8	$f(z)=\dfrac{(1-i)z-i}{z^2+3z-10}$; $z_0=-3;\ r=2;\ R=5$	23	$f(z)=\dfrac{(2-i)z+i}{(z-3)(z+4i)}$; $z_0=0;\ r=3;\ R=4$
9	$f(z)=\left(e^z-1\right)/z$; $z_0=0;\ r=0;\ R=+\infty$	24	$f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+4}$; $z_0=1;\ r=0;\ R=3$
10	$f(z)=z^2\sin\left(1/z^2\right)$; $z_0=0;\ r=0;\ R=+\infty$	25	$f(z)=\left(\cos z-1\right)/z^2$; $z_0=0;\ r=0;\ R=+\infty$
11	$f(z)=\dfrac{1}{z^3(z^2+1)}$; $z_0=-i;\ r=1;\ R=2$	26	$f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+2z}$; $z_0=-2;\ r=0;\ R=2$
12	$f(z)=\dfrac{1}{z^3+z^2}$; $z_0=-1;\ r=0;\ R=1$	27	$f(z)=\dfrac{1}{(z+2i)(z^2-4)}$; $z_0=2;\ r=2\sqrt{2};\ R=4$
13	$f(z)=\dfrac{1}{(z-2i)(z^2+1)}$; $z_0=-i;\ r=2;\ R=3$	28	$f(z)=\dfrac{z}{z^2+2z-8}$; $z_0=2;\ r=0;\ R=6$
14	$f(z)=\dfrac{1}{(z-3i)(z^2+4)}$; $z_0=2i;\ r=1;\ R=4$	29	$f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$; $z_0=2;\ r=0;\ R=\sqrt{5}$
15	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+9)^2}$; $z_0=-3i;\ r=0;\ R=6$	30	$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)(z^2+1)}$; $z_0=i;\ r=1;\ R=2$

Завдання 6. Для даної функції $f(z)$ знайти ізольовані особливі точки, визначити їх тип і знайти відповідні лишки.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$f(z)=\dfrac{z-2}{z^3(z^2+4)}$	16	$f(z)=\dfrac{z^2+4}{(z+i)^2(z^2-1)}$
2	$f(z)=\dfrac{z^3-8}{z^3(z^2+1)}$	17	$f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^4(z-i)}$
3	$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^3(z+i)}$	18	$f(z)=\dfrac{z^3-1}{(z+i)(z^2-4)}$
4	$f(z)=\dfrac{z^5e^{1/z}}{z^2+1}$	19	$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2(z^2-1)}$
5	$f(z)=\dfrac{\sin(\pi z/2)}{z^4}$	20	$f(z)=\dfrac{\sin(\pi z)}{z^2}$
6	$f(z)=z^3\sin\left(1/z^2\right)$	21	$f(z)=z^3\cos\left(1/z^2\right)$
7	$f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{z(z^2-1)}$	22	$f(z)=\dfrac{e^z-1}{z(z+2i)}$
8	$f(z)=\dfrac{z^2-2z}{(z-i)^2(z^2+9)}$	23	$f(z)=\dfrac{z^2+2z+1}{(z+i)^2(z^2-4)}$

9	$f(z)=\dfrac{z^2-z}{(z-i)(z^2-9)}$	24	$f(z)=\dfrac{z^2+2z}{(z^2+4)^2}$
10	$f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^4(z-i)}$	25	$f(z)=\dfrac{z^3\left(e^{1/z}-1\right)}{z+i}$
11	$f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+4)(z^2-4)}$	26	$f(z)=\dfrac{e^{i/z}}{z(z^2+1)}$
12	$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z(z+1)}$	27	$f(z)=\dfrac{z^2+4}{z^3(z^2-1)}$
13	$f(z)=z^3\cos(\pi/z)$	28	$f(z)=z^2\left(e^{1/z}-1\right)$
14	$f(z)=\dfrac{z^2e^{1/z}}{z+2i}$	29	$f(z)=\dfrac{\cos z}{z(z^2+1)}$
15	$f(z)=z^3\left(\cos\left(1/z^2\right)-1\right)$	30	$f(z)=\dfrac{ze^{1/z}}{z-2i}$

Завдання 7. Дано інтеграл від аналітичної функції $\int\limits_L f(z)\,dz$. Потрібно:

а) підінтегральну функцію $f(z)$ подати в алгебраїчній формі $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, знайти частинні похідні дійсної та уявної частин і перевірити умови Коші – Рімана $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

б) знайти похідну $f'(z)$ за таблицею похідних і перевірити рівність $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

в) обчислити заданий комплексний інтеграл безпосередньо за означенням, переходячи до дійсних криволінійних інтегралів за формулою

$$\int\limits_L f(z)\,dz=\int\limits_L (u+iv)(dx+i\,dy)=\int\limits_L u\,dx-v\,dy+i\int\limits_L v\,dx+u\,dy.$$

г) обчислити заданий комплексний інтеграл, як інтеграл від аналітичної функції, за формулою Ньютона – Лейбніца, користуючись таблицею невизначених інтегралів.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\oint\limits_{L_{AB}}(4z^3-1)\,dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im}z=(\operatorname{Re}z)^2$; $z_A=0;\ z_B=1+i$	16	$\oint\limits_{L_{AB}}ze^{-z}dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im}z=2$; $z_A=2+2i;\ z_B=2i$
2	$\oint\limits_{L_{AB}}(4z^3-\sin z)\,dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im}z=1$; $z_A=1+i;\ z_B=i$	17	$\oint\limits_{L_{AB}}(3z^2+\sin z)\,dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im}z=\operatorname{Re}z$; $z_A=0;\ z_B=1+i$
3	$\oint\limits_{L_{AB}}(4z^3+\cos z)\,dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im}z=1-\operatorname{Re}z$; $z_A=1;\ z_B=i$	18	$\oint\limits_{L_{AB}}(3z^2+2z-e^{iz})\,dz$; L_{AB}: $\operatorname{Re}z=1$; $z_A=1-i;\ z_B=1$

4	$\oint\limits_{L_{AB}} z e^{iz} dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$; $z_A = 0$; $z_B = 1+i$	19	$\oint\limits_{L_{AB}} (z + \cos(iz))\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = 1$; $z_A = 1+i$; $z_B = i$
5	$\oint\limits_{L_{AB}} z \sin(\pi z)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Re} z = 1$; $z_A = 1-i$; $z_B = 1+i$	20	$\oint\limits_{L_{AB}} z \cos(\pi z)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Re} z = 1$; $z_A = 1-i$; $z_B = 1+i$
6	$\oint\limits_{L_{AB}} (4z^3 + 2z - \cos z)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = 1$; $z_A = 1+i$; $z_B = i$	21	$\oint\limits_{L_{AB}} z e^z dz$; L_{AB}: $\operatorname{Re} z = 0$; $z_A = -\pi i$; $z_B = \pi i$
7	$\oint\limits_{L_{AB}} (3z^2 - 2z)\, dz$; $L_{AB}: \lvert z \rvert = 2$; $\operatorname{Im} z \le 0$; $z_A = -2$; $z_B = 2$	22	$\oint\limits_{L_{AB}} (2z - 3z^2)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^3$; $z_A = 0$; $z_B = -1-i$
8	$\oint\limits_{L_{AB}} (4z^3 - 3z^2)\, dz$; $L_{AB}: \lvert z \rvert = 1$; $\operatorname{Re} z \ge 0$; $z_A = -i$; $z_B = i$	23	$\oint\limits_{L_{AB}} (1 + 6z^3)\, dz$; $L_{AB}: \lvert z - i \rvert = 1; \operatorname{Im} z \le 1$; $z_A = -1+i$; $z_B = 1+i$
9	$\oint\limits_{L_{AB}} (6z^2 + 2z^3)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z + 1$; $z_A = i$; $z_B = -1$	24	$\oint\limits_{L_{AB}} (2z^3 + 6z)\, dz$; $L_{AB}: \lvert z \rvert = 2$; $\operatorname{Re} z \le 0$; $z_A = 2i$; $z_B = -2i$
10	$\oint\limits_{L_{AB}} (1 + 6z^3)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$; $z_A = 0$; $z_B = 1+i$	25	$\oint\limits_{L_{AB}} (2z - 6z^2)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^3$; $z_A = 0$; $z_B = 1+i$
11	$\oint\limits_{L_{AB}} (2z^3 - 3z^2)\, dz$; $L_{AB}: \lvert z \rvert = 1$; $\operatorname{Im} z \ge 0$; $z_A = 1$; $z_B = -1$	26	$\oint\limits_{L_{AB}} (4z + 3z^2)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = -(\operatorname{Re} z)^3$; $z_A = -1+i$; $z_B = 0$
12	$\oint\limits_{L_{AB}} z^2 e^{z^3} dz$; L_{AB}: $\operatorname{Re} z = -1$; $z_A = -1+i$; $z_B = -1$	27	$\oint\limits_{L_{AB}} z^2 \sin z^3\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Re} z = 1$; $z_A = 1-i$; $z_B = 1$
13	$\oint\limits_{L_{AB}} (8z - 3z^2)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$; $z_A = -1+i$; $z_B = 0$	28	$\oint\limits_{L_{AB}} (8z + 4z^3)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z)^2$; $z_A = -1+i$; $z_B = 0$
14	$\oint\limits_{L_{AB}} (6z + 3z^2)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = 2 - \operatorname{Re} z$; $z_A = 2$; $z_B = 2i$	29	$\oint\limits_{L_{AB}} (6z - 2z^3)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = 2 - \operatorname{Re} z$; $z_A = 1+i$; $z_B = 2i$
15	$\oint\limits_{L_{AB}} (8z + 3z^2)\, dz$; L_{AB}: $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z - 2$; $z_A = -2i$; $z_B = 2$	30	$\oint\limits_{L_{AB}} (4z + 3z^2)\, dz$; $L_{AB}: \lvert z - i \rvert = 1; \operatorname{Im} z \ge 1$; $z_A = 1+i$; $z_B = -1+i$

Завдання 8. Обчислити заданий інтеграл по замкненому контуру від аналітичної функції $\oint\limits_L f(z)\,dz$ за допомогою лишків.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\oint\limits_L \frac{(z^3-1)\,dz}{(z-2i)(z^2+1)};\quad L: \lvert z-2i\rvert=2$	16	$\oint\limits_L \frac{(e^z-1)\,dz}{z^2(z^2+4)};\quad L: \lvert z-i\rvert=2$
2	$\oint\limits_L \frac{\sin(\pi z)\,dz}{(z-2i)(z^2+4)};\quad L: \lvert z-i\rvert=2$	17	$\oint\limits_L \frac{\sin z\,dz}{z^3(z^2+9)};\quad L: \lvert z\rvert=2$
3	$\oint\limits_L \frac{z\cos z\,dz}{(z-i)(z^2-9)};\quad L: \lvert z+1\rvert=3$	18	$\oint\limits_L \frac{e^{iz}\,dz}{(z+3i)(z^2-1)};\quad L: \lvert z\rvert=2$
4	$\oint\limits_L \frac{\sin z\,dz}{z(z^2+9)^2};\quad L: \lvert z+2i\rvert=4$	19	$\oint\limits_L \frac{z e^{-z}\,dz}{(z+i)(z^2-4)};\quad L: \lvert z+3\rvert=4$
5	$\oint\limits_L \frac{e^{iz}\,dz}{(z+i)^3(z^2-4)};\quad L: \lvert z-1\rvert=2$	20	$\oint\limits_L \frac{z\cos z\,dz}{(z-i)^2(z^2-9)};\quad L: \lvert z+1\rvert=3$
6	$\oint\limits_L \frac{\sin(iz)\,dz}{z^2(z^2+3z-4)};\quad L: \lvert z-1\rvert=2$	21	$\oint\limits_L \frac{e^{-z}\,dz}{z^3(z^2-2z-3)};\quad L: \lvert z+1\rvert=2$
7	$\oint\limits_L \frac{\cos(i\pi z)\,dz}{(z+2)^2(z^2+4z+8)};$ $L: \lvert z+2-i\rvert=2$	22	$\oint\limits_L \frac{ze^{\pi z}\,dz}{(z+1)^2(z^2+2z+5)};$ $L: \lvert z+1-2i\rvert=3$
8	$\oint\limits_L \frac{e^{\pi z}\,dz}{(z-1)^2(z^2-2z+5)}$ $L: \lvert z-1-2i\rvert=3$	23	$\oint\limits_L \frac{\sin(\pi z)\,dz}{(z-2)^2(z^2-4z+8)}$ $L: \lvert z-2+i\rvert=2$
9	$\oint\limits_L \frac{(z^2-1)\,dz}{z^3(z^2-2z+10)};\quad L: \lvert z-3i\rvert=4$	24	$\oint\limits_L \frac{\cos(iz)\,dz}{z^2(z^2+4z-5)};\quad L: \lvert z+1\rvert=3$
10	$\oint\limits_L \frac{(z^2-1)\,dz}{z^2(z^2+9)^2};\quad L: \lvert z+3i\rvert=4$	25	$\oint\limits_L \frac{(z^2-1)\,dz}{(z^2-9)^2};\quad L: \lvert z-2\rvert=4$
11	$\oint\limits_L \frac{(z^2-4)\,dz}{(z-i)^2(z^2+1)};\quad L: \lvert z-1-i\rvert=2$	26	$\oint\limits_L \frac{(z^2+4)\,dz}{z^3(z^2+2z+10)};\quad L: \lvert z+3i\rvert=4$
12	$\oint\limits_L \frac{e^{2z}\,dz}{(z-2i)^2(z^2+4z)};\quad L: \lvert z\rvert=3$	27	$\oint\limits_L \frac{z e^{2iz}\,dz}{(z+2)^3(z^2-4iz)};\quad L: \lvert z\rvert=3$
13	$\oint\limits_L \frac{\cos(\pi z)\,dz}{(z+2i)^3(z^2-4iz)};\quad L: \lvert z+2i\rvert=3$	28	$\oint\limits_L \frac{(z^2-4)\,dz}{(z^2-1)^2(z^2+1)};\quad L: \lvert z-1-i\rvert=2$
14	$\oint\limits_L \frac{\sin(\pi z)\,dz}{z^2(z^2-6z+10)};\quad L: \lvert z-3\rvert=2$	29	$\oint\limits_L \frac{\cos(\pi z)\,dz}{z^3(z^2+6z+10)};\quad L: \lvert z+3\rvert=2$
15	$\oint\limits_L \frac{e^{-2z}\,dz}{z^2(z^2+8z+20)};\quad L: \lvert z+1-2i\rvert=4$	30	$\oint\limits_L \frac{z\sin(\pi z)\,dz}{(z-2i)^2(z^2+3iz)};\quad L: \lvert z-2i\rvert=3$

Завдання 9. Обчислити заданий дійсний невласний інтеграл, переходячи до комплексного інтеграла по замкненому контуру і застосовуючи лишки.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$	11	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x\,dx}{x^2+6x+10}$	21	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x\,dx}{x^2+4x+20}$
2	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10}$	12	$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2-4x+20}$	22	$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$
3	$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos 3x\,dx}{(x^2+1)^2}$	13	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos 2x\,dx}{(x^2+4)^2}$	23	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2+4x+20}$
4	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x\,dx}{x^2+4x+8}$	14	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$	24	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x\,dx}{x^2-6x+10}$
5	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 3x\,dx}{x^2+6x+10}$	15	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x\,dx}{x^2-4x+8}$	25	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$
6	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos x\,dx}{(x^2+4)^2}$	16	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2-2x+10}$	26	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x\,dx}{(x^2+4)(x^2+16)}$
7	$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos 2x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$	17	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x\,dx}{x^2+4x+13}$	27	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 3x\,dx}{x^2-2x+5}$
8	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos x\,dx}{(x^2+1)^2}$	18	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x\,dx}{(x^2+9)^2}$	28	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos 2x\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$
9	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2-4x+8}$	19	$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2-8x+20}$	29	$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin 2x\,dx}{x^2+4x+8}$
10	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x\,dx}{x^2+8x+17}$	20	$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos 2x\,dx}{(x^2+16)^2}$	30	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 3x\,dx}{x^2-6x+10}$

Розділ 2. ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Операційне числення, розроблене на основі перетворення Лапласа, широко використовується для розв’язання диференціальних та інших споріднених з ними рівнянь, що описують процеси функціонування різноманітних об’єктів. Зокрема, для розрахунків перехідних режимів електричних ланцюгів. Однак треба застерегти, що операційний метод безпосередньо незастосовний для ланцюгів, параметри та структура яких змінюються з бігом часу, а також таких, що містять нелінійні елементи.

