

Отже,

$$u_{11} = 0; \quad u_{12} = -0,1; \quad u_{21} = 0,1; \quad u_{22} = 0$$

– шукані значення u_{kl} функції $u = u(x, t)$ у внутрішніх вузлах сітки M_{kl}
($k = 1, 2, \dots, m-1$; $l = 1, 2, \dots, n-1$).

Зауваження 2. Розглянуті в даному розділі методи не вичерпують усіх відомих способів розв'язання задач математичної фізики. Перелічимо деякі найбільш вживані методи:

- 1) Метод відокремлення змінних.
- 2) Метод інтегральних перетворень (зокрема, застосування перетворення Лапласа – операційний метод).
- 3) Метод перетворення координат.
- 4) Метод заміни незалежних і залежних змінних.
- 5) Метод функцій Гріна (функцій впливу (джерела)).
- 6) Метод інтегральних рівнянь.
- 7) Варіаційні методи (замість крайової задачі для ДРЧП розв'язується деяка задача оптимізації).
- 8) Чисельні методи (метод сіток, апроксимація сплайнами, метод скінченних елементів і т.п.).

5.4. Нелінійні рівняння математичної фізики. Солітони. Узагальнені розв'язки. Самоорганізація

5.4.1. Загальне поняття про нелінійні моделі фізичних процесів

Фізичні явища, які відбуваються в природі, як правило, носять дуже складний характер. Тому математичні моделі реальних процесів, які досить точно відображають основні їх закономірності, виявляються нелінійними. Лінійні моделі виникають звичайно при додаткових спрощеннях, до яких приводять різні правдоподібні припущення, такі як малість величин, що характеризують процес. Складність оперування з нелінійними моделями довгий час стримувала їх практичне застосування. У результаті поза належною увагою залишались посправжньому життєво важливі явища, які не піддаються лінійному описові і з класичних позицій часто сприймаються як катастрофи. Потреби більш глибокого вивчення реальних процесів і зростання можливостей обчислювальної техніки створюють передумови для підвищення інтересу до нелінійних моделей, відкриття нових чисто нелінійних математичних методів.

Можна виділити наступні три основні властивості нелінійних ДРЧП, які відрізняють їх від лінійних рівнянь:

- 1) утворення стійких усамітнених хвиль – солітонів; які ведуть себе подібно частинкам;
- 2) руйнування неперервних, гладких (класичних) розв'язків і утворення розривних (узагальнених) розв'язків, які відповідають ударним хвилям;
- 3) самоорганізація систем – утворення розв'язків зі стійкою неоднорідною структурою при однорідних умовах задачі, наприклад, утворення дисипативних (теплових) структур в нелінійних задачах дифузії.

Зазначені властивості більш докладно розглядаються нижче на прикладах деяких нелінійних рівнянь математичної фізики.

5.4.2. Солітони

Історично вперше (1895 р.) *солітонні розв'язки* з'явилися при розгляді *рівняння Кортевега - де Фріза* (КдФ), що описує хвилі на мілкій воді

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3}{2\lambda_0} \eta \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h_0^2}{6} c_0 = 0 \quad (4.1)$$

де h_0 – глибина рідини; $C_0 = \sqrt{gh_0}$ – довгохвильова межа швидкості хвиль на мілкій воді; g – прискорення вільного падіння; $\eta = \eta(x_1 t)$ – рівняння вільної поверхні рідини, причому $\eta \ll h_0$.

Заміна змінних

$$\bar{x} = (x - c_0 t) / x_0; \quad \bar{t} = t / t_0; \quad u = \eta / A,$$

де

$$x_0 = h_0 / \sqrt[3]{6}; \quad t_0 = h_0 / c_0; \quad A = 4x_0,$$

зводить рівняння КдФ (4.1) до канонічного вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} + 6u \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^3} = 0 \quad (4.2)$$

Односолітонному розв'язку рівняння КдФ (4.2)

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\bar{\alpha}^2}{2} \cdot \left(1 / \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\bar{\alpha}}{2} (\bar{x} - \bar{x}_0) - \frac{\bar{\alpha}^3}{2} \bar{t} \right) \right) \quad (4.3)$$

де $\bar{\alpha}, \bar{x}_0$ – довільні сталі, відповідає усамітнена хвиля (горб) висотою $u_{\max} = \bar{\alpha}^2 / 2$, яка рухається в додатному напрямку осі $O\bar{x}$ зі швидкістю $v = \bar{\alpha}^2$.

