$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = 2\left(y' + (e+x)y''\right).$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду

$$-2\left(y' + (e+x)y''\right) = 0;\ (e+x)y'' + y' = 0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку:

$y' = p;\ y'' = p';\ (e+x)p' + p = 0;\ \int\frac{dp}{p} = -\int\frac{dx}{e+x};$

$\ln|p| = -\ln|e+x| + \ln C_1;\ p = \frac{C_1}{e+x};\ y' = \frac{C_1}{e+x};$

$y = \int\frac{C_1}{e+x}dx = C_1\ln|e+x| + C_2$ — екстремалі.

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{cases} 1 - \ln 2 = C_1 + C_2; & C_1 = 1; \\ 1 = C_1(1 + \ln 2) + C_2; & C_2 = -\ln 2. \end{cases}$$

Отже, $\underline{y = \ln(e+x) - \ln 2 = \ln\frac{e+x}{2}}$ — допустима екстремаль.

Оскільки $F''_{y'y'} = 2(e+x) \geq 0$ при $x \in [0;e]$ і довільних значеннях y, то функціонал має сильний мінімум. Знайдемо його значення:

$$y' = \frac{1}{e+x};\ F(x,y,y') = (e+x)\left(\frac{1}{e+x}\right)^2 = \frac{1}{e+x};\ I_{\min} = I\left[\ln\frac{e+x}{2}\right] = \int_0^e\frac{1}{e+x}dx = \ln|e+x|\Big\|_0^e = \underline{\ln 2}.$$

г) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y') = \frac{e^{-y}}{y'};\ F'_y = -\frac{e^{-y}}{y'};\ F'_{y'} = -\frac{e^{-y}}{(y')^2};$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = -e^{-y}(-1)\cdot y'\cdot\frac{1}{(y')^2} - e^{-y}\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(y')^3}\cdot y'' = \frac{e^{-y}}{y'} + \frac{2e^{-y}\cdot y''}{(y')^3}.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду

$$-\frac{e^{-y}}{y'} - \frac{e^{-y}}{y'} - \frac{2e^{-y}\cdot y''}{(y')^3} = 0;\quad y'' + (y')^2 = 0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку:

$$y' = p;\ p = p(y);\ y'' = p'p;\ p'\cdot p + p^2 = 0;\ p' = -p;\ \int\frac{dp}{p} = -\int dy;$$

$$\ln|p| = -y + \ln C_1;\ p = C_1e^{-y};\ y' = C_1e^{-y};\ \int e^y dy = C_1\int dx;$$

$e^y = C_1x + C_2;\ y = \ln(C_1x + C_2)$ — екстремалі.

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{cases} 1 = \ln C_2; & C_2 = e; \\ 1 + \ln 2 = \ln(C_1e + C_2); & C_1 = 1. \end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y = \ln(x+e)}$.

Оскільки друга похідна $F''_{y'y'} = 2e^{-y}\cdot(y')^{-3}$ залежить від y', то скористаємося посиленими достатніми умовами Лежандра слабкого екстремуму.

На допустимій екстремалі $y = \ln(x+e)$ маємо:

$$y'=\frac{1}{x+e};\ F''_{y'y'}\Big|_{y=\ln(x+e)}=2e^{-\ln(x+e)}\left(\frac{1}{x+e}\right)^{-3}=2(x+e)^2>0$$

при $x\in[0;e]$.

Отже, на цій екстремалі функціонал досягає слабкого мінімуму. Знайдемо його значення:

$$F(x,y,y')=e^{-y}\cdot(y')^{-1}=e^{-\ln(x+e)}\cdot\left(\frac{1}{x+e}\right)^{-1}=1;\ I_{\min}=I[\ln(x+e)]=\int_0^e 1dx=e.$$

3.3.2. Умовний екстремум. Задача Лагранжа. Ізопериметрична задача

Варіаційною ***задачею на умовний екстремум*** називається задача дослідження на екстремум функціоналу, коли на функції, від вибору яких залежить цей функціонал, крім крайових, накладено інші додаткові умови, що звуться ***зв'язками***.

В залежності від їх характеру зв'язки поділяються на: а) ***алгебраїчні*** або ***скінченні (голономні)***; б) ***диференціальні*** або ***неголономні***; в) ***інтегральні*** або ***ізопериметричні***.

За допомогою ***методу множників Лагранжа*** задачі на умовний екстремум зводяться до задач на безумовний екстремум.

Задача Лагранжа: знайти функції $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, які доставляють мінімум (максимум) функціоналу

$$I[y_1,\ldots,y_n]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_n)dx$$

і задовольняють рівняння зв'язку

$$\varphi_j(x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_n)=0,\quad j=\overline{1,m},\ m<n,$$

а також крайові умови

$$y_i(x_1)=y_{i1},\quad y_i(x_2)=y_{i2},\quad i=\overline{1,n}.$$

Припускається, що рівняння зв'язку незалежні, а крайові умови їх задовольняють.

<u>Теорема</u>. *Якщо функції $y_1(x),\ldots,y_n(x)$, є допустимими екстремалями сформульованої задачі Лагранжа, то існують такі <u>функції</u> $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_m(x)$,* ***(множники Лагранжа)****, що функції $y_1(x),\ldots,y_n(x)$, служать безумовними допустимими екстремалями для допоміжного функціоналу*

$$\overline{I}[y_1,\ldots,y_n]=\int_{x_1}^{x_2}\overline{F}(x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)dx,$$

де $\overline{F}(x,y_1,\ldots,y_n,y'_1,\ldots,y'_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=F+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j$ *— допоміжна функція* ***(функція Лагранжа)****.*

<u>Правило</u>. Згідно з наведеною теоремою для знаходження допустимих екстремалей задачі Лагранжа необхідно:

1. Скласти функцію Лагранжа $\overline{F} = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j$ і відповідний допоміжний функціонал $\overline{I} = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F} dx$ з невизначеними <u>функціями</u> $\lambda_j(x),\ j = \overline{1,m}$ — множниками Лагранжа.

2. Скласти систему рівнянь Ейлера–Лагранжа для допоміжного функціоналу:

$$\overline{F}'_{y_i} - \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'_i} = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

приєднати до неї рівняння зв'язку

$$\varphi_j = 0, \quad j = \overline{1,m}$$

і з одержаної об'єднаної системи знайти екстремалі $y_i = y_i(x, C_1, \ldots, C_n),\ i = \overline{1,n}$, де $C_i,\ i = \overline{1,n}$ — довільні сталі, а також, якщо потрібно, множники Лагранжа $\lambda_j = \lambda_j(x, C_1, \ldots, C_n),\ j = \overline{1,m}$.

3. Використовуючи крайові умови, знайти конкретні значення $C_i,\ i = \overline{1,n}$ і допустимі екстремалі.

<u>Приклад 11.</u> Знайти екстремалі функціоналу $I[y,z] = \int_0^1 (y^2 + z^2) dx$ на зв'язку $y' = 3y + 4z$ при крайових умовах $y(0) = 1,\ y(1) = e^5$.

<u>Розв'язання</u>. Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\varphi = y' - 3y - 4z;\ \overline{F} = F + \lambda\varphi;\ \overline{F} = y^2 + z^2 + \lambda(y' - 3y - 4z);\ \overline{I} = \int_0^1 \overline{F} dx = \int_0^1 \Big(y^2 + z^2 +$$

$$+ \lambda(y' - 3y - 4z)\Big) dx; \quad \lambda = \lambda(x).$$

Складемо систему рівнянь Ейлера–Лагранжа:

$$\begin{cases} \overline{F}'_y - \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 0; \\ \overline{F}'_z - \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'} = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} \overline{F}'_y = 2y - 3\lambda; & \overline{F}'_{y'} = \lambda; & \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = \lambda'; \\ \overline{F}'_z = 2z - 4\lambda; & \overline{F}'_{z'} = 0; & \dfrac{d}{dx}\overline{F}'_{z'} = 0; \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 2y - 3\lambda - \lambda' = 0; \\ 2z - 4\lambda = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda' = 2y - 3\lambda; \\ z = 2\lambda. \end{cases}$$

Враховуючи рівняння зв'язку, маємо систему:

$$\begin{cases} \lambda' = 2y - 3\lambda; \\ z = 2\lambda; \\ y' = 3y + 4z. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему зведенням до диференціального рівняння вищого порядку:

$$z = 2\lambda; \begin{cases} \lambda' = 2y - 3\lambda; \\ y' = 3y + 8\lambda; \end{cases} \quad \begin{matrix} y'' = 3y' + 8\lambda';\ y'' = 3y' + 8(2y - 3\lambda); \\ y'' = 3y' + 16y - 24\lambda; \end{matrix}$$

$$\lambda=\frac{1}{8}(y'-3y);\ y''=3y'+16y-24\cdot\frac{1}{8}(y'-3y);\ y''=3y'+16y--3y'+9y;\quad y''-25y=0;$$

$$k^2-25=0;\ k_{1,2}=\pm5;\ y=C_1e^{5x}+C_2e^{-5x};\ y'=5C_1e^{5x}-5C_2e^{-5x};$$

$$\lambda=\frac{1}{8}\left(5C_1e^{5x}-5C_2e^{-5x}-3C_1e^{5x}-3C_2e^{-5x}\right)=\frac{1}{4}C_1e^{5x}-C_2e^{-5x};$$

$$z=2\left(\frac{1}{4}C_1e^{5x}-C_2e^{-5x}\right)=\frac{1}{2}C_1e^{5x}-2C_2e^{-5x}.$$

Отже, екстремалями служать функції

$$y=C_1e^{5x}+C_2e^{-5x};\quad z=\frac{1}{2}C_1e^{5x}-2C_2e^{-5x}.$$

Знайдемо значення C_1 і C_2 із крайових умов:

$$\begin{cases}1=C_1+C_2; & C_1=1;\\ e^5=C_1e^5+C_2e^{-5}; & C_2=0.\end{cases}$$

Отже, допустимі екстремалі $\underline{y=e^{5x};\quad z=\frac{1}{2}e^{5x}}.$

Приклад 12. Знайти геодезичну лінію, яка сполучає дві задані точки $A(1;-1;0)$, $B(2;1;-1)$ поверхні $15x-7y+z-22=0$. Знайти її довжину.

Розв'язання. Нехай шукана лінія визначається рівняннями

$$y=y(x),\ z=z(x).$$

Тоді $y(1)=-1;\ z(1)=0;\ y(2)=1;\ z(2)=-1$ — крайові умови;

$\varphi(x,y,z)=15x-7y+z-22=0$ — рівняння зв'язку;

$I[y,z]=\int\limits_1^2\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx$ — функціонал (довжина дуги AB), мінімум якого треба знайти.

Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\overline{F}=F+\lambda\varphi;\ \overline{F}=\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(15x-7y+z-22);$$

$$\overline{I}[y,z]=\int\limits_1^2\overline{F}dx=\int\limits_1^2\left(\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}+\lambda(15x-7y+z-22)\right)dx.$$

Складемо систему рівнянь Ейлера–Лагранжа:

$$\overline{F}'_y=-7\lambda;\overline{F}'_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}};\ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=\frac{y''+y''(z')^2-z'z''y'}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\overline{F}'_z=\lambda;\overline{F}'_{z'}=\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}};\ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{z'}=\frac{z''+z''(y')^2-y'y''z'}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\begin{cases}\overline{F}'_y-\frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=0;\\ \overline{F}'_z-\frac{d}{dx}\overline{F}'_{z'}=0;\end{cases}\quad\begin{cases}-7\lambda-\frac{y''+y''(z')^2-z'z''y'}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0;\\ \lambda-\frac{z''+z''(y')^2-y'y''z'}{\left(1+(y')^2+(z')^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0.\end{cases}$$

Вилучивши з останньої системи λ, одержимо

$$y''+y''(z')^2-z'z''y'+7\left(z''+z''(y')^2-y'y''z'\right)=0.$$

Продиференціювавши рівняння зв'язку, маємо

$$15-7y'+z'=0; \quad -7y''+z''=0.$$

Звідси $z'=7y'-15; \quad z''=7y''$. Тоді

$$y''+y''(7y'-15)^2-(7y'-15)\cdot 7y''\cdot y'+7\left(7y''+7y''\cdot(y')^2-y'y''(7y'-15)\right)=0.$$

Після спрощення маємо $y''=0$. Тоді $y'=C_1; \quad y=C_1x+C_2$.

З рівняння зв'язку $z=22-15x+7y$. Тоді $z=22-15x+7C_1x+7C_2$.

Отже, $y=C_1x+C_2,\ z=22-15x+7C_1x+7C_2$ — екстремалі.

Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{aligned} y(1)=-1: & \begin{cases} -1=C_1+C_2; & C_1=2; \\ 1=2C_1+C_2; & C_2=-3. \end{cases} \\ y(2)=1: & \end{aligned}$$

Отже, допустимі екстремалі:

$$y=2x-3; \quad z=22-15x+7(2x-3)=-x+1.$$

Таким чином, геодезична лінія визначається рівняннями

$$\underline{y=2x-3,\ z=-x+1,\ x\in[1;2]}.$$

Знайдемо її довжину: $y'=2;\ z'=-1$

$$I_{\min}=I[2x-3,-x+1]=\int_1^2\sqrt{1+2^2+(-1)^2}\,dx=\underline{\sqrt{6}}.$$

Найпростіша ***ізопериметрична задача***: знайти функцію $y(x)$, яка доставляє мінімум (максимум) функціоналу

$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$$

і задовольняє інтегральне рівняння зв'язку

$$I_*[y]=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x,y,y')dx=l,$$

а також крайові умови $y(x_1)=y_1;\ y(x_2)=y_2$.

Теорема. *Якщо функція $y(x)$ є допустимою екстремаллю сформульованої ізопериметричної задачі, то існує така стала (число) λ **(множник Лагранжа)**, що функція $y(x)$ служить безумовною допустимою екстремаллю допоміжного функціоналу*

$$\overline{I}[y]=\int_{x_1}^{x_2}\overline{F}(x,y,\lambda)dx,$$

*де $\overline{F}(x,y,\lambda)=F+\lambda\varphi$ — допоміжна функція **(функція Лагранжа)**.*

Принцип взаємності: *Сукупність умовних екстремалей не залежить від того, чи шукати екстремум функціоналу $I[y]$ при фіксованому значенні $I_*[y]$ чи, навпаки, шукати екстремум $I_*[y]$ при фіксованому значенні $I[y]$.*

Зауваження. На відміну від алгебраїчних чи диференціальних, інтегральні зв'язки не накладають жорстких обмежень на шукані функції, бо з них не можна виразити одні з функцій через інші. Тому число ізопериметричних умов не обов'язково повинно бути меншим числа шуканих функцій.

Приклад 13. Знайти екстремалі функціоналу $I[y]=\int_0^1 (y')^2\,dx$ при крайових умовах $y(0)=1,\quad y(1)=6$ та ізопериметричному зв'язку $\int_0^1 y\,dx=3.$

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$\overline{F}=F+\lambda\varphi;\quad \overline{F}=(y')^2+\lambda y;\quad \overline{I}=\int_0^1 \overline{F}dx;\quad \overline{I}=\int_0^1\left((y')^2+\lambda y\right)dx;\ \lambda=const.$

Складемо рівняння Ейлера:

$$\overline{F}'_y=\lambda;\ \overline{F}'_{y'}=2y';\ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=2y'';$$

$$\overline{F}'_y-\frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=0;\ \lambda-2y''=0;\ y''=\frac{\lambda}{2}.$$

Звідси $y'=\frac{\lambda}{2}x+C_1;\quad y=\frac{\lambda}{4}x^2+C_1x+C_2.$

Використаємо крайові умови:

$$\begin{cases}1=C_2;\\ 6=\frac{\lambda}{4}+C_1+C_2;\end{cases}\quad \begin{matrix}C_2=1;\\ \lambda=20-4C_1;\end{matrix}\quad y=(5-C_1)x^2+C_1x+1.$$

З ізопериметричної умови маємо:

$$\int_0^1\left((5-C_1)x^2+C_1x+1\right)dx=3;\ \left.\left(\left(\frac{5-C_1}{3}\right)x^3+\frac{C_1}{2}x^2+x\right)\right|_0^1=3;\ \frac{5-C_1}{3}+\frac{C_1}{2}+1=3;\quad C_1=2.$$

Отже, допустима екстремаль $y=(5-2)x^2+2x+1=\underline{3x^2+2x+1}.$

Приклад 14. Знайти екстремалі функціоналу $I[y]=\int_0^{\pi}(y')^2\,dx$ при крайових умовах $y(0)=0,\quad y(\pi)=0$ та ізопериметричному зв'язку $\int_0^{\pi}y^2dx=1.$

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$\varphi=y^2;\ \overline{F}=F+\lambda\varphi;\quad \overline{F}=(y')^2+\lambda y^2;\ \overline{I}[y]=\int_0^{\pi}\overline{F}dx;\quad \overline{I}[y]=\int_0^{\pi}\left((y')^2+\lambda y^2\right)dx.$

Складемо рівняння Ейлера:

$$\overline{F}'_y=2\lambda y;\ \overline{F}'_{y'}=2y';\ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=2y'';$$

$$\overline{F}'_y-\frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'}=0;\ 2\lambda y-2y''=0;\ y''-\lambda y=0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння:

1. Якщо $\lambda>0$, то $k^2-\lambda=0;\ k_{1,2}=\pm\sqrt{\lambda};\quad y=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}.$

З крайових умов випливає

$$\begin{cases}0=C_1+C_2;\\ 0=C_1e^{\sqrt{\lambda}\pi}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}\pi};\end{cases}\begin{matrix}C_1=0;\\ C_2=0.\end{matrix}$$

Але функція $y = 0$ не задовольняє інтегральне рівняння зв'язку. Отже, в цьому випадку допустима екстремаль не існує.

2. Якщо $\lambda = 0$, то $k^2 = 0; k_{1,2} = 0; \quad y = C_1 + C_2 x.$.

З крайових умов випливає

$$\begin{cases} 0 = C_1; & C_1 = 0; \\ 0 = C_1 + C_2\pi; & C_2 = 0. \end{cases}.$$

Як було зазначено вище, функція $y = 0$ не задовольняє ізопериметричній умові. Допустимої екстремалі немає.

3. Якщо $\lambda < 0$, то $\quad k^2 - \lambda = 0; k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}\,i; \quad y = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$.

З крайової умови $y(0) = 0$ маємо $C_1 = 0, C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0.$

Оскільки $C_2 \neq 0,$ то з крайової умови $y(\pi) = 0$ випливає $\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0$. Звідси

$$\sqrt{-\lambda}\pi = m\pi, \quad m = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad \lambda = -n^2,\ n = 1,2,\ldots$$

Тому $y = C_2 \sin nx.$ Використаємо інтегральне рівняння зв'язку:

$$\int_0^\pi (C_2 \sin nx)^2 dx = 1; \ C_2^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = 1; \ \frac{1}{2} C_2^2 \left(x - \frac{1}{2n} \sin 2nx \right)\Bigg|_0^\pi = 1; \ C_2^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 1; \ C_2 = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Отже, $\underline{y = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx,\ n = 1,2,\ldots}$ — допустимі екстремалі.

Приклад15. Серед всіх плоских кривих заданої довжини $l = 2sh\frac{1}{2}$, що сполучають дві задані точки $A(0;0)$ і $B(1;0)$ знайти таку, в якої ордината центра мас y_c найменша. Для знайденої кривої обчислити ординату центра мас $y_{c\min}$.

Розв'язання. Задача полягає в мінімізації функціоналу

$y_c = I[y] = \int_0^1 y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx$ при крайових умовах $y(0) = 0,\ y(1) = 0$ та ізопериметричному зв'язку $\int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = 2sh\frac{1}{2}.$

Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\varphi = \sqrt{1 + (y')^2}; \ \overline{F} = F + \lambda\varphi; \ \overline{F} = y\sqrt{1 + (y')^2} + \lambda\sqrt{1 + (y')^2};$$

$$\overline{I}[y] = \int_0^1 \overline{F} dx; \ \overline{I}[y] = \int_0^1 \left(y\sqrt{1 + (y')^2} + \lambda\sqrt{1 + (y')^2} \right) dx.$$

Складемо рівняння Ейлера:

$$\overline{F}'_y - \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 0; \ \overline{F}'_y = \sqrt{1 + (y')^2}; \ \overline{F}'_{y'} = \frac{yy' + \lambda y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}; \quad \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = \frac{(y')^2 + (y')^4 + yy'' + \lambda y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{(y')^2 + '(y')^4 + yy'' + \lambda y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0; \ \ y''(y + \lambda) - (y')^2 - 1 = 0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку:

$$y' = p; \ p = p(y); \ y'' = p \cdot p'; \ p \cdot p'(y + \lambda) - p^2 - 1 = 0;$$

$$\int \frac{pdp}{p^2+1} = \int \frac{dy}{y+\lambda}; \quad \frac{1}{2}\ln\left|p^2+1\right| = \ln|y+\lambda| + \ln|C_1|; \; p^2+1 = C_1^2(y+\lambda)^2;$$

$$\sqrt{1+(y')^2} = C_1(y+\lambda); \; y' = \pm\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1}; \; \int \frac{dy}{\pm\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1}} = \int dx;$$

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1(y+\lambda)+\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1}\right| = x + C_2; \; C_1(y+\lambda)+\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1} = e^{C_1x+C_1C_2}.$$

Спростимо останній вираз, поклавши $C_1(y+\lambda) = ch\,t$.

Тоді

$$\sqrt{C_1^2(y+\lambda)^2-1} = \sqrt{ch^2t-1} = sh\,t; \; ch\,t + sh\,t = e^{C_1x+C_1C_2}; \; e^t = e^{C_1x+C_1C_2}; \; t = C_1x + C_1C_2.$$

Отже, $C_1(y+\lambda) = ch(C_1x + C_1C_2)$.

Тоді

$$\sqrt{1+(y')^2} = ch(C_1x + C_1C_2); \quad y = \frac{1}{C_1}ch(C_1x + C_1C_2) - \lambda$$

— екстремалі (сім'я ланцюгових ліній).

З крайових умов маємо:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{C_1}ch(C_1C_2) - \lambda; \\ 0 = \dfrac{1}{C_1}ch(C_1 + C_1C_2) - \lambda; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{C_1}ch(C_1C_2); \\ 0 = \dfrac{1}{C_1}\left(ch(C_1 + C_1C_2) - ch(C_1C_2)\right); \end{cases}$$

$$2sh\frac{C_1 + C_1C_2 + C_1C_2}{2}\cdot sh\frac{C_1 + C_1C_2 - C_1C_2}{2} = 0; \quad sh\frac{C_1 + 2C_1C_2}{2}\cdot sh\frac{C_1}{2} = 0.$$

Оскільки $C_1 \neq 0$, то з останнього рівняння випливає $C_1 + 2C_1C_2 = 0; C_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Тоді

$$\lambda = \frac{1}{C_1}ch\left(-\frac{C_1}{2}\right) = \frac{1}{C_1}ch\left(\frac{C_1}{2}\right); \; y = \frac{1}{C_1}ch\left(C_1x - \frac{C_1}{2}\right) - \frac{1}{C_1}ch\frac{C_1}{2}; \; \sqrt{1+(y')^2} = ch\left(C_1x - \frac{C_1}{2}\right).$$

Рівняння зв'язку набуває вигляду:

$$\int_0^1 ch\left(C_1x - \frac{C_1}{2}\right)dx = 2sh\frac{1}{2}; \; \frac{1}{C_1}sh\left(C_1x - \frac{C_1}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 2sh\frac{1}{2}; \; \frac{2}{C_1}sh\frac{C_1}{2} = 2sh\frac{1}{2}. \; .$$

Звідси $C_1 = 1$. Отже, допустима екстремаль

$$\underline{y = ch(x - 1/2) - ch(1/2)}.$$

З фізичного змісту задачі випливає, що мінімум функціоналу існує. Оскільки допустима екстремаль єдина, то на ній і досягається мінімум. Знайдемо шукану ординату центра мас $y_{c\min}$:

$$\sqrt{1+(y')^2} = ch(x-1/2); \; y_{c\min} = I[ch(x-1/2) - ch(1/2)] = \int_0^1 (ch(x-1/2) - ch(1/2))ch(x-1/2)dx =$$

$$\int_0^1 ch^2(x-1/2)dx - ch(1/2)\int_0^1 ch(x-1/2)dx = (1/2)\int_0^1 (1 + ch(2x-1))dx - ch(1/2)sh(x-1/2)\Big|_0^1 =$$

$$(x/2 + (1/4)sh(2x-1))\Big|_0^1 - 2ch(1/2)\cdot sh(1/2) = 1/2 + (1/2)sh1 - sh1 = \underline{(1-sh1)/2}.$$

3.3.3. Задача на екстремум функціоналу з рухомими кінцями. Умови трансверсальності

Ставиться задача знаходження мінімуму (максимуму) функціоналу $I[y]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$ серед неперервно диференційовних на відрізку $[x_1;x_2]$ функцій $y=y(x)$, якщо крайові умови не задані, але відомо, що точки $A(x_1;y(x_1))$ і $B(x_2;y(x_2))$ лежать відповідно на заданих лініях $y=g_1(x)$ і $y=g_2(x)$, причому числа x_1 і x_2 також підлягають визначенню.

Сформульована задача називається ***варіаційною задачею з рухомими кінцями***.

У даному випадку клас допустимих функцій, на яких шукається екстремум функціоналу, розширюється порівняно з ситуацією закріплених кінців, бо крім кривих порівняння, що мають спільні межові точки з досліджуваною кривою, можна брати криві зі зміщеними кінцевими точками. Це означає, що коли на якій-небудь функції $y_0(x)$ функціонал $I[y]$ досягає екстремуму в задачі з рухомими кінцями, то екстремум тим паче досягається по відношенню до більш вузького класу кривих, які мають спільні межові точки з кривою $y=y_0(x)$, а, отже, функція $y_0(x)$ повинна бути розв'язком рівняння Ейлера

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0.$$

Загальний розв'язок рівняння Ейлера $y=y(x,C_1,C_2)$ включає дві довільні сталі. Конкретні значення довільних сталих знаходяться при закріплених кінцях із крайових умов, а при рухомих — із додаткових умов, які називаються ***умовами трансверсальності*** і мають вигляд:

$$\left[F+(g'_1-y')F'_{y'}\right]_{x=x_1}=0;\quad \left[F+(g'_2-y')F'_{y'}\right]_{x=x_2}=0.$$

Часто числа x_1 і x_2 задані, і точки $A(x_1;y(x_1))$ і $B(x_2;y(x_2))$ можуть переміщатися тільки вздовж вертикальних прямих відповідно $x=x_1$ і $x=x_2$. Тоді умови трансверсальності набувають вигляду:

$$F'_{y'}\Big|_{x=x_1}=0,\quad F'_{y'}\Big|_{x=x_2}=0$$

і називаються ***природними крайовими умовами***.