2.1. Оператор Лапласа. Оригінал і зображення. Таблиці операційного числення

Оригіналом називається довільна функція $f(t)$, що розглядається на півінтервалі $[0;+\infty)$ і має такі властивості:

1) $f(t)$ кусково-неперервна на півінтервалі $[0;+\infty)$, тобто на будь-якому скінченному інтервалі має скінченне число точок розриву першого роду (скінченних стрибків);

2) існують додатні сталі $a>0,\ M>0$ такі, що $|f(t)|<M e^{at}$ при довільному значенні t із півінтервалу $[0;+\infty)$.

Для таких функцій $f(t)$ вводиться ***оператор Лапласа*** (***перетворення Лапласа***) наступним чином:

$$L(f(t))=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \ ,$$

де p – ***параметр***.

Зауваження 1. Параметр p – це комплексна змінна $p=\alpha+i\beta$ з додатною дійсною частиною $\alpha>0$, що забезпечує збіжність невластивого інтеграла.

Оператор – це відображення, що переводить функцію у функцію.

Інтегральний оператор Лапласа кожному оригіналу $f(t)$ ставить у відповідність єдину функцію

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt,$$

яка називається ***зображенням***.

Позначається

$$L(f(t))=F(p) \ \text{або} \ f(t)\mathrel{\dot{=}}F(p), \ \text{або} \ f(t)\mathrel{\dot{\leftarrow}}F(p) \ .$$

Спеціальний розділ вищої математики, в якому вивчається перетворення Лапласа та його застосування, називається ***операційним численням***. Властивості перетворення Лапласа відображені в таблицях 1 і 2. Наведені в таблицях основні співвідношення докладно розглядаються нижче.

Таблиця 1 – **Правила операційного числення**

№ п/п	Операція, властивість	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	Лінійність	$C_1 f_1(t) \pm$ $\pm C_2 f_2(t)$	$C_1 F_1(p) \pm$ $\pm C_2 F_2(p)$
2	Зміщення аргументу зображення (затухання оригіналу)	$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
3*	Зміна масштабу (подібність)	$f(at), \quad a>0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
4	Зміщення аргументу оригіналу (запізнювання оригіналу)	$f(t-b)\times$ $\times\eta(t-b),\ b>0$	$e^{-bp} F(p)$
5*	Випередження аргументу оригіналу	$f(t+b)$, $b>0$, $t>0$	$e^{bp}\left(F(p)-\right.$ $\left.-\int_0^b e^{-pt} f(t)dt\right)$
6	Диференціювання зображення	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
6а	Перша похідна зображення	$t\, f(t)$	$-F'(p)$
7	Зображення похідних оригіналу	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) -$ $- p^{n-2} f'(0) - \ldots -$ $- pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
7а	Зображення першої похідної оригіналу	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
7б	Зображення другої похідної оригіналу	$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$
8	Зображення інтеграла від оригіналу	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{p} F(p)$
9*	Згортання оригіналів (множення зображень)	$\int_0^t f_1(u)\times f_2(t-u)du$	$F_1(p)F_2(p)$
10*	Інтеграл Дюамеля	$\int_0^t f'(u)\times$ $\times\varphi(t-u)du + f(0)\varphi(t)$	$pF(p)\Phi(p)$
11*	Інтегрування зображення	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(z)dz$
12а*	Диференціювання за параметром	$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(t,\alpha)$	$\frac{\partial}{\partial\alpha} F(p,\alpha)$
12б*	Інтегрування за параметром	$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)d\alpha$	$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(p,\alpha)d\alpha$

Таблиця 2 – **Основні оригінали та їх зображення**

№ п/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	$\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-b)=\begin{cases}1, & t>b\\ 0, & t<b\end{cases}$	$e^{-bp}\cdot\frac{1}{p}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
4	$\sin bt$	$\frac{b}{p^2+b^2}$
5	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2+b^2}$
6	$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
7	$e^{-at}\cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
8	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
8а	t	$\frac{1}{p^2}$
8б	t^2	$\frac{2}{p^3}$
9	$t\,\eta(t-b)$	$e^{-bp}\left(b\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)$
10	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
10а	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
11	$t\sin bt$	$\frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
12	$t\cos bt$	$\frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
13	$\frac{1}{2b^3}(\sin bt-bt\,\cos bt)$	$\frac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
14	$\sin(bt-\alpha)$	$e^{-\frac{\alpha}{b}p}\times\frac{b}{p^2+b^2}$
15	$\cos(bt-\alpha)$	$e^{-\frac{\alpha}{b}p}\times\frac{p}{p^2+b^2}$

16	$sh\,bt$	$\dfrac{b}{p^2-b^2}$
17	$ch\,bt$	$\dfrac{p}{p^2-b^2}$
18	$\delta(t)$	1
19	$\delta(t-b)$	e^{-bp}
20	$\delta^{(n)}(t)$	p^n
20а	$\delta'(t)$	p

Зауваження 2. Будь-який оригінал $f(t)$ розглядається на півінтервалі $[0;+\infty)$. Його зручно продовжити рівним нулю на всю числову пряму, поклавши $f(t)=0,\quad t<0$.

Зауваження 3. З означення випливає, що оригінал $f(t)$ може прямувати до нескінченності при $t\to+\infty$, але не надто швидко. Наприклад, функція $f(t)=e^{t^2}$ не є оригіналом.

Функції, що відповідають умові 2) з означення оригіналу, називаються ***функціями експоненціального росту***.

Функція $f(t)=e^{t^2}$ до таких не належить.

Теорема 1 (***теорема про поведінку зображень на нескінченності***). Нехай $f(t)$ - довільний оригінал, $F(p)$ - його зображення. Тоді $\lim\limits_{p\to+\infty}F(p)=0$, тобто *будь-яке зображення прямує до нуля, коли параметр p прямує до нескінченності.*

Доведення. $|f(t)|<Me^{at}$; $a>0,\ M>0;\quad p>a$;

$$|F(p)|=\left|\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt\right|\le\int_0^{+\infty}\left|e^{-pt}f(t)\right|dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}|f(t)|\,dt<\int_0^{+\infty}e^{-pt}Me^{at}\,dt=M\int_0^{+\infty}e^{-(p-a)t}\,dt=$$

$$=M\lim_{N\to+\infty}\int_0^N e^{-(p-a)t}\,dt=\ M\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)}\right)\Bigg|_0^N=M/(p-a),$$

бо $e^{-(p-a)N}\to0$ при $N\to+\infty\ (p>a)$.

Якщо $p\to+\infty$, то $M/(p-a)\to0$. Отже, $F(p)\to0$ при $p\to+\infty$.

Теорема 2 (***теорема єдиності***). *Якщо дві неперервні функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$ мають одне і те ж зображення $F(p)$, то ці функції тотожно рівні,* тобто

якщо $f_1(t)\doteqdot F_1(p)$; $f_2(t)\doteqdot F_2(p)$; $F_1(p)=F_2(p)$, то $f_1(t)=f_2(t)$.

(Без доведення).

2.2. Одинична ступінчаста функція Хевісайда $\eta(t)$ та її зображення

Функція $\eta(t)$, яка задається формулою $\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$ називається ***одиничною ступінчастою функцією Хевісайда*** (рис. 1). (Приймаємо $f(t)=1$).

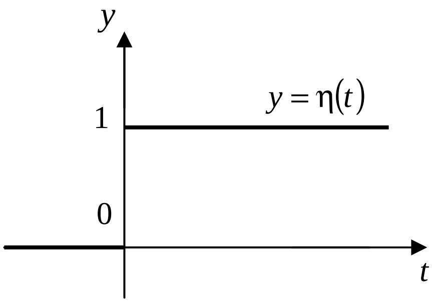

Рис. 1

$$L(\eta(t))=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\eta(t)dt=\lim_{N\to+\infty}\int_0^{N} e^{-pt}\cdot 1dt=\lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right)\Bigg|_0^N=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{e^{-pN}}{p}+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p},\text{ бо }\lim_{N\to+\infty}e^{-pN}=0\quad(p>0)\,.$$

Отже, $\eta(t)\doteqdot\frac{1}{p}$ або $1\doteqdot\frac{1}{p}$.

Зауваження. Основи операційного числення розробив Хевісайд як інструмент для вивчення характеру проходження сигналів у трансатлантичному телеграфно-телефонному кабелі, що з’єднав Європу і Північну Америку наприкінці XIX століття. За допомогою одиничної функції $\eta(t)$ він описав стандартні сигнали азбуки Морзе (крапка і тире). За Хевісайдом, довільну імпульсну функцію $y=y(t)$, яка скрізь дорівнює нулю, окрім деякого скінченного інтервалу $(\alpha;\beta)$ (рис. 2)

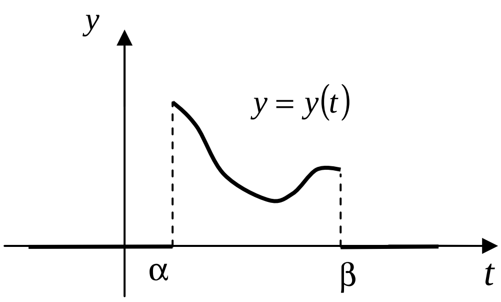

Рис. 2

$$y=y(t)=\begin{cases}0, & t<\alpha;\\ f(t), & t\in(\alpha;\beta);\\ 0, & t>\beta,\end{cases}$$

можна подати однією формулою

$$y=f(t)(\eta(t-\alpha)-\eta(t-\beta))\,,$$

де $\eta(t-b)$ – одинична функція Хевісайда з запізнюванням $\eta(t-b)=\begin{cases}1, & t>b;\\ 0, & t<b\,.\end{cases}$

2.3. Зображення функцій $\sin bt$, $\cos bt$

На основі формули інтегрування $\int e^{at}\sin bt\,dt=\frac{-be^{at}\cos bt+ae^{at}\sin bt}{a^2+b^2}+C$

маємо

$$L(\sin bt)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin bt\,dt=\lim_{N\to+\infty}\int_0^N e^{-pt}\sin bt\,dt=\lim_{N\to+\infty}\frac{-be^{pt}\cos bt+(-p)e^{-pt}\sin bt}{p^2+b^2}\Bigg|_0^N=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{-be^{-pN}\cos bN-pe^{-pN}\sin bN}{p^2+b^2}-\frac{-b}{p^2+b^2}\right)=\frac{b}{p^2+b^2}\,,$$

бо $e^{-pN} \to 0$; $\cos bN$ і $\sin bN$ - обмежені функції.

Отже, $\sin bt \doteqdot \dfrac{b}{p^2+b^2}$.

Аналогічно, на основі формули інтегрування

$$\int e^{at}\cos bt\,dt = \frac{ae^{at}\cos bt + be^{at}\sin bt}{a^2+b^2} + C$$

маємо

$$L(\cos bt) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos bt\,dt = \lim_{N\to+\infty}\left.\left(\frac{-pe^{-pt}\cos bt + be^{-pt}\sin bt}{p^2+b^2}\right)\right|_0^N = \frac{p}{p^2+b^2} .$$

Отже, $\cos bt \doteqdot \dfrac{p}{p^2+b^2}$.

2.4. Теорема зміщення (затухання)

<u>Теорема 3</u> (***теорема зміщення (затухання)***). *Якщо функція* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $F(p+a)$ *служить зображенням функції* $e^{-at}f(t)$:

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \Rightarrow \quad e^{-at}f(t) \doteqdot F(p+a) .$$

<u>Доведення</u>. $L\left(e^{-at}f(t)\right) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}f(t)dt = F(p+a)$.

2.5. Зображення функцій e^{-at}, $e^{-at}\sin bt$, $e^{-at}\cos bt$

$$1 \doteqdot \frac{1}{p} \;\Rightarrow\; e^{-at} = e^{-at}\times 1 \doteqdot \frac{1}{p+a}; \quad \sin bt \doteqdot \frac{b}{p^2+b^2} \;\Rightarrow\; e^{-at}\sin bt \doteqdot \frac{b}{(p+a)^2+b^2} ;$$

$$\cos bt \doteqdot \frac{p}{p^2+b^2} \;\Rightarrow\; e^{-at}\cos bt \doteqdot \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2} .$$

2.6. Теорема про лінійність оператора Лапласа

<u>Теорема 4</u> (**теорема про лінійність оператора Лапласа**). *Зображення алгебраїчної суми двох функцій, помножених на сталі величини, дорівнює відповідній сумі зображень цих функцій, помножених на відповідні сталі*

$$L(C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)) = C_1 L(f_1(t)) \pm C_2 L(f_2(t)) ,$$

тобто якщо $f(t) = C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)$ і $f(t) \doteqdot F(p)$, $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, то $F(p) = C_1F_1(p) \pm C_2F_2(p)$.

Доведення.

$$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(C_1 f_1(t)\pm C_2 f_2(t)\right)dt = C_1\int_0^{+\infty} e^{-pt} f_1(t)dt \pm C_2\int_0^{+\infty} e^{-pt} f_2(t)dt = C_1F_1(p)\pm C_2F_2(p) \ .$$

Приклад 1. Знайти зображення функції $f(t)=3\cos 2t-5\sin 2t$.

Розв'язання. $F(p)=3L(\cos 2t)-5L(\sin 2t)=3\dfrac{p}{p^2+2^2}-5\dfrac{2}{p^2+2^2}=\dfrac{3p-10}{p^2+4}$.

Приклад 2. Знайти оригінал функції $F(p)=\dfrac{5p+8}{p^2+6p+13}$.