На рис. 10–12 зображена еволюція в часі розв'язку рівняння КдФ, який має при $\bar{t} \rightarrow -\infty$ вигляд двох віддалених солітонів (рис. 10); рис. 11 відображає взаємодію (зіткнення) солітонів; на рис. 12 показано цей розв'язок після зіткнення при $\bar{t} \rightarrow +\infty$, коли солітони розійшлися без зміни своєї форми, одержавши лише зміну $\Delta \bar{x}$ величини параметра \bar{x}_0 : для солітона з більшою швидкістю $\Delta \bar{x}_0 > 0$, а для солітона з меншою швидкістю $\Delta \bar{x}_0 < 0$.

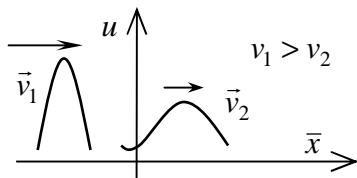


Рис. 10

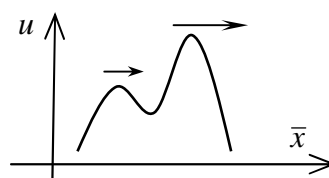


Рис. 11

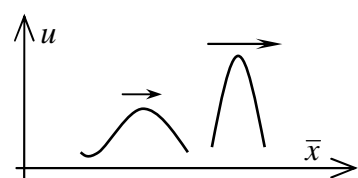


Рис. 12

Такі властивості вперше були виявлені при чисельному розв'язанні рівняння КдФ (4.2), а потім були одержані аналітичним методом, що спирається на обернену задачу розсіювання для одновимірного рівняння Шредінгера.

Узагальненням рівняння КдФ на випадок довільної залежності фазової швидкості синусоїдальних хвиль $c(k)$ від хвильового числа k служить *рівняння Уізема*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \int_{-\infty}^{+\infty} C(x-z) \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} dz = 0 ,$$

де ядро $C(x)$ – Фур’є-образ функції $c(k)$.

Для ядра

$$C_0 = (\lambda/2)e^{-\lambda|x|} ,$$

де $\lambda > 0$ – довільне додатне число, усамітнені хвилі сталої форми можуть бути подані в аналітичній формі. При цьому існує гранична амплітуда таких хвиль $u_{\max} = 4/3$. Хвиля граничної амплітуди

$$u(x,t) = \frac{4}{3} \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\left|x - x_0 - \frac{4}{3}t\right|\right) ,$$

де x_0 – довільна стала, має особливість – загострення на вершині.

Значний інтерес представляє рівняння “sin-Гордона” (“синус-Гордона”)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin u \quad (4.4)$$

що описує велику кількість фізичних явищ, таких як дислокації в кристалах, лазерні імпульси у двофазних середовищах, поширення хвиль у феромагнетиках, зв’язаних з обертанням напрямку намагніченості, джозефсонівські переходи в надпровідниках, які розділені тонким шаром діелектрика та інші.

На рис. 13 показана механічна система, рух якої описується рівнянням вигляду (4.4). Це ланцюг маятників, зв’язаних з пружною ниткою. При відхиленні маятника на кут u на нитку діє пропорційна $\sin u$ сила, що викликає скручування.

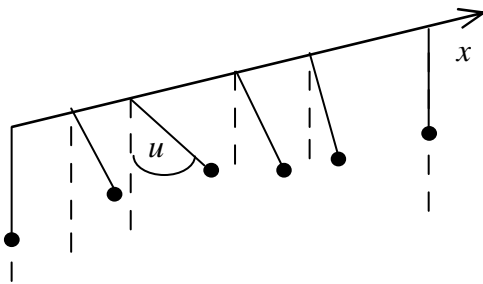


Рис. 13

Розглянемо розв’язки рівняння (4.4), що мають вигляд хвиль сталої форми $u(x,t) = y(x-ct)$, які поширюються зі швидкістю c в напрямку осі Ox . Функція $y(z)$ задовольняє звичайному диференціальному рівнянню

$$(1-c^2)y'' = \sin y .$$

Помножимо обидві частини цього рівняння на похідну y' і проінтегруємо. У результаті одержимо

$$\frac{1}{2}(1-c^2)y'^2 = 1 - \cos y - 2A \quad (4.5)$$

де A – довільна стала.

Якщо $c > 1$, $0 < A < 1$, то рівняння (4.5) можна подати у вигляді

$$y'^2 = \frac{4}{c_1^2} \left(A - \sin^2 \frac{y}{2} \right) , \text{ де } c_1 = \sqrt{c^2 - 1} .$$

Його розв’язки $y_k(z) = 2 \arcsin \left(k \cdot \operatorname{sn} \left(\frac{z-z_0}{c_1}, k \right) \right)$

відповідають коливальному руху маятників на рис. 54.

Тут $k = \sqrt{A}$; z_0 – довільна стала; $sn(z, k)$ – *еліптична функція Якобі “синус амплітуди z ”*. У “*плазменій*” хвилі $y_k(x-ct)$, яка біжить по механічній системі на рис. 13, окремі маятники коливаються навколо положення рівноваги $u = 0$ з максимальним кутом відхилення $u_{\max} = 2 \arcsin k$.