Розглянемо виведення природних крайових умов. Варіація функціоналу визначається рівністю (п.3.2.2):

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}F'_y\,\delta y dx+\int_{x_1}^{x_2}F'_{y'}\,\delta y' dx.$$

До другого доданка застосуємо метод інтегрування частинами (як в п.3.2.2) і одержимо:

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y dx+\left(F'_{y'}\,\delta y\right)\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

На екстремалі $y(x)$ перший доданок останньої рівності дорівнює нулю, і з необхідної умови екстремуму $\delta I = 0$ випливає:

$$\delta I = F'_{y'}\Big|_{x=x_2} \delta y(x_2) - F'_{y'}\Big|_{x=x_1} \delta y(x_1) = 0.$$

Оскільки δy — довільна варіація і на кінцях може набувати будь-яких значень, то рівність варіації функціоналу нулю можлива у випадку $F'_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0, \quad F'_{y'}\Big|_{x=x_2} = 0.$

Якщо $F = G(x,y)\sqrt{1+(y')^2}$, то умова трансверсальності, наприклад, для лівого кінця має вигляд:

$$\left[G(x,y)\sqrt{1+(y')^2} + (g'_1 - y')G(x,y)y' \Big/ \sqrt{1+(y')^2}\right]\Bigg|_{x=x_1} = 0 \ \text{ або } \ \left[G(x,y)(1+g'_1 y')\right]\Big|_{x=x_1} = 0.$$

Якщо $G(x,y) \neq 0$, то $(1+g'_1 y')\big|_{x=x_1} = 0$ або $g'_1 y'\big|_{x=x_1} = -1$.

Останнє співвідношення є умовою перпендикулярності шуканої кривої, що доставляє екстремум функціоналу, і заданої лінії $y = g_1(x)$. Таким чином, поняття трансверсальності є деяким узагальненням поняття ортогональності.

<u>Правило</u> знаходження допустимих екстремалей варіаційної задачі з рухомими кінцями:

1. Скласти рівняння Ейлера $F'_y - \dfrac{d}{dx}F'_{y'} = 0$, розв'язати його і знайти екстремалі $y = y(x, C_1, C_2)$.

2. Скласти систему алгебраїчних рівнянь для знаходження конкретних значень довільних сталих C_1, C_2 і тих чисел з пари x_1 і x_2, які невідомі. Для цього використати крайові умови, якщо на відповідному кінці вони задані, або природні крайові умови чи, в загальному випадку, умови трансверсальності разом з тими рівняннями перетину шуканої допустимої екстремалі $y = y(x)$ з даними лініями $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, які відповідають невідомим числам з пари x_1 і x_2:

$y(x_1, C_1, C_2) = g_1(x_1); \quad y(x_2, C_1, C_2) = g_2(x_2).$

3. Розв'язати одержану систему і знайти допустиму екстремаль.

<u>Приклад 16.</u> Знайти криву, на якій реалізується мінімум функціоналу $I[y] = \int\limits_0^2 \left(xy' + (y')^2\right)dx$ при умові, що її лівий кінець розміщений в точці $A(0;3)$, а правий кінець — на прямій $x = 2$. Обчислити мінімальне значення функціоналу.

<u>Розв'язання.</u> Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера: $F = xy' + (y')^2;\ F'_y = 0;\ F'_{y'} = x + 2y';\ \dfrac{d}{dx}F'_{y'} = 1 + 2y''.$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \dfrac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду $1 + 2y'' = 0$. Розв'яжемо це рівняння:

$$y' = -\frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2}x + C_1; \quad y = \int\left(-\frac{1}{2}x + C_1\right)dx = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2 \text{ — екстремалі.}$$

Допустима екстремаль повинна проходити через точку $A(0;3)$, тобто на лівому кінці задана крайова умова $y(0)=3$.

Звідси $3=-\frac{0}{4}+C_1\cdot 0+C_2$; $C_2=3$; $y=-\frac{x^2}{4}+C_1x+3$.

Правий кінець допустимої екстремалі ковзає по вертикальній прямій $x=2$. Отже, там повинна виконуватись природна крайова умова $F'_{y'}\big|_{x=x_2}=0$: $(x+2y')\big|_{x=2}=0.$

Підставивши в останній вираз похідну $y'=-x/2+C_1$, одержимо $(x+2(-x/2+C_1))\big|_{x=2}=0;\ C_1=0.$ Отже, допустима екстремаль $\underline{y=-x^2/4+3}$.

Оскільки $F''_{y'y'}=2\ge 0$ при $x\in[0;2]$ і довільних значеннях y', то згідно з достатніми умовами Лежандра на даній єдиній допустимій екстремалі реалізується сильний мінімум функціоналу. Знайдемо його значення:

$$y'=-x/2;\qquad I_{\min}=I\left[-x^2/4+3\right]=\int_0^2\left(x(-x/2)+(-x/2)^2\right)dx=-(1/4)\int_0^2 x^2dx=-x^3/12\Big|_0^2=\underline{-2/3}$$

<u>Приклад 17.</u> Знайти найкоротшу відстань від точки $A(1;0)$ до верхньої половини еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

<u>Розв'язання.</u> Мова йде про мінімізацію функціоналу (довжини дуги) $I[y]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ при умові, що лівий кінець дуги закріплений в точці $A(1;0)$, тобто $x_1=1;\ y(1)=0$, а правий – переміщується по верхній половині еліпса, тобто,

$$g_2(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\,.$$

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F=\sqrt{1+(y')^2};\ F'_y=0;\ F'_{y'}=y'\Big/\sqrt{1+(y')^2};\ \frac{d}{dx}F'_{y'}=y''\Big/\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду

$$0-y''\Big/\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}=0;\quad y''=0.$$

Звідси $y'=C_1;\ y=\int C_1dx=C_1x+C_2$ — екстремалі.

На правому кінці повинна виконуватись умова трансверсальності $\left[F+(g'_2-y')F'_{y'}\right]_{x=x_2}=0$:

$$y'=C_1;\quad g'_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}(-2x)=-\frac{2x}{3\sqrt{9-x^2}};$$

$$\left[\sqrt{1+C_1^2}+\left(-\frac{2x}{3\sqrt{9-x^2}}-C_1\right)\cdot\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}\right]_{x=x_2}=0;\quad 1-\frac{2x_2C_1}{3\sqrt{9-x_2^2}}=0;\quad 3\sqrt{9-x_2^2}-2C_1x_2=0.$$

Приєднавши до останнього співвідношення рівняння перетину екстремалі з еліпсом і крайову умову на лівому кінці, одержимо систему:

$$\begin{cases} 3\sqrt{9-x_2^2}-2C_1x_2=0; \\ C_1x_2+C_2=(2/3)\cdot\sqrt{9-x_2^2}; \\ C_1+C_2=0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, знаходимо $x_2=9/5;\ C_1=2; C_2=-2.$.

Отже, допустима екстремаль $y=2x-2$.

Оскільки згідно з геометричним змістом задачі функціонал має мінімум і допустима екстремаль єдина, то вона й реалізує мінімум. Знайдемо його значення (найкоротшу відстань):

$$y'=2;\ I_{\min}=I[2x-2]=\int_1^{9/5}\sqrt{1+2^2}\,dx=\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Приклад 18. Знайти найкоротшу відстань між параболою $y=x^2$ і прямою $y=x-9/4$.

Розв'язання. Задача полягає в мінімізації функціоналу (довжини дуги) $I[y]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ при умові, що лівий кінець допустимої екстремалі може рухатись вздовж параболи $y=x^2$, а правий — вздовж прямої $y=x-9/4$.

Для цього функціоналу рівняння Ейлера має загальний розв'язок $y=C_1x+C_2$ (приклад 17).

Оскільки

$F=\sqrt{1+(y')^2},\ F'_{y'}=y'\big/\sqrt{1+(y')^2},\ g_1(x)=x^2;\ \ g'_1=2x,\ g_2(x)=x-9/4,\ g'_2=1,\ y'=C_1,$

то умови трансверсальності $\left[F+(g'_1-y')F'_{y'}\right]_{x=x_1}=0; \left[F+(g'_2-y')F'_{y'}\right]_{x=x_2}=0$ набувають вигляду:

$$\begin{cases} \sqrt{1+C_1^2}+(2x_1-C_1)C_1\big/\sqrt{1+C_1^2}=0; \\ \sqrt{1+C_1^2}+(1-C_1)C_1\big/\sqrt{1+C_1^2}=0; \end{cases} \begin{cases} 1+2C_1x_1=0; \\ 1+C_1=0. \end{cases}$$

Звідси $C_1=-1;\ x_1=1/2$.

Використавши рівняння перетину екстремалі з даними лініями $y=g_1(x)$ і $y=g_2(x)$, знайдемо C_2 і x_2:

$$\begin{cases} C_1x_1+C_2=x_1^2; \\ C_1x_2+C_2=x_2-9/4; \end{cases} \begin{cases} -1\cdot(1/2)+C_2=(1/2)^2; \\ -1\cdot x_2+C_2=x_2-9/4; \end{cases}$$

$$C_2=3/4;\ x_2=(1/2)(C_2+9/4)=(1/2)(3/4+9/4)=3/2.$$

Отже, допустима екстремаль $y=-x+3/4$.

Знайдемо відповідне значення функціоналу:

$$y'=-1;\ I[-x+3/4]=\int_{\frac{1}{2}}^{3/2}\sqrt{1+(-1)^2}\,dx=\sqrt{2}.$$

Оскільки згідно з геометричним змістом задачі функціонал має мінімум і допустима екстремаль єдина, то на ній і досягається мінімум. Отже, найкоротша відстань дорівнює $\sqrt{2}$.

Приклад 19. Знайти криву $y=y(x)$, яка доставляє максимум функціоналу $I[y]=\int\limits_0^{\pi/2}\left(y^2-(y')^2\right)dx$ при умові, що її лівий і правий кінці належать відповідно лініям $y=-x+1$ і $y=2x$.

Розв'язання. Складемо рівняння Ейлера

$$F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0;\quad F=y^2-(y')^2;\ F'_y=2y;\ F'_{y'}=-2y';\quad \frac{d}{dx}F'_{y'}=-2y'';\quad 2y+2y''=0;\ y''+y=0.$$

Знайдемо загальний розв'язок:

$$k^2+1=0;\ k_{1,2}=\pm i;\ \ y=C_1\cos x+C_2\sin x\ -\text{ екстремалі.}$$

Конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2 знайдемо з умов трансверсальності

$$\left[F+(g'_1-y')F'_{y'}\right]\Big|_{x=x_1}=0;\ \left[F+(g'_2-y')F'_{y'}\right]\Big|_{x=x_2}=0;\ \ y'=-C_1\sin x+C_2\cos x;\ x_1=0;$$

$$x_2=\pi/2;\ F=y^2-(y')^2=(C_1\cos x+C_2\sin x)^2-(-C_1\sin x+C_2\cos x)^2=C_1^2\cos^2 x+$$
$$+2C_1C_2\sin x\cos x+C_2^2\sin^2 x-C_1^2\sin^2 x+2C_1C_2\sin x\cos x-C_2^2\cos^2 x=C_1^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+$$
$$+2C_1C_2\sin 2x-C_2^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=C_1^2\cos 2x+2C_1C_2\sin 2x-C_2^2\cos 2x;$$

$$g_1=-x+1;\ g'_1=-1;\ g_2=2x;\ g'_2=2;\ F'_{y'}=2C_1\sin x-2C_2\cos x;$$

$$\left[C_1^2\cos 2x+2C_1C_2\sin 2x-C_2^2\cos 2x+(-1+C_1\sin x-C_2\cos x)(2C_1\sin x-2C_2\cos x)\right]_{x=0}=0;$$
$$\left[C_1^2\cos 2x+2C_1C_2\sin 2x-C_2^2\cos 2x+(2+C_1\sin x-C_2\cos x)(2C_1\sin x-2C_2\cos x)\right]_{x=\pi/2}=0;$$

$$\begin{cases}C_1^2-C_2^2+(-1-C_2)\cdot(-2C_2)=0;\\ -C_1^2+C_2^2+(2+C_1)\cdot 2C_1=0;\end{cases}\ \begin{cases}C_1^2+C_2^2+2C_2=0;\\ C_1^2+C_2^2+4C_1=0;\end{cases}\qquad C_1=-\frac{4}{5};\quad C_2=-\frac{8}{5}.$$

Отже, допустима екстремаль $y=-\frac{4}{5}\cos x-\frac{8}{5}\sin x$.

Оскільки $F''_{y'y'}=-2\le 0$ при $x\in[0;\pi/2]$ і довільних значеннях y', то згідно з достатніми умовами Лежандра на даній єдиній допустимій екстремалі реалізується сильний максимум функціоналу. Отже, $y=-\frac{4}{5}\cos x-\frac{8}{5}\sin x$ – шукана крива.

3.3.4. Варіаційні принципи

Варіаційні принципи застосовуються до аналізу різноманітних явищ. Суть кожного з них полягає в тому, що зі всіх допустимих для досліджуваної системи станів реалізується той, який відповідає екстремуму певного функціоналу (для кожного принципу свого). Розглянемо найбільш відомі принципи.

Принцип Ферма в оптиці: *зі всіх можливих шляхів, які сполучають точки A і B, світло вибирає той, що відповідає найменшому часу руху*:

$$I=\frac{1}{c}\int\limits_{\cup AB}n\,dt\to\min.$$

Тут c — швидкість світла у вакуумі, n — показник заломлення світла в даному середовищі, t — час.

Форма кривої AB визначається мінімумом вказаного функціоналу. В оптично однорідному середовищі $(n = const)$ — це пряма лінія.

Принцип Гамільтона–Остроградського (***принцип найменшої дії***) в механіці: *дійсний рух системи виділяється зі всіх допустимих рухів тим, що функціонал, який називається* ***дією***, $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ *досягає при цьому мінімуму*.

Тут L — ***функція Лагранжа***, що є різницею кінетичної T і потенціальної U енергій: $L = T - U$.

<u>Зауваження</u>. Принцип найменшої дії – це узагальнення на задачі динаміки ***принципу мінімуму потенціальної енергії***, що застосовується в статиці.

Візьмемо для прикладу найпростішу механічну систему, що складається тільки з однієї матеріальної точки масою m, яка рухається вздовж осі Ox під дією сили з потенціалом $U(x)$. Розглянемо два випадки:

а) Нехай система консервативна і її функція Лагранжа $L = L(x, \dot{x})$, де $\dot{x} = dx/dt$ – швидкість, не залежить явно від часу t (***однорідність часу***). Тоді рівняння Ейлера для функціоналу S спрощується і набуває вигляду: $L - L'_{\dot{x}} \cdot \dot{x} = -C,$ де $C = const$.

Але $\dot{x} \cdot L'_{\dot{x}} = \dot{x} \cdot \left(m\dot{x}^2/2\right)'_{\dot{x}} = \dot{x} \cdot m \cdot \dot{x} = m\dot{x}^2 = 2T$; $L - L'_{\dot{x}} = (T - U) - 2T = -T - U$.

Звідси $-T - U = -C,\quad \underline{T + U = C}$.

Тобто, *закон збереження енергії виступає наслідком варіаційного принципу найменшої дії*.

б) Нехай функція Лагранжа L не змінюється при паралельному перенесенні системи (***однорідність простору***). Тоді у функціоналі S підінтегральна функція $L = L(x, \dot{x})$ не залежить явно від невідомої функції $x = x(t)$ і рівняння Ейлера спрощується, набуваючи вигляду:

$$\frac{d}{dt} L'_{\dot{x}} = 0; \qquad L'_{\dot{x}} = (T - U)'_{\dot{x}} = T'_{\dot{x}} = C, \quad C = const$$

Але $T'_{\dot{x}} = \left(m\dot{x}^2/2\right)'_{\dot{x}} = m \cdot \dot{x} = p$ — імпульс системи.

Звідси $\underline{p = C}$. Тобто, *закон збереження імпульсу теж виступає наслідком варіаційного принципу найменшої дії*.

3.4. Контрольні запитання

1) Що називається функціоналом?
2) Який функціонал називається лінійним?
3) Що називається відстанню нульового порядку між функціями? Відстанню першого порядку?
4) Що таке відносний (абсолютний) мінімум (максимум) функціоналу?
5) Що таке сильний (слабкий) екстремум функціоналу?
6) Сформулюйте перше і друге означення варіації функціоналу. Що називається другою варіацією функціоналу?

7) Як ставиться найпростіша задача варіаційного числення – задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями?
8) У чому полягає необхідна умова екстремуму функціоналу у варіаційній формі?
9) Запишіть рівняння Ейлера. Який його порядок?
10) Як ставиться найпростіша задача варіаційного числення для функціоналів, що залежать від кількох функцій?
11) Запишіть систему рівнянь Ейлера–Лагранжа.
12) Як ставиться найпростіша варіаційна задача для функціоналів, що залежать від похідних вищих порядків?
13) Запишіть рівняння Ейлера–Пуассона. Який його порядок?
14) У чому полягає достатня умова екстремуму функціоналу у варіаційній формі?
15) Сформулюйте посилені достатні умови Лежандра слабкого екстремуму функціоналу.
16) Сформулюйте достатні умови Лежандра сильного екстремуму функціоналу.
17) Як ставиться задача Лагранжа на умовний екстремум?
18) Що таке алгебраїчні, диференціальні та інтегральні зв’язки?
19) У чому полягає метод множників Лагранжа стосовно розв'язання задачі Лагранжа на умовний екстремум?
20) Сформулюйте правило знаходження допустимих екстремалей задачі Лагранжа на умовний екстремум.
21) Що таке ізопериметрична задача на умовний екстремум?
22) Чому кількість інтегральних зв’язків може бути більшою, ніж число шуканих функцій?
23) У чому полягає метод множників Лагранжа стосовно розв'язання ізопериметричної задачі?
24) У чому полягає принцип взаємності?
25) Як ставиться варіаційна задача з рухомими кінцями?
26) Сформулюйте природні крайові умови.
27) Сформулюйте умови трансверсальності для випадку, коли кінці шуканої екстремалі можуть ковзати вздовж заданих ліній.
28) Сформулюйте правило знаходження допустимих екстремалей варіаційної задачі з рухомими кінцями.
29) У чому полягає принцип Ферма в оптиці?
30) Сформулюйте принцип найменшої дії.
31) Як зв’язані фізичні закони збереження з варіаційними принципами?

3.5. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Обчислити заданий функціонал при заданому значенні аргументу.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$I[y]=\int_1^e xy(y'')^2\,dx;$ $y=\ln x$	11	$I[y]=\int_0^{\pi/4}\frac{y''}{y}\cos^2 x\,dx;$ $y=e^x\cos x$	21	$I[y]=\int_1^2\frac{x^2}{y''(1+x^2)}\,dx;$ $y=arctg\,x$
2	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(y^2+(y'')^2\right)\sin x\,dx;$ $y=\cos x$	12	$I[y]=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{y''}{y}\sin 2x\,dx;$ $y=e^{-x}\sin x$	22	$I[y]=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{y}{y'}\,dx;$ $y=ctg\,x$
3	$I[y]=\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{y''\sin x}{(y')^3}dx;$ $y=\ln x$	13	$I[y]=\int_1^e\frac{\cos x\,dx}{y''+y-2\sin x};$ $y=x^2\sin x$	23	$I[y]=\int_0^1 x\left(y+y''\right)dx;$ $y=e^{-3x}$
4	$I[y]=\int_0^1 x\left(y^2+(y')^2\right)dx;$ $y=\cos x$	14	$I[y]=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{y^2\,dx}{y''-2\cos x};$ $y=x\sin x$	24	$I[y]=\int_0^{3/5}\frac{xy'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx;$ $y=\arcsin x$
5	$I[y]=\int_0^{\pi/8}\left(y^2-(y')^2\right)\sin 2x\,dx;$ $y=\cos x$	15	$I[y]=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\cos^2 x\,dx}{y''+2\sin x};$ $y=x\cos x$	25	$I[y]=\int_0^{\pi/4}y''e^{-x}dx;$ $y=e^x\cos 2x$
6	$I[y]=\int_0^1 x\left(y'\right)^2dx;$ $y=arctg\,x$	16	$I[y]=\int_0^{\pi}y\,y''dx;$ $y=\cos\left(x/3\right)$	26	$I[y]=\int_1^2\frac{yy''e^{-x}}{xy'}\,dx;$ $y=x^2e^x$
7	$I[y]=\int_e^{e^2}\frac{dx}{y''y^2};\quad y=x\ln x$	17	$I[y]=\int_0^{\pi/2}y''y^2\,dx;$ $y=\sin x$	27	$I[y]=\int_e^{e^2}\frac{yy''}{(y')^2}\,dx;$ $y=\ln^2 x$
8	$I[y]=\int_0^{\pi/4}\frac{xy}{y'\cos x}\,dx;$ $y=tg\,x$	18	$I[y]=\int_0^1\left(y+xy'\right)dx;$ $y=\sin\pi x$	28	$I[y]=\int_0^{\pi/4}\frac{y^2}{y'}\,dx;$ $y=tg\,x$
9	$I[y]=\int_0^{3/5}\frac{x}{y'(1-x^2)}\,dx;$ $y=\arcsin x$	19	$I[y]=\int_0^1 y''(1+x^2)\,dx;$ $y=\ln(1+x^2)$	29	$I[y]=\int_e^{e^2}\frac{y^2}{x^3y''+3}\,dx;$ $y=\ln x/x$
10	$I[y]=\int_1^2\frac{y''}{xy'}dx;\quad y=xe^{-x}$	20	$I[y]=\int_0^1 y^2\,dx;$ $y=\sqrt{x}\,e^{-x}$	30	$I[y]=\int_e^{e^3}\frac{y^2}{xy''}dx;$ $y=\sqrt{x}\ln x$

Завдання 2. Знайти відстань нульового порядку між заданими кривими на вказаних відрізках.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y_1(x)=x^3e^{-x}$; $y_2(x)=0$; $[0;2]$	11	$y_1(x)=x^2/2-2x$; $y_2(x)=8/(x-2)$; $[-2;1]$	21	$y_1(x)=6-x$; $y_2(x)=4/x^2$; $[1;4]$
2	$y_1(x)=\sqrt{x}\ln x$; $y_2(x)=\sqrt{x}$; $[e^{-2};1]$	12	$y_1(x)=3e^{-x}$; $y_2(x)=xe^{-x}$; $[0;5]$	22	$y_1(x)=x^4$; $y_2(x)=8x^3$; $[-1;2]$
3	$y_1(x)=2arctg\,x$; $y_2(x)=x$; $[0;\sqrt{3}]$	13	$y_1(x)=x^2e^x$; $y_2(x)=8e^x$; $[0;3]$	23	$y_1(x)=15\sqrt[3]{x^2}$; $y_2(x)=x\sqrt[3]{x^2}$; $[-1;4]$
4	$y_1(x)=4/(x+2)^2$; $y_2(x)=-x$; $[-1;2]$	14	$y_1(x)=-2/(x-1)$; $y_2(x)=x^2-2x$; $[-3;0]$	24	$y_1(x)=2\sqrt{x-1}$; $y_2(x)=x$; $[1;5]$
5	$y_1(x)=4\sqrt{x+2}$; $y_2(x)=x$; $[-1;7]$	15	$y_1(x)=x^5-5x^4$; $y_2(x)=-5x^3$; $[-1;2]$	25	$y_1(x)=\ln x/x$; $y_2(x)=1/x$; $[e^{-1};e]$
6	$y_1(x)=-16/x$; $y_2(x)=x^2$; $[1;4]$	16	$y_1(x)=\sin 2x$; $y_2(x)=\sin x$; $[0;\pi/2]$	26	$y_1(x)=2\ln x$; $y_2(x)=x$; $[1;e]$
7	$y_1(x)=x^4/4-2x^3/3$; $y_2(x)=3x^2/2$; $[-2;4]$	17	$y_1(x)=\ln x$; $y_2(x)=x$; $[e^{-1};e]$	27	$y_1(x)=-4/x^2$; $y_2(x)=8x$; $[1/2;2]$
8	$y_1(x)=x^2/2$; $y_2(x)=8/x$; $[-4;-1]$	18	$y_1(x)=8\ln x$; $y_2(x)=x^2$; $[1;e]$	28	$y_1(x)=3/x^2$; $y_2(x)=2/x^3$; $[1/2;2]$
9	$y_1(x)=108x-60$; $y_2(x)=x^4$; $[-1;4]$	19	$y_1(x)=-108/x$; $y_2(x)=2x^2$; $[2;4]$	29	$y_1(x)=xe^{-x}$; $y_2(x)=e^{-x}$; $[0;3]$
10	$y_1(x)=-16/(x-1)$; $y_2(x)=x^2-2x$; $[2;5]$	20	$y_1(x)=2x^3-3x^2$; $y_2(x)=12x$; $[-2;3]$	30	$y_1(x)=2x^5+5x^4$; $y_2(x)=10x^3$; $[-1;2]$

Завдання 3. Знайти варіацію δI для заданого функціоналу.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(x\cos y+(y')^3\right)dx$	16	$I[y]=\int_0^1 y\left(y'+e^{xy}\right)dx$
2	$I[y]=\int_0^{\pi}(x\sin y+y'\ln y)dx$	17	$I[y]=\int_{-2}^{1}\left(xy-(y')^2\right)dx$
3	$I[y]=\int_0^1 y'\,arctg\,(x+y)\,dx$	18	$I[y]=\int_1^4\left(\ln y-(y')^3\right)dx$