Розв'язання. $F(p)=\dfrac{5p+8}{p^2+6p+13}=\dfrac{5p+8}{(p+3)^2+2^2}=$

$$=\left|\frac{p+3}{(p+3)^2+2^2} \risingdotseq e^{-3t}\cos 2t \ ; \quad \frac{2}{(p+3)^2+2^2} \risingdotseq e^{-3t}\sin 2t\right| = 5\cdot\frac{p+3+8/5-3}{(p+3)^2+2^2}=$$

$$=5\cdot\frac{p+3}{(p+3)^2+2^2}-\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{(p+3)^2+2^2} \risingdotseq \quad 5e^{-3t}\cos 2t-\frac{7}{2}e^{-3t}\sin 2t = f(t) \ .$$

2.7. Зображення функцій $shbt$, $chbt$

Використовуючи формули

$$shbt=\frac{e^{bt}-e^{-bt}}{2} \ ; \qquad chbt=\frac{e^{bt}+e^{-bt}}{2}$$

і зображення

$$e^{-at} \risingdotseq \frac{1}{p+a} \ ; \qquad e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a} \ ,$$

а також властивість лінійності, маємо

$$shbt=\frac{1}{2}\left(e^{bt}-e^{-bt}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-b}-\frac{1}{p+b}\right)=\frac{p+b-p+b}{2(p-b)(p+b)}=\frac{b}{p^2-b^2} \ ;$$

$$chbt=\frac{1}{2}\left(e^{bt}+e^{-bt}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p+b}\right)=\frac{p}{p^2-b^2} \ .$$

Отже,

$$shbt \risingdotseq \frac{b}{p^2-b^2} \ ; \quad chbt \risingdotseq \frac{p}{p^2-b^2} \ .$$

2.8*. Теорема подібності (зміни масштабу)

Теорема 5 (***теорема подібності (зміни масштабу)***).

Якщо функція $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$ *, тоді функція* $\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$ *служить зображенням функції* $f(at)$*, де* $a>0$:

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \Rightarrow \quad f(at) \doteqdot \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a>0 .$$

Доведення. $L(f(at)) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)dt = \left| u=at;\ t=\frac{u}{a};\ dt=\frac{du}{a};\right.$

$$\left. u_н=0;\ u_в=+\infty \right| = \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\frac{u}{a}} f(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}u} f(u)du = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

2.9. Теорема запізнювання (зсув аргументу в оригіналі)

Теорема 6 (***теорема запізнювання (зсув аргументу в оригіналі)***). *Нехай функція* $f(t)$ *тотожно дорівнює нулю при* $t<0$. *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$*, то функція* $e^{-bp}F(p)$ *служить зображенням функції* $f(t-b)$*, де* $t \ge b > 0$ (рис. 3), тобто

$$\text{якщо } f(t) \doteqdot F(p), \text{ то } f(t-b) \doteqdot e^{-bp}F(p), \quad b>0.$$

Доведення. $L(f(t-b)) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)dt = \int\limits_0^{b} e^{-pt} f(t-b)dt + \int\limits_b^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)dt =$

$$= \left| \begin{matrix} f(t-b)=0 \\ при\ \ t<b \end{matrix} \right\} \Rightarrow \int\limits_0^{b} e^{-pt} f(t-b)dt = 0 \right| = \int\limits_b^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)dt = \left| \begin{matrix} u=t-b; & t=u+b; \\ du=dt; & u_н=0;\ u_в=+\infty \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-p(u+b)} f(u)du = e^{-bp}\int\limits_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du = e^{-bp}F(p).$$

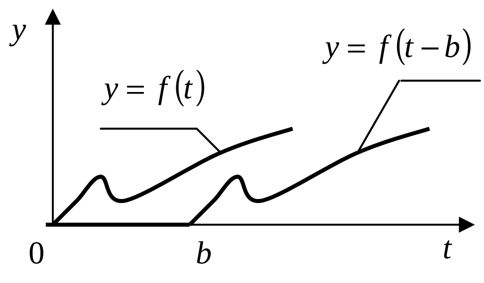

Рис. 3

Зауваження 1. Для явного врахування умови

$$f(t-b)=0 \quad \text{при} \quad t<b$$

формулу теореми запізнювання можна подати так

$$f(t-b)\eta(t-b) \doteqdot e^{-bp}F(p), \quad b>0 ,$$

де $\eta(t-b)$ – одинична функція Хевісайда з запізнюванням.

Зауваження 2. Зображенням $Y(p)$ імпульсної функції (рис. 2) $y(t)$, яку можна подати формулою $y(t) = f(t)(\eta(t-\alpha) - \eta(t-\beta))$ служить $Y(p) = \int\limits_\alpha^\beta e^{-pt} f(t)dt$. Якщо у виразі для функції $y(t)$ розкрити дужки і сформувати відповідні зсуви аргументу в кожному доданку $y(t) = g(t-\alpha)\eta(t-\alpha) - h(t-\beta)\eta(t-\beta)$, то за теоремою запізнювання $Y(p)$ можна подати у вигляді $Y(p) = e^{-\alpha p}G(p) - e^{-\beta p}H(p)$, де $g(t) \doteqdot G(p)$; $h(t) \doteqdot H(p)$.

<u>Приклад 1</u>. Для одиничної функції Хевісайда з запізнюванням $\eta(t-b)$ знайти зображення.

<u>Розв’язання</u>. $\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p} \;\Rightarrow\; \eta(t-b) \doteqdot e^{-bp} \cdot \frac{1}{p}$.

<u>Приклад 2</u>. За відомим зображенням $F(p) = \dfrac{2e^{-\pi p} + 2e^{-2\pi p}}{p^2+1}$ знайти відповідний оригінал.

<u>Розв’язання</u>.

$$F(p) = 2 \cdot e^{-\pi p} \cdot \frac{1}{p^2+1} + 2 \cdot e^{-2\pi p} \cdot \frac{1}{p^2+1} \doteqdot 2\sin(t-\pi) \cdot \eta(t-\pi) + 2\sin(t-2\pi) \cdot \eta(t-2\pi) =$$

$$= -2\sin t\; \eta(t-\pi) + 2\sin t\; \eta(t-2\pi) = -2\sin t\; (\eta(t-\pi) - \eta(t-2\pi)) = f(t)\ .$$

Графік одержаного оригіналу подано на рис. 4.

<u>Теорема 7*</u> (***теорема випередження***). *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *то функція* $e^{bp}\left(F(p) - \int_0^b e^{-pt} f(t)dt\right)$ *служить зображенням функції* $f(t+b)$, *де* $b > 0$ і $t > 0$ (рис. 5).

Доведення.

$$L(f(t+b)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t+b)dt = \left| \begin{matrix} u = t+b; & t = u-b; \\ du = dt; \; u_н = b; & u_в = +\infty \end{matrix} \right| = \int_b^{+\infty} e^{-p(u-b)} f(u)du =$$

$$= e^{bp} \int_b^{+\infty} e^{-pu} f(u)du = \left(\int_b^0 e^{-pu} f(u)du + \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du \right) = e^{bp}\left(-\int_0^b e^{-pu} f(u)du + F(p) \right).$$

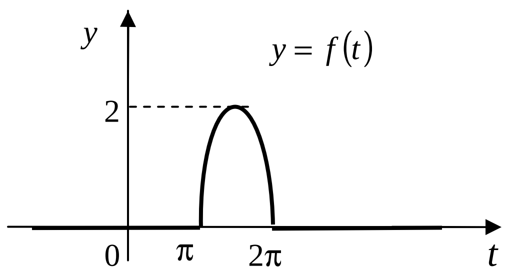

Рис. 4

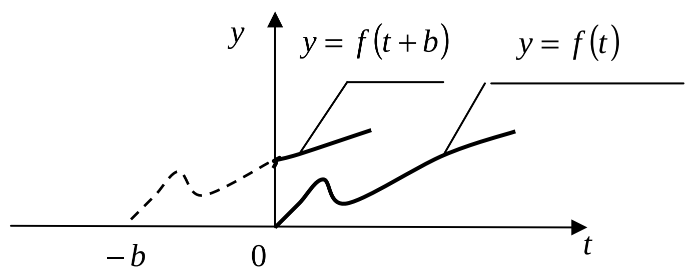

Рис. 5

2.10*. Зображення функцій $\sin(bt-\alpha)$, $\cos(bt-\alpha)$

Нехай $f(t) \doteqdot F(p)$ і $b>0,\ \alpha>0,$ тоді застосовуючи послідовно теореми подібності та запізнювання, маємо

$$f(bt-\alpha)=f\left(b\left(t-\frac{\alpha}{b}\right)\right)\doteqdot\frac{1}{b}e^{-\frac{\alpha}{b}p}F\left(\frac{p}{b}\right).$$

Використовуючи останнє співвідношення і формули

$$\sin t\doteqdot\frac{1}{p^2+1}\ ,\quad \cos t\doteqdot\frac{p}{p^2+1}\ ,$$

одержимо

$$\sin(bt-\alpha)\doteqdot\frac{1}{b}\,e^{-\frac{\alpha}{b}p}\times\frac{1}{(p/b)^2+1}=e^{-\frac{\alpha}{b}p}\times\frac{b}{p^2+b^2}\ ;$$

$$\cos(bt-\alpha)\doteqdot\frac{1}{b}\,e^{-\frac{\alpha}{b}p}\times\frac{p/b}{(p/b)^2+1}=e^{-\frac{\alpha}{b}p}\times\frac{p}{p^2+b^2}\ .$$

2.11. Диференціювання зображення

Теорема 8 (***теорема про диференціювання зображення***). *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $(-1)^n\dfrac{d^n}{dp^n}F(p)$ *служить зображенням функції* $t^n f(t)$:

$$f(t)\doteqdot F(p)\quad\Rightarrow\quad t^n f(t)\doteqdot(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)\ .$$

Доведення. Диференціюючи ліву і праву частини формули

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt$$

по параметру p, одержимо

$$F'(p)=\frac{d}{dp}\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt=\int_0^{+\infty}\left(\frac{d}{dp}e^{-pt}\right)f(t)dt=\int_0^{+\infty}(-t)e^{-pt}f(t)dt=-\int_0^{+\infty}e^{-pt}tf(t)dt\ .$$

Отже,

$$F'(p)\doteqdot-tf(t)\quad\text{або}\quad tf(t)\doteqdot-F'(p)\ .$$

Аналогічно знаходимо другу похідну зображення

$$F''(p)=\frac{d}{dp}\left(-\int_0^{+\infty}e^{-pt}tf(t)dt\right)=-\int_0^{+\infty}\left(\frac{d}{dp}e^{-pt}\right)tf(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^2f(t)dt\ .$$

Отже,

$$t^2 f(t) \doteq F''(p) \ .$$

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільної n-тої похідної зображення маємо співвідношення

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n F^{(n)}(p) \ .$$

2.12. Зображення функцій $t,\ t^n$, $t\eta(t-b)$, $te^{-at},\ t^n e^{-at}$, $t\sin bt,\ \ t\cos bt$

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда і похідної зображення, одержимо

$$1 \doteq \frac{1}{p} \ \Rightarrow \quad t = t \times 1 \doteq -\left(\frac{1}{p}\right)' = -\left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p^2} \ .$$

Отже,

$$t \doteq \frac{1}{p^2} \ .$$

Тоді

$$t^2 = t \times t \doteq -\left(\frac{1}{p^2}\right)' = \frac{2}{p^3} = \frac{1\times 2}{p^3}; \quad t^3 = t \times t^2 \doteq -\left(\frac{2}{p^3}\right)' = \frac{1\times 2\times 3}{p^4}.$$

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільного n маємо співвідношення

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}} \ ,$$

де $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ – факторіал числа n.

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда з запізнюванням $\eta(t-b)$ і похідної зображення, одержимо

$$\eta(t-b) \doteq \frac{1}{p} e^{-bp} \ \Rightarrow \ t\eta(t-b) \doteq -\left(\frac{e^{-bp}}{p}\right)' = -\frac{e^{-bp}(-b)p - e^{-bp}}{p^2} = e^{-bp}\left(b\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) .$$

Отже,

$$t\eta(t-b) \doteq e^{-bp}\left(b\cdot\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) .$$

Використовуючи зображення функцій $t,\ t^n$ і теорему зміщення (затухання), одержимо зображення функцій te^{-at} **і** $t^n e^{-at}$

$$te^{-at} \doteq \frac{1}{(p+a)^2} \ ; \qquad t^n e^{-at} \doteq \frac{n!}{(p+a)^{n+1}} \ .$$

Використовуючи формули для зображення функцій $\sin bt,\ \cos bt$ і похідної зображення, одержимо

$$\sin bt \doteqdot \frac{b}{p^2+b^2} \;\Rightarrow\; t\sin bt \doteqdot -\left(\frac{b}{p^2+b^2}\right)' = -b\cdot\frac{-2p}{\left(p^2+b^2\right)^2} = \frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}\;;$$

$$\cos bt \doteqdot \frac{p}{p^2+b^2} \;\Rightarrow\; t\cos bt \doteqdot -\left(\frac{p}{p^2+b^2}\right)' = -\frac{p^2+b^2-2p\cdot p}{\left(p^2+b^2\right)^2} = \frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}\;.$$

Отже,

$$t\sin bt \doteqdot \frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}\;; \qquad t\cos bt \doteqdot \frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}\,.$$

2.13. Зображення похідних оригіналу

Теорема 9 (***теорема про зображення похідної оригіналу***). *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $pF(p)-f(0)$ *служить зображенням похідної* $f'(t)$:

$$f(t)\doteqdot F(p) \quad\Rightarrow\quad f'(t)\doteqdot pF(p)-f(0)\;.$$

Доведення. Використовуючи означення перетворення Лапласа і формулу інтегрування частинами, одержимо

$$L(f'(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = \left| \begin{array}{l} u=e^{-pt}; \quad du=-pe^{-pt}dt; \\ dv=f'(t)dt; \;\; v=\int f'(t)dt=f(t) \end{array} \right| = e^{-pt}f(t)\Big|_0^{+\infty} -$$

$$-\int_0^{+\infty} f(t)\times\left(-pe^{-pt}\right)dt = \left|\lim_{t\to+\infty} e^{-pt}f(t)=0\right| = -f(0)+p\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt = pF(p)-f(0)\;.$$

Отже, $f'(t)\doteqdot pF(p)-f(0)$.

Застосовуючи цю формулу повторно, одержимо

$$L(f''(t)) = L\Big(\left(f'(t)\right)'\Big) = pL(f'(t))-f'(0) = p\left(pF(p)-f(0)\right)-f'(0) = p^2F(p)-pf(0)-f'(0)\;.$$

Отже, $f''(t)\doteqdot p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$.

На основі методу математичної індукції для довільної n-тої похідної оригіналу маємо співвідношення

$$f^{(n)}(t)\doteqdot p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

Зауваження. Формули для зображення похідних спрощуються, якщо всі початкові умови нульові $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, … . Тоді

$$f(t)\doteqdot F(p); \quad f'(t)\doteqdot pF(p); \quad f''(t)\doteqdot p^2F(p); \quad f^{(n)}(t)\doteqdot p^nF(p).$$

2.14. Відшукання оригіналу зображення, яке має вигляд раціонального дробу

У загальному випадку, знаходження оригіналу $f(t)$ за його зображенням $F(p)$ – досить складна задача: ***загальна формула обернення*** передбачає обчислення комплексного інтеграла

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{pt}F(p)dp\,,$$

де інтегрування здійснюється вздовж вертикальної прямої в області збіжності оператора Лапласа.

Обмежимося лише розв'язуванням цієї задачі за допомогою таблиці 2 відповідності оригіналів та їх зображень. Розглянемо найбільш поширений випадок, коли зображення має вигляд раціонального дробу.