У граничному випадку $k \ll 1$, $u_{\max} \ll 1$ маємо синусоїдальні хвилі з малими коливаннями маятників

$$u_k(x, t) = u_{\max} \sin \frac{x - x_0 - ct}{c_1} = u_{\max} \sin(kx - \omega t - \varphi_0) \quad (4.6)$$

де x_0 – довільна стала.

Хвилі (4.6) служать розв’язками лінеаризованого рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -u,$$

мають довжину хвилі λ , хвильове число k , частоту ω і початкову фазу φ_0 , які зв’язані співвідношеннями

$$\lambda = 2\pi c_1; \quad k = 1/c_1; \quad \omega = c/c_1; \quad \omega = \sqrt{1+k^2}; \quad \varphi_0 = x_0/c_1.$$

Якщо $0 < c < 1$, $A \leq 0$, то рівняння (4.5) приймає вигляд

$$y'^2 = \frac{4}{c_1^2} \left(B - \cos^2 \frac{y}{2} \right), \quad \text{де } B = 1 - A \geq 1; \quad c_1 = \sqrt{1 - c^2}.$$

Його розв’язки $y_{\pm f}(z) = 2 \arcsin \left(\pm cn \left(\frac{z - z_0}{kc_1}, k \right) \right)$

відповідають оберտальному руху маятників на рис. 13.

Тут $k = 1/\sqrt{B}$; z_0 – довільна стала; $cn(z, k)$ – *еліптична функція Якобі “косинус амплітуди z ”*; знаки “+” і “-” відповідають “*флюксонній*” і “*антифлюксонній*” хвилям. У “*флюксонній*” $y_f(x-ct)$ чи “*антифлюксонній*” $y_{-f}(x-ct)$ хвилі, яка біжить по механічній системі на рис. 13, окремі маятники здійснюють обертальний рух – по системі поширюються *спіральна хвиля*, закручена проти чи за годинникову стрілку. У граничному випадку $k = 1$ маємо розв’язок

$$u_c(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left(\exp \left(\pm \frac{x - x_0 - ct}{c_1} \right) \right),$$

який при фіксованому виборі знака “+” чи “-” відповідає усамітненій хвилі. При зміні x від $-\infty$ до $+\infty$ маятники на рис. 13 здійснюють повний оберт проти годинникової стрілки для знака “+” і за годинниковою стрілкою для знака “-”. Маємо відповідно *солітон і антисолітон (флюксон і антифлюксон)* рівняння “*sin-Гордона*”.

Існують також двосолітонні розв’язки рівняння (4.4), які описують зіткнення солітон – солітон, солітон – антисолітон і осцилюючий зв’язаний стан солітона і антисолітона в системі відліку, зв’язаний з їх центром мас, – *бризер* (від англ. breather – дихаючий розв’язок).

Поширення лазерних пучків у нелінійних середовищах, властивості яких

залежать від інтенсивності світла, описується **кубічним рівнянням Шредінгера**

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v|u|^2 u = 0 \quad (4.7)$$

де v – задане число; i – уявна одиниця.

Розглянемо розв’язки рівняння (4.7), що мають вигляд модульованої плоскої хвилі

$$u(x, t) = V(x - ct) e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.8)$$

де $V(x)$ – дійсна функція (амплітуда хвилі).

Підставивши (4.8) в (4.7), одержимо

$$V'' - \alpha V + vV^3 + i(2k - c)V' = 0, \quad \text{де } \alpha = k^2 - \omega^2.$$

Щоб функція $V(x)$ була дійсною, треба покласти $2k = c$. Тоді, помноживши обидві частини останнього рівняння на похідну V' і проінтегрувавши, дістанемо

$$V'^2 = A + \alpha V^2 - \frac{v}{2} V^4.$$

В окремому випадку $A = 0$, $\alpha > 0$, $v > 0$ амплітуда (обвідна) $V(x)$ хвилі (4.8) виражається через елементарні функції

$$V(x) = \sqrt{\frac{2\alpha}{v}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(x\sqrt{\alpha})}.$$

Відповідний розв’язок

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{v}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha}(x - ct))} \exp\left(i\left(c\frac{x}{2} - \omega t\right)\right) \quad (4.9)$$

називається **солітоном обвідної**.