4	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(x\sin y+(y')^2\right)dx$	19	$I[y]=\int_1^{e}\left(x\ln y'+y^4\right)dx$
5	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(y^2\cos x-(y')^2\right)dx$	20	$I[y]=\int_0^{1}\left(xy'+ye^{y'}\right)dx$
6	$I[y]=\int_1^{2}(\sqrt{xy}+\ln y')\,dx$	21	$I[y]=\int_0^{1}\left((y')^2-xe^{y}\right)dx$
7	$I[y]=\int_{-2}^{1}\left(x^3(y')^2-e^{y}\right)dx$	22	$I[y]=\int_0^{1}\left(yy'+xe^{y'}\right)dx$
8	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(x\cos y+y\sqrt{y'}\right)dx$	23	$I[y]=\int_1^{3}y\sqrt{x+(y')^2}\,dx$
9	$I[y]=\int_1^{2}y'\arcsin\sqrt{xy}\,dx$	24	$I[y]=\int_1^{4}y'\,arctg\,\sqrt{xy}\,dx$
10	$I[y]=\int_0^{1}(x^2+y')\arcsin y\,dx$	25	$I[y]=\int_2^{5}\left(x^2-y\right)(y')^3\,dx$
11	$I[y]=\int_0^{1}(x-y')\,arctg\,y\,dx$	26	$I[y]=\int_{-1}^{1}\left(y^3-3x^4y'\right)dx$
12	$I[y]=\int_0^{1}y\,arctg\,(y'+x)\,dx$	27	$I[y]=\int_1^{e}x^2\ln(y'+y)\,dx$
13	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(y'\cos y+x(y')^2\right)dx$	28	$I[y]=\int_1^{2}y'\sqrt{x^2+y^2}\,dx$
14	$I[y]=\int_1^{e}\left(x\ln y+(y')^2\right)dx$	29	$I[y]=\int_0^{4}y\sqrt{xy+y'}\,dx$
15	$I[y]=\int_0^{1}y'\arcsin(x+y)\,dx$	30	$I[y]=\int_1^{2}y'\sqrt{\ln xy}\,dx$

Завдання 4. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють заданим крайовим умовам (допустимі екстремалі). Дослідити на виконання достатніх умов екстремуму.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$I[y]=\int_0^{1}\left(\sin y'+2(y')^2\right)dx;$ $y(0)=3;\ y(1)=1.$	16	$I[y]=\int_{-1}^{0}\left(12xy-(y')^2\right)dx;$ $y(-1)=1;\ y(0)=0.$
2	$I[y]=\int_0^{1}\left((y')^2-y^2-y\right)e^{2x}dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=e^{-1}.$	17	$I[y]=\int_0^{1}\left(x+(y')^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=2.$

3	$I[y]=\int_1^2\left((y')^2+2yy'+y^2\right)dx;$ $y(1)=1;\ y(2)=0.$	18	$I[y]=\int_0^{2\pi}\left((y')^2-y^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(2\pi)=1.$
4	$I[y]=\int_1^e\left(x(y')^2+yy'\right)dx;$ $y(1)=0;\ y(e)=1.$	19	$I[y]=\int_1^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx;$ $y(1)=3;\ y(2)=5.$
5	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+y^2-4y\times\right.$ $\left.\times\sin x\right)dx;\ y(0)=0;\ y(1)=1$	20	$I[y]=\int_0^1(y+\ln y')\,dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=3$
6	$I[y]=\int_0^1\left(y+2xy'+(y')^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=2.$	21	$I[y]=\int_0^1\left(xy'-(y')^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=1/4.$
7	$I[y]=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(y^2-2(y')^2\right)e^{-x}dx;$ $y(0)=0;\ y(3\pi/2)=e^{3\pi/4}.$	22	$I[y]=\int_{-1}^2\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx;$ $y(-1)=1;\ y(2)=4.$
8	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+yy'+12xy\right)dx;$ $y(0)=y(1)=0$	23	$I[y]=\int_0^1\ln(yy')\,dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=3$
9	$I[y]=\int_1^2\left(x^2(y')^2+2yy'+\right.$ $\left.+2xy\right)dx;\ y(1)=1;\ y(2)=8$	24	$I[y]=\int_0^2\left(xy'+(y')^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(2)=0.$
10	$I[y]=\int_0^2\left(y'+(y')^2e^x-x^3\right)dx;$ $y(0)=2;\ y(2)=-1$	25	$I[y]=\int_0^1\frac{e^y}{y'}dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=-\ln 2$
11	$I[y]=\int_0^{\pi}\left(4y\cos x+(y')^2-\right.$ $\left.-y^2\right)dx;\ y(0)=y(\pi)=0$	26	$I[y]=\int_0^1\frac{dx}{(y')^2};$ $y(0)=0;\ y(1)=1.$
12	$I[y]=\int_1^2\left(x^2(y')^2+12y^2\right)dx;$ $y(1)=1;\ y(2)=8.$	27	$I[y]=\int_0^1(x+y^2(y')^2)\,dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=3$
13	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+y^2+6y\times\right.$ $\left.\times sh2x\right)dx;\ y(0)=0;\ y(1)=1$	28	$I[y]=\int_{-1}^1\left(4xy'-(y')^2\right)dx;$ $y(-1)=0;\ y(1)=1/2$
14	$I[y]=\int_{-1}^1\left(\frac{2y'}{1+x^2}-(y')^2\right)dx;$ $y(-1)=0;\ y(1)=3$	29	$I[y]=\int_0^1\left(x+4y+(y')^2\right)dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=0$
15	$I[y]=\int_1^3\left((y')^2-y'\ln x+2x\right)dx;$ $y(1)=2;\ y(3)=-1$	30	$I[y]=\int_0^1\frac{y}{y'}dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=e$

Завдання 5. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють заданим крайовим умовам (допустимі екстремалі).

№ в-та	Завдання
1	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+(y'')^2+2ye^{-2x}\right)dx;\;\; y(0)=0;\; y'(0)=1;\; y(1)=1;\; y'(1)=-2$
2	$I[y]=\int_0^1\left(6x^2y-(y'')^2\right)dx;\;\; y(0)=0;\; y'(0)=1;\; y(1)=0;\; y'(1)=5$
3	$I[y]=\int_0^1\left(2xy+(y''')^2\right)dx;\; y(0)=1;\; y'(0)=-1;\; y''(0)=0;\; y(1)=0;\; y'(1)=0;\; y''(1)=0$
4	$I[y]=\int_{-1}^1\left(4xy+3(y'')^2\right)dx;\;\; y(-1)=y(1)=0;\; y'(-1)=y'(1)=0$
5	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2-2(y')^2+y^2-4ye^x\right)dx;\; y(0)=y(1)=0;\; y'(0)=1;\;\; y'(1)=2$
6	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2-y^2-6y\sin x\right)dx;\; y(0)=2;\; y(\pi/2)=0;\; y'(0)=1;\;\; y'(\pi/2)=-1$
7	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2-2(y')^2+y^2-12xy\right)dx;\; y(0)=3;\; y(1)=0;\; y'(0)=-1;\;\; y'(1)=2$
8	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2+4y'y''+(y')^2-6y\cos x\right)dx;\;\; y(0)=0;$ $y(\pi/2)=2;\; y'(0)=-1;\; y'(\pi/2)=0$
9	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2-(y')^2+4y\sin x\right)dx;\;\; y(0)=-1;\; y(\pi/2)=0;\; y'(0)=1;\;\; y'(\pi/2)=0$
10	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2+2yy'-(y')^2-2xy\right)dx;\; y(0)=1;\; y(1)=0;\; y'(0)=-1;\;\; y'(1)=-2$
11	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2+4y'y''+(y')^2+6y\sin x\right)dx;\; y(0)=0;\; y(\pi/2)=0;$ $y'(0)=-1;\;\; y'(\pi/2)=-2$
12	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2+4yy'-(y')^2-2ye^x\right)dx;\; y(0)=1;\; y(1)=0;\; y'(0)=0;\;\; y'(1)=-2$
13	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2+3y'y''+(y')^2+4ye^{-2x}\right)dx;\; y(0)=1;\; y(1)=2;\; y'(0)=-1;\;\; y'(1)=0$
14	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2-y^2-4y\cos x\right)dx;\; y(0)=2;\; y(\pi/2)=0;\; y'(0)=-1;\;\; y'(\pi/2)=0$
15	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2-2(y')^2+y^2+12ye^{-2x}\right)dx;\; y(0)=-2;\; y(1)=0;\; y'(0)=1;\;\; y'(1)=0$
16	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2+4y'y''+(y')^2-6ye^{-x}\right)dx;\;\; y(0)=0;\; y(1)=0;\; y'(0)=-1;\; y'(1)=-2$

17	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2-(y')^2+12xy\right)dx$; $y(0)=-2$; $y(1)=1$; $y'(0)=0$; $y'(1)=2$
18	$I[y]=\int_0^{\pi/4}\left((y'')^2-(y')^2-6y\sin 2x\right)dx$; $y(0)=-1$; $y(\pi/4)=0$; $y'(0)=0$; $y'(\pi/4)=-1$
19	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2-2(y')^2+y^2+6y\cos x\right)dx$; $y(0)=0$; $y(\pi/2)=0$; $y'(0)=-1$; $y'(\pi/2)=2$
20	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2+3y'y''+(y')^2+4\sin x\right)dx$; $y(0)=1$; $y(\pi/2)=2$; $y'(0)=0$; $y'(\pi/2)=0$
21	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2-y^2-12y\sin 2x\right)dx$; $y(0)=-1$; $y(\pi/2)=1$; $y'(0)=1$; $y'(\pi/2)=0$
22	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2+4yy'-(y')^2+4ye^{-x}\right)dx$; $y(0)=2$; $y(1)=0$; $y'(0)=0$; $y'(1)=-1$
23	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2-(y')^2+8y\cos x\right)dx$; $y(0)=-1$; $y(\pi/2)=2$; $y'(0)=0$; $y'(\pi/2)=0$
24	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2+4yy'-2(y')^2+y^2+6xy\right)dx$; $y(0)=-2$; $y(\pi/2)=0$; $y'(0)=0$; $y'(\pi/2)=1$
25	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2+3y'y''+(y')^2-12ye^{x}\right)dx$; $y(0)=1$; $y(1)=0$; $y'(0)=-1$; $y'(1)=-4$
26	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2-(y')^2+12ye^{-x}\right)dx$; $y(0)=-1$; $y(1)=3$; $y'(0)=-1$; $y'(1)=0$
27	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2-2(y')^2+y^2+6ye^{2x}\right)dx$; $y(0)=0$; $y(1)=0$; $y'(0)=-1$; $y'(1)=0$
28	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2-y^2-6xy\right)dx$; $y(0)=4$; $y(1)=-1$; $y'(0)=1$; $y'(1)=0$
29	$I[y]=\int_0^1\left((y'')^2+3y'y''+(y')^2+12xy\right)dx$; $y(0)=1$; $y(1)=0$; $y'(0)=-1$; $y'(1)=3$
30	$I[y]=\int_0^{\pi/2}\left((y'')^2-2(y')^2+y^2+4y\sin x\right)dx$; $y(0)=1$; $y(\pi/2)=0$; $y'(0)=-1$; $y'(\pi/2)=0$

Завдання 6. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють заданим крайовим умовам (допустимі екстремалі).

№ в-та	Завдання
1	$I[y,z]=\int_0^1\left((y')^2+(z')^2+2xy\right)dx;\ \ y(0)=1;\ z(0)=0;\ y(1)=0;\ z(1)=1$
2	$I[y,z]=\int_1^2\left((y')^2+z^2+(z')^2-2xy\right)dx;\ \ y(1)=1;\ z(1)=0;\ y(2)=2;\ z(2)=1$
3	$I[y,z]=\int_0^{\pi}\left(2yz-2y^2+(y')^2-(z')^2\right)dx;\ \ y(0)=0;\ z(0)=0;\ y(\pi)=1;\ z(\pi)=1$
4	$I[y,z]=\int_{-1}^1\left(6xy-3(y')^2+(z')^2\right)dx;\ \ y(-1)=2;\ z(-1)=-1;\ y(1)=0;\ z(1)=1$
5	$I[y,z]=\int_0^1\left((y')^2-2xyz'\right)dx;\ \ y(0)=2;\ z(0)=0;\ y(1)=1;\ z(1)=-1$
6	$I[y,z]=\int_1^2\left((z')^2-xy'z\right)dx;\ \ y(1)=1;\ z(1)=1;\ y(2)=0;\ z(2)=1$
7	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2}\left(y^2+z^2+y'z-yz'-2xz\right)dx;\ \ y(0)=1;\ z(0)=-2;\ \ y(\pi/2)=0;\ \ z(\pi/2)=1.$
8	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2}\left((y')^2+(z')^2+2yz-4y\sin x\right)dx;\ y(0)=0;\ z(0)=2;\ \ y(\pi/2)=0;\ \ z(\pi/2)=0$
9	$I[y,z]=\int_0^1\left(2y'z'-y^2+z^2-6ye^x\right)dx;\ \ y(0)=-2;\ z(0)=1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
10	$I[y,z]=\int_0^1\left((y+z)^2+(y')^2+(z')^2+4xy\right)dx;\ y(0)=1;\ z(0)=-2;\ y(1)=0;\ z(1)=0$
11	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-6z\cos x\right)dx;$ $y(0)=-1;z(0)=0;y(\pi/2)=0;z(\pi/2)=-2$
12	$I[y,z]=\int_0^{\pi/4}\left(2y'z'-y^2+z^2-6y\sin 2x\right)dx;\ \ y(0)=1;\ z(0)=0;\ \ y(\pi/4)=0;\ \ z(\pi/4)=-4$
13	$I[y,z]=\int_0^{\pi/2}\left(2y'z'+y^2+z^2+6y\sin x\right)dx;\ \ y(0)=0;\ z(0)=-1;\ y(\pi/2)=0;\ z(\pi/2)=2$
14	$I[y,z]=\int_0^1\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2-6xz\right)dx;\ \ y(0)=1;\ z(0)=-2;\ y(1)=-2;\ z(1)=0$
15	$I[y,z]=\int_0^{\pi/4}\left(2y'z'-y^2+z^2+2z\cos 2x\right)dx;\ \ y(0)=0;\ z(0)=0;\ \ y(\pi/4)=2;\ \ z(\pi/4)=0$
16	$I[y,z]=\int_0^1\left((y')^2+(z')^2+y^2+z^2+4yz+2xy\right)dx;\ y(0)=4;\ z(0)=-1;\ y(1)=0;\ z(1)=-2$
17	$I[y,z]=\int_0^1\left(2y'z'+y^2+z^2+6ye^{-2x}\right)dx;\ \ y(0)=0;\ z(0)=-2;\ y(1)=-1;\ z(1)=0$

18	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/2}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-6z\sin x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=0;\ y(\pi/2)=3;\ z(\pi/2)=0$
19	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left(2y'z'+y^2+z^2+4ye^x\right)dx;\ y(0)=1;\ z(0)=0;\ y(1)=-1;\ z(1)=0$
20	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/4}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-2y\sin 2x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=1;\ y(\pi/4)=0;\ z(\pi/4)=0$
21	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y')^2+(z')^2-y^2-z^2-4yz+2ye^{3x}\right)dx;\ y(0)=0;\ z(0)=-3;\ y(1)=1;\ z(1)=0$
22	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/4}\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2-2y\cos 2x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=2;\ y(\pi/4)=0;\ z(\pi/4)=0$
23	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y')^2+(z')^2+y^2+z^2+4yz+2ye^x\right)dx;$ $y(0)=0;\ z(0)=-1;\ y(1)=2;\ z(1)=-2$
24	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-6xy\right)dx;\ \ y(0)=3;\ z(0)=0;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
25	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2+8ze^{-2x}\right)dx;\ \ y(0)=-2;\ z(0)=-1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
26	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/2}\left(2y'z'-y^2+z^2-12y\cos x\right)dx;\ \ y(0)=1;\ z(0)=-4;\ y(\pi/2)=0;\ z(\pi/2)=0.$
27	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y+z)^2-(y')^2-(z')^2+4ye^{2x}\right)dx;\ y(0)=2;\ z(0)=-2;\ y(1)=0;\ z(1)=1$
28	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/4}\left((y-z)^2+(y')^2-(z')^2-2z\cos 2x\right)dx;$ $y(0)=-1;\ z(0)=0;\ y(\pi/4)=0;\ z(\pi/4)=0$
29	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left(2y'z'-y^2+z^2-6ye^x\right)dx;\ \ y(0)=-2;\ z(0)=1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1$
30	$I[y,z]=\int\limits_0^{1}\left((y')^2+(z')^2-y^2-z^2-4yz+2xz\right)dx;\ y(0)=3;\ z(0)=-1;\ y(1)=1;\ z(1)=0$

Завдання 7. Розв’язати наступні задачі.

а) Варіанти №1–№5: Знайти допустимі екстремалі задачі Лагранжа.

б) Варіанти №6–№9: Знайти допустимі екстремалі ізопериметричної задачі.

в) Варіанти №10–№20: Знайти допустиму екстремаль функціоналу $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$ при умові, що лівий кінець закріплений $y(x_1)=y_1$, а на правому кінці задана природна крайова умова $F'_{y'}\big|_{x=x_2}=0$.

г) Варіанти №21–№30: Знайти допустиму екстремаль функціоналу $I[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx$ при умові, що лівий кінець закріплений $y(x_1)=y_1$, а правий кінець $B(x_2;y(x_2))$ знаходиться на заданій лінії $y=g_2(x)$ (виконується умова трансверсальності $\left[F+(g'_2-y')F'_{y'}\right]\big|_{x=x_2}=0$).

№ в-та	Завдання
1	$I[y,z]=\int\limits_0^1\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx;\quad y(0)=-1; z(0)=1;\ y(1)=0;\ z(1)=-1;\ x+y+z=0.$
2	$I[y,z]=\int\limits_0^1\left((y')^2+z\right)dx;\quad y(0)=1; z(0)=1;\ y(1)=e;\ z(1)=e^2+1;\ z-y^2-x=0.$
3	$I[y,z]=\int\limits_0^1\left((y')^2+z^2\right)dx;\quad y(0)=0; z(0)=1;\ y(1)=1;\ z(1)=\sqrt{2};\ y-z^2+1=0.$
4	$I[y,z]=\int\limits_0^{\pi/2}\left(2yz+z^2\right)dx;\ y'=y+z;\quad y(0)=0;\ z(0)=1;\ y(\pi/2)=1;\ z(\pi/2)=-1.$
5	$I[y,z]=\int\limits_0^1 y'z'dx;\quad y'+y+z-x^2=0;\quad y(0)=0;\ z(0)=-1;\ y(1)=3/2;\ z(1)=-5/2.$
6	$I[y]=\int\limits_0^1\left((y')^2+x^2\right)dx;\ \ y(0)=0; y(1)=0;\ \int\limits_0^1 y^2dx=2.$
7	$I[y]=\int\limits_0^1(y')^2dx;\ \ y(0)=0; y(1)=\frac{1}{4};\ \int\limits_0^1\left(y-(y')^2\right)dx=\frac{1}{12}.$
8	$I[y]=\int\limits_0^1\left(x+(y')^2\right)dx;\ \ y(0)=0; y(1)=0;\ \int\limits_0^1 ydx=2.$
9	$I[y]=\int\limits_0^1(y')^2dx;\ \ y(0)=2;\ y(1)=0;\ \int\limits_0^1 xydx=1.$
10	$I[y]=\int\limits_{-1}^1\left(\frac{2y'}{1+x^2}-(y')^2\right)dx;\ \ y(-1)=0$
11	$I[y]=\int\limits_1^3\left((y')^2-y'\ln x+2x\right)dx;\ \ y(1)=2$
12	$I[y]=\int\limits_1^e\left(x(y')^2+yy'\right)dx;\ \ y(1)=0$
13	$I[y]=\int\limits_1^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx;\ \ y(1)=3$
14	$I[y]=\int\limits_0^1\frac{x}{y'}dx;\ \ y(0)=0$

15	$I[y]=\int_0^1\left(y+2xy'+(y')^2\right)dx\,;\quad y(0)=1$
16	$I[y]=\int_0^1 e^y\,(y')^2\,dx\,;\quad y(0)=1$
17	$I[y]=\int_0^1\left(y^2-2(y')^2\right)e^{-x}dx\,;\quad y(0)=0$
18	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+yy'+12xy\right)dx\,;\quad y(0)=1$
19	$I[y]=\int_0^1\frac{y^2}{y'}\,dx\,;\quad y(0)=1$
20	$I[y]=\int_1^2\left(x^2(y')^2+2y^2+2xy\right)dx\,;\ y(1)=1$
21	$I[y]=\int_0^1\left(xy'+(y')^2\right)dx\,;\ y(0)=1\,;\ g_2(x)=x^2-1$
22	$I[y]=\int_0^1\left(x+4y+(y')^2\right)dx\,;\ y(0)=0\,;\ g_2(x)=2x^2-1$
23	$I[y]=\int_1^2\frac{e^y}{(y')^2}\,dx\,;\ y(1)=0\,;\ g_2(x)=x^2+x$
24	$I[y]=\int_1^2\left(x^2(y')^2+12y^2\right)dx\,;\ y(1)=1\,;\ g_2(x)=x^2-2x$
25	$I[y]=\int_0^1\frac{dx}{yy'}\,dx\,;\ y(0)=1\,;\ g_2(x)=2-x^2$
26	$I[y]=\int_{-1}^0\left(4xy'-(y')^2\right)dx\,;\ y(-1)=0\,;\ g_2(x)=x-x^2$
27	$I[y]=\int_{-1}^0\left(12xy-(y')^2\right)dx\,;\ y(-1)=1\,;\ g_2(x)=2x^2-x$
28	$I[y]=\int_0^1\left(y'+(y')^2e^x\right)dx\,;\ y(0)=2\,;\ g_2(x)=x^2-4x$
29	$I[y]=\int_0^1\left((y')^2-y^2\right)dx\,;\ y(0)=1\,;\ g_2(x)=x^2+3x$
30	$I[y]=\int_0^1\left(xy'-(y')^2\right)dx\,;\ y(0)=1\,;\ g_2(x)=2x^2-3x$

Розділ 4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Розвиток кількісних методів у фізиці привів до поняття поля – області простору, в межах якої задана певна характеристика суцільного середовища, що подільне до нескінченності і неперервне. Це дозволяє описати сукупність значень відповідної фізичної величини (скалярної чи векторної) у всіх точках об’єкта дослідження. Поява поняття поля у фізиці відіграло таку ж прогресивну роль, як у математиці введення змінної величини. Математична теорія поля вивчає властивості векторних та скалярних полів, до розгляду яких зводяться численні задачі фізики, електротехніки, математики та інших наук.

У цьому розділі розглянуті основні диференціальні та інтегральні характеристики поля: градієнт, дивергенція, ротор, циркуляція, потік. Дано застосування теорем Остроградського – Гауса і Стокса. Указано умови потенціальності та соленоїдальності. Наведено детальні приклади розв’язання типових задач на розрахунок скалярних і векторних полів, доповнені контрольними запитаннями та індивідуальними розрахунково-графічними завданнями.

4.1. Скалярне поле

4.1.1. Поняття поля. Поверхні та лінії рівня

Якщо кожній точці P *деякої області* D *простору поставлена в однозначну відповідність деяка величина* $F(P)$, *то говорять, що задано* ***просторове поле*** $F = F(P)$.

Якщо всі точки P *лежать в одній площині (область* D *плоска), то поле* $F = F(P)$ *називається* ***плоским***.

Зауваження. Поле – це функція $F = F(P)$, що розглядається невідривно від її області визначення D.

Якщо $F(P)$ є величиною фізичною, то і поле називається ***фізичним***, причому в залежності від природи $F(P)$ поля поділяють на ***скалярні*** та ***векторні***.

Прикладами скалярних фізичних полів можуть бути поля температури, атмосферного тиску, електричного потенціалу. До векторних фізичних полів відносяться, наприклад, поля сили тяжіння, швидкості частинок текучої рідини, густини електричного струму.

Якщо функція $F(P)$ *не змінюється з плином часу, то поле називається* ***стаціонарним*** *або* ***сталим***, *у противному разі –* ***нестаціонарним*** *або* ***змінним***.

Розглянемо просторове скалярне поле $u(P) = u(x, y, z)$.

Поверхнею рівня *скалярного поля* $u = u(P)$ *називається така поверхня, на якій функція* $u = u(P)$ *має стале значення.*

Рівняння поверхні рівня: $u(x, y, z) = C$, $C = const$.

Для різних значень C щоразу будемо мати окрему поверхню рівня. Поверхні рівня складають однопараметричну сім'ю поверхонь. При цьому через кожну точку P_0 поля проходить єдина поверхня рівня $u(x, y, z) = u(P_0)$. Якщо для арифметичної прогресії $C_k = C_0 + k \cdot \Delta C$, $k = 1,2,...$ побудувати відповідні поверхні рівня, то за їх розміщенням можна судити про характер поля: де поверхні розміщені густіше, там поле змінюється швидше.

Приклад 1. Для поля $u = x^2 + y^2 + z^2$ поверхні рівня визначаються рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = C$ і при $C \ge 0$ утворюють сім'ю концентричних сфер з центром у початку координат. Якщо задати, наприклад, точку $P = (1,-1,2)$, то можна виділити ту єдину сферу, яка проходить через цю точку: $C = 1^2 + (-1)^2 + 2^2 = 6$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Для плоского скалярного поля розглядають ***лінії рівня***.

Поверхні рівня (у просторі) та лінії рівня (на площині) є основними ***геометричними характеристиками*** скалярного поля.

Приклад 2. Для плоского поля $u = x^2 - y^2$ лінії рівня визначаються рівнянням $x^2 - y^2 = C$. При $C > 0$ маємо сім'ю гіпербол з дійсними вершинами на осі Ox, при $C < 0$ – сім'ю гіпербол з дійсними вершинами на осі Oy, а при $C = 0$, маємо асимптоти цих гіпербол.

Лініями рівня служать, наприклад, на топографічних картах горизонталі – лінії, уздовж яких висота місцевості над умовним рівнем моря є стала. Лінії рівня (***лінії рівного потенціалу*** чи ***еквіпотенціальні лінії***) знаходять широкий вжиток при розрахунках електричних полів. У цьому разі вони є лініями, уздовж яких електричний потенціал у всіх їх точках є сталим. Фізично це означає, що робота сил електричного поля по переносу одиничного позитивного заряду з довільної точки даної лінії рівня в точку, потенціал якої прийнятий рівним нулю, буде однаковою. Сукупність ліній рівного потенціалу дає наочне зображення електричного поля, що полегшує його вивчення.

4.1.2. Похідна за напрямком

Нехай задано просторове скалярне поле $u = u(P)$. Візьмемо у полі деяку точку $P(x, y, z)$. Проведемо з цієї точки P деякий вектор $\vec{s}$, який має направляючі косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (рис.1). На векторі $\vec{s}$ на відстані Δs від його початку розглянемо точку $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

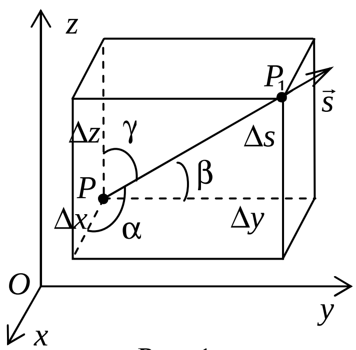


Рис. 1

Таким чином $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$. Будемо вважати, що функція $u = u(x, y, z)$ неперервна і має неперервні похідні.