Правило. *Нехай треба знайти оригінал для зображення* $F(p)$ *у вигляді раціонального дробу*

$$F(p)=\frac{P_m(p)}{Q_n(p)}\,,$$

де $P_m(p)$ *і* $Q_n(p)$ *– многочлени відповідно степеня* m *і* n.

Тоді:

1) *Якщо дріб неправильний* $(m\ge n)$, *то з нього треба виділити цілу частину*.

2) *Правильний дріб* $(m<n)$ *треба розкласти на суму елементарних дробів виду*

$$\frac{A}{(p-a)^k}\;;\quad \frac{Bp+C}{\left(p^2+a_1p+a_2\right)^k}\;;\quad k\ge 1\;;\quad D=a_1^2-4a_2<0\;.$$

3) *Знайти оригінали для цілої частини і кожного елементарного дробу, скористатись властивістю лінійності перетворення Лапласа і знайти оригінал початкового дробу*.

4) *Спростити одержаний вираз*.

Приклад 1. Знайти оригінал за його зображенням:

$$F(p)=\frac{3p-11}{(p-1)(p+2)\left(p^2-4p+5\right)}$$

Розв'язання. $F(p)=\dfrac{3p-11}{(p-1)(p+2)\left(p^2-4p+5\right)}=\dfrac{A}{p-1}+\dfrac{B}{p+2}+\dfrac{Cp+D}{p^2-4p+5}=$

$$=\Big|\;A(p+2)\left(p^2-4p+5\right)+B(p-1)\left(p^2-4p+5\right)+(Cp+D)(p-1)(p+2)=3p-11$$

$$\begin{array}{ll} p=1: & \left\{\begin{array}{l} 6A=-8 \\ -3\cdot 17B=-17 \\ A+B+C=0 \\ 10A-5B-2D=-11 \end{array}\right. \\ p=-2: & \\ p^3: & \\ p^0: & \end{array}\quad \begin{array}{l} A=-\dfrac{4}{3}\,;\;\; B=\dfrac{1}{3}\,; \\ -\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{3}+C=0;\quad C=1;\;\; D=-2 \\ -\dfrac{40}{3}-\dfrac{5}{3}-2D=-11; \end{array}\;\Bigg|\;=\frac{-\dfrac{4}{3}}{p-1}+\frac{\dfrac{1}{3}}{p+2}+$$

$$+\frac{1p-2}{p^2-4p+5}=-\frac{4}{3}\times\frac{1}{p-1}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{p+2}+\frac{p-2}{(p-2)^2+1}\doteqdot-\frac{4}{3}e^t+\frac{1}{3}e^{-2t}+e^{2t}\cos t=f(t).$$

Зауваження. В елементарному дробі з квадратним тричленом у знаменнику можна спочатку виділити повний квадрат двочлена, а потім подати цей дріб у вигляді

$$\frac{A(p+a)+B}{\left((p+a)^2+b^2\right)^k}.$$

Приклад 2. Знайти оригінал за його зображенням:

$$F(p)=\frac{p^2+10}{p^3-2p^2+10p}$$

$$\square\quad F(p)=\frac{p^2+10}{p^3-2p^2+10p}=\frac{p^2+10}{p\left((p-1)^2+9\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B(p-1)+C}{(p-1)^2+9}=$$

$$=\left|\ A\left((p-1)^2+9\right)+\left(B(p-1)+C\right)\right)p=p^2+10$$

$$\left.\begin{array}{l} p=0: \\ p=1: \\ p^2: \end{array}\begin{cases} 10A=10; & A=1 \\ 9A+C=11; & C=11-9A=2 \\ A+B=1; & B=1-A=0 \end{cases}\right|=$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{0\cdot(p-1)+2}{(p-1)^2+9}=\frac{1}{p}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(p-1)^2+9}\doteqdot 1-\frac{2}{3}e^t\sin 3t=f(t).\ \blacksquare$$

2.15. Операційний метод розв‘язання диференціальних рівнянь та їх систем

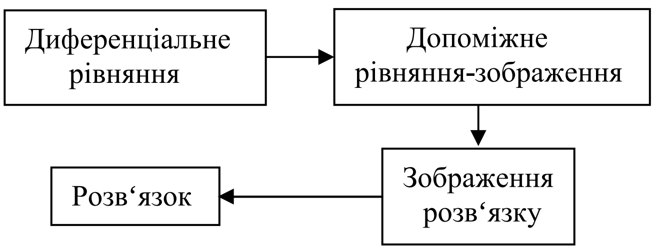

Рис. 6

Загальна схема методу показана на рис.6. Застосування цієї схеми докладно розберемо на прикладах.

Приклад 1. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку $\begin{cases} y'+3y=12t, \\ y(0)=0. \end{cases}$.

Розв’язання. Нехай $y(t)\doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t)\doteqdot pY(p)-y(0)=pY(p)\ ;\quad t\doteqdot\frac{1}{p^2}\ .$$

Одержимо ***операторну форму*** диференціального рівняння

$$pY(p)+3Y(p)=12\times\frac{1}{p^2}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p)(p+3)=\frac{12}{p^2}\ ; \quad Y(p)=\frac{12}{p^2(p+3)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p)=\frac{12}{p^2(p+3)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p+3}=\Big|\ 12=Ap(p+3)+B(p+3)+Cp^2\ ;$$

$$\begin{array}{ll} p=0: \\ p=-3: \\ p^2: \end{array} \begin{cases} 3B=12; & B=12/3=4; \\ 9C=12; & C=12/9=4/3; \\ A+C=0; & A=-C=-4/3; \end{cases} \Bigg| =\frac{-\frac{4}{3}}{p}+\frac{4}{p^2}+\frac{\frac{4}{3}}{p+3}=$$

$$=-\frac{4}{3}\frac{1}{p}+4\frac{1}{p^2}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{p+3}\ \risingdotseq -\frac{4}{3}\times 1+4\times t+\frac{4}{3}e^{-3t}=\frac{4}{3}e^{-3t}+4t-\frac{4}{3}=y(t)\ .$$

Отже, $y(t)=\frac{4}{3}e^{-3t}+4t-\frac{4}{3}$ – шуканий розв‘язок.

<u>Приклад 2</u>. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y''+4y=e^{3t} \\ y(0)=0,\ \ y'(0)=2 \end{cases}$$

<u>Розв’язання</u>. Нехай $y(t)\risingdotseq Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t)\risingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-2\ ;\ \ e^{3t}\risingdotseq\frac{1}{p-3}\ .$$

Одержимо $p^2Y(p)-2+4Y(p)=\frac{1}{p-3}$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p)(p^2+4)=\frac{1}{p-3}+2\ ;\ Y(p)(p^2+4)=\frac{1+2p-6}{p-3}\ ;\quad Y(p)=\frac{2p-5}{(p-3)(p^2+4)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p)=\frac{2p-5}{(p-3)(p^2+4)}=\frac{A}{p-3}+\frac{Bp+C}{p^2+4}=\Big|\ 2p-5=A(p^2+4)+(Bp+C)(p-3);$$

$$\begin{array}{ll} p=3: \\ p^2: \\ p^0: \end{array} \begin{cases} 13A=1; & A=1/13\ ; \\ A+B=0; & B=-A=-1/13\ ; \\ 4A-3C=-5; & 4/13-3C=-5\ ;\ C=23/13; \end{cases} \Bigg| =\frac{1}{13}\times\frac{1}{p-3}+\frac{-\frac{1}{13}p+\frac{23}{13}}{p^2+4}=$$

$$=\frac{1}{13}\times\frac{1}{p-3}-\frac{1}{13}\frac{p}{p^2+2^2}+\frac{23}{13}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{p^2+2^2}\ \risingdotseq\ \frac{1}{13}e^{3t}-\frac{1}{13}\cos 2t+\frac{23}{26}\sin 2t=y(t)\ .$$

Отже, $y(t)=\frac{1}{13}e^{3t}-\frac{1}{13}\cos 2t+\frac{23}{26}\sin 2t$ – шуканий розв‘язок.

Приклад 3. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y''-2y'+y=4 \\ y(0)=1;\ y'(0)=-1 \end{cases}$$

Розв’язання. Нехай $y(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}pY(p)-y(0)=pY(p)-1\ ;\quad y''(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-p+1\ ;\quad 1\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}\frac{1}{p}\ .$$

Одержимо $p^2Y(p)-p+1-2(pY(p)-1)+Y(p)=4\times\frac{1}{p}$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p)\left(p^2-2p+1\right)=\frac{4}{p}+p-3\ ;\quad Y(p)(p-1)^2=\frac{p^2-3p+4}{p}\quad ;\quad Y(p)=\frac{p^2-3p+4}{p(p-1)^2}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p)=\frac{p^2-3p+4}{p(p-1)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{(p-1)^2}=\Big|\ p^2-3p+4=A(p-1)^2+Bp(p-1)+Cp;$$

$$\begin{array}{ll} p=0: & \\ p=1: & \\ p^2: & \end{array}\begin{cases} A=4; \\ C=2; \\ A+B=1; \qquad B=1-A=-3 \end{cases}\Bigg|=4\times\frac{1}{p}-3\times\frac{1}{p-1}+2\times\frac{1}{(p-1)^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}$$

$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}4-3e^t+2te^t=y(t)$. Отже, $y(t)=2te^t-3e^t+4$ – шуканий розв‘язок.

Приклад 4. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y''+9y=24\cos 3t \\ y(0)=0;\ y'(0)=3 \end{cases}$$

Розв’язання. Нехай $y(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-3;\quad \cos 3t\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}\frac{p}{p^2+3^2}=\frac{p}{p^2+9}\ .$$

Одержимо $p^2Y(p)-3+9Y(p)=24\times\frac{p}{p^2+9}$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p)\left(p^2+9\right)=\frac{24p}{p^2+9}+3\,;\quad Y(p)=\frac{24p}{\left(p^2+9\right)^2}+\frac{3}{p^2+9}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p)=\frac{24p}{\left(p^2+9\right)^2}+\frac{3}{p^2+9}=\frac{24}{2\times 3}\times\frac{2p\times 3}{\left(p^2+3^2\right)^2}+\frac{3}{p^2+3^2}\doteqdot 4t\sin 3t+\sin 3t=y(t)$$

Отже, $y(t)=(4t+1)\sin 3t$ – шуканий розв‘язок.

Приклад 5. Розв‘язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку

$$\begin{cases} y'''+4y''+13y'=0 \\ y(0)=-2;\ y'(0)=0;\ y''(0)=13 \end{cases}$$

Розв’язання. Нехай $y(t)\doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t)\doteqdot pY(p)-y(0)=pY(p)+2\,;\quad y''(t)\doteqdot p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)+2p\,;$$

$$y'''(t)\doteqdot p^3Y(p)-p^2y(0)-py'(0)-y''(0)=p^3Y(p)+2p^2-13\ .$$

Одержимо $p^3Y(p)+2p^2-13+4\left(p^2Y(p)+2p\right)+13\left(pY(p)+2\right)=0$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p)p\left(p^2+4p+13\right)=-2p^2+13-8p-26\,;\quad Y(p)=\frac{-2p^2-8p-13}{p\left(p^2+4p+13\right)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p)=\frac{-2p^2-8p-13}{p\left(p^2+4p+13\right)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+4p+13}=\Big|\ A\left(p^2+4p+13\right)+(Bp+C)p=-2p^2-8p-13\,;$$

$$\begin{array}{l} p^2: \\ p: \\ p^0: \end{array}\begin{cases} A+B=-2\,; \\ 4A+C=-8\,; \\ 13A=-13\,; \qquad A=-1 \end{cases}\qquad \begin{array}{r} C=-8-4A=-8+4=-4; \\ B=-2-A=-2+1=-1 \end{array}\ \Bigg|=\frac{-1}{p}+\frac{-1p-4}{p^2+4p+13}=$$

$$=-\frac{1}{p}-\frac{p+2-2+4}{(p+2)^2+3^2}=-\frac{1}{p}-\frac{p+2}{(p+2)^2+3^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(p+2)^2+3^2}\doteqdot$$

$$\doteqdot -1-e^{-2t}\cos 3t-\frac{2}{3}e^{-2t}\sin 3t=y(t)\ .$$

Отже, $y(t)=-1-e^{-2t}\cos 3t-\frac{2}{3}e^{-2t}\sin 3t$ – шуканий розв‘язок.

Приклад 6. Розв‘язати задачу Коші для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} x' = x + 4y; \\ y' = y - x; \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 1 .$$

Розв’язання. Нехай $x(t) \doteqdot X(p)$; $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв’язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p); \quad y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 1.$$

Одержимо операторну форму диференціальної системи

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 4Y(p) \\ pY(p) - 1 = Y(p) - X(p) \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв’яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, за формулами Крамера

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 4Y(p) = 0; \\ X(p) + (p-1)Y(p) = 1; \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -4 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^2 + 4; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = p - 1; \quad X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{(p-1)^2 + 4}; \quad Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$X(p) = 2 \times \frac{2}{(p-1)^2 + 2^2} \doteqdot 2e^t \sin 2t = x(t); \quad Y(p) = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 2^2} \doteqdot e^t \cos 2t = y(t) .$$

Отже, $\begin{cases} x(t) = 2e^t \sin 2t; \\ y(t) = e^t \cos 2t \end{cases}$ – шуканий розв‘язок.

Приклад 7. Розв‘язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} x' = -y + \cos t; \\ y' = -x + \sin t; \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 0 .$$

Розв’язання. Нехай $x(t) \doteqdot X(p)$; $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв’язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p); \quad \cos t \doteqdot \frac{p}{p^2+1}; \quad y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p); \quad \sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}.$$

Одержимо

$$\begin{cases} pX(p) = -Y(p) + \dfrac{p}{p^2+1}; \\ pY(p) = -X(p) + \dfrac{1}{p^2+1} \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв’яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, методом вилучення (методом Гаусса)

$$\begin{cases} Y(p)=\dfrac{p}{p^2+1}-pX(p); \\ p\left(\dfrac{p}{p^2+1}-pX(p)\right)=-X(p)+\dfrac{1}{p^2+1} \ ; \end{cases} \qquad X(p)\left(p^2-1\right)=\frac{p^2}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+1} \ ;$$

$$X(p)=\frac{1}{p^2+1} \ ; \quad Y(p)=\frac{p}{p^2+1}-p\times\frac{1}{p^2+1}=0$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$X(p)=\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t = x(t) \ ; \quad Y(p)=0 \risingdotseq 0=y(t) \ .$$

Отже, $\begin{cases} x(t)=\sin t \ ; \\ y(t)=0 \end{cases}$ – шуканий розв‘язок.