Графіки дійсної частини $u_1 = \operatorname{Re} u$ солітонного розв’язку (4.9) і його обвідної $V(x)$ для деякого фіксованого моменту часу показані на рис. 14. Аналогічні

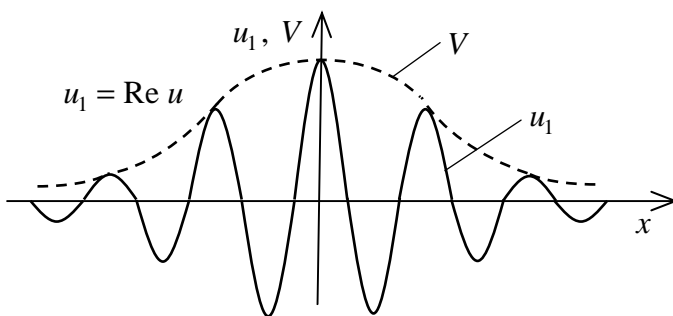


Рис. 14

хвилі викликаються вітром на глибокій воді. В цьому випадку, звичайно, під обвідною знаходиться не більше 14–20 горбів з довжиною хвилі $\lambda = \frac{4\pi}{c}$, причому середній з них – найвищий. Цим пояснюється відоме морякам правило, що найвищі хвилі в групі – це сьома – десята (“дев’ятий вал”).

5.4.3. Узагальнені розв'язки

Розривним розв'язком ДРЧП називається розривна функція $u(x, y)$, яка задовольняє деякому **інтегральному закону збереження**, що відповідає даному ДРЧП. Звідси випливає, що розривний розв'язок $u(x, y)$ задовольняє ДРЧП поза лінією розриву $x = x(t)$ і так званій **умові Гюгоніо** на лінії розриву. Оскільки для ДРЧП може існувати не один інтегральний закон збереження, то для вибраного ДРЧП можна, в загальному випадку, записати деяку множину умов Гюгоніо.

Таким чином, для однозначного визначення розривного розв'язку ДРЧП необхідно вказати певний інтегральний закон збереження. У фізичних задачах (наприклад, в механіці суцільних середовищ) такий закон може бути встановлений однозначно – звичайно, це закон збереження маси, імпульсу чи енергії. Розривні розв'язки служать зручною математичною моделлю **ударних хвиль**, поблизу фронту яких відбуваються різкі зміни фізичних величин (густини, тиску, температури і т.п.). У таких областях математичні моделі у вигляді ДРЧП перестають вірно описувати фізичні процеси, оскільки втрачають справедливості відповідні припущення і наближені співвідношення, на основі яких виводиться дане ДРЧП. Розгляд розривних розв'язків дозволяє уникнути побудови більш точних, але і більш складних математичних моделей, які треба застосовувати у порівняно вузьких областях поблизу фронту ударних хвиль.

Узагальненим розв'язком називається фізично правильний розривний розв'язок, який визначається як границя неперервних (класичних) розв'язків при певних граничних змінах даних задачі. Наприклад, узагальнений розв'язок задачі Коші для **рівняння переносу** вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.10)$$

з розривною початковою умовою

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u^-, & x < 0; \\ u^+, & x > 0 \end{cases} \quad (u^-, u^+ = \text{const}) \quad (4.11)$$

можна знайти як границю класичних розв'язків для згладжених початкових умов, які наближаються до заданої розривної функції (4.11) (рис. 15). Така неперервна залежність розв'язків від вхідних даних є однією з умов коректності задач математичної фізики, що забезпечує єдиність розв'язку.

Інший підхід до знаходження узагальненого розв'язку полягає у включенні в ДРЧП (4.10) додаткового дифузійного члена

на $v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, що описує розсіювання (дисипацію) енергії через внутрішнє тертя (в'язкість). В результаті приходимо до більш точного ДРЧП, яке описує ударні хвилі – **рівняння Бюргерса**

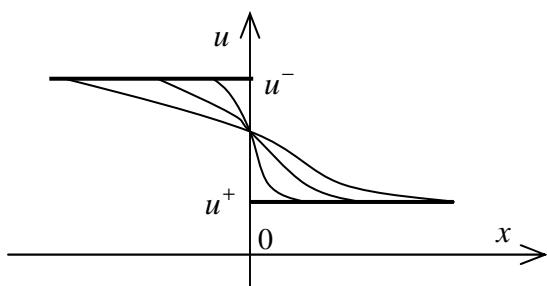


Рис. 15

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

Тут $\nu > 0$ – в'язкість середовища.

Врахування дифузії енергії приводить до розмиття і згладжування профілю ударної хвилі. У граничному випадку $\nu \rightarrow 0$, коли дифузійний член прямує до нуля, одержується розривна ударна хвиля – узагальнений розв'язок.

Ударні хвилі можуть виникати і при неперервних початкових умовах з достатньо крутим переднім фронтом. Утворення багатозначного профілю розв'язку ДРЧП при перетині деяких характеристик називається **перекиданням ударної хвилі або градієнтною катастрофою** – в момент перекидання $\min \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow -\infty$ (рис. 16).