Повний приріст функції можна записати у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ наближаються до нуля, коли $\Delta s \to 0$.

Поділимо рівність на Δs:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Враховуючи, що $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta$, $\frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$, цю рівність перепишемо так:

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma+\varepsilon_1\cos\alpha+\varepsilon_2\cos\beta+\varepsilon_3\cos\gamma$$

Границя відношення $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ *при* $\Delta s\to 0$ *називається* ***похідною поля*** (***функції***) $u=u(x,y,z)$ ***у точці*** $P(x,y,z)$ ***за напрямком вектора*** $\vec{s}$ *і позначається* $\frac{\partial u}{\partial s}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}$.

Таким чином, $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

У випадку плоского поля $u=u(x,y)$ маємо:

$$cos\,\beta=cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha;\ \ \cos\gamma=0;\ \ \frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$$

Похідна за напрямком – це швидкість зміни поля в даній точці в указаному напрямку. Якщо в даній точці $\frac{\partial u}{\partial s}>0$ $\left(\frac{\partial u}{\partial s}<0\right)$, то поле в цьому напрямку зростає (спадає).

Зауваження. Частинні похідні можна розглядати як похідні за напрямком відповідних координатних ортів:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial i};\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial j};\ \ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial k}.$$

Приклад. Для поля $u=x^2+y^2+z^2$ знайти похідну $\frac{\partial u}{\partial s}$ у точці $P=(1,-2,4)$ за напрямком вектора $\vec{s}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Розв’язання. Обчислюємо направляючі косинуси

$$|\vec{s}|=\sqrt{3};\ \ \cos\alpha=1/\sqrt{3};\ \cos\beta=1/\sqrt{3};\ \ \cos\gamma=1/\sqrt{3}.$$

Далі $\frac{\partial u}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y;\ \frac{\partial u}{\partial z}=2z$.

У точці $P=(1,-2,4)$: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=-4,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=8$.

Отже, $\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_P=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+(-4)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+8\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

4.1.3. Градієнт

Нехай задано просторове скалярне поле $u=u(P)$, причому функція $u=u(P)=u(x,y,z)$ має частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ та $\frac{\partial u}{\partial z}$. ***Градієнтом скалярного поля (функції)*** $u=u(x,y,z)$ *називається вектор*

$$grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Модуль градієнта $|grad\,u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$.

Розглянемо зв'язок між градієнтом та похідною за напрямком.

<u>Теорема</u>. *Нехай задано скалярне поле* $u = u(x, y, z)$ *і в ньому визначено векторне поле градієнтів* $grad\,u$ *. Похідна* $\frac{\partial u}{\partial s}$ *за напрямком деякого вектора* $\vec{s}$ *дорівнює проекції градієнта* $grad\,u$ *на цей вектор* $\vec{s}$: $\frac{\partial u}{\partial s} = np_{\vec{s}}\, grad\,u$.

<u>Доведення</u>. Розглянемо одиничний вектор $\vec{s}_0$, відповідний вектору $\vec{s}$: $\vec{s}_0 = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$.

Обчислимо скалярний добуток

$$grad\,u \cdot \vec{s}_0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma .$$

Вираз у правій частині є не що інше, як похідна від функції $u = u(x, y, z)$ за напрямком $\vec{s}$: $grad\,u \cdot \vec{s}_0 = \frac{\partial u}{\partial s}$.

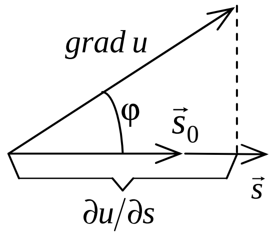


Рис. 2

Якщо позначити кут між векторами $grad\,u$ та $\vec{s}$ через φ (рис. 2), то можна записати

$$|grad\,u| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{або} \quad np_{\vec{s}}\, grad\,u = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

З доведеної теореми легко з'ясовується зв'язок між градієнтом та похідною в даній точці за напрямком. У точці $M(x, y, z)$ будуємо вектор $grad\,u$ (рис. 3). Далі будуємо сферу, для якої $grad\,u$ є діаметром. З точки M проводимо вектор $\vec{s}$. Позначимо точку перетину його з поверхнею сфери через N . Тоді

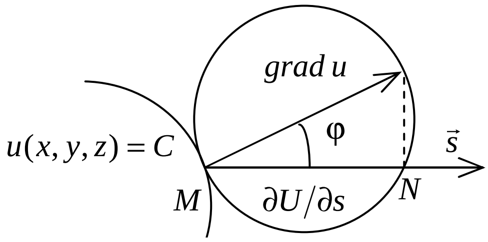


Рис. 3

$MN = |grad\,u| \cdot \cos\varphi$, $(\varphi < \pi/2)$. Тобто $MN = \frac{\partial u}{\partial s}$.

З'ясуємо деякі <u>властивості градієнта</u>:

1. Похідна в заданій точці за напрямком вектора $\vec{s}$ має найбільше значення, якщо напрямок вектора $\vec{s}$ співпадає з напрямком градієнта; це найбільше значення похідної дорівнює $|grad\,u|$. Іншими словами, *градієнт у будь-якій точці скалярного поля напрямлений у бік найбільшого зростання поля і за абсолютним значенням дорівнює швидкості зростання поля у цій точці* $\max\frac{\partial u}{\partial s} = |grad\,u|$ (***фізичний зміст градієнта***).

2. Вектор $grad\,u$ напрямлений перпендикулярно до поверхні рівня $u(x, y, z) = C$, яка проходить через відповідну точку. Іншими словами, *напрямок градієнта скалярного поля збігається з напрямком нормалі до поверхні рівня, що проходить через відповідну точку* (***геометричний зміст градієнта***). Одиничний вектор нормалі визначається за формулою

$$\vec{n}_0\big|_M = \pm \left.\frac{grad\, u}{|grad\, u|}\right|_M .$$

2а. Якщо функція $u = u(x, y)$ є функцією двох змінних, то вектор $grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$ лежить у площині Oxy і напрямлений перпендикулярно до лінії рівня $u(x, y) = C$, яка проходить через відповідну точку.

Дійсно, кутовий коефіцієнт k_1 дотичної до лінії рівня $u(x, y) = C$ дорівнює $k_1 = -u'_x / u'_y$. Кутовий коефіцієнт k_2 градієнта дорівнює $k_2 = u'_y / u'_x$. Тоді $k_1 k_2 = -1$. Це і доводить справедливість твердження.

3. Похідна за напрямком вектора, перпендикулярного до вектора $grad\, u$, дорівнює нулю. Іншими словами, *похідна за напрямом будь-якої дотичної до поверхні рівня, що проходить через відповідну точку, дорівнює нулю*.

Приклад 1. Дано просторове поле $u = x^2 + y^2 + z^2$ і точка $M(1, -2, 3)$. Знайти рівняння поверхні рівня, що проходить через дану дочку M, визначити градієнт і модуль градієнта у цій точці та записати відповідний одиничний вектор нормалі до поверхні рівня.

Розв'язання. $u(x, y, z) = u(M)$; $u(M) = 1^2 + (-2)^2 + 3^2 = 14$; $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ – поверхня рівня.

Знаходимо градієнт і його модуль

$grad\, u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$; $grad\, u\big|_M = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$; $|grad\, u|\big|_M = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2} = 2\sqrt{14}$.

Тоді одиничний вектор нормалі

$$\vec{n}_0\big|_M = \pm \left.\frac{grad\, u}{|grad\, u|}\right|_M = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}\right).$$

Приклад 2. Дано просторове скалярне поле $u = \ln\left(2xyz - 2y^2 - z^8\right)$ і точка $M_0(2, -1, -1)$. В якому напрямку повинна рухатися біжуча точка $M(x, y, z)$, щоб при переході через точку M_0 дане поле зростало з найбільшою швидкістю? Знайти цю максимальну швидкість.

Розв'язання. Напрямок найбільшого зростання поля – це напрямок градієнта, тобто $s_{\max} = grad\, u$; швидкість у цьому напрямку $\max\frac{\partial u}{\partial s} = |grad\, u|$. Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2yz}{2xyz - 2y^2 - z^8};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 2;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xz - 4y}{2xyz - 2y^2 - z^8};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 0;\quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2xy - 8z^7}{2xyz - 2y^2 - z^8};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = 4;\quad s_{\max} = grad\, u\big|_{M_0} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k} = 2\vec{i} + 4\vec{k};$$

$$\max\frac{\partial u}{\partial s} = |grad\, u|\big|_{M_0} = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

Приклад 3. Дано просторове скалярне поле $u = u(x, y, z)$ і дві точки M_0 та M_1. Для даного поля в указаній точці M_0 знайти:

1) градієнт $grad\, u\big|_{M_0}$ і модуль градієнта $|grad\, u|\big|_{M_0}$;

2) $\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0}$ – похідну за напрямом вектора $\vec{s} = \overline{M_0M_1}$;

3) косинус кута φ між градієнтом $grad\, u|_{M_0}$ і вектором $\vec{s} = \overline{M_0M_1}$:

$u = xe^{y-x} + xz^2 - \ln(3y+z)$; $M_0(1;1;-2)$; $M_1(3;-1;-1)$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xe^{y-x} - xe^{y-x} + z^2; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = 1-1+4 = 4; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{y-x} - \frac{3}{3y+z}; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = 1-3 = -2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2xz - \frac{1}{3y+z}; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = -4-1 = -5; \quad grad\, u|_{M_0} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k};$$

$$\left|grad\, u\right|_{M_0} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = 3\sqrt{5}; \quad \vec{s} = M_0M_1 = (3-1; -1-1; -1+2) = (2; -2; 1);$$

$$\left|\vec{s}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3; \quad \cos\alpha = 2/3; \ \cos\beta = -2/3; \quad \cos\gamma = 1/3;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_0} = 4\cdot\frac{2}{3} + (-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + (-5)\cdot\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3};$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}\cdot grad\, u|_{M_0}}{\left|\vec{s}\right|\cdot\left|grad\, u\right|_{M_0}} = \frac{2\cdot 4 + (-2)\cdot(-2) + 1\cdot(-5)}{3\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{45}.$$

4.1.4. Криволінійний інтеграл по довжині (криволінійний інтеграл першого роду)

Задача про обчислення маси плоскої кривої. Нехай на площині Oxy задана лінія L, по якій неперервно розподілена маса з густиною $f(x,y)$. Потрібно обчислити масу дуги L_{AB} цієї кривої L (рис. 4).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i = \overline{1,n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Розглянемо одну з елементарних дуг Δl_i. Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що її густину можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \Delta l_i$.

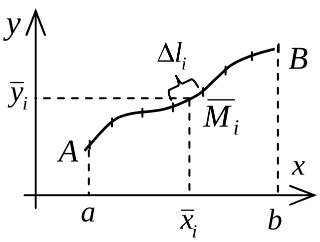


Рис. 4

Маса елементарної дуги $\Delta m_i \approx f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i$. Тоді маса всієї дуги L_{AB}:

$$m = \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i.$$

Одержана сума називається ***інтегральною*** для функції $f(x,y)$ по довжині дуги L_{AB}.

Очевидно, що $m = \lim\limits_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i$.

Границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття дуги на *елементарні частини називається* ***криволінійним інтегралом по довжині*** (***криволінійним інтегралом першого роду***) *і позначається*:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i, \bar{y}_i\right)\Delta l_i \,,$$

де dl – ***диференціал*** (***елемент***) ***довжини дуги***.

Таким чином, $m = \int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$

(***фізичний зміст*** криволінійного інтеграла по довжині).

Якщо покласти $f(x,y) \equiv 1$, то криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює довжині l дуги L_{AB}:

$$l = \int\limits_{L_{AB}} dl$$

(***геометричний зміст*** криволінійного інтеграла по довжині).

Зауваження 1. При $f(x,y) \ge 0$ криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює площі S_c частини вертикальної циліндричної поверхні (рис. 5) з напрямною L_{AB} і паралельними осі Oz твірними, що розміщена між координатною площиною $z = 0$ і поверхнею $z = f(x,y)$:

$$S_c = \int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl \,.$$

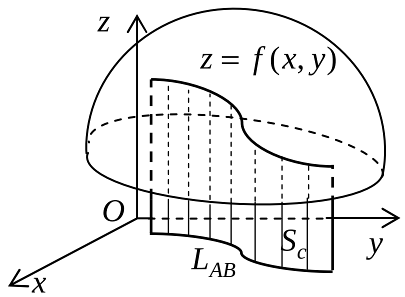


Рис. 5

Зауваження 2. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в деякій області D, що містить в собі кусково-гладку криву L, то криволінійний інтеграл існує.

Зауваження 3. Криволінійний інтеграл за довжиною не залежить від напряму руху по дузі

$$\int\limits_{L_{BA}} f(x,y)\,dl = \int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl \,.$$

Інші властивості цього інтеграла аналогічні властивостям звичайного одновимірного інтеграла.

4.1.5. Обчислення криволінійного інтеграла по довжині

Обчислення криволінійного інтеграла по довжині здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Випадок 1. Нехай дуга L_{AB} задана в параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$, тобто коли параметр t змінюється на відрізку $[\alpha;\beta]$, біжуча точка $\left(x(t); y(t)\right)$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Диференціал дуги такої кривої записується у вигляді $dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$.

У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної і отримуємо:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\,\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt\,.$$

<u>Приклад 1</u>. Обчислити $\int\limits_{L} ye^{-x}\,dl$, якщо

$$L:\; x=\ln\left(1+t^2\right);\quad y=2\,arctg\,t-t;\quad 0\le t\le 1\,.$$

<u>Розв’язання</u>. Обчислимо: $x'=\dfrac{2t}{1+t^2}$; $y'=\dfrac{2}{1+t^2}-1=$

$$=\frac{1-t^2}{1+t^2};\qquad dl=\sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\,dt=dt\,.$$

Підставимо в інтеграл:

$$\int\limits_{L} ye^{-x}\,dl=\int\limits_{0}^{1}\left(2\,arctg\,t-t\right)e^{-\ln\left(1+t^2\right)}\,dt=\int\limits_{0}^{1}\frac{2\,arctg\,t-t}{1+t^2}\,dt=2\int\limits_{0}^{1}\frac{arctg\,t}{1+t^2}\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{2t}{1+t^2}\,dt=arctg^2\,t\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|\Big|_0^1=\;arctg^2\,1-arctg^2\,0-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 1=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{2}\ln 2\,.$$

<u>Випадок 2</u>. Нехай дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y=y(x),\;\; a\le x\le b$. Тоді $dl=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$. Відповідно

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl=\int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\,\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx\,.$$

<u>Приклад 2</u>. Обчислити $\int\limits_{AB} x^2y\,dl$, якщо AB є чвертю кола $x^2+y^2=4$ $(x\ge 0,\;\; y\ge 0)$.

<u>Розв’язання</u>.

$AB: y=\sqrt{4-x^2},\;\; 0\le x\le 2$; $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$; $y'=-x\big/\sqrt{4-x^2}$; $dl=\left(2\big/\sqrt{4-x^2}\right)dx$;

$$\int\limits_{AB} x^2y\,dl=\int\limits_{0}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}\cdot\frac{2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}=2\int\limits_{0}^{2} x^2\,dx=2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=5\frac{1}{3}$$

<u>Випадок 3</u>. Нехай дуга L_{AB} задана в полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi),\;\; \alpha\le\varphi\le\beta$. Тоді $dl=\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$. Відповідно

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\,\rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2+\left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi\,.$$

<u>Приклад 3</u>. Обчислити інтеграл $\int\limits_{L}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dl$ по дузі кардіоїди $L:\;\rho=1+\cos\varphi$; $0\le\varphi\le\pi/3$.

<u>Розв’язання</u>.

$$\rho'=-\sin\varphi;\qquad dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi=\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+(-\sin\varphi)^2}\,d\varphi=2\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi;$$

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{\left(\rho(\varphi)\cos\varphi\right)^2-\left(\rho(\varphi)\sin\varphi\right)^2}{\left(\rho(\varphi)\cos\varphi\right)^2+\left(\rho(\varphi)\sin\varphi\right)^2}=\cos 2\varphi\,;$$

$$\int_L \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dl = \int_0^{\pi/3} \cos 2\varphi \cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = \int_0^{\pi/3}\left(\cos\frac{5\varphi}{2}+\cos\frac{3\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{2}{5}\sin\frac{5\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/3} + \frac{2}{3}\sin\frac{3\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/3} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{15}$$

Випадок 4. Якщо дуга L_{AB} задана у просторі параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$, то відповідний криволінійний інтеграл по довжині обчислюється за формулою

$$\int_{L_{AB}} f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Приклад 4. Обчислити масу дуги гвинтової лінії $L: x = e^t\cos t$; $y = e^t \sin t$; $z = e^t$, $0 \le t \le 2\pi$, якщо густина $f(x,y,z) = 2z$.

Розв’язання.

$x' = e^t\cos t - e^t \sin t$; $y' = e^t \sin t + e^t\cos t$; $z' = e^t$; $dl = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt = \sqrt{3}\,e^t dt$;

$$m = \int_L f(x,y,z)\,dl = \int_L 2z\,dl = 2\sqrt{3}\int_0^{2\pi} e^{2t}\,dt = \sqrt{3} \text{ (од. маси).}$$

4.1.6. Застосування криволінійного інтеграла по довжині

За допомогою криволінійного інтеграла по довжині можна обчислити довжину дуги і площу циліндричної поверхні.

Криволінійний інтеграл від функції $f(x,y)$ по довжині дуги L є ***маса*** відповідної матеріальної дуги з густиною $\mu = f(x,y)$: $m = \int_L f(x,y)\,dl$.

Якщо густина стала $f(x,y) = \mu_0 = const$, то $m = \mu_0 \int_L dl$.

Криволінійний інтеграл по довжині можна застосувати для обчислення ***статичних моментів*** дуги L плоскої матеріальної кривої відносно осей Ox і Oy відповідно

$$S_x = \int_L y\, f(x,y)\,dl, \quad S_y = \int_L x\, f(x,y)\,dl,$$

або ***моментів інерції*** відносно осей Ox і Oy відповідно

$$I_x = \int_L y^2 f(x,y)\,dl, \quad I_y = \int_L x^2 f(x,y)\,dl$$

чи відносно початку координат $I_0 = \int_L (x^2+y^2) f(x,y)\,dl$.

Координати ***центра мас*** для дуги L плоскої кривої

$$x_c = S_y/m; \quad y_c = S_x/m.$$

Для дуги L просторової кривої:

статичні моменти відносно координатних площин Oxy, Oxz і Oyz відповідно

$$S_{xy}=\int_L z\ f(x;y;z)\,dl\ ;\ S_{xz}=\int_L y\ f(x;y;z)\,dl\ ;\ S_{yz}=\int_L x\ f(x;y;z)\,dl\ ,$$

моменти інерції

відносно площини Oxy $\qquad I_{xy}=\int_L z^2 f(x,y,z)\,dl$,

відносно осі Oz $\qquad I_z=\int_L \left(x^2+y^2\right) f(x,y,z)\,dl$,

відносно початку координат $I_0=\int_L \left(x^2+y^2+z^2\right) f(x,y,z)\,dl$.

Координати центра маси дуги L просторової кривої:

$$x_c=S_{yz}/m\ ;\quad y_c=S_{xz}/m\ ;\quad x_c=S_{xy}/m\ .$$

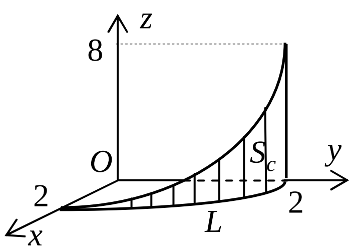


Рис. 6

Приклад 1. Обчислити площу S_c частини кругового циліндра $y=\sqrt{4-x^2}$, $0\le x\le 2$, що розміщена між координатною площиною $z=0$ і циліндром $z=y^3$ (рис. 6).

Розв’язання. $L:\ y=\sqrt{4-x^2},\quad 0\le x\le 2$;

$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$; $y'=-x/\sqrt{4-x^2}$; $dl=\left(2/\sqrt{4-x^2}\right)dx$;

$$S_c=\int_L y^3\,dl=\int_0^2\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3\cdot\frac{2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}=2\int_0^2\left(4-x^2\right)dx=$$

$$8\cdot x\Big|_0^2-2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=10\frac{2}{3}\,.$$

Приклад 2. Обчислити статичний момент відносно осі Oy дуги циклоїди $L:\ x=t-\sin t$; $y=1-\cos t$; $0\le t\le\pi/3$, якщо густина $f(x,y)=3$.

Розв’язання.

$$x'=1-\cos t;\ y'=\sin t\ ;\ dl=\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,dt=\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2\sin\frac{t}{2}\,dt\ ;$$

$$S_y=\int_L x\ f(x,y)\,dl=6\int_L x\,dl=3\int_0^{\pi/3}(t-\sin t)\,2\sin\frac{t}{2}\,dt=6\int_0^{\pi/3}t\sin\frac{t}{2}\,dt-6\int_0^{\pi/3}\sin t\,\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=\left|u=t;dv=\sin\frac{t}{2};\ du=dt;\quad v=-2\cos\frac{t}{2}\right|=6\left(t\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi/3}-\int_0^{\pi/3}(-2)\cos\frac{t}{2}\,dt\right)-$$

$$-3\int_0^{\pi/3}\left(\cos\frac{t}{2}-\cos\frac{3t}{2}\right)dt=6\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}+4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi/3}\right)-6\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi/3}+2\sin\frac{3t}{2}\Big|_0^{\pi/3}=\pi+12-3+2=\pi+11\,.$$

4.2. Векторне поле

4.2.1. Поняття векторного поля. Векторні лінії

Якщо кожній точці $M(x,y,z)$ *деякої області* D *простору поставлений у відповідність вектор* $\vec F(M)=P\vec i+Q\vec j+R\vec k$, *де* $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ *- скалярні функції, то говорять, що задано* ***просторове векторне поле***.

У випадку плоскої області D і двовимірного вектора $\vec F(M)$, що лежить у площині цієї області, говорять про ***плоске векторне поле***. Зокрема, якщо область D лежить на координатній площині Oxy, то розглядається плоске векторне поле $\vec{F}(M)=P\vec{i}+Q\vec{j}$, де $P=P(x,y)$ і $Q=Q(x,y)$.

Надалі вважатимемо, що координатні функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Геометричними характеристиками векторного поля є векторні (силові) лінії.

Векторною (силовою) лінією поля $\vec{F}=\vec{F}(M)$ *називається крива* $\vec{r}=\vec{r}(t)$, *дотична до якої в кожній її точці співпадає з вектором* $\vec{F}=\vec{F}(M)$, *що визначає поле в цій точці.*

Прикладами векторних ліній в електротехніці є лінії вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ чи лінії вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$.

Поверхні, складені з векторних ліній, називаються ***векторними поверхнями***. *Якщо* L *– деякий замкнений контур, що не збігається з векторною лінією, то векторні лінії, що проходять через точки цього контуру, утворюють векторну поверхню, що називається* ***векторною трубкою***.

Якщо $\vec{F}$ – поле швидкостей текучої рідини, то рідина рухається по векторній трубці, не перетинаючи її стінок.

Виведемо <u>диференціальні рівняння векторних ліній</u>.

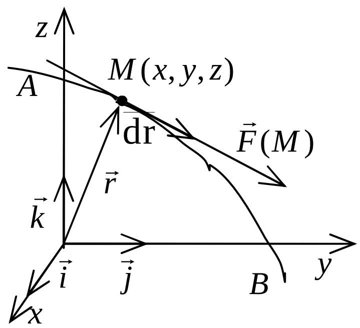


Рис. 7

Нехай (рис. 7) AB - векторна лінія, $\vec{r}$ - радіус-вектор точки $M(x,y,z)$. Тоді $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Обчислимо $d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$.

З диференціального числення відомо, що вектор $d\vec{r}$ направлений по дотичній до AB в точці M. Отже, $d\vec{r}\parallel\vec{F}(M)$, але тоді з умови паралельності векторів

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}.$$

Це і є система двох диференціальних рівнянь векторних ліній.

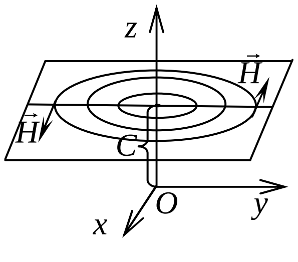


Рис. 8

<u>Приклад 1</u>. Постійний електричний струм I тече по нескінченно довгому провіднику, співпадаючому з віссю Oz в напрямі цієї осі (рис. 8). Вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}$, створюваного цим струмом, у довільній точці $M(x,y,z)$ дорівнює

$$\vec{H}=\frac{I}{2\pi\rho^2}\left(-y\vec{i}+x\vec{j}\right),$$

де $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ - відстань від точки M до осі Oz. Знайти векторні лінії магнітного поля $\vec{H}$.

<u>Розв'язання</u>. Запишемо векторне поле у вигляді

$$\vec{H}=-\frac{Iy}{2\pi\rho^2}\vec{i}+\frac{Ix}{2\pi\rho^2}\vec{j}+0\cdot\vec{k},$$

тобто $P=-\dfrac{Iy}{2\pi\rho^2}$, $Q=\dfrac{Ix}{2\pi\rho^2}$, $R=0$.

Диференціальні рівняння векторних ліній після очевидних спрощень набудуть вигляду:

$$\begin{cases} dx/(-y)=dy/x \\ z=C_1\ (C_1=const) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x\,dx=-y\,dy \\ z=C_1 \end{cases}.$$

Після інтегрування $\begin{cases} x^2+y^2=C_2^2 \quad (C_2=const) \\ z=C_1 \end{cases}$ – двопараметрична сім'я кіл з центрами на осі Oz.

<u>Приклад 2</u>. Знайти векторну лінію векторного поля $\vec{F}(M)=-y\vec{i}+x\vec{j}+\vec{k}$, що проходить через точку $M_0(2,0,0)$.

<u>Розв'язання</u>. Векторні лінії поля визначаються з системи диференціальних рівнянь $\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{1}$. Розв'язуємо перше рівняння

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x};\ xdx+ydy=0;\ x^2+y^2=C_1^2.$$

Запишемо отриману залежність у параметричному вигляді

$$x=C_1\cos t,\ y=C_1\sin t.$$

Тоді з другого рівняння

$$\frac{dy}{x}=\frac{dz}{1};\quad \frac{C_1\cos t\,dt}{C_1\cos t}=dz;\quad dz=dt;\quad z=t+C_2.$$

Отже, векторні лінії задаються параметричними рівняннями

$$x=C_1\cos t,\quad y=C_1\sin t,\quad z=t+C_2$$

– це двопараметрична сім'я гвинтових ліній з віссю Oz.