Приклад 8*. Розв‘язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} x'+y'-2x-2y=1-2t; \\ x''-2y'+x=0; \end{cases} \quad x(0)=0; \ \ x'(0)=0; \ \ y(0)=0 \ .$$

Розв'язання. Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$; $y(t)\risingdotseq Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв'язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p); \quad y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p);$$

$$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p); \quad t\risingdotseq\frac{1}{p^2}; \quad 1\risingdotseq\frac{1}{p} .$$

Одержимо

$$\begin{cases} pX(p)+pY(p)-2X(p)-2Y(p)=\dfrac{1}{p}-2\times\dfrac{1}{p^2}; \\ p^2X(p)-2pY(p)+X(p)=0 \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв'яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, методом вилучення (методом Гаусса)

$$\begin{cases} (p-2)X(p)+(p-2)Y(p)=\dfrac{p-2}{p^2} \ ; \\ \left(p^2+1\right)X(p)-2pY(p)=0 \ ; \end{cases} \quad \begin{cases} X(p)+Y(p)=\dfrac{1}{p^2} \ ; \\ \left(p^2+1\right)X(p)-2pY(p)=0 \ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(p)=\dfrac{1}{p^2}-Y(p) \ ; \\ \left(p^2+1\right)\left(\dfrac{1}{p^2}-Y(p)\right)-2pY(p)=0 \ ; \end{cases} \qquad -Y(p)\left(p^2+1+2p\right)=-\frac{p^2+1}{p^2} \ ;$$

$$Y(p)(p+1)^2=\frac{p^2+1}{p^2} \ ; \quad Y(p)=\frac{p^2+1}{p^2(p+1)^2} \ ;$$

$$X(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{p^2+1}{p^2(p+1)^2}=\frac{(p+1)^2-(p^2+1)}{p^2(p+1)^2}=\frac{2}{p(p+1)^2}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$X(p)=\frac{2}{p(p+1)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{(p+1)^2}=\Big|\ A(p+1)^2+Bp(p+1)+Cp=2\ ;$$

$$\begin{matrix} p=0: \\ p=-1: \\ p^2: \end{matrix} \quad \begin{cases} A=2\ ; \\ C=-2\ ; \\ A+B=0\ ; \quad B=-A=-2\ ; \end{cases}$$

$$\Big|=\frac{2}{p}+\frac{-2}{p+1}+\frac{-2}{(p+1)^2}=2\times\frac{1}{p}-2\times\frac{1}{p+1}--2\frac{1}{(p+1)^2}\ \risingdotseq\ 2-2e^{-t}-2te^{-t}=x(t)\ ;$$

$$Y(p)=\frac{p^2+1}{p^2(p+1)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p+1}+\frac{D}{(p+1)^2}=$$

$$=\Big|\ Ap(p+1)^2+B(p+1)^2+Cp^2(p+1)+Dp^2=p^2+1\ ;$$

$$\begin{matrix} p=0: \\ p=-1: \\ p^3: \\ p^2: \end{matrix} \quad \begin{cases} B=1\ ; \\ D=2; \\ A+C=0; \\ 2A+B+C+D=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} A+C=0\ ; \\ 2A+1+C+2=1; \end{cases} \quad \begin{cases} A=-C\ ; \\ 2A+1+C+2=1; \end{cases}$$

$$2C+C+2=0\ ;\ C=2\ ;\ A=-2;\ \Big|=\frac{-2}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p+1}+\frac{1}{(p+1)^2}=-2\times\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+2\times\frac{1}{p+1}+$$

$$+2\frac{1}{(p+1)^2}\ \risingdotseq\ -2+t+2e^{-t}+2te^{-t}=y(t)$$

Отже, $\begin{cases} x(t)=2-2e^{-t}-2te^{-t}\ ; \\ y(t)=-2+t+2e^{-t}+2te^{-t} \end{cases}$ – шуканий розв‘язок.

2.16. Розв’язання диференціальних рівнянь з правою частиною, що містить запізнювання

Якщо права частина диференціального рівняння містить запізнювання, то в класичному аналізі така функція записується за допомогою кількох аналітичних виразів. Застосування одиничної функції Хевісайда дозволяє подати праву частину однією формулою. Особливість застосування операційного числення для розв’язування таких рівнянь полягає в необхідності врахування запізнювань при прямому переході від правої частини-оригіналу до її зображення, що вже розглянутий вище, та при зворотному переході від зображення шуканого розв’язку до його оригіналу. Для останнього переходу треба:

1) в зображенні розв’язку згрупувати члени, що відповідають однаковим запізнюванням, і винести відповідний експоненційний множник e^{-bp} за дужки;

2) вираз у кожних дужках подати у вигляді лінійної комбінації табличних зображень;

3) знайти оригінал для кожного зображення в дужках і врахувати відповідні запізнювання.

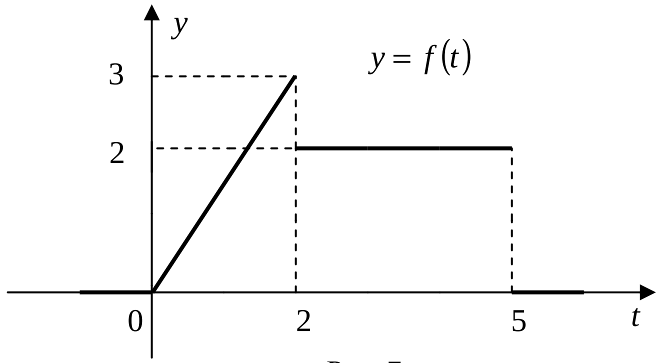

Рис. 7

Приклад 1. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' + 9y = f(t) \\ y(0) = 2\,; \quad y'(0) = -3\,, \end{cases}$$

де права частина $f(t)$ задана графічно (рис 7).

Розв’язання. Виходячи з графіка, виразимо функцію $f(t)$ аналітично

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty;\, 0); \\ 3t, & t \in (0;\, 2); \\ 2, & t \in (2;\, 5); \\ 0, & t \in (5;\, +\infty). \end{cases}$$

Застосовуючи одиничну функцію Хевісайда, запишемо функцію $f(t)$ однією формулою

$$f(t) = 3t\,(\eta(t) - \eta(t-2)) + 2\,(\eta(t-2) - \eta(t-5))\ .$$

Отже, права частина $f(t)$ містить запізнювання.

Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t) \doteqdot p^2 Y(p) - p y(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 2p + 3\,; \quad f(t) = 3t - (3t-2)\eta(t-2) - 2\eta(t-5) \doteqdot$$

$$= 3t - (3(t-2+2) - 2)\eta(t-2) - 2\eta(t-5) = 3t - (3(t-2) + 4)\eta(t-2) - 2\eta(t-5) \doteqdot$$

$$\doteqdot 3 \cdot \frac{1}{p^2} - \left(3 \cdot \frac{1}{p^2} + 4 \cdot \frac{1}{p}\right) e^{-2p} - 2 \cdot \frac{1}{p}\, e^{-5p} = \frac{3}{p^2} - e^{-2p} \cdot \frac{4p+3}{p^2} - e^{-5p} \cdot \frac{2}{p} = F(p)\ .$$

Одержимо $p^2 Y(p) - 2p + 3 + 9Y(p) = \dfrac{3}{p^2} - e^{-2p} \cdot \dfrac{4p+3}{p^2} - e^{-5p} \cdot \dfrac{2}{p}$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p)\left(p^2 + 9\right) = \frac{2p^3 - 3p^2 + 3}{p^2} - e^{-2p} \cdot \frac{4p+3}{p^2} - e^{-5p} \cdot \frac{2}{p}\ ;$$

$$Y(p)=\frac{2p^3-3p^2+3}{p^2\left(p^2+9\right)}-e^{-2p}\cdot\frac{4p+3}{p^2\left(p^2+9\right)}-e^{-5p}\cdot\frac{2}{p\left(p^2+9\right)}$$

– зображення шуканого розв‘язку.

Розкладаючи кожний раціональний дріб окремо в суму елементарних дробів, одержимо

$$Y(p)=\left(\frac{A_1}{p}+\frac{B_1}{p^2}+\frac{C_1p+D_1}{p^2+9}\right)-e^{-2p}\left(\frac{A_2}{p}+\frac{B_2}{p^2}+\frac{C_2p+D_2}{p^2+9}\right)-e^{-5p}\left(\frac{A_3}{p}+\frac{B_3p+C_3}{p^2+9}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2}+2\cdot\frac{p}{p^2+9}-\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{3}\times\frac{3}{p^2+9}\right)-e^{-2p}\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{4}{9}\cdot\frac{p}{p^2+9}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}\right)-$$

$$-e^{-5p}\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p}-\frac{2}{9}\cdot\frac{p}{p^2+9}\right).$$

Застосовуючи таблицю відповідності оригіналів та їх зображень і теорему запізнювання, знайдемо оригінал шуканого розв’язку

$$y(t)=\frac{1}{3}t+2\cos 3t-\frac{10}{9}\sin 3t-\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{3}(t-2)-\frac{4}{9}\cos 3(t-2)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{9}\sin 3(t-2)\right)\eta(t-2)-\left(\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\cos 3(t-5)\right)\eta(t-5).$$

2.17. Зображення інтеграла від оригіналу

<u>Теорема 10</u> (***теорема про зображення інтеграла від оригіналу***). *Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $\frac{1}{p}F(p)$ служить зображенням інтеграла $\int_0^t f(u)du$:* $f(t)\doteqdot F(p) \;\Rightarrow\; \int_0^t f(u)du \doteqdot \frac{1}{p}F(p)$.

<u>Доведення</u>. Нехай $f(t)\doteqdot F(p)$; $\varphi(t)=\int_0^t f(u)du \doteqdot \Phi(p)$. Знайдемо похідну інтеграла зв змінною верхньою межею $\varphi'(t)=\left(\int_0^t f(u)du\right)'=f(t)$.

Використаємо формулу для зображення похідної оригіналу

$$\varphi'(t)\doteqdot p\Phi(p)-\varphi(0).$$

Але $\varphi(0)=\int_0^0 f(u)du=0$, тому $\varphi'(t)\doteqdot p\Phi(p)$.

Таким чином, $\left.\begin{array}{r} f(t)=\varphi'(t)\doteqdot p\Phi(p) \\ f(t)\doteqdot F(p) \end{array}\right\}\Rightarrow\; F(p)=p\Phi(p)$. Отже, $\Phi(p)=\frac{1}{p}F(p)$.

Приклад 1. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу і формулою $\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$, знайти зображення функції $\sin t$.

Розв’язання. $\sin t = \int\limits_0^t \cos u du \doteqdot \dfrac{1}{p} \times \dfrac{p}{p^2+1} = \dfrac{1}{p^2+1}$.

Приклад 2. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p) = 1/(p^3 - 4p^2 + 29p)$.

Розв’язання. $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2 - 4p + 29)} = \dfrac{1}{p} \cdot \dfrac{1}{p^2 - 4p + 29} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{p} \cdot \dfrac{5}{(p-2)^2 + 5^2} =$

$$= \left| \frac{5}{(p-2)^2 + 5^2} \doteqdot e^{2t} \sin 5t \right| \doteqdot \frac{1}{5} \int\limits_0^t e^{2u} \sin 5u \, du =$$

$$= \left| \int e^{at} \sin bt \, dt = \frac{-be^{at} \cos bt + ae^{at} \sin bt}{a^2 + b^2} + C \right| = \frac{1}{5} \left. \frac{-5e^{2u} \cos 5u + 2e^{2u} \sin 5u}{2^2 + 5^2} \right|_0^t =$$

$$= \frac{1}{145}\left(-5e^{2t} \cos 5t + 2e^{2t} \sin 5t + 5\right) = f(t) \ .$$

Зауваження. Крім диференціальних рівнянь, що включають похідні невідомої функції, для математичного моделювання різних явищ використовуються також інші споріднені з ними рівняння. Зокрема, інтегральні рівняння, що містять інтеграли від невідомої функції, а також інтегро-диференціальні рівняння, в яких невідома функція входить як під знак похідної, так і під знак інтеграла.

Приклад 3. Знайти частинний розв‘язок інтегро-диференціального рівняння $y' - 2y + \int\limits_0^t y(u) du = 3$, який задовольняє початкову умову $y(0) = 0$.

Розв’язання. Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегро-диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p); \quad \int\limits_0^t y(u) du \doteqdot \frac{1}{p} Y(p); \quad 1 \doteqdot \frac{1}{p} \ .$$

Одержимо $pY(p) - 2Y(p) + \dfrac{1}{p} Y(p) = 3 \times \dfrac{1}{p}$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$p^2 Y(p) - 2pY(p) + Y(p) = 3; \quad (p^2 - 2p + 1)Y(p) = 3; \quad Y(p) = \frac{3}{(p-1)^2}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p)=\frac{3}{(p-1)^2} \risingdotseq 3\times te^t = y(t) \ .$$

Отже, $y(t)=3te^t$ – шуканий розв‘язок.

2.18*. Згортка функцій. Розв‘язання інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь

Згорткою двох функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$ називається функція $f(t)$, яка задається рівністю

$$f(t)=\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du \ .$$

Позначається $f(t)=f_1 * f_2$.

Справедливо

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du = \int_0^t f_2(u)f_1(t-u)du = f_2 * f_1 \ .$$

(Доведення за допомогою заміни $t-u=z$ в правому інтегралі).

<u>Теорема 11</u> (**Теорема згортання оригіналів (теорема множення зображень)**). *Якщо* $F_1(p)$ *і* $F_2(p)$- *зображення відповідно функцій* $f_1(t)$ *і* $f_2(t)$, *то добуток* $F_1(p)F_2(p)$ *служить зображенням функції* $f(t)=\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du$, тобто

якщо $f_1(t)\risingdotseq F_1(p)$; $f_2(t)\risingdotseq F_2(p)$, то

$$\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du \risingdotseq F_1(p)F_2(p) \ .$$

(Без доведення).

<u>Зауваження</u>. На основі теореми згортання можна одержати зображення інтеграла від оригіналу

$$f_1(t)=f(t);\ f_2(t)=1 \ \Rightarrow\ F_1(p)=F(p);\ F_2(p)=\frac{1}{p};\ \int_0^t f(u)du=\int_0^t f(u)f_2(t-u)du \risingdotseq F(p)\times\frac{1}{p}.$$

Отже,

$$\int_0^t f(u)du \risingdotseq \frac{F(p)}{p} \ .$$

<u>Приклад 1</u>. Користуючись теоремою згортання оригіналів, знайти оригінал за його зображенням $F(p)=\dfrac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}$.

<u>Розв’язання</u>.

$$F(p)=\frac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}=\frac{1}{p^2+b^2}\times\frac{1}{p^2+b^2}=\left|\;F(p)=F_1(p)\times F_2(p);\quad F_1(p)=\frac{1}{p^2+b^2}\doteqdot\frac{1}{b}\sin bt\,;\right.$$

$$F_2(p)=\frac{1}{p^2+b^2}\doteqdot\frac{1}{b}\sin bt\,;\qquad f(t)=\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du\;\Bigg|\doteqdot\int_0^t (1/b)\sin bu\times(1/b)\sin b(t-u)du=$$

$$=\frac{1}{2b^2}\int_0^t(\cos(bu-b(t-u))-\cos(bu+b(t-u)))du=\frac{1}{2b^2}\left(\int_0^t\cos(2bu-bt)du-\cos bt\int_0^t du\right)=$$

$$=\frac{1}{2b^2}\left(\frac{1}{2b}\times\sin(2bu-bt)\Big|_0^t-\cos bt\times u\Big|_0^t\right)=\frac{1}{2b^2}\left(\frac{1}{2b}\sin bt-\frac{1}{2b}\sin(-bt)-\right.$$

$$\left.-t\cos bt\right)=\frac{1}{2b^3}(\sin bt-bt\cos bt)=f(t)$$

– шуканий оригінал.