Замість багатозначного розв'язку, що, як правило, суперечить фізичній суті математичної моделі, вводять розривний розв'язок. Для вибору лінії розриву

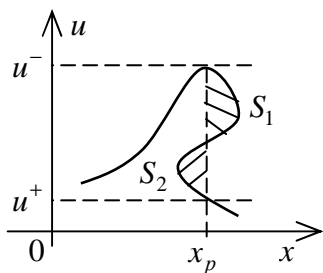


Рис. 16

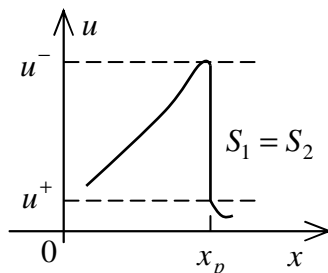


Рис. 17

використовують відповідний інтегральний закон збереження. Наприклад, вибирають значення x_p із умови рівності заштрихованих площ S_1 і S_2 (рис. 16, 17).

5.4.4. Самоорганізація нелінійних систем

Самоорганізацією називається процес **спонтанного** (самовільного) порушення ступеня симетрії (однорідності) фізичної системи з утворенням упорядкованих у просторі і часі структур з низьким ступенем симетрії (**локалізація неперервних процесів**). Такі процеси описуються нелінійними математичними моделями з дисипацією (дифузією) і взаємодією з навколишнім середовищем. На відміну від лінійних задач, де дифузія приводить до вирівнювання температур, концентрацій і т.п., у нелінійних задачах дифузія викликає формування упорядкованих структур, які називаються **дисипативними структурами**.

Розглянемо нелінійне рівняння теплопровідності з залежним від температури $T = T(x, t)$ коефіцієнтом температуропровідності $k = k(T)$ і джерелами тепла $Q = Q(T)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Q \quad (4.12)$$

де

$$k = k_0 T^b; \quad Q = q_0 T^\beta; \quad k_0, q_0, b = \text{const} > 0; \quad \beta = \text{const} > 1.$$

Рівняння (4.12) описує процеси горіння. Розв'язання його чисельними методами на ЕОМ і наступні фізичні експерименти привели до відкриття явища локалізації тепла. Розмір нагрітої області з плином часу залишався незмінним, температура в цій області необмежено зростала (**режим із загостренням**). Розв'язок має вигляд

$$T(x, t) = g(t) f(x/\varphi(t)) ;$$

де

$$g(t) = A_1 (1 - t/t_f)^{-1}; \quad \varphi(t) = A_2 (1 - t/t_f)^{\frac{\beta-b-1}{2(\beta-1)}}; \quad f(z) = \left(2(b+1)b^{-1}(b+2)b^{-1} \cos^2(\pi z/L_f) \right)^{\frac{1}{b+1}};$$

$$L_f = \frac{2\pi}{b} \sqrt{\frac{(b+1)k_0}{q_0}}; \quad A_1 = A_1(\beta, b, k_0, q_0); \quad A_2 = A_2(\beta, b, k_0, q_0); \quad t_f = \text{const}.$$

З плином часу розподіл температури залишається подібним самому собі, просто він розтягується в певне число разів вздовж осей Ox і Ot . Такі розв'язки називаються **автомодельними (самоподібними)**. До них відносяться також вже розглянуті солітони і ударні хвилі.

Приклади локалізації у просторі та часі неперервних процесів і утворення дисипативних структур виявлені у фізиці, хімії, біології, екології. Одна з найбільш відомих математичних моделей із самоорганізацією – це **модель бруселятора**

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B+1)X + X^2 Y + D_1 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (0 < x < l; \quad t > 0) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2 Y + D_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (0 < x < l; \quad t > 0) \quad (4.14)$$

де $X = X(x, t)$, $Y = Y(x, t)$ – концентрації деяких основних хімічних речовин X і Y у витягнутому вздовж осі Ox реакторі; l – довжина реактора.

Речовини X і Y залишаються в реакторі, тому граничні умови на кінцях реактора

$$\frac{\partial X(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Y(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0); \quad \frac{\partial X(l, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Y(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0).$$

Параметри A і B визначаються концентраціями, які підтримуються сталими, деяких інших допоміжних речовин A і B .

Просторово однорідні стаціонарні розв'язки диференціальної системи (4.13), (4.14) знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь

$$A - (B+1)X + X^2 Y = 0; \quad BX - X^2 Y = 0.$$

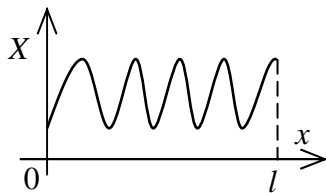


Рис. 18

Ця система має єдиний розв'язок $X = A$, $Y = B/A$, який називається **термодинамічною гілкою**. При малих концентраціях речовини B довільні початкові умови $X = X(x, 0)$, $Y = Y(x, 0)$ приводять до термодинамічної гілки. Але починаючи з деякого критичного значення $B \geq B_c$, відбувається вихід на немонотонний стаціонарний розподіл концентрацій (рис. 18) – **стаціонарну дисипативну структуру**.