Оскільки шукана векторна лінія проходить через точку $M_0(2,0,0)$, то $2=C_1\cos t$, $0=C_1\sin t$, $0=t+C_2$.

Звідси $t_0=0$, $C_1=2$, $C_2=0$.

Отже, векторна лінія заданого поля $\vec{F}(M)$, що проходить через указану точку $M_0(2,0,0)$, задається параметричними рівняннями $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=t$.

4.2.2. Дивергенція і ротор векторного поля

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}.$$

Дивергенцією (***розбіжністю***) *векторного поля* $\vec{F}$ *у точці* $M(x,y,z)$ *називається число*

$$div\vec{F}(M)=\frac{\partial P(M)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M)}{\partial y}+\frac{\partial R(M)}{\partial z}.$$

Дивергенція є *скалярною характеристикою* векторного поля.

Якщо $div\vec{F}(M)>0$, *то точка* M *називається* ***джерелом*** (***витоком***), *а якщо* $div\vec{F}(M)<0$, *то точка* M *називається* ***стоком***.

Векторні лінії починаються в джерелах і закінчуються в стоках.

Дивергенція характеризує потужність джерел і стоків. Кожному векторному полю $\vec{F}$ відповідає скалярне поле $div\vec{F}$ розподілу джерел та стоків поля $\vec{F}$.

Векторне поле $\vec{F}$ *називається* ***соленоїдальним*** (***трубчатим***), *якщо в кожній точці його дивергенція дорівнює нулю:* $div\vec{F}=0$.

Соленоїдальне поле не має ані джерел, ані стоків.

У соленоїдальному полі векторні лінії не можуть ні починатися, ні закінчуватися всередині поля. Вони або замкнуті, або мають кінці на межі поля, або мають нескінченні гілки (у випадку необмеженого поля).

Приклад 1. Знайти дивергенцію даного векторного поля в указаних точках:

$$\vec{F}=\frac{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}};\quad M_1(1,0,0);\quad M_2(0,0,-1).$$

Розв'язання.

$$\vec{F}=(x+y+z)^{-2/3}\vec{i}+(x+y+z)^{-2/3}\vec{j}+(x+y+z)^{-2/3}\vec{k};\quad \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial z}=(-2/3)(x+y+z)^{-5/3};$$

$$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=-2\Big/\sqrt[3]{(x+y+z)^5};\quad div\vec{F}(M_1)=-2\Big/\sqrt[3]{(1+0+0)^5}=-2<0,$$

$$div\vec{F}(M_2)=-2\Big/\sqrt[3]{(0+0-1)^5}=2>0.$$

Отже, M_1 - точка стоку; M_2 - точка витоку.

Приклад 2. Перевірити, що дане векторне поле є соленоїдальним: $\vec{F}=e^{xy}\left(-x\vec{i}+y\vec{j}+xy\vec{k}\right)$.

Розв'язання.

$$P=-xe^{xy};\quad Q=ye^{xy};\quad R=xye^{xy};\quad \frac{\partial P}{\partial x}=-\left(e^{xy}+xye^{xy}\right);\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=e^{xy}+xye^{xy};\quad \frac{\partial R}{\partial z}=0;$$

$$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=-\left(e^{xy}+xye^{xy}\right)+\left(e^{xy}+xye^{xy}\right)=0.$$

Отже, векторне поле соленоїдальне.

Ротором (***вихорем***) *векторного поля* $\vec{F}$ *у точці* $M(x,y,z)$ *називається вектор*

$$rot\,\vec{F}(\mathrm{M})=\left.\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\right|_M=\left(\frac{\partial R(M)}{\partial y}-\frac{\partial Q(M)}{\partial z}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial R(M)}{\partial x}-\frac{\partial P(M)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q(M)}{\partial x}-\frac{\partial P(M)}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ротор є *векторною характеристикою* поля $\vec{F}$.

Кожному векторному полю $\vec{F}$ відповідає векторне поле його роторів $rot\,\vec{F}$, що характеризує обертання поля $\vec{F}$ в кожній точці.

Векторне поле $\vec{F}$ *називається* ***безвихровим***, *якщо в кожній точці його ротор дорівнює нулю:* $rot\,\vec{F}=\vec{0}$.

Зауваження 1. Для плоского векторного поля $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ ротор

$rot\,\vec{F} = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$ перпендикулярний до площини Oxy.

Зауваження 2. Кожне векторне поле $\vec{F}$ може бути подане як сума безвихрового та соленоїдального полів.

Приклад 3. Знайти ротор даного векторного поля в указаній точці: $\vec{F} = y^2\,\vec{i} - 2xz\,\vec{j} - x^2\,\vec{k}$; $M(1,-1,-2)$.

Розв'язання.

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & -2xz & -x^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(-x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-2xz)}{\partial z}\right)\vec{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial(-x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial(-2xz)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial y}\right)\vec{k} = 2x\,\vec{i} + 2x\,\vec{j} - 2(z+y)\,\vec{k};$$

$$rot\,\vec{F}(M) = 2\cdot 1\cdot\vec{i} + 2\cdot 1\cdot\vec{j} - 2(-2-1)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\,\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Приклад 4. Перевірити, що дане векторне поле є безвихровим: $\vec{F} = (2xy - yz)\vec{i} + \left(x^2 + 2yz - xz\right)\vec{j} + \left(y^2 - xy\right)\vec{k}$.

Розв'язання. $rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy - yz & x^2 + 2yz - xz & y^2 - xy \end{vmatrix} =$

$$= \left((2y - x) - (2y - x)\right)\vec{i} - \left((-y) - (-y)\right)\vec{j} + \left((2x - z) - (2x - z)\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

Отже, векторне поле безвихрове.

Густиною циркуляції *векторного поля $\vec{F}$ у точці $M(x,y,z)$ у напрямку вектора $\vec{n}$ називається число*

$$C_{\vec{n}}(M) = np_{\vec{n}}\,rot\,\vec{F}(M).$$

Густина циркуляції $C_{\vec{n}}(M)$ в даній точці M досягає максимуму в напрямку ротора $rot\,\vec{F}(M)$ і дорівнює його модулю:

$$C_{\max}(M) = \left|rot\,\vec{F}(M)\right|, \quad \vec{n}_{\max} = rot\,\vec{F}(M).$$

Приклад 5. Знайти максимальну густину циркуляції даного векторного поля в указаній точці: $\vec{F} = (xz/y)\vec{i} - 2xy^2z\,\vec{j} + x^2y\,\vec{k}$; $M(2,1,-1)$.

Розв'язання.

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz/y & -2xy^2z & x^2y \end{vmatrix} = \left(x^2 + 2xy^2\right)\vec{i} - -\left(2xy - x/y\right)\vec{j} + \left(-2y^2z + xz/y^2\right)\vec{k};$$

$$rot\,\vec{F}(M) = 8\vec{i} - 2\,\vec{j} + 0\,\vec{k};\ \ C_{\max}(M) = \left|rot\,\vec{F}(M)\right| = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + 0^2} = 2\sqrt{17};$$

$$\vec{n}_{\max} = rot\,\vec{F}(M) = 8\vec{i} - 2\,\vec{j} + 0\,\vec{k}.$$

Векторне поле $\vec{F}$ називається ***гармонічним***, *якщо воно одночасно соленоїдальне і безвихрове.*

Векторне поле $\vec{F}$ гармонічне, якщо в кожній його точці дивергенція і ротор дорівнюють нулю:

$$div\vec{F} = 0, \ rot\,\vec{F} = \vec{0}.$$

Приклад 6. Перевірити, що дане векторне поле є гармонічним: $\vec{F}=\left(2xy+z^2-x^2\right)\vec{i}+\left(x^2+z-y^2\right)\vec{j}+\left(y+2xz\right)\vec{k}$.

Розв'язання.

$$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy+z^2-x^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+z-y^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(y+2xz\right)=$$

$$=2y-2x-2y+2x=0;$$

$$rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 2xy+z^2-x^2 & x^2+z-y^2 & y+2xz\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial(y+2xz)}{\partial y}--\frac{\partial(x^2+z-y^2)}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial(y+2xz)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy+z^2-x^2)}{\partial z}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial(x^2+z-y^2)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy+z^2-x^2)}{\partial y}\right)\vec{k}=(1-1)\vec{i}-(2z-2z)\vec{j}+(2x-2x)\vec{k}=\vec{0}.$$

Отже, векторне поле гармонічне.

4.2.3. Криволінійний інтеграл по координатах (криволінійний інтеграл другого роду)

Задача про обчислення роботи векторного поля. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$.

Нехай під дією змінної сили $\vec{F}=\vec{F}(x,y)$ матеріальна точка M рухається деякою плоскою кусково-гладкою напрямленою лінією L. Необхідно обчислити роботу A_r, яка виконується при переміщенні цієї точки M по дузі L_{AB} від початкової точки A до кінцевої точки B (рис. 9).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i=\overline{1,n}$ точками $A=M_0,M_1,M_2,...,M_n=B$ з абсцисами $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$. Розглянемо одну з елементарних дуг Δl_i, якій відповідає вектор переміщення $\Delta\vec{l}_i=\Delta x_i\vec{i}+\Delta y_i\vec{j}$. Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що на ній вектор сили $\vec{F}=\vec{F}(x,y)$ можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $\vec{F}=\vec{F}\left(\overline{x}_i,\overline{y}_i\right)$ в довільно вибраній точці $\overline{M}_i\left(\overline{x}_i,\overline{y}_i\right)\in\Delta l_i$.

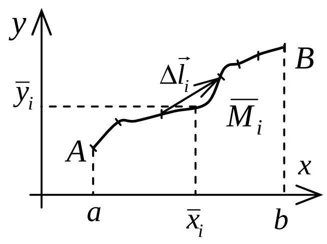


Рис. 9

Елементарна робота $\Delta A_{r\,i}$ на ділянці Δl_i визначається скалярним добутком

$$\Delta A_{r\,i}\approx\vec{F}\left(\overline{x}_i,\overline{y}_i\right)\cdot\Delta\vec{l}_i=P\left(\overline{x}_i,\overline{y}_i\right)\cdot\Delta x_i+Q\left(\overline{x}_i,\overline{y}_i\right)\cdot\Delta y_i.$$

Якщо обчислити елементарну роботу на всіх ділянках Δl_i, $i=\overline{1,n}$ і скласти суму, то $A_r=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_{r\,i}\approx\sum_{i=1}^{n}\vec{F}\left(\overline{x}_i,\overline{y}_i\right)\cdot\Delta\vec{l}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(P\left(\overline{x}_i,\overline{y}_i\right)\cdot\Delta x_i+Q\left(\overline{x}_i,\overline{y}_i\right)\cdot\Delta y_i\right)$.

Одержана сума називається ***інтегральною*** для вектор-функції $\vec{F}=\vec{F}(x,y)$ по напрямленій дузі L_{AB}. Очевидно, що $A_r=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_{r\,i}$.

Границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається ***криволінійним інтегралом по координатах*** (***криволінійним інтегралом другого роду***) *і позначається*:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot \Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot \Delta y_i \right),$$

де для скорочення запису в підінтегральному виразі опущені зовнішні дужки.

Криволінійний інтеграл по координатах у векторному полі також називається ***циркуляцією вектора*** $\vec{F}$ ***по дузі*** L_{AB} *і позначається*

$$\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot \Delta \vec{l}_i .$$

де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$ – ***вектор диференціала*** (***елемента***) ***довжини плоскої дуги***.

Таким чином, $A_r = \int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l}$

(***фізичний зміст*** криволінійного інтеграла по координатах).

Якщо лінія L замкнена, то інтеграл по ній записується так $\oint\limits_{L} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, причому початкова точка вибирається довільно й обов'язково вказується напрямок обходу. Якщо напрямок обходу замкненого контуру L явно не вказано, то приймається додатний напрямок (при цьому область, обмежена контуром, залишається зліва – рух проти годинникової стрілки (правило "правого гвинта")).

Зауваження. Для просторового векторного поля інтеграл має вигляд

$$\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz,$$

де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ – ***вектор диференціала*** (***елемента***) ***довжини просторової дуги***.

4.2.4. Властивості криволінійного інтеграла по координатах

Криволінійний інтеграл по координатах визначається підінтегральним виразом, довжиною і формою кривої інтегрування та її напрямком.

Властивість 1. *При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл по координатах тільки змінює знак*

$$\int\limits_{L_{BA}} \vec{F}\,d\vec{l} = -\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} .$$

Це випливає з означення, оскільки при цьому вектор $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$, а відповідно і його проекції dx, dy і dz, змінюють знак.

Властивість 2. Векторне поле $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ можна розглядати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно, *повний криволінійний інтеграл по координатах можна розглядати як суму трьох інтегралів*

$$\int\limits_{L} \vec{F}\,d\vec{l} = \int\limits_{L} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{L} P\,dx + \int\limits_{L} Q\,dy + \int\limits_{L} R\,dz,$$

де кожен з трьох інтегралів справа також називається відповідно ***криволінійним інтегралом по координаті*** x***,*** y ***чи*** z.

Властивість 3. Розглянемо циркуляцію $\oint\limits_L \vec{F}\,d\vec{l}$ по замкненому контуру L. З'єднаємо дві довільні точки A і B цього контуру дугою L_{AB} (рис. 10). Таким чином, одержимо два замкнені контури $L_1 = AmB$ і $L_2 = BnA$. Тоді

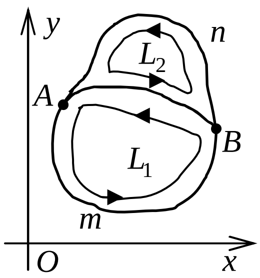


Рис. 10

$$\oint\limits_L \vec{F}\,d\vec{l} = \oint\limits_{L_1} \vec{F}\,d\vec{l} + \oint\limits_{L_2} \vec{F}\,d\vec{l}\,, \text{ оскільки } \int\limits_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} + \int\limits_{L_{BA}} \vec{F}\,d\vec{l} = 0.$$

Тобто, *при розбитті замкненого контуру на замкнені підконтури значення сумарного криволінійного інтеграла не змінюється*. Ця властивість виражає закон збереження обертального руху.

Властивість 4 (***зв'язок між криволінійними інтегралами першого та другого роду***). Оскільки $\left|d\vec{l}\right| = dl$, то $dx = dl\cos\alpha$, $dy = dl\cos\beta$, $dz = dl\cos\gamma$, де α, β, γ – напрямні кути вектора $d\vec{l}$. Тоді *криволінійний інтеграл по координатах зводиться до криволінійного інтеграла по довжині*

$$\int\limits_L \vec{F}\,d\vec{l} = \int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_L P\,dl\cos\alpha + Q\,dl\cos\beta + R\,dl\cos\gamma = \int\limits_L \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dl$$

Зауваження. Інші властивості криволінійного інтеграла по координатах аналогічні властивостям звичайного визначеного інтеграла.

4.2.5. Обчислення криволінійного інтеграла по координатах

Обчислення криволінійного інтеграла по координатах здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Випадок 1. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах у параметричній формі $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$. Тоді $dx = x'(t)\,dt;\ dy = y'(t)\,dt$.

У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int\limits_{L_{AB}} P\,(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[\,P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\right]dt.$$

Приклад 1. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F} = (2x - y)\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$ по дузі еліпса $L_{AB}:\ x = 4\cos t;\ \ y = 2\sin t,\ \ 0 \le t \le \pi/2$.

Розв'язання. $L_{AB}:\ x = 4\cos t;\ \ y = 2\sin t,\ \ 0 \le t \le \pi/2;\ \ x' = -4\sin t;\ \ y' = 2\cos t;$

$$\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int\limits_{L_{AB}} (2x - y)\,dx + xy\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} \left[(2\cdot 4\cos t - 2\sin t)\cdot(-4\sin t) + 4\cos t\cdot 2\sin t\cdot 2\cos t\right]dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} (-32\sin t\cos t + 8\sin^2 t + 16\cos^2 t\sin t)\,dt = -16\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt + 4\int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\,dt +$$

$$+16\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\sin t\,dt = 8\cdot\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} + 4\cdot t\Big|_0^{\pi/2} - 2\cdot\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} - (16/3)\cdot\cos^3 t\Big|_0^{\pi/2} = 2\pi - 16/3.$$

Випадок 2. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y=y(x)$, $a\le x\le b$. Можна використати попередній спосіб, записавши рівняння дуги у параметричній формі

$\begin{cases} y=y(x) \\ x=x \end{cases}$ $a\le x\le b$. Тоді $\begin{cases} dy=y'(x)\,dx \\ dx=dx \end{cases}$ і маємо

$$\int\limits_{L_{AB}}\vec{F}(x,y)\,d\vec{l}=\int\limits_{L_{AB}}P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int\limits_a^b\left[P(x,y(x))+Q(x,y(x))\,y'(x)\right]dx\ .$$

Приклад 2. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F}=2xy\vec{i}+x^2\vec{j}$ по відрізку L_{AB} прямої, який з'єднує точки $A(0,0)$ та $B(1,1)$.

Розв'язання. Знайдемо канонічне рівняння прямої AB:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{1-0};\quad \frac{x}{1}=\frac{y}{1}.\ \text{Тоді}\ \ L_{AB}: y=x,\ 0\le x\le 1;\ y'=1;\ \ dy=dx.$$

Отже, $\int\limits_{L_{AB}}\vec{F}(x,y)\,d\vec{l}=\int\limits_{L_{AB}}2xydx+x^2\,dy=\int\limits_0^1\left(2x\cdot x+x^2\right)dx=3\int\limits_0^1 x^2dx=3\cdot\left(x^2/3\right)\Big|_0^1=1$

Випадок 3. Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в полярних координатах $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$. Можна скористатися результатами розгляду першого випадку, якщо подати дугу L_{AB} у параметричній формі $\begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$ $\alpha\le\varphi\le\beta$, де полярний кут φ служить параметром. Тоді $dx=\left(\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi\right)d\varphi$; $dy=\left(\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi\right)d\varphi$. Маємо інтеграл

$$\int\limits_{L_{AB}}\vec{F}(x,y)\,d\vec{l}=\int\limits_{L_{AB}}P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P\left(\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi\right)\cdot\left(\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi\right)+\right.$$
$$\left.+Q\left(\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi\right)\cdot\left(\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi\right)\right]d\varphi.$$

Приклад 3. Обчислити криволінійний інтеграл по координатах $I=\int\limits_{L_{AB}}\frac{1}{x}\left(2dx-6\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)$, де L_{AB} – дуга двопелюсткової троянди $\rho=2\cos2\varphi$, $0\le\varphi\le\pi/6$.

Розв'язання. Запишемо рівняння дуги у параметричному вигляді $\begin{cases} x=2\cos2\varphi\cos\varphi \\ y=2\cos2\varphi\sin\varphi \end{cases}$. Тоді $\sqrt{x^2+y^2}=2\cos2\varphi$; $\begin{cases} dx=-2\left(2\sin2\varphi\cos\varphi+\cos2\varphi\sin\varphi\right)d\varphi \\ dy=2\left(-2\sin2\varphi\sin\varphi+\cos2\varphi\cos\varphi\right)d\varphi \end{cases}$, $0\le\varphi\le\pi/6$.

Отже, $I=\int\limits_{L_{AB}}\frac{1}{x}\left(2dx-6\sqrt{x^2+y^2}\,dy\right)=\int\limits_0^{\pi/6}\frac{1}{2\cos2\varphi\cos\varphi}\cdot2\cdot(-2)\times$

$$\times\left(2\sin2\varphi\cos\varphi+\cos2\varphi\sin\varphi\right)-6\cdot2\cos2\varphi\cdot2\left(-2\sin2\varphi\sin\varphi+\cos2\varphi\cos\varphi\right)\big)d\varphi=$$

$$=-4\int\limits_0^{\pi/6}\frac{\sin2\varphi}{\cos2\varphi}d\varphi-2\int\limits_0^{\pi/6}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}d\varphi+48\int\limits_0^{\pi/6}\sin^2\varphi\,d\varphi-12\int\limits_0^{\pi/6}\cos2\varphi\,d\varphi=2\ln|\cos2\varphi|\Big|_0^{\pi/6}+$$

$$+2\ln|\cos\varphi|\Big|_0^{\pi/6}+24\int\limits_0^{\pi/6}(1-\cos2\varphi)\,d\varphi-12\int\limits_0^{\pi/6}\cos2\varphi\,d\varphi=2\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right|-\ -2\ln\left|\cos0\right|+2\ln\left|\cos\frac{\pi}{6}\right|-$$

$$2\ln|\cos 0| + 24\int_0^{\pi/6} d\varphi - 36\int_0^{\pi/6}\cos 2\varphi\, d\varphi = 2\ln\frac{1}{2} - 2\ln 1 + 2\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\ln 1 + 24\cdot\varphi\Big|_0^{\pi/6} -$$

$$-18\cdot\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/6} = -2\ln 2 + \ln 3 - 2\ln 2 + 24\cdot\frac{\pi}{6} - 18\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \ln 3 - 4\ln 2 + 4\pi - 9\sqrt{3}.$$

Випадок 4. Розглянемо просторове векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Нехай просторова дуга L_{AB} задана в параметричній формі: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. Тоді $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$; $dz = z'(t)\,dt$.

У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\right]dt.$$

Приклад 4. Обчислити циркуляцію просторового векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (x+y-1)\vec{k}$ по відрізку L_{AB} прямої, який з'єднує точки $A(1,1,1)$ та $B(2,3,4)$.

Розв'язання. Знайдемо канонічні рівняння прямої AB:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{4-1};\quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Перейдемо до параметричного запису прямої і обчислимо диференціали:

$$x = t+1;\ y = 2t+1;\ z = 3t+1;\ dx = dt;\ dy = 2dt;\ dz = 3dt.$$

Врахуємо, що при заміні змінної змінюються межі інтегрування, а саме, якщо на відрізку L_{AB} $1 \le x \le 2$, то $0 \le t \le 1$.

Отже, $\displaystyle\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz =$

$$= \int_0^1 [t+1+(2t+1)\cdot 2 + (t+1+2t+1-1)\cdot 3]dt = \int_0^1 (14t+6)dt = 14\cdot\left(t^2/2\right)\Big|_0^1 + 6t\Big|_0^1 = 13.$$

Приклад 5. Обчислити роботу A_r силового поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки уздовж дуги L_{AB} перерізу однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$ площиною $y = x$ від точки $A(1,1,0)$ до точки $B\left(\sqrt{2};\sqrt{2};1\right)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння лінії $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 2 \\ y = x \end{cases}$ у параметричному вигляді $x = \sqrt{t}$; $y = \sqrt{t}$; $z = \sqrt{t-1}$. Тоді $dx = dt/\left(2\sqrt{t}\right)$; $dy = dt/\left(2\sqrt{t}\right)$; $dz = dt/\left(2\sqrt{t-1}\right)$. При цьому на дузі L_{AB} $1 \le t \le 2$, оскільки $1 \le x \le \sqrt{2}$.

Отже, $\displaystyle A_r = \int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{L_{AB}} 2xy\,dx + y^2dy - x^2dz = \int_1^2\left(2\sqrt{t}\sqrt{t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}} + t\,\frac{1}{2\sqrt{t}} -\right.$

$$\left. - t\,\frac{1}{2\sqrt{t-1}}\right)dt = \int_1^2\left(\frac{3}{2}\sqrt{t} - \frac{t-1+1}{2\sqrt{t-1}}\right)dt = \frac{3}{2}\int_1^2\sqrt{t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{t-1}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{\sqrt{t-1}} = t^{3/2}\Big|_1^2 - \frac{1}{3}(t-1)^{3/2}\Big|_1^2 -$$

$$-(t-1)^{1/2}\Big|_1^2 = 2\sqrt{2} - 1 - \frac{1}{3} - 1 = 2\sqrt{2} - \frac{7}{3} = \frac{6\sqrt{2}-7}{3}.$$

4.2.6. Формула Гріна

Встановимо зв'язок між подвійним інтегралом по деякій плоскій області D та криволінійним інтегралом по межі L цієї області.

Теорема. (Зв'язок між криволінійним і подвійним інтегралом) *Нехай задано плоске векторне поле* $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ *де* $P = P(x, y)$ та $Q = Q(x, y)$ - *функції двох змінних, неперервні разом з частинними похідними* $\partial P/\partial y$ *і* $\partial Q/\partial x$. *Якщо* L - *замкнена лінія, що обмежує однозв'язну область* D, *то*

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy \text{ (**формула Гріна**)}.$$

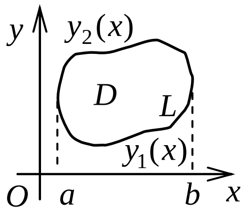


Рис. 11

Доведення. Обмежимось розглядом області D, правильної в напрямку осі Oy (рис. 11). Обчислимо

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy = \int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b \big(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\big)dx = -\int_b^a P(x, y_2(x))\,dx - \int_a^b P(x, y_1(x))\,dx = -\oint_L P(x,y)\,dx.$$

Аналогічно $\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x,y)\,dx$.

Склавши відповідні вирази, маємо

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy.$$

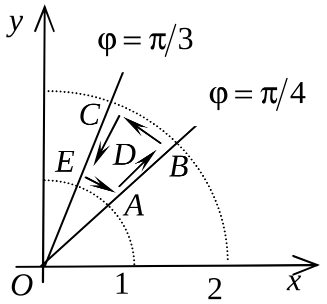


Рис. 12

Приклад 1. Використовуючи формулу Гріна, обчислити циркуляцію $\oint_L \frac{1}{x} arctg\frac{y}{x}dx + \frac{2}{y} arctg\frac{x}{y}dy$, якщо L - замкнений контур $ABCE$, утворений колами $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ та прямими $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, де $x > 0$, $y > 0$ (рис. 12).

Розв'язання. У прийнятих позначеннях

$$P(x,y) = \frac{1}{x} arctg\frac{y}{x}, \quad Q(x,y) = \frac{2}{y} arctg\frac{x}{y}.$$

Знайдемо $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{2}{x^2+y^2}$. Тоді за формулою Гріна

$\oint_L \frac{1}{x} arctg\frac{y}{x}dx + \frac{2}{y} arctg\frac{x}{y}dy = \iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$, де область D обмежена контуром L.