<u>Приклад 2</u>. Розв‘язати інтегральне рівняння Вольтерра першого роду

$$\int_0^t y(u)\cos(t-u)du=t\sin t\ .$$

<u>Розв’язання</u>. Нехай $y(t)\doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегрального рівняння до зображень

$$\cos t\doteqdot\frac{p}{p^2+1};\quad t\sin t\doteqdot\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2};\quad \int_0^t y(u)\cos(t-u)du\doteqdot Y(p)\times\frac{p}{p^2+1}.$$

Одержимо $Y(p)\times\frac{p}{p^2+1}=\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}$ – допоміжне рівняння-зображення.

Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p)=\frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}:\frac{p}{p^2+1}=\frac{2}{p^2+1}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p)==2\times\frac{1}{p^2+1}\doteqdot 2\sin t=y(t)\ .$$

Отже, $y(t)=2\sin t$ – шуканий розв‘язок.

<u>Приклад 3</u>. Розв‘язати інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$y(t)-6\int_0^t y(u)\sin 3(t-u)du=t\cos 3t\ .$$

<u>Розв’язання</u>. Нехай $y(t)\doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегрального рівняння до зо-

бражень

$$\sin 3t \risingdotseq \frac{3}{p^2+9}; \quad t\cos 3t \risingdotseq \frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}; \quad \int_0^t y(u)\sin 3(t-u)du \risingdotseq Y(p)\times\frac{3}{p^2+9}.$$

Одержимо $Y(p)-6\times Y(p)\times\dfrac{3}{p^2+9}=\dfrac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}$ – допоміжне рівняння.

Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p)\times\frac{p^2+9-18}{p^2+9}=\frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}\ ; \quad Y(p)=\frac{1}{p^2+9}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p)=\frac{1}{p^2+9}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{p^2+3^2} \risingdotseq \frac{1}{3}\sin 3t=y(t)\ .$$

Отже, $y(t)=\dfrac{1}{3}\sin 3t$ – шуканий розв‘язок.

<u>Приклад 4</u>. Розв‘язати інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$y(t)+2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du=e^t\ .$$

<u>Розв’язання</u>. Нехай $y(t)\risingdotseq Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегрального рівняння до зображень

$$\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}; \quad e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}; \quad \int_0^t y(u)\cos(t-u)du \risingdotseq Y(p)\times\frac{p}{p^2+1}\ .$$

Одержимо $Y(p)+2Y(p)\dfrac{p}{p^2+1}=\dfrac{1}{p-1}$ – допоміжне рівняння-зображення.

Розв’яжемо це рівняння

$$\left(p^2+1\right)Y(p)+2pY(p)=\frac{p^2+1}{p-1};\ \ Y(p)\left(p^2+1+2p\right)=\frac{p^2+1}{p-1};\ \ Y(p)=\frac{p^2+1}{(p-1)(p+1)^2}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p)=\frac{p^2+1}{(p-1)(p+1)^2}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{(p+1)^2}=\left|\ A(p+1)^2+B\left(p^2-1\right)+C(p-1)=p^2+1;\right.$$

$$\begin{array}{l} p=-1: \\ p=1: \\ p^0: \end{array} \left\{\begin{array}{ll} -2C=2; & C=-1\,; \\ 4A=2; & A=1/2\,; \\ A-B-C=1; & B=A-C-1=1/2 \end{array}\right. ;$$

$$\left|=\frac{1}{2}\times\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq \frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}-te^{-t}=ch\,t-te^{-t}=y(t)\ .\right.$$

Отже, $y(t) = ch\,t - te^{-t}$ – шуканий розв‘язок.

Приклад 5. Знайти частинний розв‘язок інтегро-диференціального рівняння $y' - 2\int\limits_0^t e^{t-u} y(u)\,du = e^{-2t}$, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Розв’язання. Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегро-диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 1;\quad e^t \doteqdot \frac{1}{p-1};\quad \int\limits_0^t e^{t-u} y(u)\,du \doteqdot \frac{1}{p-1} Y(p);\quad e^{-2t} \doteqdot \frac{1}{p+2}.$$

Одержимо

$$pY(p) - 1 - 2\,\frac{1}{p-1} Y(p) = \frac{1}{p+2}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$p(p-1)(p+2)Y(p) - (p-1)(p+2) - 2(p+2)Y(p) = p - 1\ ;$$

$$Y(p)(p+2)(p(p-1) - 2) = p - 1 + (p-1)(p+2);\quad Y(p) = \frac{p^2 + p - 3}{(p^2 - p - 2)(p+2)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{p^2 + 2p - 3}{(p+1)(p-2)(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p+2} =$$

$$= \big| A(p-2)(p+2) + B(p+1)(p+2) + C(p+1)(p-2) =$$

$$= p^2 + 2p - 3;\quad \begin{array}{l} p = -1: \\ p = 2: \\ p = -2: \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} -3A = -4\,; & A = 4/3\,; \\ 12B = 5\,; & B = 5/12; \\ 4C = -3\,; & C = -3/4; \end{array} \right.$$

$$\Big| = \frac{4}{3} \times \frac{1}{p+1} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{p-2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{p+2} \doteqdot \frac{4}{3} e^{-t} + \frac{5}{12} e^{2t} - \frac{3}{4} e^{-2t} = y(t)\ .$$

Отже, $y(t) = \frac{4}{3} e^{-t} + \frac{5}{12} e^{2t} - \frac{3}{4} e^{-2t}$ – шуканий розв‘язок.

2.19*. Інтеграл Дюамеля та його застосування

На практиці зустрічається такий *спеціальний випадок теореми про зображення згортки*

$$pF(p)\Phi(p) \doteqdot \int\limits_0^t f'(u)\varphi(t-u)\,du + f(0)\varphi(t)\ .$$

Інтеграл у цій формулі називається ***інтегралом Дюамеля***.

Доведення. Нехай $f(t) \doteqdot F(p)$; $\varphi(t) \doteqdot \Phi(p)$. Тоді

$$pF(p)\Phi(p) = (pF(p) - f(0))\Phi(p) + f(0)\Phi(p) \doteqdot \int_0^t f'(u)\varphi(t-u)du + f(0)\varphi(t) \ .$$

Розглянемо застосування інтеграла Дюамеля для розв’язання задачі Коші при умові, що зображення правої частини диференціального рівняння не виражається через елементарні функції.

Нехай треба знайти розв’язок задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t)$$

при нульових початкових умовах $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

Позначимо $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення, $f(t) \doteqdot F(p)$ – права частина і її зображення. Тоді допоміжне рівняння-зображення має вигляд

$$p^2 Y(p) + a_1 pY(p) + a_2 Y(p) = F(p)$$

або $Y(p)L(p) = F(p)$, де $L(p) = p^2 + a_1 p + a_2$ – характеристичний многочлен диференціального рівняння. Звідси

$$Y(p) = F(p) : L(p) \ .$$

Додатково розглянемо цю задачу при $f(t) = f_1(t) = 1$ (права частина – одинична функція Хевісайда). Нехай відповідний розв’язок $y_1(t)$ та його зображення $Y_1(p)$ відомі. Відповідне допоміжне рівняння-зображення має вигляд

$$Y_1(p)L(p) = \frac{1}{p} \ .$$

Звідси $L(p) = \dfrac{1}{pY_1(p)}$. Тоді $Y(p) = F(p) : \dfrac{1}{pY_1(p)} = pY_1(p)F(p)$.

Застосовуючи інтеграл Дюамеля і враховуючи нульові початкові умови, одержимо

$$Y(p) = pY_1(p)F(p) \doteqdot \int_0^t y_1'(u)f(t-u)du + y_1(0)f(t) = \int_0^t y_1'(u)f(t-u)du = y(t) \ .$$

Отже, $y(t) = \int_0^t y_1'(u)f(t-u)du$.

Зауваження. Таким чином, для знаходження розв’язку початкової задачі $y(t)$ за цим методом не треба знати зображення правої частини $F(p)$.

Приклад 1. Розв‘язати задачу Коші з нульовими початковими умовами для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' + 4y = e^{-t^2} \ ; \\ y(0) = 0 \ ; \quad y'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \risingdotseq Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Зазначимо, що для правої частини диференціального рівняння $f(t)=e^{-t^2}$ зображення не виражається через елементарні функції. Скористаємось інтегралом Дюамеля.

При $f(t)=1$ рівняння має вигляд $y''+4y=1$.

Нехай $y_1(t) \risingdotseq Y_1(p)$ – відповідно оригінал і зображення розв'язку одержаного рівняння при заданих нульових початкових умовах. Допоміжне рівняння-зображення має вигляд

$$p^2Y_1(p)+4Y_1(p)=\frac{1}{p} \ .$$

Розв'яжемо це рівняння: $Y_1(p)\left(p^2+4\right)=\frac{1}{p}$; $\quad Y_1(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4\right)}$

– зображення відповідного розв'язку. Знайдемо його оригінал

$$Y_1(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4\right)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+4}=\left|A\left(p^2+4\right)+(Bp+C)p=1\right. ;$$

$$\begin{array}{ll} p^2: \\ p: \\ p^0: \end{array} \left\{\begin{array}{ll} A+B=0; & C=0; \\ C=0; & A=1/4; \\ 4A=1; & B=-A=-1/4; \end{array}\right. \quad \left|=\frac{1}{4}\times\frac{1}{p}-\frac{1}{4}\times\frac{p}{p^2+4} \risingdotseq \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t=y_1(t)\right. .$$

Розв'язок початкової задачі знаходимо за формулою

$$y(t)=\int_0^t y_1'(u)f(t-u)du \ .$$

Оскільки $y_1'(t)=(1/2)\sin 2t$, то $y(t)=(1/2)\int_0^t \sin 2u \, e^{-(t-u)^2}\,du$.

Одержаний розв'язок містить інтеграл, що не виражається через елементарні функції.

2.20*. Теорема про інтегрування зображення

Теорема 11 (***Теорема про інтегрування зображення***).

Нехай $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді інтеграл $\int_p^{+\infty} F(z)dz$ служить зображенням функції $\frac{f(t)}{t}$

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{+\infty} F(z)dz \ .$$

Доведення. Розглянемо функцію $\varphi(t)=\frac{f(t)}{t}$. Нехай $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$. За теоремою про диференціювання зображення маємо

$$f(t)=t\,\varphi(t)\doteqdot -\frac{d\Phi(p)}{dp}\ .$$

Спираючись на єдинність перетворення Лапласа, одержимо

$$\left.\begin{aligned} f(t)&\doteqdot F(p)\\ f(t)&\doteqdot -\frac{d\Phi(p)}{dp}\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ -\frac{d\Phi(p)}{dp}=F(p)\ .$$

Тоді $\quad \Phi(p)=-\int\limits_0^p F(z)dz+C\ .$

Значення сталої інтегрування C одержимо із умови, що довільне зображення на нескінченності прямує до нуля.

$$\lim_{p\to+\infty}\Phi(p)=\lim_{p\to+\infty}\left(-\int\limits_0^p F(z)dz+C\right)=-\int\limits_0^{+\infty}F(z)dz+C=0\ ;\quad C=\int\limits_0^{+\infty}F(z)dz\ .$$

$$\text{Тоді}\quad \Phi(p)=-\int\limits_0^p F(z)dz+\int\limits_0^{+\infty}F(z)dz=\int\limits_p^0 F(z)dz+\int\limits_0^{+\infty}F(z)dz=\int\limits_p^{+\infty}F(z)dz\ .$$

Отже, $\quad \dfrac{f(t)}{t}\doteqdot\int\limits_p^{+\infty}F(z)dz\ .$

Приклад 1. Користуючись теоремою про інтегрування зображення, знайти зображення функції $f(t)=\dfrac{sh(t)}{t}$.

Розв'язання. $\quad sh\,t\doteqdot\dfrac{1}{p^2-1}\ \Rightarrow\ \dfrac{sh\,t}{t}\doteqdot\int\limits_p^{+\infty}\dfrac{1}{z^2-1}dz=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\Bigg|_p^{+\infty}=-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{p-1}{p+1}\right|\ .$

2.21. Одинична імпульсна дельта-функція Дірака $\delta(t)$ та її зображення

Розглянемо імпульсну функцію $\delta_h(t)$, яка задається рівністю

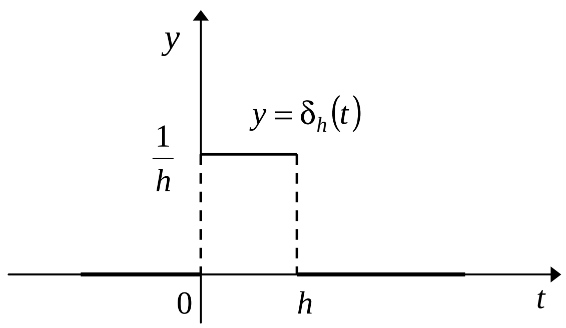

Рис. 8

$$\delta_h(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1/h\ , & 0<t<h;\\ 0, & t>h,\end{cases}$$

де $h>0$ – ширина імпульсу (рис. 8).

Співвідношення для $\delta_h(t)$ можна подати однією формулою за допомогою одиничної функції Хевісайда

$$\delta_h(t)=\frac{1}{h}\big(\eta(t)-\eta(t-h)\big)\ .$$

Знайдемо зображення цієї імпульсної функції $\delta_h(t)$

$$\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p}\ ; \quad \eta(t-h) \doteqdot e^{-hp}\frac{1}{p}\ ; \quad \delta_h(t) \doteqdot \frac{1}{h}\left(\frac{1}{p} - e^{-hp}\frac{1}{p}\right) = \frac{1-e^{-hp}}{ph}\ .$$

Одиничною імпульсною дельта-функцією Дірака $\delta(t)$ називається ***узагальнена функція***, яка визначається умовами:

$$1)\ \delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ +\infty, & t = 0; \\ 0, & t > 0; \end{cases} \quad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1\ .$$

Дельта-функцію $\delta(t)$ можна розглядати як границю імпульсної функції $\delta_h(t)$ при $h \to 0$

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \delta_h(t)\ .$$

За зображення дельта-функції $\delta(t)$ природно взяти границю зображення імпульсної функції $\delta_h(t)$ при $h \to 0$

$$\delta(t) \doteqdot \lim_{h\to 0} L(\delta_h(t)) = \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-hp}}{ph} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{h\to 0} \frac{\left(1-e^{-hp}\right)'}{(ph)'} = \lim_{h\to 0} \frac{-e^{-hp}(-p)}{p} = 1\,.$$

Отже,

$$\delta(t) \doteqdot 1\ .$$

<u>Зауваження 1</u> (механічний зміст дельта-функції Дірака). З точки зору механіки дельта-функцію $\delta(t)$ можна трактувати як нескінченну силу, що діє миттєво і має одиничний імпульс.