Збільшення кількості стаціонарних розв'язків (у даному випадку при $B \geq B_c$) називається **галуженням розв'язку або бифуркацією**.

Термодинамічна гілка при $B \geq B_c$ стає нестійкою: початковий стан $X = X(x, 0)$, $Y = Y(x, 0)$ при найменших флуктуаціях переходить у дисипативну структуру. Механічні аналоги бруселятора – кулька в жолобі з одним мініму-

мом ($B < B_c$) і в жолобі з двома мінімумами, які розділені горбом (рис. 19). Роль точки O відіграє термодинамічна гілка, роль рівноправних точок M і N – дисипативна стаціонарна структура.



Рис. 19

В ряді випадків можливі коливальні режими в моделі бруселятора, коли при довільних початкових умовах відбувається вихід на періодичні в часі розв'язки $X = X(x, t)$, $Y = Y(x, t)$ – *нестационарну дисипативну структуру*.

5.5. Контрольні запитання

- 1) Дайте означення диференціального рівняння з частинними похідними (ДРЧП). Що таке загальний і частинний розв'язки ДРЧП?
- 2) Що таке початкова задача (задача Коші) для ДРЧП?
- 3) Укажіть основні типи граничних умов і відповідні типи крайових задач.
- 4) Яка задача математичної фізики називається коректно поставленою?
- 5) Який загальний вигляд лінійного ДРЧП другого порядку?
- 6) Дайте класифікацію лінійних ДРЧП другого порядку. Наведіть відповідний канонічний вигляд лінійного ДРЧП другого порядку кожного типу.
- 7) Що таке характеристики лінійного ДРЧП другого порядку?
- 8) Як здійснюється зведення лінійного ДРЧП другого порядку до канонічного вигляду?
- 9) Як формулюється початкова задача для однорідного одновимірного хвильового рівняння? Як розв'язується ця задача методом характеристик? Наведіть формулу Д'Аламбера для розв'язку цієї задачі.
- 10) Як формулюється перша крайова задача для однорідного одновимірного хвильового рівняння? Як розв'язується ця задача методом відокремлення змінних?
- 11) Як формулюється друга крайова задача для однорідного одновимірного рівняння теплопровідності? Як розв'язується ця задача методом відокремлення змінних?
- 12) Як формулюється перша крайова задача для двовимірного рівняння Лапласа у крузі? Як розв'язується ця задача методом відокремлення змінних? Наведіть інтегральну формулу Пуассона для розв'язку цієї задачі.
- 13) Наведіть схему застосування операційного числення для розв'язування задач математичної фізики.
- 14) Як будується різницева (сіткова) крайова задача, що відповідає даній диференціальній крайовій задачі?
- 15) Укажіть основні властивості нелінійних ДРЧП, що відрізняють їх від лінійних рівнянь.
- 16) Що таке солітон?
- 17) Що таке узагальнений розв'язок?
- 18) Що називається самоорганізацією нелінійних систем? Що таке біфуркація?

5.6. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Встановити тип, знайти рівняння характеристик та звести до канонічного вигляду лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Отримане канонічне рівняння звести до спрощеного вигляду з відсутніми першими похідними:

№ в-та	Завдання
1	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
2	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
3	$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
4	$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
5	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2u - 3x + 4y = 0$
6	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
7	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
8	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
9	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
10	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
11	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 8 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
12	$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
13	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
14	$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 5u = 0$
15	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 9 \frac{\partial u}{\partial x} + 9 \frac{\partial u}{\partial y} - 9u = 0$
16	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

17	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
18	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
19	$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 17 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 7u = 0$
20	$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 6 \frac{\partial u}{\partial x} + 7u = 0$
21	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
22	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
23	$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$
24	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$
25	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} - 5 \frac{\partial u}{\partial y} + 4u = 0$
26	$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} - 15u = 0$
27	$12 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} - 5u = 0$
28	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
29	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$
30	$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 7 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0$

Завдання 2. Використовуючи метод характеристик, за формулою Д'Аламбера знайти розв'язок задачі Коші для одновимірного однорідного хвильового рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($-\infty < x < +\infty$; $t > 0$), якщо початкові умови

$$u(x,0) = (-1)^s \cos Nx + ax, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = (-1)^p N \sin Nx + l.$$