Перейдемо до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, де $1 \le \rho \le 2$, $\pi/4 \le \varphi \le \pi/3$. Отже,

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_1^2 \frac{1}{\rho^2}\rho\, d\rho = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \ln\rho\Big|_1^2 d\varphi = \frac{\pi}{12}\ln 2.$$

Зауваження. Нехай замкнений контур L обмежує область D. За формулою Гріна

$$\oint_L -y\,dx + x\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) dxdy = \iint_D (1+1) dxdy = 2\iint_D dxdy = 2S_D .$$

Звідси $S_D = \dfrac{1}{2} \oint_L -y\,dx + x\,dy$, де S_D – площа плоскої області D, що обмежена контуром L.

<u>Приклад 2</u>. За допомогою криволінійного інтеграла по координатах обчислити площу плоскої області D, що обмежена осями координат $x=0$, $y=0$ і дугою астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, розміщеною в першому квадранті ($x \ge 0$, $y \ge 0$) (рис. 13).

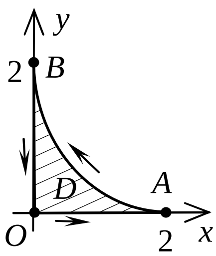


Рис.13

<u>Розв’язання</u>. Контур $L = OABO$, що обмежує область D, складається з трьох ділянок OA, AB і BO. Відповідно розіб’ємо криволінійний інтеграл

$$S_D = (1/2) \oint_L -y\,dx + x\,dy = (1/2) \left(\int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO} \right).$$

Тоді OA: $y=0,\ x_1=0,\ x_2=2;\ dy=0$;

$\int_{OA} -y\,dx + x\,dy = \int_0^2 (-0 + x\cdot 0)\,dx = 0$; AB: $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t,\ t_1 = 0,\ t_2 = \pi/2$;

$dx = -6\cos^2 t \sin t\,dt$; $dy = 6\sin^2 t \cos t\,dt$; $\int_{AB} -y\,dx + x\,dy =$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-2\sin^3 t \cdot (-6)\cos^2 t \sin t + 2\cos^3 t \cdot 6\sin^2 t \cos t \right) dt = 12 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \left(\sin^2 t + \cos^2 t \right) dt =$$

$= 3\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt = \dfrac{3}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t)\,dt = \dfrac{3}{2} t\Big|_0^{\pi/2} - \dfrac{3}{8}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = \dfrac{3\pi}{4}$; BO: $x=0,\ y_1=2,\ y_2=0;\ dx=0$;

$\int_{BO} -y\,dx + x\,dy = \int_2^0 (-y\cdot 0 + 0)\,dy = 0$. Отже, $S_D = (1/2)(0 + 3\pi/4 + 0) = 3\pi/8$.

4.2.7. Умови незалежності криволінійного інтеграла по координатах від шляху інтегрування

Розглянемо приклад. Раніше ми обчислили інтеграл $\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} 2xydx + x^2\,dy$ по відрізку прямої, що з'єднує точки $A(0,0)$ та $B(1,1)$, тобто L_{AmB}: $y = x$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ (рис. 14) і одержали значення інтеграла $\int_{L_{AmB}} \vec{F}\,d\vec{l} = 1$ (див. приклад 2 із п.4.2.4). Обчислимо той же інтеграл, але шлях інтегрування, що з'єднує указані точки A та B, оберемо параболою L_{AnB}: $y = x^2$.

Тоді $dy = 2xdx$; $\int_{L_{AnB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AnB}} 2xydx + x^2\,dy = \int_0^1 \left(2x\cdot x^2 + x^2\cdot 2x \right) dx = 4\int_0^1 x^3 dx = x^4 \Big|_0^1 = 1$.

Як бачимо, значення інтеграла не змінилося, хоча шлях інтегрування був іншим: $\int_{L_{AnB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AmB}} \vec{F}\,d\vec{l}$. З іншого боку, якщо обчислити інтеграл по замкненій

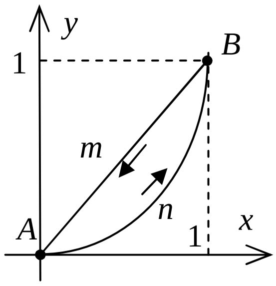


Рис. 14

лінії $L = AnBmA$ то, очевидно, $\oint\limits_L \vec{F}\,d\vec{l} = 0$.

Виникає питання: за яких умов щодо функцій $P = P(x,y)$ і $Q = Q(x,y)$ виконується рівність $\oint\limits_L \vec{F}\,d\vec{l} = \oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$?

<u>Теорема</u>. *Нехай у всіх точках деякої однозв'язної області D функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Тоді для того, щоб криволінійний інтеграл по довільному замкненому контуру L, який цілком лежить в області D, дорівнював нулю, тобто $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$, необхідно і достатньо виконання умови $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ у всіх точках області D.*

<u>Доведення</u>. Нехай контур L обмежує область $D_1 \subseteq D$. Запишемо формулу Гріна

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\,.$$

Якщо умова теореми виконана, то подвійний інтеграл у правій частині дорівнює нулю і цим доведено <u>достатність</u>.

Доведемо <u>необхідність</u> методом від супротивного. Припустимо, що $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$, а умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ не виконується хоча б в одній точці $M_0(x_0, y_0)$ області D, скажімо, в цій точці $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y > 0$.

Оскільки в лівій частині нерівності функція неперервна, то вона буде додатна у всіх точках деякої досить малої області $D_1 \subseteq D$, яка містить в собі точку $M_0(x_0, y_0)$. Візьмемо подвійний інтеграл по цій області, який матиме додатне значення $\iint\limits_{D_1} (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y) dxdy > 0$.

Але за формулою Гріна ліва частина одержаної нерівності дорівнює криволінійному інтегралу по контуру L, який обмежує область D_1, і дорівнює нулю. Виходить, наше припущення невірне. Це приводить до висновку, що $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ в усіх точках області D.

Коли згадати, що рівність $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ є необхідною і достатньою умовою того, щоб вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ був повним диференціалом, то доведену теорему можна сформулювати так: *для того, щоб криволінійний інтеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежав від лінії інтегрування, необхідно і достатньо, щоб його підінтегральний вираз був повним диференціалом.*

Підсумовуючи <u>висновки</u> нашого дослідження, можна стверджувати, що

коли область D однозв'язна і функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ та $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ в цій області, то всі чотири *наступні твердження рівносильні, тобто якщо виконується одне з них, то виконуються і всі інші:*

1) криволінійний інтеграл $\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, *взятий по довільному замкненому контуру* L, *цілком розміщеному в області* D, *дорівнює нулю;*

2) криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *не залежить від форми лінії інтегрування* L_{AB}, *що цілком лежить в області* D *і з'єднує початкову* A *і кінцеву* B *точки;*

3) вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *є повний диференціал деякої функції* $u(x,y)$, *тобто в області* D *існує така функція* $u(x,y)$, *що* $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, *де* $P(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ *і* $Q(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$*;*

4) у всіх точках області D *має місце рівність* $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Зауваження. На практиці зручно користуватись останньою умовою $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$.

Приклад 1. Використовуючи умову $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$, перевірити, що криволінійний інтеграл по замкненому контуру $\oint\limits_L (5x-2y\cos 2x)dx+(3y-\sin 2x)dy$ дорівнює нулю.

Розв'язання. Знайдемо $\partial P/\partial y=-2\cos 2x;\ \partial Q/\partial x=-2\cos 2x$. Оскільки $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$, то інтеграл по довільному замкненому контуру L дорівнює нулю.

4.2.8. Обчислення функції за її повним диференціалом. Розв'язання диференціальних рівнянь у повних диференціалах

Розглянемо функцію $u(x,y)$, задану в деякій області D, де вона неперервна разом зі своїми частинними похідними. Обчислимо її повний диференціал $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$.

Позначимо $P(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x},\quad Q(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$. Тоді для повного диференціалу $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Але за цієї умови криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{M_0M_1}} Pdx+Qdy$ не залежить від форми шляху інтегрування, а визначається положенням початкової $M_0(x_0,y_0)$ та кінцевої $M_1(x_1,y_1)$ точок. Такий інтеграл позначають так

$\int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, а шлях інтегрування обирають довільно.

Зауваження 1. Найзручніше інтегрувати по ламаній лінії M_0NM_1, ланки M_0N і NM_1 якої паралельні осям координат. При цьому можливі два способи побудови ламаної, що відображені на рис. 15 і рис. 16.

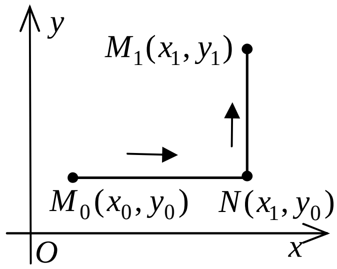


Рис. 15

Для першого способу (рис. 15):

на відрізку $M_0N: y = y_0 = const,\ dy = 0$, а на відрізку $NM_1: x = x_1 = const,\ dx = 0$. Отже, інтеграл набуде вигляду

$$\int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{N(x_1,y_0)} + \int\limits_{N(x_1,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y)dy .$$

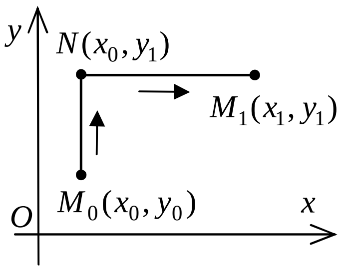


Рис. 16

Для другого способу (рис. 16):

на відрізку $M_0N: x = x_0 = const,\ dx = 0$, а на відрізку $NM_1: y = y_1 = const,\ dy = 0$. Отже, інтеграл набуде вигляду

$$\int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{N(x_0,y_1)} + \int\limits_{N(x_0,y_1)}^{M_1(x_1,y_1)} =$$

$$= \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y)dy + \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x, y_1)dx .$$

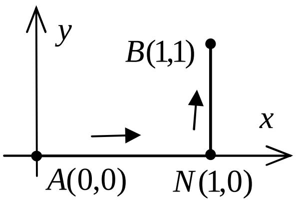


Рис. 17

<u>Приклад 1</u>. Знайти інтеграл $\int\limits_{A(0,0)}^{B(1,1)} 2xydx + x^2dy$.

<u>Розв’язання</u>. За шлях інтегрування оберемо ламану ANB (рис. 17). На відрізку $AN: y = 0 = const,\ dy = 0$, а на відрізку $NB: x = 1 = const,\ dx = 0$. Тоді

$$\int\limits_{A(0,0)}^{B(1,1)} 2xydx + x^2dy = \int\limits_{A(0,0)}^{N(1,0)} + \int\limits_{N(1,0)}^{B(1,1)} = \int\limits_{0}^{1} 2x \cdot 0 \cdot dx + \int\limits_{y_0}^{y_1} 1^2 \cdot dy = 1 .$$

<u>Зауваження 2</u>. Якщо в криволінійному інтегралі, що не залежить від форми шляху інтегрування, початкову точку $M_0(x_0, y_0)$ зафіксувати, а кінцеву точку $M(x, y)$ розглядати як змінну, то цей інтеграл буде деякою функцією координат x і y точки $M(x, y)$: $u(x,y) = \int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Функцію $u(x, y)$ називають ***первісною***. Задача відшукання функції (первісної) $u(x, y)$ за її повним диференціалом розв’язується з точністю до довільної сталої:

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C,\ C = const ,$$

де $M_0(x_0, y_0)$ – довільно вибрана фіксована точка, в якій функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ та їх частинні похідні неперервні.

Використовуючи поняття первісної, одержуємо ***формулу Ньютона–Лейбніца*** *для криволінійних інтегралів*

$$\int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} Pdx + Qdy = u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) .$$

Приклад 2. Перевірити, що вираз $\left(e^{xy}+5\right)\left(xdy+ydx\right)$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ та знайти цю функцію (первісну). За допомогою отриманої первісної обчислити відповідний криволінійний інтеграл

$$I=\int\limits_{A(1,0)}^{B(2,-1)}\left(e^{xy}+5\right)y\,dx+\left(e^{xy}+5\right)x\,dy.$$

Розв'язання. Запишемо даний вираз у вигляді $\left(e^{xy}+5\right)y\,dx+\left(e^{xy}+5\right)x\,dy$. Тобто $P(x,y)=\left(e^{xy}+5\right)y$; $Q(x,y)=\left(e^{xy}+5\right)x$. Обчислимо $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=e^{xy}xy+e^{xy}+5$; $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=e^{xy}xy+e^{xy}+5$.

Як бачимо, $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$. Значить, даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$. Знайдемо цю функцію. Нехай $M_0(0,0)$ – початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану M_0NM, де на відрізку $M_0N: y=0=const,\ dy=0$, а на відрізку $NM: x=x=const,\ dx=0$. Тоді

$$u(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}\left(e^{xy}+5\right)ydx+\left(e^{xy}+5\right)xdy+C=\int\limits_{M_0(0,0)}^{N(x,0)}+\int\limits_{N(x,0)}^{M(x,y)}+C=$$

$$=\int\limits_0^x\left(e^{x\cdot 0}+5\right)\cdot 0dx+\int\limits_0^y\left(e^{xy}+5\right)xdy+C=0+x\cdot\left(\frac{1}{x}e^{xy}+5y\right)\Bigg|_0^y+C=e^{xy}+5xy-1+C.$$

Включивши мінус одиницю в довільну сталу, маємо

$$u(x,y)=e^{xy}+5xy+\tilde{C},\ \text{ де } \tilde{C} \text{ – довільна стала.}$$

Перевіримо правильність результату, тобто обчислимо повний диференціал функції $u(x,y)=e^{xy}+5xy+\tilde{C}$: $du(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy=\left(e^{xy}y+5y\right)dx+\left(e^{xy}x+5x\right)dy$.

Даний інтеграл знайдемо за формулою Ньютона–Лейбніца:

$$I=\int\limits_{A(1,0)}^{B(2,-1)}\left(e^{xy}+5\right)y\,dx+\left(e^{xy}+5\right)x\,dy=\left(e^{xy}+5xy\right)\Big|_{A(1,0)}^{B(2,-1)}=e^{-2}-10-\left(e^0+0\right)=e^{-2}-11.$$

Приклад 3. Перевірити, що вираз $\left(1/x^2+2/y\right)dx+\left(1/y-2x/y^2\right)dy$ є повним диференціалом деякої функції та знайти цю функцію (первісну).

Розв'язання. Маємо $P(x,y)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{y}$, $Q(x,y)=\dfrac{1}{y}-\dfrac{2x}{y^2}$. Ці функції неперервні разом з частинними похідними $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{2}{y^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{2}{y^2}$ на всій координатній площині Oxy, крім початку координат $O(0,0)$. Оскільки $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$, то

$$\left(1/x^2+2/y\right)dx+\left(1/y-2x/y^2\right)dy=du(x,y).$$

Знайдемо функцію $u(x,y)$. Нехай $M_0(1,1)$ – початкова точка (точку $(0,0)$ вибрати не можна, оскільки в ній функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ розривні). За шлях інтегрування оберемо ламану M_0NM, де на відрізку $M_0N: y=1=const,\ dy=0$, а на відрізку $NM: x=x=const,\ dx=0$. Тоді

$$u(x,y)=\int\limits_{(1,1)}^{(x,y)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{2x}{y^2}\right)dy+C=\int\limits_{M_0(1,1)}^{N(x,1)}+\int\limits_{N(x,1)}^{M(x,y)}+C=\int\limits_1^x\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{1}\right)dx+\int\limits_1^y\left(\frac{1}{y}-\frac{2x}{y^2}\right)dy+$$

$$+C=\left(-\frac{1}{x}+2x\right)\Bigg|_1^x+\left(\ln|y|+2x/y\right)\Big|_1^y+C=-1/x+2x+1-2+\ln|y|+$$
$$+2x/y-\ln 1-2x+C=-1/x+\ln|y|+2x/y-1+C.$$

Отже, $u(x,y)=-1/x+\ln|y|+2x/y+\tilde{C}$, де $\tilde{C}$ – довільна стала.

Зауваження 3. Якщо для диференціального рівняння першого порядку $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ виконується умова $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$, то воно називається ***рівнянням у повних диференціалах***. Оскільки ліва частина цього рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, то відновлюючи функцію за її повним диференціалом, загальний розв'язок (загальний інтеграл) $u(x,y)=C$ вказаного рівняння можна подати в одній із форм

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C;\quad \int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx=C.$$

Приклад 4. Пересвідчитися, що диференціальне рівняння

$$\left(6xy^2-1/x^2\right)dx+\left(6x^2y+5y^4\right)dy=0$$

є рівнянням у повних диференціалах. Знайти його загальний розв'язок.

Розв'язання. Маємо $P=6xy^2-1/x^2$, $Q=6x^2y+5y^4$. Ці функції неперервні разом з частинними похідними $\partial P/\partial y=12xy$ і $\partial Q/\partial x=12xy$ на всій координатній площині Oxy за винятком точок осі $Oy: x=0$. Оскільки виконується умова $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$, то маємо рівняння у повних диференціалах.

Знайдемо його загальний розв'язок за формулою $\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C$, використовуючи початкову точку $M_0(x_0,y_0)=M_0(1,0)$. Тоді

$$\int_1^x\left(6x\cdot 0^2-1/x^2\right)dx+\int_0^y\left(6x^2y+5y^4\right)dy=C;\quad (1/x)\Big|_1^x+6x^2\cdot\left(y^2/2\right)\Big|_0^y+5\cdot\left(y^5/5\right)\Big|_0^y=C;$$

$$1/x-1+3x^2y^2+y^5=C;\quad 1/x+3x^2y^2+y^5=\tilde{C},\ \text{де } \tilde{C}=C+1 \text{ – довільна стала.}$$

4.2.9. Потенціальне векторне поле

Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$. Нехай у деякій однозв'язній області D поля виконується умова $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$. Тоді вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$du=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy,\quad \text{де}\quad \frac{\partial u}{\partial x}=P \ \text{ і } \ \frac{\partial u}{\partial y}=Q.$$

При цьому дане векторне поле можна записати так

$$\vec{F}(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\vec{j}=grad\,u(x,y).$$

*Векторне поле $\vec{F}$, що є градієнтом деякого скалярного поля u: $\vec{F}=\mathrm{grad}\,u$, називається **потенціальним**. Скалярна функція u називається **потенціалом** цього векторного поля $\vec{F}$.*

Зауваження 1. У прикладних дисциплінах іноді перед градієнтом ставиться знак "-", що не має принципового значення, а лише відповідає конкретному фізичному змісту. Наприклад, для електростатичного поля $\vec{E} = -\,grad\,u$ означає, що в напрямку вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ електричний потенціал u спадає.

Умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ потенціальності плоского векторного поля рівнозначна існуванню повного диференціала. Відповідно, задача обчислення потенціалу векторного поля рівнозначна задачі відшукання повного диференціала. Оскільки $grad\,(u+C) = grad\,u$, то *потенціал векторного поля обчислюється з точністю до довільної сталої* C. *Потенціал векторного поля визначається циркуляцією цього поля по довільній лінії* M_0M *, що з'єднує фіксовану початкову* $M_0(x_0, y_0)$ *і змінну кінцеву* $M(x,y)$ *точки*:

$$u(x,y) = \int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} \vec{F}\,d\vec{l} + C = \int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C\,.$$

Зауваження 2. Для вибору конкретного значення довільної сталої C використовуються додаткові умови. Наприклад, для електростатичного поля точкового заряду приймається, що потенціал на нескінченності дорівнює нулю.

Циркуляція градієнта скалярного поля дорівнює різниці потенціалів цього поля градієнтів:

$$\int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} grad\,u\,d\vec{l} = u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} = u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0)\,.$$

Приклад 1. Пересвідчитись, що плоске векторне поле

$$\vec{F}(x,y) = \left(2x - 3y^2 + 1\right)\vec{i} + (2 - 6xy)\vec{j}$$

потенціальне і знайти його потенціал.

Розв'язання. Маємо $P = 2x + 3y^2 + 1$; $Q = 2 - 6xy$;

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -6y;\quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -6y\,;\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,,$$

що свідчить про потенціальність плоского поля.

За початкову точку візьмемо $M_0(0{,}0)$, а інтегруватимемо по ламаній M_0NM, де на відрізку $M_0N : y = 0 = const$, $dy = 0$, а на відрізку $NM : x = x = const$, $dx = 0$. Тоді

$$u(x,y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \left(2x - 3y^2 + 1\right)dx + (2 - 6xy)\,dy + C = \int\limits_{M_0(0,0)}^{N(x,0)} + \int\limits_{N(x,0)}^{M(x,y)} + C = \int\limits_0^x \left(2x - 3\cdot 0^2 + 1\right)dx\; +$$

$$+ \int\limits_0^y (2 - 6xy)\,dy + C = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^x + x\Big|_0^x + 2\cdot y\Big|_0^y - 6x\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^y + C = x^2 + x + 2y - 3xy^2 + C\,.$$

Приклад 2. Знайти циркуляцію градієнта скалярного поля $u = xy$ по відрізку L_{AB} прямої, який з'єднує точки $A(1{,}1)$ та $B(2{,}2)$.

Розв'язання. $\vec{F} = grad\,u$, тоді $\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int\limits_{(1,1)}^{(2,2)} grad\,u\,d\vec{l} = u\Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = xy\Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = 2\cdot 2 - 1\cdot 1 = 3\,.$

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}\,.$$

Якщо це поле потенціальне, а $u=u(x,y,z)$ - його потенціал, то $P=\partial u/\partial x$; $Q=\partial u/\partial y$; $R=\partial u/\partial z$.

У потенціальному векторному полі $\vec{F}=grad\,u$ циркуляція не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової $M_0(x_0,y_0,z_0)$ та кінцевої $M(x,y,z)$ точок:

$$\int\limits_{M_0}^{M}\vec{F}\,d\vec{l} = \int\limits_{M_0}^{M}P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int\limits_{M_0}^{M}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz = \int\limits_{M_0}^{M}du = u\Big|_{M_0}^{M} = u(M_0)-u(M).$$

Обчислимо ротор потенціального поля:

$$rot\,\vec{F} = \left.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R^2 \end{vmatrix}\right|_M = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

Отже, $rot\,\vec{F}=\vec{0}$, якщо поле - потенціальне. Тобто, *потенціальне поле є безвихровим*. Зворотне твердження також вірне. Тобто, *безвихрове. поле є потенціальним*.

Зокрема, рівність $rot\,grad\,u=\vec{0}$ свідчить про те, що *поле градієнтів завжди потенціальне*.

Висновок: *щоб визначити, чи задане векторне поле потенціальне, достатньо пересвідчитись, що його ротор дорівнює нулю.*

Рівність $rot\,\vec{F}=\vec{0}$ рівносильна виконанню умов

$$\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x;\quad \partial Q/\partial z=\partial R/\partial y;\quad \partial R/\partial x=\partial P/\partial z.$$

Для потенціального поля справедлива теорема, яка відповідає розглянутим раніше властивостям криволінійного інтеграла по координатах.

Теорема. *Наступні чотири властивості векторного поля $\vec{F}$, заданого в однозв'язній області D, еквівалентні:*

1) циркуляція поля $\vec{F}$ по будь-якому замкненому контуру, розміщеному в області D, дорівнює нулю;

2) циркуляція поля $\vec{F}$ вздовж довільної кривої L_{AB}, яка лежить в області D, з початком в точці A та кінцем в точці B залежить тільки від положення точок A та B і не залежить від форми кривої;

3) існує функція (потенціал) $u=u(x,y,z)$ така, що $\vec{F}=grad\,u$ (поле $\vec{F}$ є потенціальним);

4) $rot\,\vec{F}=\vec{0}$ (поле $\vec{F}$ є безвихровим).

Якщо просторове векторне поле $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ потенціальне, то його потенціал $u=u(x,y,z)$ знаходиться за формулою

$$u(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz+C,$$

де $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – довільно вибрана фіксована точка, в якій функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ $R(x,y,z)$ та їх частинні похідні неперервні; $C=const$.

Зауваження 3. Найзручніше інтегрувати по ламаній лінії, ланки якої паралельні осям координат. При цьому можливі різні способи побудови такої ламаної.

Приклад 3. Пересвідчитись, що просторове векторне поле

$$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=\frac{\ln y}{z}\vec{i}+\frac{x}{yz}\vec{j}-\frac{x\ln y}{z^2}\vec{k}$$

потенціальне. Знайти його потенціал $u=u(x,y,z)$.

Розв'язання. Обчислимо ротор даного поля:

$$rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ \ln y/z & x/(yz) & -x\ln y/z^2\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-x\ln y/z^2\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(x/(yz)\right)\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-x\ln y/z^2\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}(\ln y/z)\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(x/(yz))-\frac{\partial}{\partial y}(\ln y/z)\right)\vec{k}=\left(-\frac{x}{yz^2}+\frac{x}{yz^2}\right)\vec{i}-\left(-\frac{\ln y}{z^2}+\frac{\ln y}{z^2}\right)\vec{j}+$$

$$+\left(1/(yz)-1/(yz)\right)\vec{k}=\vec{0}.$$

Оскільки $rot\,\vec{F}=\vec{0}$, то поле - безвихрове, а значить, і потенціальне.

Обчислимо його потенціал. Нехай $M_0(0,1,1)$ – початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану $M_0N_1N_2M$ (рис. 18), де

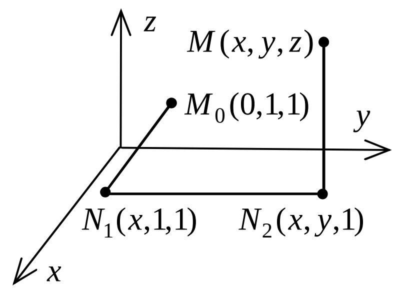


Рис. 18

$$M_0N_1: y=1=const,\ dy=0;\quad z=1=const,\ dz=0$$
$$N_1N_2: x=x=const,\ dx=0;\quad z=1=const,\ dz=0;$$
$$N_2M: x=x=const,\ dx=0;\quad y=y=const,\ dy=0.$$

Тоді $u(x,y,z)=\int\limits_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)}P\,dx+Q\,dy+R\,dz+C=$

$$=\int\limits_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{N_1(x,y_0,z_0)}+\int\limits_{N_1(x,y_0,z_0)}^{N_2(x,y,z_0)}+\int\limits_{N_2(x,y,z_0)}^{M(x,y,z)}+C=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int\limits_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz+C.$$

Таким чином, $u(x,y,z)=\int\limits_0^x\frac{\ln 1}{1}dx+\int\limits_1^y\frac{x}{y\cdot 1}dy+\int\limits_1^z\left(-x\ln y/z^2\right)dz+C=0+x\ln y\big|_1^y-$

$$-x\ln y\cdot(-1/z)\big|_1^z+C=x\ln y-x\ln 1+x\ln y/z-x\ln y+C=(x/z)\ln y+C.$$

Приклад 4. Дано просторове електростатичне поле напруженості $\vec{E}=q\vec{r}/|\vec{r}|^3$ точкового електричного заряду q ($q=const$), де $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Пересвідчитись, що це векторне поле $\vec{E}$ потенціальне, і обчислити його потенціал $u=u(x,y,z)$.