<u>Зауваження 2</u>. На основі теореми запізнювання маємо

$$\delta(t-b) \doteqdot e^{-bp} \times 1 = e^{-bp}\ .$$

<u>Зауваження 3</u> (зв'язок між одиничними функціями Дірака і Хевісайда). Використовуючи означення $\delta(t)$ і формулу для зображення інтеграла від оригіналу, одержимо

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(u)du = \int_{0}^{t} \delta(u)du \doteqdot \frac{1}{p} \times 1 = \frac{1}{p}\ .$$

Тоді на основі єдинності перетворення Лапласа маємо

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(u)du = \eta(t)\ .$$

Звідси, диференціюючи за змінною t, дістанемо

$$\delta(t) = \frac{d\eta(t)}{dt}\ .$$

<u>Зауваження 4</u> (зображення похідних дельта-функції Дірака). Застосовуючи для $\delta'(t)$, $\delta''(t)$, ..., $\delta^{(n)}(t)$ формули для зображення похідних оригіналу при умові

$$\delta'(0) = \delta''(0) = \ldots = \delta^{(n)}(0) = 0 \ ,$$

одержимо $\quad \delta'(t) \doteqdot p\,; \quad \delta''(t) \doteqdot p^2\,; \ \ldots\,; \quad \delta^{(n)}(t) \doteqdot p^n\,.$

<u>Приклад 1</u>. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку $y'' - 2y' = 4\cos 2t + 8\delta(t); \quad y(0) = 0;\ y'(0) = 0$.

<u>Розв’язання</u>. Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p);\ y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p);\ \cos 2t \doteqdot \frac{p}{p^2+4};\ \delta(t) \doteqdot 1.$$

Одержимо $\ p^2Y(p) - 2pY(p) = 4\dfrac{p}{p^2+4} + 8$ – допоміжне рівняння-зображення.

Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p)\left(p^2 - 2p\right) = \frac{8p^2 + 4p + 32}{p^2+4} \ ; \quad Y(p) = \frac{8p^2 + 4p + 32}{p(p-2)\left(p^2+4\right)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{8p^2 + 4p + 32}{p(p-2)\left(p^2+4\right)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{Cp+D}{p^2+4}$$

$$8p^2 + 4p + 32 = \Big|\ A(p-2)\left(p^2+4\right) + Bp\left(p^2+4\right) + (Cp+D)p(p-2)$$

$$\begin{array}{l} p=0: \\ p=2: \\ p^3: \\ p^2: \end{array} \quad \begin{cases} -8A = 32; \\ 16B = 72; \\ A + B + C = 0; \\ -2A - 2C + D = 8; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A = -4\,; \quad B = \dfrac{9}{2}\,; \\ -4 + \dfrac{9}{2} + C = 0\,; \quad C = -\dfrac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} -2\times(-4) - 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) + D = 8\,; \\ D = -1 \end{array}$$

$$\Bigg| = \frac{-4}{p} + \frac{\frac{9}{2}}{p-2} + \frac{-\frac{1}{2}p - 1}{p^2+4} = -4\times\frac{1}{p} + \frac{9}{2}\times\frac{1}{p-2} - \frac{1}{2}\times\frac{p}{p^2+2^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\times\frac{2}{p^2+2^2} \doteqdot -4 + \frac{9}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t = y(t)\ .$$

Отже, $\ y(t) = -4 + \dfrac{9}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}\cos 2t - \dfrac{1}{2}\sin 2t$ – шуканий розв‘язок.

<u>Приклад 2</u>. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + 16y = 24\left(\delta'(t) + \delta(t-5) + \delta(t-10)\right) \quad y(0) = 0\,; \quad y'(0) = 0\ .$$

<u>Розв’язання</u>. Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і

його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p); \quad \delta'(p) \doteqdot p; \quad \delta(p-5) \doteqdot e^{-5p}; \quad \delta(p-10) \doteqdot e^{-10p}.$$

Одержимо $p^2Y(p) + 16Y(p) = 24\left(p + e^{-5p} + e^{-10p}\right)$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння і одержимо

$$Y(p) = \frac{24\left(p + e^{-5p} + e^{-10p}\right)}{p^2 + 16}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = 24 \times \frac{p}{p^2+16} + \frac{24}{4} \times e^{-5p} \times \frac{4}{p^2+16} + \frac{24}{4} \times e^{-10p} \times \frac{4}{p^2+16} \doteqdot 24\cos 4t +$$

$$+ 6\sin 4(t-5)\,\eta(t-5) + 6\sin 4(t-10)\,\eta(t-10) = y(t).$$

Отже,

$y(t) = 24\cos 4t + 6\sin 4(t-5)\,\eta(t-5) + 6\sin 4(t-10)\,\eta(t-10)$ – шуканий розв'язок.

2.22. Приклади розв'язання операційним методом задач теоретичної електротехніки

Математичними моделями перехідних процесів у електричних ланцюгах служать диференціальні та споріднені з ними (інтегральні, інтегро-диференціальні, скінченно-різницеві і т. п.) рівняння.

Зауваження. При складанні таких рівнянь звичайно користуються першим та другим законами Кірхгофа.

Перший закон Кірхгофа: *алгебраїчна сума всіх струмів, що протікають в довільній точці ланцюга, дорівнює нулю.*

Другий закон Кірхгофа: *для кожного замкнутого контуру алгебраїчна сума падінь напруги в окремих гілках дорівнює нулю.*

У довільний момент часу t перехідного процесу для активного опору R, індуктивності L, ємності C справедливі наступні співвідношення, що зв'язують падіння напруги на кінцях елемента $u(t)$ та силу струму в ньому $i(t)$:

$$u_R(t) = R\,i_R(t); \quad u_L(t) = L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt}; \quad u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt + u_C(0),$$

де $u_C(0)$ – падіння напруги на ємності в початковий момент часу $t = 0$.

Приклад 1. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R і індуктивності L (рис. 9). Знайти закон зміни сили струму $i(t)$ в контурі при його відключенні від джерела зі сталою електрорушійною силою E і закороченні ланцюга в початковий момент часу $t = 0$ (перемикач K переводиться при $t = 0$ із положення A в положення B).

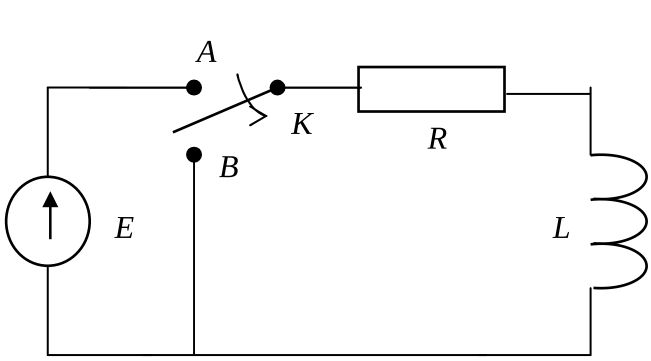

Рис. 9

<u>Розв’язання</u>. Нехай $i(t) \doteqdot I(p)$ – шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. У момент перемикання $t=0$ за законом Ома сила струму

$$i(0)=E/R\ .$$

Після перемикання за другим законом Кірхгофа

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0\ .$$

Перейдемо в одержаному диференціальному рівнянні до зображень

$$\frac{di}{dt} \doteqdot p\,I(p)-i(0)=p\,I(p)-E/R\,;\quad L\big(p\,I(p)-E/R\big)+RI(p)=0$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$(Lp+R)I(p)=\frac{LE}{R}\ ;\qquad I(p)=\frac{LE/R}{Lp+R}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$I(p)=\frac{LE/R}{Lp+R}=\frac{E}{R}\times\frac{1}{p+\dfrac{R}{L}} \doteqdot \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}=i(t)\ .$$

Отже, $i(t)=\dfrac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ – шуканий закон зміни сили струму в контурі.

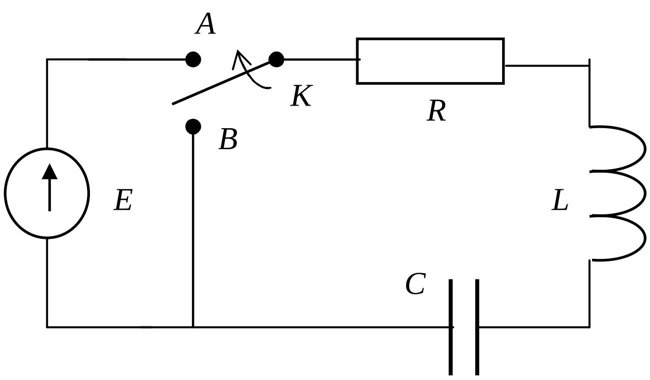

Рис. 10

<u>Приклад 2</u>. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R, індуктивності L і ємності C (рис. 10). Знайти закон зміни сили струму в контурі при його підключенні в початковий момент часу $t=0$ до джерела зі сталою електрорушійною силою E (перемикач K переводиться при $t=0$ з положення B в положення A).

<u>Розв’язання</u>. Нехай $i(t) \doteqdot I(p)$ – шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. В початковий момент $t=0$ сила струму і початкова напруга на обкладинках конденсатора дорівнюють нулю

$$i(0)=0\ ;\quad u_C(0)=0\ .$$

Тоді згідно з другим законом Кірхгофа

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(z)dz = E \ .$$

Перейдемо в обох частинах одержаного інтегро-диференціального рівняння до зображень

$$\frac{di}{dt} \doteqdot p\,I(p) - i(0) = p\,I(p);\ \int_0^t i(z)dz \doteqdot \frac{1}{p}I(p);\ 1 \doteqdot \frac{1}{p};\ \ R\,I(p) + Lp\,I(p) + \frac{1}{C}\times\frac{1}{p}I(p) = E\times\frac{1}{p}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$CRp\,I(p) + CLp^2 I(p) + I(p) = CE\ ;\ \ I(p) = \frac{CE}{CLp^2 + CRp + 1} = \frac{\frac{E}{L}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL}}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал.

Введемо позначення $\alpha = \frac{R}{2L}$; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$; $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 > 0$.

Тоді

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL} = p^2 + \frac{R}{2L}p + \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} = p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \omega_0{}^2 - \alpha^2 =$$

$$= (p+\alpha)^2 + \omega^2;\quad I(p) = \frac{E}{L\omega}\times\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2} \doteqdot \frac{E}{L\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t = i(t)\ .$$

Отже, $i(t) = \frac{E}{L\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t$ – шуканий закон зміни сили струму в контурі. Тут $\alpha = \frac{R}{2L}$ - коефіцієнт затухання; $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ - кругова частота контуру; $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ - кругова частота, яку мав би контур при відсутності активного опору $(R = 0)$.

<u>Приклад 3</u>. Два однакових контури, кожний з яких складається з послідовно сполучених активного опору R, індуктивності L і ємності C, зв'язані взаємною індукцією M (рис. 11). Знайти закон зміни сили струму в першому $i_1(t)$ та другому $i_2(t)$ контурі при умові, що другий контур закорочений, а перший контур в початковий момент часу $t = 0$ підключається до джерела зі сталою електрорушійною силою E (перемикач K переводиться при $t = 0$ з положення B в положення A). Вважати індукційний зв'язок ідеальним, при якому $M = L$.

<u>Розв'язання</u>. Нехай $i_1(t) \doteqdot I_1(p)$, $i_2(t) \doteqdot I_2(p)$ – шукані закони зміни сили струму (оригінали) і відповідні зображення. В початковий момент $t = 0$ обидва контури закорочені, тому початкова сила струму і початкова напруга на обкла-

динках конденсаторів дорівнюють нулю

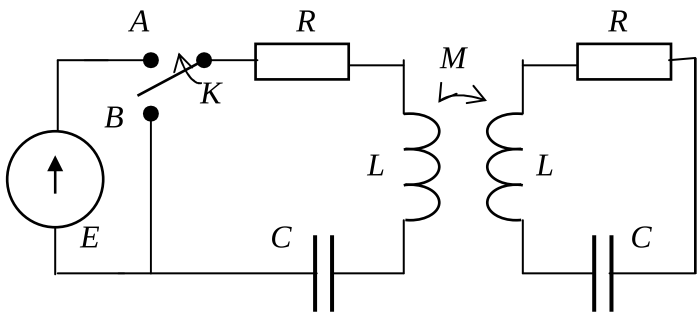

Рис. 11

$$i_1(0)=0;\quad u_{C1}(0)=0;\quad i_2(0)=0;$$
$$u_{C2}(0)=0.$$

Застосовуючи другий закон Кірхгофа до кожного з контурів, одержимо інтегро-диференціальну систему

$$\begin{cases} Ri_1+L\dfrac{di_1}{dt}+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1(z)dz+M\dfrac{di_2}{dt}=E; \\ Ri_2+L\dfrac{di_2}{dt}+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_2(z)dz+M\dfrac{di_1}{dt}=0. \end{cases}$$

Враховуючи умову $M=L$, маємо

$$\begin{cases} Ri_1+L\dfrac{di_1}{dt}+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1(z)dz+L\dfrac{di_2}{dt}=E; \\ Ri_2+L\dfrac{di_2}{dt}+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_2(z)dz+L\dfrac{di_1}{dt}=0. \end{cases}$$

Перейдемо в обох частинах одержаної інтегро-диференціальної системи до зображень

$$\frac{di_1}{dt}\doteqdot p\,I_1(p)-i_1(0)=p\,I_1(p);\quad \int_0^t i_1(z)dz\doteqdot\frac{1}{p}I_1(p);\quad \frac{di_2}{dt}\doteqdot p\,I_2(p)-i_2(0)=p\,I_2(p);$$

$$\int_0^t i_2(z)dz\doteqdot\frac{1}{p}I_2(p);\quad \int_0^t i_1(z)dz\doteqdot\frac{1}{p}I_1(p);\quad 1\doteqdot\frac{1}{p};$$

$$\begin{cases} R\,I_1(p)+Lp\,I_1(p)+\dfrac{1}{Cp}\,I_1(p)+Lp\,I_2(p)=E\times\dfrac{1}{p}; \\ R\,I_2(p)+Lp\,I_2(p)+\dfrac{1}{Cp}\,I_2(p)+Lp\,I_1(p)=0 \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв'яжемо цю лінійну алгебраїчну систему за формулами Крамера

$$\begin{cases} \left(LCp^2+RCp+1\right)I_1(p)+LCp^2\,I_2(p)=EC; \\ LCp^2\,I_1(p)+\left(LCp^2+RCp+1\right)I_2(p)=0. \end{cases};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} LCp^2+RCp+1 & LCp^2 \\ LCp^2 & LCp^2+RCp+1 \end{vmatrix}=(RCp+1)\left(2LCp^2+RCp+1\right)=$$

$$=2RC^2L\left(p+\frac{1}{RC}\right)\left(p^2+\frac{R}{2L}p+\frac{1}{2LC}\right);$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} EC & LCp^2 \\ 0 & LCp^2+RCp+1 \end{vmatrix}=2RC^2L\left(\frac{E}{2R}p^2+\frac{E}{2L}p+\frac{E}{2RCL}\right);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} LCp^2 + RCp + 1 & EC \\ LCp^2 & 0 \end{vmatrix} = -EC^2Lp^2 ;$$

$$I_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dfrac{E}{2R}p^2 + \dfrac{E}{2L}p + \dfrac{E}{2RCL}}{\left(p + \dfrac{1}{RC}\right)\left(p^2 + \dfrac{R}{2L}p + \dfrac{1}{2LC}\right)} ; \; I_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{\dfrac{E}{2R}p^2}{\left(p + \dfrac{1}{RC}\right)\left(p^2 + \dfrac{R}{2L}p + \dfrac{1}{2LC}\right)}$$

– зображення шуканих сил струму. Знайдемо відповідні оригінали.