Завдання 3. Розв'язати методом відокремлення змінних крайову задачу для одновимірного однорідного хвильового рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($0 < x < l$; $t > 0$) з однорідними граничними умовами

$$\begin{aligned}((-1)^g + 1)u(0, t) + (1 - (-1)^g) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= 0, \\ (-1)^p + 1)u(l, t) + (1 - (-1)^p) \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} &= 0,\end{aligned}$$

якщо початкові умови

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= ((-1)^g + 1) \sin \frac{p\pi x}{l} + (1 - (-1)^g) \frac{x(l-x)}{l^2}, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= ((-1)^p + 1) \sin \frac{g\pi x}{l} + (1 - (-1)^p) \frac{x(l-x)}{l^2}.\end{aligned}$$

Завдання 4. Розв'язати методом відокремлення змінних крайову задачу для одновимірного однорідного рівняння теплопровідності $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($0 < x < l$; $t > 0$) з однорідними граничними умовами

$$\begin{aligned}((-1)^p + 1)u(0, t) + (1 - (-1)^p) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= 0, \\ (-1)^g + 1)u(l, t) + (1 - (-1)^g) \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} &= 0,\end{aligned}$$

якщо початкова умова $u(x, 0) = ((-1)^g + 1) \sin \frac{N\pi x}{l} + \frac{x(l-x)}{l^2}$.

Завдання 5. Розв'язати методом відокремлення змінних крайову задачу для двовимірного рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0$ у крузі $0 < \rho < a$ при граничній умові $u(a, \varphi) = (-1)^g \sin p\varphi + (-1)^p \cos g\varphi$.

Примітка. У завданнях 2 – 5 прийняті наступні співвідношення для вибору параметрів задач:

$a = |g - p| + 1$, $l = a + [N/(g + p)]$, N – номер варіанта, g – число голосних букв у Вашому прізвищі, p – число приголосних букв у Вашому прізвищі, $[z]$ – ціла частина числа z .

Післямова

В одній книзі важко надати повний виклад усіх спеціальних розділів вищої математики, розглянутих у посібнику. Спираючись на багаторічний досвід викладання та враховуючи сучасні тенденції підвищення практичної спрямованості навчання, автори головну увагу приділили суті розглянутих понять і методів, роз'ясненню конкретних способів їх реалізації, висвітленню проблем і засобів їх розв'язання, формуванню бачення перспективних напрямків розвитку. Докладно опрацьовані типові приклади застосування відповідного математичного апарату. Автори свідомо пішли на певне зниження рівня строгості викладу, не переступаючи меж, прийнятих у навчальній літературі. Для більш поглибленого вивчення матеріалу рекомендується користуватися додатковою літературою.

Автори щиро вдячні своїм безпосереднім колегам з кафедри вищої математики ХНАМГ за товариську підтримку і вимогливість. На думку авторів, даний посібник буде корисним студентам, викладачам і практикуючим спеціалістам, а його удосконалення неможливе без їх критичних зауважень і побажань, які обов'язково будуть враховані.

Бажаємо успіхів і чекаємо відгуків за адресою:
61002, Україна, Харків, вул. Революції, 12, ХНАМГ,
каф. ВМ, доц. Бізюк В.В.;
e-mail: vm_kolosov@ksame.kharkov.ua

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Розділ 1. Елементи теорії функцій комплексної змінної

1. Комплексний аналіз / А.А. Гольдберг, М.М. Шеремета, М.В. Заболоцький, О.Б. Скасків. – Львів: Афіша, 2002. – 208 с.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи и упражнения). – М.: Наука, 1981. – 304 с.
3. Курниш А.В. Теорія функцій комплексної змінної: Практикум. – Ніжин: НДПУ, 2004. – 118 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – СПб.: Лань, 2002. – 688 с.
5. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 520 с.
6. Половинкин Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного. – М.: МФТИ, 2003. – 208 с.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Высш. шк., 1999. – 432 с.
8. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты). – М.: Высш. шк., 1999. – 126 с.
9. Эйдерман В.Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. – М.: Физматлит, 2002. – 256 с.

Розділ 2. Елементи операційного числення

1. Валеев К.Г., Джалладова І.А. Операційне числення та його застосування. – К.: КНЕУ, 2003. – 295 с.
2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высш. шк., 1975. – 407 с.
4. Иосида Косаку. Операционное исчисление: Теория гиперфункций. – Мн.: Университетское, 1989. – 167 с.
5. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задачи и упражнения с подробными решениями. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 175 с.
6. Левинштейн М.Л. Операционное исчисление в задачах электротехники. – Л.: Энергия, 1972. – 360 с.
7. Мартиненко В.С. Операционное исчисление. – К.: Выща шк., 1990. – 359 с.
8. Мельничук О.В., Шевчук О.Г. Застосування основ операційного числення до розв'язання деяких класів задач прикладної та теоретичної фізики. – Ніжин: НДУ, 2006. – 131 с.