Розв'язання. $|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

$\vec{E}=q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}x\vec{i}+\ q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}y\ \vec{j}+q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}z\ \vec{k}$.

Позначимо $P=q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}x$, $Q=q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}y$, $R=q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}z$.

Тоді, наприклад, $\frac{\partial R}{\partial y}=-\frac{3}{2}qz(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}2y$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=-\frac{3}{2}qy(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}2z$, тому $\partial Q/\partial z = \partial R/\partial y$. Аналогічно можна показати, що $\partial R/\partial x = \partial P/\partial z$; $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Звідси дістаємо $rot\,\vec{E} = \vec{0}$. Значить, поле $\vec{E}$ - потенціальне.

Обчислимо його потенціал. Нехай $M_0(0,0,1)$ – початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану $M_0N_1N_2M$, де

$$M_0N_1 : y = 0 = const,\ dy = 0;\quad z = 1 = const,\ dz = 0$$
$$N_1N_2 : x = x = const,\ dx = 0;\quad z = 1 = const,\ dz = 0;$$
$$N_2M : x = x = const,\ dx = 0;\quad y = y = const,\ dy = 0.$$

Тоді

$$u(x,y,z) = \int_0^x q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} x\,dx + \int_0^y q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} y\,dy + \int_1^z q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} z\,dz +$$
$$+C = \frac{q}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{-1/2}}{-1/2}\Bigg|_0^x + \frac{q}{2}\cdot\frac{(x^2+y^2+1)^{-1/2}}{-1/2}\Bigg|_0^y + \frac{q}{2}\cdot\frac{(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}}{-1/2}\Bigg|_1^z + C =$$
$$= -q\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2} + q + C = -q/|\vec{r}| + \tilde{C},\ \tilde{C} = C + q.$$

Зауваження 4. Якщо потенціальне поле $\vec{F}$ - силове, то згідно з формулою Ньютона – Лейбниця потенціал цього поля у точці $M(x,y,z)$ чисельно дорівнює роботі сили уздовж довільної кривої, яка з'єднує точку M з точкою нульового потенціалу M_0.

4.3. Оператор Гамільтона та його застосування

Операції обчислення характеристик скалярних і векторних полів можуть бути спрощені, якщо скористатися диференціально-векторним оператором

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

який був введений Гамільтоном і називається ***оператором Гамільтона*** (***"набла"-оператором***). Його застосування до скалярних і векторних полів визначає ***диференціальні операції першого порядку***.

4.3.1. Оператор Гамільтона у скалярному полі

Нехай задано скалярне поле $u = u(x,y,z)$.

Застосуємо до функції $u = u(x,y,z)$ оператор "набла" за правилами множення вектора на число:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = grad\,u.\ \text{Отже,}\quad grad\,u = \nabla u.$$

Приклад 1. Знайти $grad\,|\vec{r}|$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Розв'язання. $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\quad grad\,|\vec{r}| = \nabla|\vec{r}| = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2} =$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k} = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Приклад 2. Знайти $grad\big(1/|\vec{r}|\big)$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Розв’язання.

$$grad\frac{1}{|\vec r|}=\nabla\frac{1}{|\vec r|}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec i+\frac{\partial}{\partial y}\vec j+\frac{\partial}{\partial z}\vec k\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2x\vec i-$$

$$-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2y\vec j-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}2z\vec k=-\frac{x\vec i+y\vec j+z\vec k}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}=-\frac{\vec r}{|\vec r|^3}.$$

Застосування оператора Гамільтона до суми скалярних полів здійснюється за правилами чисельного добутку^ $\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v$.

Наприклад, $grad\left(|\vec r|+1/|\vec r|\right)=\nabla\left(|\vec r|+1/|\vec r|\right)=\nabla|\vec r|+\nabla\left(1/|\vec r|\right)=\vec r/|\vec r|-\vec r/|\vec r|^3$.

4.3.2. Оператор Гамільтона у векторному полі

Нехай задано векторне поле

$$\vec F=\vec F(x,y,z)=P(x,y,z)\vec i+Q(x,y,z)\vec j+R(x,y,z)\vec k.$$

Застосуємо оператор "набла" до цього векторного поля за правилами множення векторів. Оскільки добуток двох векторів може бути або скалярним, або векторним, то розглянемо спочатку скалярний добуток

$$\nabla\cdot\vec F=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec i+\frac{\partial}{\partial y}\vec j+\frac{\partial}{\partial z}\vec k\right)\cdot\left(P\vec i+Q\vec j+R\vec k\right)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=div\vec F.$$ Отже, $div\vec F=\nabla\cdot\vec F$.

Наприклад, для вектора $\vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ маємо $div\vec r=\nabla\cdot\vec r=1+1+1=3$.

Розглянемо тепер векторний добуток

$$\nabla\times\vec F=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec i+\frac{\partial}{\partial y}\vec j+\frac{\partial}{\partial z}\vec k\right)\times\left(P\vec i+Q\vec j+R\vec k\right)=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R\end{vmatrix}=rot\vec F.$$

Отже, $rot\vec F=\nabla\times\vec F$.

Наприклад, для вектора $\vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k$ маємо $rot\vec r=\vec 0$.

Застосування оператора Гамільтона до суми векторних полів здійснюється за правилами скалярного добутку $\nabla\cdot\left(\vec F_1+\vec F_2\right)=\nabla\cdot\vec F_1+\nabla\cdot\vec F_2$ або за правилами векторного добутку $\nabla\times\left(\vec F_1+\vec F_2\right)=\nabla\times\vec F_1+\nabla\times\vec F_2$.

4.3.3. Застосування оператора Гамільтона до добутку скалярних та векторних полів. Диференціальні операції другого порядку

При вживанні оператора "набла" до добутку двох полів, якими можуть бути $u\cdot v,\ u\cdot\vec F,\ \vec F_1\cdot\vec F_2,\ \vec F_1\times\vec F_2$ треба користуватися правилами векторної алгебри та правилами диференціювання. При цьому у першу чергу слід враховувати його диференціальний характер, а потім вже векторні властивості.

Як диференціальний оператор він діє лише на множник, що стоїть безпосередньо за ним: $\nabla u\cdot v=(\nabla u)\cdot v=v\cdot grad\,u$; $\nabla(u\cdot v)=grad(u\cdot v)$.

В останньому випадку за правилами диференціювання

$$grad\,(u\cdot v)=\nabla(u\cdot v)=\nabla u\cdot v+u\cdot\nabla v=v\,grad\,u+u\,grad\,v.$$

Як бачимо, у процесі диференціювання на певному етапі ми деякі функції вважаємо фіксованими (сталими). Щоб виділити ці функції, їх позначають індексом, наприклад

$$div\left(u\cdot\vec{F}\right)=\nabla\left(u\cdot\vec{F}\right)=\nabla\left(u_c\cdot\vec{F}\right)+\nabla\left(u\cdot\vec{F}_c\right)=\nabla\left(\vec{F}\cdot u_c\right)+\nabla u\cdot\vec{F}_c=div\vec{F}\cdot u+grad\,u\cdot\vec{F}.$$

До речі, цей же результат можна одержати без вживання оператора "набла":

$$div\left(u\cdot\vec{F}\right)=\nabla\cdot\left(u\cdot\vec{F}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(uP\,\vec{i}+uQ\,\vec{j}+uR\,\vec{k}\right)=\frac{\partial(uP)}{\partial x}+\frac{\partial(uQ)}{\partial y}+\frac{\partial(uR)}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}P+\frac{\partial P}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}Q+\frac{\partial Q}{\partial y}u+\frac{\partial u}{\partial z}R+\frac{\partial R}{\partial z}u=u\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\right)=u\,div\vec{F}+grad\,u\cdot\vec{F}.$$

Ще приклад:

$$div\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_2\right)=\nabla\cdot\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_2\right)=\nabla\left(\vec{F}_{1c}\times\vec{F}_2\right)+\nabla\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_{2c}\right)=$$

далі, користуючись циклічністю мішаного добутку трьох векторів $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=$, запишемо останній вираз так, аби оператор "набла" стояв безпосередньо перед тією функцією, на яку він діє

$$=\vec{F}_{1c}\cdot\left(\vec{F}_2\times\nabla\right)+\vec{F}_{2c}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}_1\right)=-\vec{F}_{1c}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}_2\right)+\vec{F}_{2c}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}_1\right)=\vec{F}_2\cdot rot\,\vec{F}_1-\vec{F}_1\cdot rot\,\vec{F}_2.$$

Введений індекс є допоміжним і в кінці обчислення його не пишуть. Наприклад,

$$rot\left(u\cdot\vec{F}\right)=\nabla\times\left(u\cdot\vec{F}\right)=\nabla x\left(u_c\cdot\vec{F}\right)+\nabla x\left(u\cdot\vec{F}_c\right)=u_c\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)-$$

$$-\vec{F}_c\times\nabla u=u\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)-\vec{F}\times\nabla u=u\cdot rot\,\vec{F}-\vec{F}\,grad\,u.$$

Ми розглянули ***диференціальні операції першого порядку***: $grad\,u=\nabla u$, $div\,\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}$, $rot\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}$. Після їх застосування до поля виникає нове поле, до якого знову можна вжити ці операції. У результаті маємо ***диференціальні операції другого порядку***. Таких операцій існує лише п'ять, їх можна записати через оператор "набла".

Для скалярного поля $u=u(x,y,z)$ маємо:

$$div\,grad\,u=\nabla\cdot\nabla u;\quad rot\,grad\,u=\nabla\times\nabla u=\vec{0}.$$

Для векторного поля $\vec{F}$ маємо:

$$grad\,div\,\vec{F}=\nabla\cdot\left(\nabla\cdot\vec{F}\right);\quad div\,rot\,\vec{F}=\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=0;\quad rot\,rot\,\vec{F}=\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right).$$

Розглянемо ці операції докладніше.

Обчислимо $div\,grad\,u=\nabla\cdot\nabla u=$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u==\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{i}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{j}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{k}\right)u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Оператор $\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$ позначається через Δ ("дельта") і називається ***оператором Лапласа*** (***лапласіаном***).

Отже, $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ або $div\,grad\,u=\Delta u$.

Як відомо, векторний добуток $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, тому $rot\,grad\,u=\nabla\times\nabla u=\vec{0}$.

Це означає, що *поле градієнта є безвихровим*. Зокрема, в електротехніці для поля потенціалу $rot\,grad\,u=\vec{0}$.

Якщо в мішаному добутку векторів є два однакових вектори, то він дорівнює нулю. Тому $div\,rot\,\vec{F}=\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=0$. Це означає, що *поле вихору – соле-*

ноїдальне.

Обчислимо $rot\,rot\,\vec{F} = \nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right) = \nabla\cdot\left(\nabla\cdot\vec{F}\right) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{F} = grad\,div\,\vec{F} - \Delta\vec{F}$,
де $\Delta\vec{F}$ - результат застосування оператора Лапласа до вектора $\vec{F}$, а до подвійного векторного добутку застосовано перетворення

$$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) & \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) \end{vmatrix} = \vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}.$$

<u>Приклад</u>. Для скалярного поля $u = 3x^2 - 6yz^2 + 2xz$ знайти його градієнт $\vec{a} = grad\,u$ і лапласіан Δu. Перевірити, що векторне поле градієнтів $\vec{a} = grad\,u$ є потенціальним ($rot\,\vec{a} = \vec{0}$).

<u>Розв'язання</u>.

$$\vec{a} = grad\,u = \nabla u = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 - 6yz^2 + 2xz\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 - 6yz^2 + 2xz\right)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(3x^2 - 6yz^2 + 2xz\right)\vec{k} =$$

$$= (6x + 2z)\,\vec{i} - 6z^2\,\vec{j} + (-12yz + 2x)\,\vec{k}\,;\quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla\,\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(6x + 2z) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(-6z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-12yz + 2x) = 6 + 0 - 12y = 6 - 12y\,;$$

$$rot\,\vec{a} = \nabla\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 6x + 2z & -6z^2 & -12yz + 2x \end{vmatrix} = \left(-12z + 12z\right)\vec{i} - \left(2 - 2\right)\vec{j} + \left(0 - 0\right)\vec{k} = \vec{0}\,.$$

4.4. Поверхневий інтеграл по площі (поверхневий інтеграл першого роду)

4.4.1. Поняття поверхневого інтеграла по площі

Поверхня σ називається ***гладкою***, якщо в кожній її точці існує дотична площина, яка змінює своє положення неперервно при переході від точки до точки. Поверхня σ називається ***кусково-гладкою***, якщо вона складається із скінченного числа гладких поверхонь зі спільною кусково-неперервною межею.

Поверхня σ називається ***двосторонньою***, якщо обхід по довільному замкненому контуру, що лежить на поверхні σ і не має спільних точок з її межею, не змінює напрямку нормалі до поверхні. Якщо ж дана умова не виконується, тобто існує замкнений контур, при обході вздовж якого напрямок нормалі змінюється на протилежний, то поверхня називається ***односторонньою***.

Двосторонню поверхню називають ***орієнтовною***, а вибір певної сторони поверхні, якій відповідає певний напрямок нормалі, називається ***орієнтацією*** поверхні.

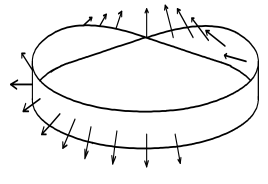


Рис. 19

Наприклад, круговий конус, еліптичний циліндр, будь-яка замкнена поверхня без самоперетину (сфера, еліпсоїд, ...)– двосторонні поверхні, а лист Мебіуса (рис. 19) – одностороння поверхня.

Для двосторонньої поверхні σ сторона σ^+, якій відповідає додатний напрямок нормалі, називається ***додатною*** (***зов-***

нішньою), а інша сторона σ^- – ***від'ємною*** (***внутрішньою***). Відповідно для замкненої поверхні за додатну (зовнішню) сторону приймається та, для якої вектор нормалі напрямлений назовні.

Зауваження 1. Надалі розглядатимемо лише кусково-гладкі двосторонні поверхні.

Нехай σ – деяка поверхня, плоска область D_{xy} - її проекція паралельно осі Oz на координатну площину Oxy. Поверхня σ називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку осі*** Oz, якщо виконуються наступні умови: 1) довільна пробна пряма, що паралельна осі Oz і проходить через область D_{xy}, перетинає поверхню σ лише в одній точці, тобто поверхня σ взаємно однозначно проектується на площину Oxy; 2) рівняння поверхні σ задано в явному вигляді, розв'язаному відносно z, причому тільки однією формулою $z = z(x, y)$.

Аналогічно розглядаються поверхні, що ***правильні в напрямку осей*** Ox ***і*** Oy.

Якщо поверхня σ правильна у всіх трьох напрямках Ox, Oy і Oz, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Наприклад, параболоїд $z = x^2 + y^2$ правильний в напрямку тільки осі Oz; циліндр $z = \sqrt{x}$ правильний в напрямку тільки осей Ox і Oz; площина $2x + 3y - z - 6 = 0$ просто правильна; сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ неправильна в кожному напрямку Ox, Oy і Oz.

Зауваження 2. Якщо поверхня σ неправильна, то її розбивають на правильні частини звичайно площинами, що паралельні координатним площинам. Наприклад, сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ площиною $z = 0$ розбивається на дві правильні в напрямку осі Oz півсфери $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ і $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Діаметром d замкненої області D називається найбільша з відстаней між двома довільними точками цієї області.

Нехай у просторі задано деяку область V і в цій області – поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Нехай на поверхні σ визначено деяку неперервну скалярну функцію $u = u(x, y, z)$. Інакше кажучи, розглянемо скалярне поле $u = u(x, y, z)$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожної частини $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i) \in \Delta\sigma_i$, обчислимо значення заданої функції в цій точці $u(\overline{M}_i) = u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)$ і помножимо це значення на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму $\sum_{i=1}^{n} u(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} u(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)\Delta\sigma_i$. Одержаний вираз називається ***інтегральною сумою*** для функції $u = u(x, y, z)$ по поверхні σ.

Скінченна границя інтегральної суми, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ *та від вибору точок* $\overline{M}_i$, *за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається* ***поверхневим інтегралом по площі*** (***поверхневим інтегралом першого роду***) *від функції* $u = u(x, y, z)$ *по поверхні* σ:

$\iint\limits_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} u(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} u(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta\sigma_i$, де $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$; d_i – діаметр частинної поверхні $\Delta\sigma_i$.

Якщо $u = u(x,y,z) \ge 0$ і функцію $u = u(x,y,z)$ розглядати як поверхневу густину маси, розподіленої по поверхні σ, то інтеграл виражає масу всієї поверхні:

$m = \iint\limits_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma$ (***фізичний зміст*** поверхневого інтеграла по площі).

Якщо $u = u(x,y,z)$ є густиною розподілу елементарних зарядів по поверхні, то інтеграл виражає сумарний заряд поверхні.

Коли $u = u(x,y,z) = 1$, то маємо площу поверхні σ: $S = \iint\limits_{\sigma} d\sigma$.

Зауваження 3. *Поверхневий інтеграл по площі не залежить від вибору орієнтації поверхні* σ: $\iint\limits_{\sigma^-} u(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^+} u(x,y,z)\,d\sigma$. Інші властивості поверхневого інтеграла першого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

4.4.2. Обчислення поверхневого інтеграла по площі

Розглянемо інтеграл $\iint\limits_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma$. Припустимо, що поверхня σ правильна в напрямку осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x,y)$, де функція $z(x,y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 20). Покажемо, що в такому випадку обчислення інтеграла по поверхні σ зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}.

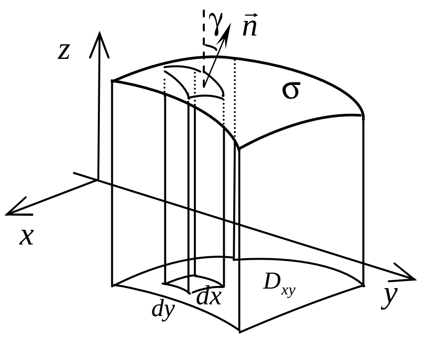


Рис. 20

Розглянемо елементарний майданчик $d\sigma$ на поверхні σ, який проектується на елемент $dS = dx\,dy$ області D_{xy}.

Проведемо нормаль $\vec{n}$ так, щоб вона утворила гострий кут γ з віссю Oz, тоді $\cos\gamma > 0$. Будемо вважати, що майданчик $d\sigma$ настільки малий, що в його межах нормаль не змінюється. Тоді площі елементарної частини $d\sigma$ та її проекції $dS = dx\,dy$ зв'язані співвідношенням $dxdy = |\cos\gamma|\,d\sigma = \cos\gamma\,d\sigma$. Звідси $d\sigma = dxdy/\cos\gamma$.

З іншого боку, вибрана нормаль $\vec{n}$ до поверхні $z = z(x,y)$ має проекції $-z'_x, -z'_y, 1$. Тому $\cos\gamma = 1\big/\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$ і тоді $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$.

Значить, інтеграл $\iint\limits_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} u(x;y;z(x;y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy$.

Зауваження 1. Поклавши $u = u(x,y,z) = 1$, для площі поверхні σ маємо формулу $S = \iint\limits_{\sigma} d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy$.

Зауваження 2. Може статися, що поверхня σ неправильна в напрямку осі

Oz, але правильна в напрямку осі Oy чи Ox, тобто може бути подана явно у вигляді $y = y(x,z)$ чи $x = x(y,z)$. Тоді хід міркувань залишається тим же з тією лише різницею, що поверхню σ будемо проектувати на площину Oxz чи Oyz. При цьому змінні x, y і z міняються ролями. (Відповідні формули переходу до подвійного інтеграла запишіть самостійно). У загальному випадку поверхню σ треба розбити на правильні у вибраному напрямку частини.

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл по площі $\iint\limits_{\sigma_p}(4x-3y+3z)\,d\sigma$, де σ_p – частина площини p: $2x+3y+6z-12=0$, що відсікається координатними площинами $x=0$, $y=0$ і $z=0$. Задачу розв'язати трьома способами, проектуючи поверхню σ_p на одну з координатних площин відповідно а) Oxy; б) Oyz; в) Oxz. До кожного способу зробити рисунок поверхні σ_p як правильної у вибраному напрямі (відповідно а) Oz, б) Ox чи в) Oy) і рисунок її проекції (відповідно а) D_{xy}. б) D_{yz} чи в) D_{xz}) як правильної в напрямку однієї з осей плоскої області.

Розв'язання. а) Поверхню σ_p будемо розглядати як правильну в напрямку осі Oz, а її проекцію D_{xy} – як правильну в напрямку осі Oy плоску область (рис. 21). Тоді

$$z=\frac{1}{6}(12-2x-3y),\ z'_x=-\frac{1}{3},\ z'_y=-\frac{1}{2};\ D_{xy}: 0\le x\le 6;\ 0\le y\le 4-2x/3.$$

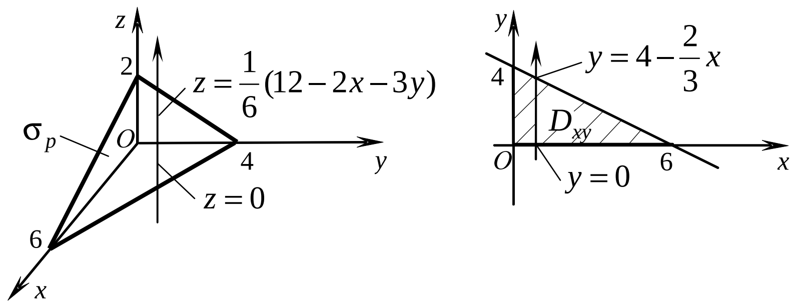


Рис. 21

За формулою $\iint\limits_{\sigma_p}u(x,y,z)\,d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}u(x;y;z(x;y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy$ маємо

$$\iint\limits_{\sigma_p}(4x-3y+3z)\,d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}\left(4x-3y+3\cdot\frac{1}{6}(12-2x-3y)\right)\times\sqrt{1+(-1/3)^2+(-1/2)^2}\;dxdy=(7/6)\times$$

$$\times\iint\limits_{D_{xy}}(3x-9y/2+6)\,dxdy=(7/6)\int\limits_0^6 dx\int\limits_0^{4-2x/3}(3x-9y/2+6)dy=(7/6)\int\limits_0^6\left(3xy-9y^2/4+6y\right)\Big|_0^{4-2x/3}dx=$$

$$=(7/6)\int\limits_0^6\left(3x(4-2x/3)-9(4-2x/3)^2/4+6(4-2x/3)\right)dx=$$

$$=(7/6)\int\limits_0^6\left(12x-2x^2-144+48x-4x^2+24-4x\right)dx=(7/6)\int\limits_0^6\left(-6x^2+56x-120\right)dx=$$

$$= (7/6)\cdot\left(-2x^3+28x^2-120x\right)\Big|_0^6 = (7/6)\cdot(-432+1008-720) = -168.$$

(Способами б) і в) розв'язати самостійно).

Приклад 2. Обчислити площу частини σ поверхні параболоїда обертання $2z = x^2 + y^2$, яка міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язання. $z = x^2/2 + y^2/2$, звідки $z'_x = x$, $z'_y = y$. Тоді шукана площа поверхні $S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$, де область D_{xy} - проекція вказаної частини σ поверхні параболоїда на площину Oxy. Область D_{xy} - круг радіуса R з центром у початку координат.

Якщо перейти до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $x^2 + y^2 = \rho^2$; $dxdy = \rho d\rho d\varphi$, то

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\, d\rho = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1+\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^R\right]d\varphi = \frac{2\pi}{3}\cdot\left[\left(1+R^2\right)^{3/2}-1\right].$$

Приклад 3. Знайти масу m частини σ поверхні кругового циліндра $x^2 + y^2 = 16$, яка відтинається площинами $z = 0$, $z = 2$, якщо поверхнева густина $\mu(x,y,z) = z\left(2\sqrt{16-x^2}+y\right)$.

Розв'язання. Поверхня σ координатною площиною $y = 0$ розбивається на дві правильні в напрямку осі Oy частини: ліву σ_1: $y = -\sqrt{16-x^2}$ і праву σ_2: $y = \sqrt{16-x^2}$ зі спільною проекцією D_{xz} на площину Oxz (рис. 22), де D_{xz} – прямокутник: $-4 \le x \le 4$, $0 \le z \le 2$.

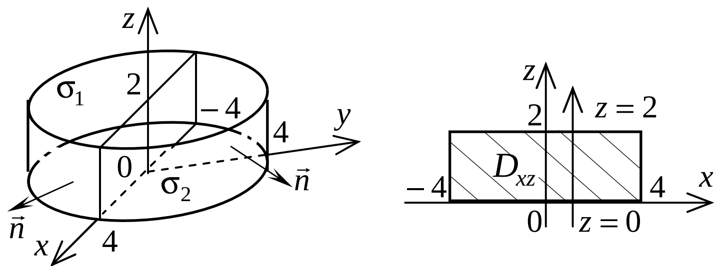


Рис. 22

Для лівої частини поверхні σ_1:

$$\sigma_1:\ y = -\sqrt{16-x^2};\quad y'_x = \frac{x}{\sqrt{16-x^2}};\quad y'_z = 0;\quad d\sigma = \sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\,dxdz =$$

$$= \sqrt{1+\frac{x^2}{16-x^2}}\,dxdz = \frac{4}{\sqrt{16-z^2}}dxdz;\quad \mu(x,y(x,z),z) = z\left(2\sqrt{16-x^2}-\sqrt{16-x^2}\right) = z\sqrt{16-x^2};$$

$$m_1 = \iint\limits_{\sigma}\mu(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xz}} z\sqrt{16-z^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{16-z^2}}dxdz =$$

$$= 4\int_{-4}^{4}dx\int_0^2 z\,dz = 4\int_{-4}^{4}\left(z^2/2\right)\Big|_0^2 dx = 8\int_{-4}^{4}dx = 8x\Big|_{-4}^{4} = 64.$$

Для правої частини поверхні σ_2:

$\sigma_2: \ y=\sqrt{16-x^2}$; $\ y'_x=-\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}$; $\ y'_z=0$; $\ d\sigma=\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\ dxdz=\dfrac{4}{\sqrt{16-z^2}}dxdz$;

$$\mu(x,y(x,z),z)=z\left(2\sqrt{16-x^2}+\sqrt{16-x^2}\right)=3z\sqrt{16-x^2}; \quad m_2=\iint_{\sigma}\mu(x,y,z)\,d\sigma=$$

$$=\iint_{D_{xz}}3z\sqrt{16-z^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{16-z^2}}dxdz=12\int_{-4}^{4}dx\int_{0}^{2}z\,dz=12\int_{-4}^{4}\left(z^2/2\right)\Big|_0^2dx=24\int_{-4}^{4}dx=24\,x\Big|_{-4}^{4}=192.$$

Отже, $m=m_1+m_2=64+192=256$.