9. Мышкис А.Д. Математика для вузов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971. – 632 с.
10. Пчелин Б.К. Специальные разделы высшей математики (Функции комплексного переменного. Операционное исчисление). – М.: Высш. шк., 1973. – 461 с.
11. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
12. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты. – М.: Высш. шк., 1999. – 128 с.
13. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. – М.: Высш. шк., 1976. – 184 с.
14. Шостак Р.Я. Операционное исчисление (краткий курс). – М.: Высш. шк., 1972. – 279 с.

Розділ 3. Елементи варіаційного числення

1. Вариационное исчисление и оптимальное управление / В.И. Ванько, О.В. Ермошина, Г.Н. Кувыркин. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 487 с.
2. Вариационное исчисление (задачи и упражнения) / М.Л.Краснов, Г.И.Макаренко, А.И.Киселев. – М.: Наука, 1973. – 192 с.
3. Высшая математика / П.Ф.Овчинников, Б.М.Лисицын, В.М.Михайленко. – К.: Вища шк., 1989. – 676 с.
4. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.II / П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. – М.: Высш.шк., 1997. – 416 с.
5. Высшая математика: Сборник задач /Х.И.Гаврильченко, А.Ф.Кривой, П.С.Кропивянский и др. – К.: Вища шк., 1991. – 455 с.
6. Заликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 159 с.
7. Иглин С.П. Вариационное исчисление с применением MATLAB. – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2001. – 108 с.
8. Мышкис А.Д. Математика для вузов (специальные курсы). – М.: Наука, 1971. – 632 с.
9. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 495 с.
10. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах. – М.: МАИ, 2000. – 227 с.
11. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – М.: Физматлит, 2001. – 344 с.
12. Спасский Р.А. Классическое вариационное исчисление и вариационные принципы механики. – Севастополь: СевНТУ, 2004. – 175 с.
13. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 191 с.

14. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 319 с.

Розділ 4. Елементи теорії поля

1. Вища математика: Теорія поля / М.А. Мартиненко, Л.Г. Новаковська, Н.В. Нестеренко, С.С. Орел. – К.: КНУХТ, 2003. – 111 с.
2. Высшая математика. Специальные главы / П.И. Чинаев, Н.А. Минин, А.Ю. Перевозников, А.А. Черенков. – К.: Вища школа, 1981. – 367 с.
3. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 491 с.
4. Гук В.М. Теорія поля. – Львів: НТУ “Львівська політехніка”, 2003. – 148 с.
5. Кононенко Г.М. Елементи векторного аналізу і теорія поля. – К.: КНУБА, 2005. – 243 с.

Розділ 5. Елементи математичної фізики

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984. – 383 с.
2. Байков В.А., Жибер А.В. Уравнения математической физики. – М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003. – 256 с.
3. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985. – 310 с.
4. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике. – М.: МГУ, 1998. – 350 с.
5. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2003. – 399 с.
6. Герасін С.М., Ільющко В.М., Тарасов М.М. Лекції з математичної фізики. – Харків: ХТУРЕ, 1996. – 106 с.
7. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. – СПб.: Питер, 2004. – 544 с.
8. Диференціальні рівняння математичної фізики / В.П. Лавренчук, С.Д. Івасишен, В.С. Дронь, Т.І. Готинчан. – Чернівці: Рута, 2005. – 191 с.
9. Задачи по математическим методам физики / И.В. Колоколов, Е.А. Кузнецов, А.И. Мильштейн и др. — М.: Эдиториал УРСС. 2002. – 288 с.
10. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. – М.: Наука: Физматлит, 1997. – 495 с.
11. Лэм Дж. Введение в теорию солитонов. – М.: Мир, 1988. – 294 с.
12. Мартинсон Л.К., Крищенко А.П. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 367 с.
13. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. – 324 с.

14. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2006. – 423 с.
15. Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 354 с.
16. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики. – М.: Высш. школа, 2003. – 255 с.
17. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
18. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1980. – 375 с.
19. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985. – 383 с.
20. Филиппов А.Т. Многоликий солитон. – М.: Наука, 1990. – 286 с.
21. Шарма Дж.Н., Сингх К. Уравнения в частных производных для инженеров. – М.: Техносфера, 2002. – 318 с.
22. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦМНО, 2001. – 303 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Валерій Васильович Бізюк,
Анатолій Вікторович Якунін

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ для електротехніків

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск: С.О. Станішевський

Редактор: М.З. Аляб'єв

План 2008, поз. 119Н

Підп. до друку 5.06.08	Формат 60x84 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі.	Умовн.-друк.арк 14,0	Обл.-вид.арк. 14,5
Тираж 500 прим.	Зам. №	

ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ
ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12