4.5. Поверхневий інтеграл по координатах (поверхневий інтеграл другого роду)

4.5.1. Поняття поверхневого інтеграла по координатах. Потік векторного поля

Нехай, як і раніше, у просторі задано деяку область V і в цій області – поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Нехай вибрана сторона $\sigma^{\pm}$ цієї поверхні характеризується одиничним вектором нормалі $\vec{n}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$, де $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{n}$, $|\vec{n}|=1$.

Нехай на поверхні σ визначено деяку неперервну векторну функцію $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Інакше кажучи, розглянемо векторне поле $\vec{F}$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожної частини $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)\in\Delta\sigma_i$, обчислимо в цій точці значення заданої функції $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і нормалі $\vec{n}(\overline{M}_i)$, потім знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і $\vec{n}(\overline{M}_i)$, помножимо цей добуток на площу елементарного майданчика $\Delta\sigma_i$ та складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\overline{M}_i)\cdot\vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i\ .$$

Одержаний вираз називається ***інтегральною сумою*** для вектор-функції $\vec{F}=\vec{F}(M)=\vec{F}(x,y,z)$ по вибраній стороні $\sigma^{\pm}$ поверхні σ.

Скінченна границя інтегральної суми, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок $\overline{M}_i$, за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається ***поверхневим інтегралом по координатах*** *(**поверхневим інтегралом другого роду**) від вектор-функції $\vec{F}=\vec{F}(M)=\vec{F}(x,y,z)$ по вибраній стороні $\sigma^{\pm}$ поверхні σ:*

$\iint_{\sigma^{\pm}}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\overline{M}_i)\cdot\vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i$, де $\lambda=\max d_i$, $i=\overline{1,n}$; d_i – діаметр частинної поверхні $\Delta\sigma_i$.

Розглянемо докладніше вираз i-го доданку. За означенням скалярного добутку $\vec{F}(\overline{M}_i)\cdot\vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i=\left|\vec{F}(\overline{M}_i)\right|\cdot\left|\vec{n}(\overline{M}_i)\right|\cdot\cos\varphi\cdot\Delta\sigma_i=\left|\vec{F}(\overline{M}_i)\right|\cdot\cos\varphi\cdot\Delta\sigma_i$, $\quad\varphi=\widehat{\vec{F}(\overline{M}_i),\vec{n}(\overline{M}_i)}$.

Останній вираз можна тлумачити таким чином: цей добуток визначає об'єм циліндра з основою $\Delta\sigma_i$ і висотою $\left|\vec{F}(\overline{M}_i)\right|\cdot\cos\varphi$ (рис. 23). Коли вважати, що векторне поле $\vec{F}$ є швидкість рідини, яка протікає через поверхню σ, то цей добуток дорівнює кількості рідини, яка протікає через майданчик $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу в напрямку вектора $\vec{F}(\overline{M}_i)$. Інтеграл $\iint\limits_{\sigma^\pm}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ визначає загальну кількість рідини, що протікає за одиницю часу через вибрану сторону $\sigma^\pm$ поверхні σ.

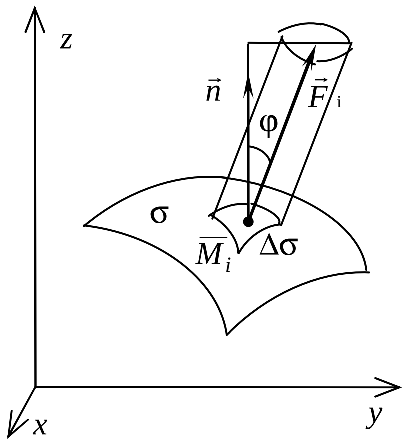


Рис. 23

Тому поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^\pm}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ також називають ***потоком векторного поля*** $\vec{F}$ через вибрану сторону $\sigma^\pm$ поверхні σ: $\Pi^\pm=\iint\limits_{\sigma^\pm}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ (***фізичний зміст*** поверхневого інтеграла по координатах).

Якщо поверхня σ замкнена, то інтеграл по ній записується так $\oiint\limits_{\sigma^\pm}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$.

Зауваження 1. Якщо всюди на поверхні σ векторне поле $\vec{F}$ дотичне до неї ($\vec{F}\perp\vec{n}$), тобто σ є векторною поверхнею, то потік через неї дорівнює нулю: $\iint\limits_{\sigma^\pm}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma^\pm}0\,d\sigma=0$.

Зауваження 2. *При зміні орієнтації поверхні σ поверхневий інтеграл по координатах тільки змінює знак*: $\iint\limits_{\sigma^-}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=-\iint\limits_{\sigma^+}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, оскільки при цьому одиничний вектор нормалі $\vec{n}$ змінює знак. Інші властивості поверхневого інтеграла першого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

Якщо виразити скалярний добуток у координатній формі, то одержимо співвідношення $\iint\limits_{\sigma^\pm}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma^\pm}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\sigma$, що відображає ***зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду***.

Векторне поле $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ можна подати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно поверхневий інтеграл можна розбити на три інтеграли-доданки: $\Pi^\pm=\iint\limits_{\sigma^\pm}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma^\pm}P\vec{i}\cdot\vec{n}\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma^\pm}Q\vec{j}\cdot\vec{n}\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma^\pm}R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma$.

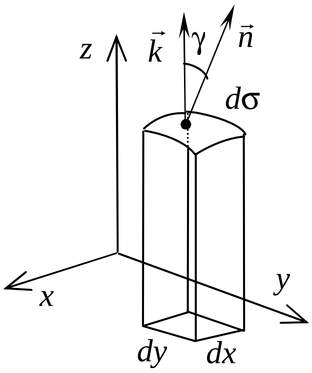


Рис. 24

Розглянемо останній з інтегралів $\iint\limits_{\sigma^\pm}R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma$. Обчислимо скалярний добуток $\vec{k}\cdot\vec{n}=|\vec{k}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\gamma=\cos\gamma$ (рис. 24). Далі $\cos\gamma\,d\sigma$ є проекція елементарного майданчика $d\sigma$ на площину Oxy: $\cos\gamma\,d\sigma=dxdy$, тому $\iint\limits_{\sigma^\pm}R\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma^\pm}R\,dxdy$.

Аналогічно $\cos\alpha\,d\sigma=dydz,\quad\cos\beta\,d\sigma=dxdz$. Тоді

$$\iint\limits_{\sigma^\pm}P\vec{i}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma^\pm}P\,dydz;\quad\iint\limits_{\sigma^\pm}Q\vec{j}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma^\pm}Q\,dxdz.$$

Отримані три інтеграли

$$I_x = \iint_{\sigma^{\pm}} P\,dydz\,,\quad I_y = \iint_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz\,,\quad I_z = \iint_{\sigma^{\pm}} R\,dxdy$$

називаються ***поверхневими інтегралами по відповідній парі координат*** (y,z) або (x,z), або (x,y). ***Повний поверхневий інтеграл по координатах*** $\Pi^{\pm} = I_x + I_y + I_z$ записується так $\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$, де для скорочення запису в підінтегральному виразі опущені зовнішні дужки.

Зауваження 3. Виділимо два важливі випадки, коли поверхневий інтеграл $I_z = \iint_{\sigma^{\pm}} R\,dxdy$ за парою координат (x,y) дорівнює нулю: а) якщо $R=0$ всюди на поверхні σ, тобто векторне поле $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + 0\vec{k}$ є ***плоскопаралельним*** (вектор $\vec{F}$ паралельний одній площині Oxy), при цьому $\vec{F}\perp\vec{k}$; б) якщо $\vec{k}\perp\vec{n}$ всюди на поверхні σ, тобто σ є циліндричною поверхнею з твірними, що паралельні осі Oz, при цьому її проекцією D_{xy} на площину Oxy служить деяка лінія – фігура нульової площі. Аналогічні твердження справедливі для поверхневих інтегралів $I_x = \iint_{\sigma^{\pm}} P\,dydz$ і $I_y = \iint_{\sigma^{\pm}} Q\,dxdz$.

4.5.2. Обчислення поверхневого інтеграла по координатах

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду

$$\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$$

зводиться до обчислення подвійних інтегралів по плоских областях.

Можна спочатку перейти до поверхневого інтеграла першого роду

$$\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma\,,$$

а потім спроектувати поверхню σ на одну з координатних площин і перейти до подвійного інтеграла.

Але, як правило, зручніше спроектувати поверхню σ на всі три координатні площини і безпосередньо перейти до відповідних подвійних інтегралів. Для цього треба розбити повний інтеграл на складові частини і кожну з них розглянути окремо.

Метод проектування на одну з координатних площин. Нехай поверхня σ правильна в напрямку осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x,y)$, де функція $z(x,y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 25). Тоді для напрямних косинусів одиничного вектора нормалі $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ справедливі співвідношення:

$$\cos\alpha = \frac{-z'_x}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\,;\quad \cos\beta = \frac{-z'_y}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\,;\quad \cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}\,,$$

де перед квадратним коренем береться один певний знак "+" чи "-" у залежності від орієнтації поверхні.

Площі елементарного майданчика $d\sigma$ та його проекції $dS = dx\,dy$ зв'язані рі-

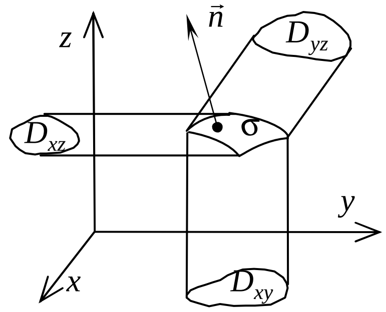


Рис. 25

вністю:

$$d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy .$$

Відповідно для поверхневого інтеграла маємо:

у векторній формі

$$\iint_{\sigma^\pm} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[\left(\vec{F}, \vec{n}\right) / |\cos\gamma| \right] \Big|_{z = z(x,y)} dxdy$$

або в координатній формі

$$\iint_{\sigma^\pm} P\, dydz + Q\, dxdz + R\, dxdy = \iint_{\sigma^\pm} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma \right) d\sigma =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{-z'_x\, P}{\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} + \frac{-z'_y\, Q}{\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} + \frac{R}{\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \right) \times$$

$$\times \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy =$$

$$= \pm \iint_{D_{xy}} \left(-z'_x(x,y) P(x,y,z(x,y)) - z'_y(x,y) Q(x,y,z(x,y)) + R(x,y,z(x,y)) \right) dx\, dy .$$

Таким чином, обчислення поверхневого інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \ge 0$ (кут γ між нормаллю $\vec{n}$ і вибраною віссю Oz – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma \le 0$ (кут γ – тупий).

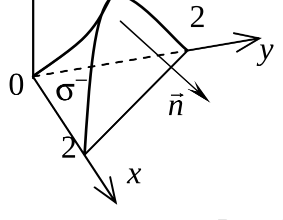
Зауваження 1. Аналогічно розглядаються випадки поверхонь, що правильні в напрямку осей Ox чи Oy. При цьому змінні x, y і z міняються ролями. (Відповідні формули переходу до подвійного інтеграла запишіть самостійно).

Приклад 1. Обчислити поверхневий інтеграл по координатах

$$I = \iint_{\sigma^-} (x/z) dydz + (2y/x) dxdz + (1 - 2z/y) dxdy$$

методом проектування на одну координатну площину. Тут σ^- – внутрішня сторона частини поверхні гіперболічного параболоїда $z = xy$, що відсікається площинами $z = 0$ і $x + y - 2 = 0$, відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ утворює з віссю Oz тупий кут γ.

Розв’язання. Задана поверхня зображена на рис. 26. Поверхня σ – правильна в напрямку осі Oz і задається явно рівнянням $z = xy$. Прямокутний трикутник D_{xy} - її проекція на площину Oxy. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак мінус, оскільки кут γ – тупий. Тоді



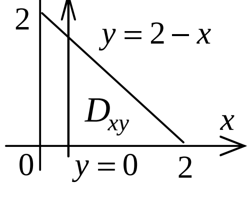


Рис. 26

$$\sigma^- : z = xy ;\ z'_x = y ;\ z'_y = x ;\ D_{xy} :\ 0 \le x \le 2 ,$$

$$0 \le y \le 2 - x ;$$

$$I = \iint_{\sigma^-} (x/z) dydz + (2y/x) dxdz + (1 - 2z/y) dxdy =$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \left(-y\frac{x}{xy} - x\frac{2y}{x} + 1 - \frac{2xy}{y} \right) dxdy =$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} (x + y)\, dxdy =$$

$$= 2\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y)\,dy = 2\int_0^2 \left(2 - x^2/2\right) dx = \left(4x - x^3/3\right)\Big|_0^2 = 5\frac{1}{3}.$$

Приклад 2. Задано векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ і поверхня σ – частина площини $p: Ax + By + Cz + D = 0$, що відсікається координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$. Методом проектування на одну координатну площину знайти потік цього поля через додатну сторону σ^+ вказаної поверхні, якій відповідає вектор нормалі $\vec{N} = (A, B, C)$ площини p. Задачу розв'язати трьома способами, проектуючи поверхню σ на одну з координатних площин відповідно а) Oxy; б) Oyz; в) Oxz. До кожного способу зробити рисунок поверхні σ як правильної у вибраному напрямі (відповідно а) Oz, б) Ox чи в) Oy) і рисунок її проекції (відповідно а) D_{xy}. б) D_{yz} чи в) D_{xz}) як правильної в напрямку однієї з осей плоскої області: $\vec{F} = (2x+z)\vec{i} + (6y-2z)\vec{j} + (2x+y+z-6)\vec{k}$, $p: 2x - 3y + z - 6 = 0$.

(Розв'язати самостійно).

Метод проектування на всі три координатні площини. Нехай поверхня σ правильна в усіх трьох напрямках Ox, Oy, Oz. Її, зокрема, можна задати явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функцію $z(x, y)$ будемо вважати неперервною зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 25).

Якщо $dS = dx\,dy$ - площа проекції елементарного майданчика $d\sigma$ на площину Oxy, то площа самого майданчика $d\sigma = dxdy/|\cos\gamma| = \pm dxdy/\cos\gamma$, де береться один певний знак "+" чи "-" у залежності від орієнтації поверхні.

Тоді для поверхневого інтеграла $I_z = \iint\limits_{\sigma^\pm} R\,dxdy$ маємо:

$$I_z = \iint\limits_{\sigma^\pm} R\,dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,dxdy,$$

тобто обчислення поверхневого інтеграла $I_z = \iint\limits_{\sigma^\pm} R\,dxdy$ по парі координат (x, y) зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \ge 0$ (кут γ – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma \le 0$ (кут γ – тупий).

Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли $I_x = \iint\limits_{\sigma^\pm} P\,dydz$ і $I_y = \iint\limits_{\sigma^\pm} Q\,dxdz$ по відповідній парі координат (y, z) і (x, z):

$$I_x = \iint\limits_{\sigma^\pm} P\,dydz = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z), y, z)\,dydz; \quad I_y = \iint\limits_{\sigma^\pm} Q\,dxdz = \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x, y(x,z), z)\,dxdz,$$

де D_{yz} і D_{xz} – проекції поверхні σ на відповідні координатні площини. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо кут між нормаллю $\vec{n}$ і вибраною координатною віссю – гострий, чи знак мінус, якщо цей кут – тупий.

Повний поверхневий інтеграл по координатах знаходиться як сума отриманих подвійних інтегралів: $\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = I_x + I_y + I_z$.

Зауваження 2. У загальному випадку поверхню σ доводиться розбивати на правильні у вибраному напрямку частини.

Приклад 3. Методом проектування на всі три координатні площини обчислити потік векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + xy^2\vec{j} + \vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ поверхні σ: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($x \ge 0$, $y \le 0$, $z \ge 0$), відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ якої утворює з віссю Oz гострий кут γ.

Розв'язання. Поверхня σ є восьмою частиною сфери одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 27). Вона правильна в усіх трьох напрямках Ox, Oy і Oz. При цьому нормаль $\vec{n}$ до вибраної сторони σ^+ з осями Ox і Oz утворює гострі кути α і γ, а з віссю Oy – тупий кут β. Позначимо проекції σ на координатні площини відповідно D_{yz}, D_{xz} і D_{xy}, які будуть чвертями кругів радіуса 1. Поверхню σ можна задати явно відповідно одним з рівнянь $x = \sqrt{1-y^2-z^2}$, $y = -\sqrt{1-x^2-z^2}$ чи $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три складові частини по відповідній парі координат (y,z) і (x,z), і (x,y):

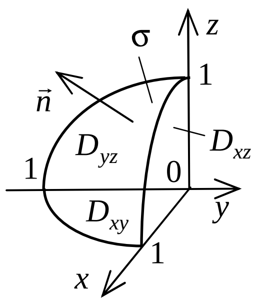


Рис. 27

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma^+} x\,dydz + xy^2dxdz + dxdy = I_x + I_y + I_z$$

і обчислимо окремо кожний з інтегралів:

$$I_x = \iint\limits_{\sigma^+} x\,dydz = +\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz =$$

$$= \left| \begin{matrix} y = \rho\cos\varphi;\ z = \rho\sin\varphi; \\ y^2+z^2=\rho^2;\ dydz = \rho\,d\rho\,d\varphi \end{matrix} \right| = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\cdot\left(1-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{6};$$

$$I_y = \iint\limits_{\sigma^+} xy^2dxdz = -\iint\limits_{D_{xz}} x\left(-\sqrt{1-x^2-z^2}\right)^2 dxdz = -\iint\limits_{D_{xz}} x\left(1-x^2-z^2\right)dxdz =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi;\ z = \rho\sin\varphi; \\ x^2+z^2=\rho^2;\ dxdz = \rho\,d\rho\,d\varphi \end{matrix} \right| = -\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 \rho\left(1-\rho^2\right)\rho\,d\rho = -\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 \left(\rho^2-\rho^4\right)d\rho =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{3}\rho^3 - \frac{1}{5}\rho^5\right)\Bigg|_0^1 \cos\varphi\,d\varphi = -\frac{2}{15}\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi = -\frac{2}{15}\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{15};$$

$$I_z = \iint\limits_{\sigma^+} dxdy = +\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \frac{\pi}{4}$$ (це просто площа чверті круга).

Отже, $\Pi = I_x + I_y + I_z = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{15} + \frac{\pi}{4} = \frac{25\pi - 8}{60}$.

Приклад 4. Методом проектування на всі три координатні площини обчислити потік векторного поля $\vec{F} = xz\sqrt{16-y^2}\,\vec{i} + xy^2\vec{j} + z\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ поверхні кругового циліндра $x^2 + y^2 = 16$, яка відтинається площинами $z = 0$, $z = 2$.

Розв'язання. Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три складові частини по відповідній парі координат (y,z) і (x,z), і (x,y):

$$\Pi=\iint\limits_{\sigma^+}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma^+}xz\sqrt{16-y^2}\,dydz+xy^2dxdz+z\,dxdy=I_x+I_y+I_z$$

і обчислимо окремо кожний з інтегралів.

Поверхня σ (рис. 22) неправильна в усіх трьох напрямках Ox, Oy і Oz. Її проекцією D_{xy} на площину Oxy є лінія (коло $x^2+y^2=16$) – фігура нульової площі. Тому останній з інтегралів-доданків дорівнює нулю $I_z=\iint\limits_{\sigma^+}z\,dxdy=0$.

Розглянемо другий інтеграл $I_y=\iint\limits_{\sigma^+}xy^2dxdz$. Поверхня σ координатною площиною $y=0$ розбивається на дві правильні в напрямку осі Oy частини: ліву $\sigma_{y1}: y=-\sqrt{16-x^2}$ і праву $\sigma_{y2}: y=\sqrt{16-x^2}$ зі спільною проекцією D_{xz} на площину Oxz (рис. 22), де D_{xz} – прямокутник: $-4\le x\le 4$, $0\le z\le 2$. При цьому нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ^+_{y1} з віссю Oy утворює тупий кут β, а нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ^+_{y2} з віссю Oy утворює гострий кут β. Тоді

$$I_y=\iint\limits_{\sigma^+}xy^2dxdz=\iint\limits_{\sigma^+_{y1}}xy^2dxdz+\iint\limits_{\sigma^+_{y2}}xy^2dxdz=-\iint\limits_{D_{xz}}x\left(-\sqrt{16-x^2}\right)^2dxdz+\iint\limits_{D_{xz}}x\left(\sqrt{16-x^2}\right)^2dxdz=0.$$

Розглянемо перший інтеграл $I_x=\iint\limits_{\sigma^+}xyz\,dydz$. Поверхня σ координатною площиною $x=0$ розбивається на дві правильні в напрямку осі Ox частини: задню σ_{x1}: $x=-\sqrt{16-y^2}$ і передню σ_{x2}: $x=\sqrt{16-y^2}$ зі спільною проекцією D_{yz} на площину Oyz (рис. 28), де D_{yz} – прямокутник: $-4\le y\le 4$, $0\le z\le 2$. При цьому нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ^+_{x1} з віссю Ox утворює тупий кут α, а нормаль $\vec{n}$ до зовнішньої сторони σ^+_{x2} з віссю Ox утворює гострий кут α. Тоді

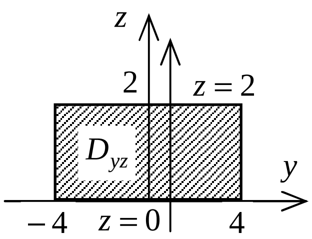


Рис. 28

$$I_x=\iint\limits_{\sigma^+}xz\sqrt{16-y^2}\,dydz=\iint\limits_{\sigma^+_{x1}}xz\sqrt{16-y^2}dydz+$$

$$+\iint\limits_{\sigma^+_{x2}}xz\sqrt{16-y^2}dydz=-\iint\limits_{D_{yz}}\left(-\sqrt{16-y^2}\right)z\sqrt{16-y^2}\,dydz+\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{16-y^2}\,z\sqrt{16-y^2}\,dydz=$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}z\left(16-y^2\right)dydz=2\int\limits_{-4}^{4}\left(16-y^2\right)dy\int\limits_0^2 z\,dz=2\int\limits_{-4}^{4}\left(16-y^2\right)\left(z^2/2\right)\Big|_0^2dy=$$

$$=4\int\limits_{-4}^{4}\left(16-y^2\right)dy=4\left(16y-y^3/3\right)\Big|_{-4}^{4}=341\frac{1}{3}.\quad\text{Отже,}\quad\Pi=I_x+I_y+I_z=341\frac{1}{3}.$$

<u>Приклад 5</u>. Методом проектування на всі три координатні площини знайти потік з прикл.2. (Розв’язати самостійно).

<u>Приклад 6</u>. Дано просторове електростатичне поле напруженості $\vec{E}=k\,q\vec{r}/|\vec{r}|^3$ позитивного точкового електричного заряду q ($q=const$), розміщеного в початку координат, де $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $k=const$. Обчислити потік цього векторного поля через зовнішню сторону σ^+ поверхні сфери σ радіуса R з

центром у початку координат.

Розв'язання. На поверхні сфери $|\vec{r}| = R = const$, а одиничний вектор зовнішньої нормалі $\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}| = \vec{r}/R$. Тоді

$$\vec{r}\cdot\vec{n} = |\vec{r}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos 0 = R;\quad \Pi = \iint_{\sigma^+} k\frac{q}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{r}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \frac{kq}{R^2}\iint_{\sigma^+} d\sigma = \frac{kq}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi kq\,.$$

4.5.3. Формула Стокса

Для поверхневих інтегралів має місце формула, аналогічна формулі Гріна. Існують різні шляхи виведення цієї формули, обґрунтовані до найменших подробиць, але ними ж і обтяжені. Зупинимось на дещо полегшеному варіанті, зате на такому, який наочно ілюструє суть усіх різновидів – зв'язок поверхневого інтеграла з подвійним, а останнього – через формулу Гріна – з криволінійним.

Розглянемо у просторі деяку поверхню σ, обмежену замкненою лінією L (рис. 29). Проекцією цієї поверхні на площину Oxy буде область D, обмежена замкненою лінією l. Нехай у просторі задано векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}\,.$$

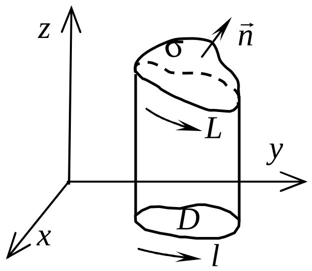


Рис. 29

Якщо покласти $z = 0$ і $R(x,y,z) \equiv 0$, то матимемо плоске векторне поле, яке в області D приймає значення $\vec{F} = \vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$. Обчислимо ротор цього векторного поля

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\vec{k}\,.$$

Тоді потік цього ротора через додатну сторону D^+ області D буде

$$\iint_{D^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{D^+}(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma\,.$$

Оскільки одинична нормаль $\vec{n}$ до області D співпадає з $\vec{k}$, то $\vec{n}\cdot\vec{k} = 1$, $\cos\gamma = 1 > 0$. Перейдемо до подвійного інтеграла:

$$\iint_{D^+}(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{D^+}(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,dx\,dy = +\iint_{D}(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)dx\,dy\,.$$

Згадуючи формулу Гріна, отримуємо $\iint_{D}(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)dx\,dy = \oint_{l}\vec{F}\,d\vec{l}$. Звідси $\iint_{D^+}(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \oint_{l}\vec{F}\,d\vec{l}$.

Остаточно, маємо формулу Стокса $\oint_{l}\vec{F}\,d\vec{l} = \iint_{D^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, що для плоского поля є векторним записом формули Гріна.

У просторі для поверхні σ, обмеженої замкненою лінією L, ***формула Стокса*** залишається в тому ж вигляді $\oint_{L}\vec{F}\,d\vec{l} = \iint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, при цьому вибирається додатний напрямок обходу контуру L: якщо дивитися з кінця вектора нормалі $\vec{n}$ до відповідної сторони σ^+ поверхні σ, то цей обхід здійснюється проти ходу годинникової стрілки.