Введемо позначення $\dfrac{1}{RC} = \alpha$; $\dfrac{R}{4L} = \beta$; $\dfrac{1}{2LC} - \dfrac{R^2}{16L^2} = \omega^2 > 0$.

Тоді

$$\left(p^2 + \frac{R}{2L}p + \frac{1}{2LC}\right) = p^2 + 2\cdot\frac{R}{4L}p + \left(\frac{R}{4L}\right)^2 + \left(\frac{1}{2LC} - \frac{R^2}{16L^2}\right) = (p+\beta)^2 + \omega^2 ;$$

$$I_1(p) = \frac{\dfrac{E}{2R}p^2 + \dfrac{E}{2L}p + \dfrac{E}{2RCL}}{(p+\alpha)\left((p+\beta)^2 + \omega^2\right)} = \frac{\dfrac{E}{2R}}{p+\alpha} + \frac{\dfrac{E}{4L}}{(p+\beta)^2 + \omega^2} = \frac{E}{2R}\times\frac{1}{p+\alpha} + \frac{E}{4L\omega}\times$$

$$\times\frac{\omega}{(p+\beta)^2 + \omega^2} \risingdotseq \frac{E}{2R}e^{-\alpha t} + \frac{E}{4L\omega}e^{-\beta t}\sin\omega t = i_1(t);$$

$$I_2(p) = -\frac{\dfrac{E}{2R}p^2}{(p+\alpha)\left((p+\beta)^2 + \omega^2\right)} = -\frac{\dfrac{E}{2R}}{p+\alpha} + \frac{\dfrac{E}{4L}}{(p+\beta)^2 + \omega^2} = -\frac{E}{2R}\times\frac{1}{p+\alpha} + \frac{E}{4L\omega}\times$$

$$\times\frac{\omega}{(p+\beta)^2 + \omega^2} \risingdotseq -\frac{E}{2R}e^{-\alpha t} + \frac{E}{4L\omega}e^{-\beta t}\sin\omega t = i_2(t) .$$

Отже, шукані закони зміни сили струму

$$i_1(t) = \frac{E}{2R}e^{-\alpha t} + \frac{E}{4L\omega}e^{-\beta t}\sin\omega t ; \; i_2(t) = -\frac{E}{2R}e^{-\alpha t} + \frac{E}{4L\omega}e^{-\beta t}\sin\omega t .$$

2.23. Математичне моделювання динаміки систем у змінних “вхід – вихід”. Передаточна, перехідна та імпульсна перехідна функції

У багатьох випадках, зокрема, коли неможливе вимірювання внутрішніх змінних або невідомі закони протікання процесів, математичне моделювання здійснюється на основі дослідження зовнішньої поведінки системи у термінах “вхід – вихід”.

Розглянемо основні поняття на прикладі системи, що описується диференціальним рівнянням першого порядку

$$T\frac{dy}{dt} + y = ku ,$$

де $u = u(t)$, $y = y(t)$ – відповідно вхідна та вихідна змінні; T, k – сталі коефіцієнти. Така система називається ***аперіодичною ланкою*** (***інерційною ланкою пер-***

шого порядку), а величини T, k – відповідно ***сталою часу*** і ***коефіцієнтом підсилення***.

На рис. 12 зображена аперіодична ланка у вигляді електричного ланцюга, що складається з активних опорів R_1, R_2 та індуктивності L. Тут вхідна і вихідна змінні – відповідні напруги $u = u_1(t)$, $y = u_2(t)$. При цьому

$$T = L/(R_1 + R_2)\ ; \qquad k = R_2/(R_1 + R_2)\ .$$

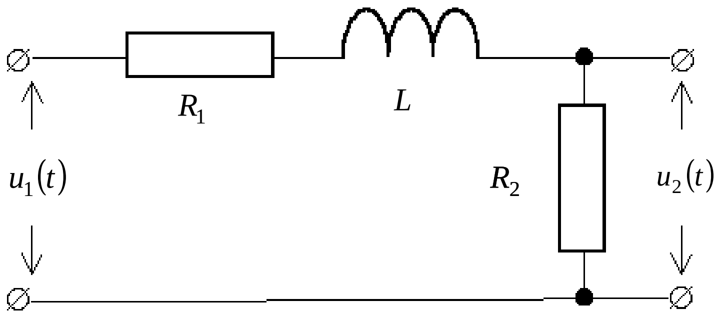

Рис. 12

Переходячи до зображень за Лапласом при нульових початкових умовах

$$u(t) \doteqdot U(p)\ ; \quad y(t) \doteqdot Y(p)\ ; \quad \frac{dy}{dt} \doteqdot pY(p)\ ,$$

одержимо операторну форму рівняння динаміки аперіодичної ланки

$$(Tp+1)Y(p) = kU(p).$$

Передаточною функцією системи $W(p)$ називається відношення зображень вихідної $Y(p)$ і вхідної $U(p)$ змінних при нульових початкових умовах

$$W(p) = Y(p)/U(p)\ .$$

Звідси

$$Y(p) = W(p)\,U(p)\ .$$

Перехідною функцією системи $h(t)$ називається реакція системи (значення вихідної змінної $y(t)$) на вхідну дію у вигляді одиничної ступінчастої функції Хевісайда $u(t) = \eta(t)$ при нульових початкових умовах.

Оскільки

$$u(t) = \eta(t) \doteqdot 1/p = U(p)\ ,$$

то для зображення перехідної функції $H(p)$ маємо

$$H(p) = Y(p) = W(p)\,U(p) = W(p)\,\frac{1}{p}\ .$$

Отже, *зображення перехідної функції* $H(p)$ *дорівнює передаточній функції* $W(p)$, *поділеній на* p:

$$H(p) = W(p)/p\ .$$

Для аперіодичної ланки

$$H(p)=\frac{k}{(Tp+1)p}=k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1/T}\right)\ \risingdotseq\ k\left(1-e^{-t/T}\right)=h(t)\ .$$

Імпульсною перехідною (ваговою) функцією системи $\varphi(t)$ називається реакція системи (значення вихідної змінної $y(t)$) на вхідну дію у вигляді одиничної імпульсної дельта-функції Дірака $u(t)=\delta(t)$ при нульових початкових умовах.

Оскільки $u(t)=\delta(t)\risingdotseq 1$, то для зображення імпульсної перехідної функції $\Phi(p)$ маємо

$$\Phi(p)=Y(p)=W(p)U(p)=W(p)\cdot 1\ .$$

Отже, *зображення імпульсної перехідної функції* $\Phi(p)$ *дорівнює передаточній функції* $W(p)$:

$$\Phi(p)=W(p)\ .$$

Для аперіодичної ланки

$$\Phi(p)=\frac{k}{Tp+1}=\frac{k}{T}\cdot\frac{1}{p+1/T}\ \risingdotseq\ \frac{k}{T}\,e^{-t/T}=\varphi(t)\ .$$

Знайдемо зв'язок між імпульсною перехідною функцією $\varphi(t)$ і перехідною функцією $h(t)$:

$$\varphi(t)\risingdotseq\Phi(p)=W(p)=p\,H(p)\risingdotseq\frac{dh}{dt}\ .$$

Отже, *імпульсна перехідна функція* $\varphi(t)$ *дорівнює похідній перехідної функції* $h(t)$:

$$\varphi(t)=\frac{dh}{dt}\ .$$

Для характеристики динамічних властивостей системи можна використати будь-яку з розглянутих функцій $W(p)$, $h(t)$, $\varphi(t)$. Метод дослідження і проектування систем за допомогою передаточної функції є одним з основних у теорії автоматичного керування.

2.24. Контрольні запитання

1) Яка функція називається оригіналом? Наведіть приклади оригіналів і функцій, що не є оригіналами.
2) Дайте означення перетворення (оператора) Лапласа. Що таке зображення оригіналу?
3) У чому полягає властивість лінійності оператора Лапласа?
4) Як веде себе будь-яке зображення на нескінченності?
5) Що таке одинична ступінчаста функція Хевісайда? Яке її зображення?
6) У чому полягає теорема про затухання оригіналу?

7) Сформулюйте теорему про зсув аргументу в оригіналі.
8) Який зв'язок між похідною зображення й оригіналом?
9) Як знаходиться зображення похідних оригіналу?
10) Сформулюйте правило знаходження оригіналу для зображення у вигляді раціонального дробу на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень.
11) За якою схемою здійснюється розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем?
12) У чому особливість розв'язання диференціальних рівнянь з запізнюваннями?
13) Як знаходиться зображення інтеграла від оригіналу?
14) Дайте означення згортки функцій. Як знаходиться її зображення?
15) Що називається інтегральним та інтегро-диференціальним рівнянням?
16) Що називається інтегралом Дюамеля? Як застосовується цей інтеграл для розв'язання диференціальних рівнянь?
17) Сформулюйте теорему про інтегрування зображення.
18) Що таке одинична імпульсна дельта-функція Дірака? Яке її зображення?
19) Який зв'язок між одиничними функціями Дірака і Хевісайда?
20) Наведіть приклади розрахунку перехідних процесів у електричних ланцюгах за допомогою операційного числення.
21) Що таке передаточна, перехідна та імпульсна перехідна функції? Який зв'язок між ними?

2.25. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Використовуючи тотожні перетворення оригіналів і властивість лінійності, на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень знайти зображення $F(p)$ вказаної функції $f(t)$. Результат записати у вигляді єдиного дробу.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$f(t)=t\,e^{-2t}-2\cos 3t-3$	16	$f(t)=ch^2 3t$
2	$f(t)=3t\sin 2t-e^{3t}-3$	17	$f(t)=sh2t\cdot\cos 6t$
3	$f(t)=e^{2t}\cos 2t-3t\sin 2t$	18	$f(t)=ch2t\cdot\cos 4t$
4	$f(t)=2e^{2t}\sin t-3\cos 2t$	19	$f(t)=\cos 3t\cdot\cos 7t$
5	$f(t)=4t\,e^{-2t}-sh4t-1$	20	$f(t)=4t\sin t-t\cdot ch2t$
6	$f(t)=2e^{-t}\cos t-t\cdot sh2t$	21	$f(t)=sh2t\cdot\sin 6t$
7	$f(t)=e^{-2t}\sin t-2t\cdot sh3t$	22	$f(t)=ch3t\cdot\sin 4t$
8	$f(t)=2e^{3t}\cos t-3\sin 2t$	23	$f(t)=\cos^2 3t$
9	$f(t)=3e^{-3t}\sin 2t-2t+2$	24	$f(t)=sh^2 2t$
10	$f(t)=2e^{-t}\sin 4t-t\cdot sht$	25	$f(t)=\sin 3t\cdot\sin 5t$

11	$f(t)=2t\sin 3t-3\cos t$	26	$f(t)=\sin 5t\cdot\cos 7t$
12	$f(t)=2t\cos 3t-2t+2$	27	$f(t)=\sin^2 4t$
13	$f(t)=e^{2t}\cos 2t-t\cdot sh2t$	28	$f(t)=sh5t\cdot ch3t$
14	$f(t)=e^{-2t}\cos t+4t\cdot ch2t$	29	$f(t)=2te^{3t}-\sin 4t+3$
15	$f(t)=3e^{-2t}\cos 3t-4t^2$	30	$f(t)=3t\cos 2t-\sin 3t$

Завдання 2. Розв'язати наступні задачі.

а) Варіанти №1–№10: Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

б) Варіанти №11–№20: Користуючись теоремою згортання оригіналів, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

в) Варіанти №21–№30: Розкладаючи спочатку правильний раціональний дріб у суму елементарних дробів, а потім застосовуючи лінійність перетворення Лапласа і таблицю відповідності оригіналів та їх зображень, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-4p+13)}$	11	$F(p)=\dfrac{p}{(p-5)(p^2+9)}$	21	$F(p)=\dfrac{p^3-5p^2+6}{(p-2)(p^3-8)}$
2	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-6p+25)}$	12	$F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+25)}$	22	$F(p)=\dfrac{p^2}{p^4-5p^2-36}$
3	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-8p+17)}$	13	$F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+64)}$	23	$F(p)=\dfrac{p^2+6p}{(p^2-4)(p^2+4)}$
4	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+8p-9)}$	14	$F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+36)}$	24	$F(p)=\dfrac{p^2}{p^4+5p^2+4}$
5	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-4p-5)}$	15	$F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+49)}$	25	$F(p)=\dfrac{p^3-3p+6}{(p+3)(p^3+27)}$
6	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-12p+40)}$	16	$F(p)=\dfrac{p}{(p^2+9)(p^2+1)}$	26	$F(p)=\dfrac{p^3-5p}{(p+2)(p^3+8)}$
7	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+6p+18)}$	17	$F(p)=\dfrac{1}{(p-2)(p^2+9)}$	27	$F(p)=\dfrac{p^3-4p^2-2}{(p^2-9)(p^2+9)}$
8	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-6p+10)}$	18	$F(p)=\dfrac{p}{(p-3)(p^2+16)}$	28	$F(p)=\dfrac{3p^2+2}{(p^2+2p-3)^2}$
9	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+7p-8)}$	19	$F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$	29	$F(p)=\dfrac{2p^3-p^2-4p}{(p+2)^2(p^2+4)}$
10	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-9p-10)}$	20	$F(p)=\dfrac{1}{(p+2)(p^2+25)}$	30	$F(p)=\dfrac{4p^3-3p^2+2}{p^4-3p^2-4}$

Завдання 3. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку (знайти частинний розв'язок заданого диференціального рівняння, який задовольняє вказаним початковим умовам).

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$x''+4x'+4x=3e^{-2t}\cos t$; $x(0)=3$; $x'(0)=0$	16	$x''-4x'-5x=4e^{-t}\sin t$; $x(0)=2$; $x'(0)=1$
2	$x''+2x'-3x=\sin 2t$; $x(0)=2$; $x'(0)=0$	17	$x''-4x=12\cos 2t$; $x(0)=0$; $x'(0)=-2$
3	$x''+6x'+10x=6te^{-2t}$; $x(0)=-2$; $x'(0)=0$	18	$x''-x'-6x=12e^{-2t}\cos 2t$; $x(0)=2$; $x'(0)=0$
4	$x''+5x'+6x=2\sin 2t$; $x(0)=0$; $x'(0)=4$	19	$x''-9x=4\sin 3t$; $x(0)=4$; $x'(0)=0$
5	$x''+2x'=4e^{-2t}\cos t$; $x(0)=0$; $x'(0)=2$	20	$x''+4x'+5x=2te^{t}$; $x(0)=0$; $x'(0)=-1$
6	$x''+4x'+13x=2te^{-2t}$; $x(0)=-3$; $x'(0)=1$	21	$x''-4x'+13x=12\cos 2t$; $x(0)=2$; $x'(0)=3$
7	$x''+4x'+20x=6t$; $x(0)=4$; $x'(0)=-2$	22	$x''+2x'=4e^{-2t}\cos 2t$; $x(0)=-3$; $x'(0)=2$
8	$x''-4x'-5x=4e^{-t}\cos 2t$; $x(0)=-2$; $x'(0)=-4$	23	$x''+4x'-12x=e^{-2t}\sin 2t$; $x(0)=0$; $x'(0)=-3$
9	$x''-9x=4e^{-3t}\sin 3t$; $x(0)=4$; $x'(0)=0$	24	$x''+5x'-14x=2te^{2t}$; $x(0)=0$; $x'(0)=-1$
10	$x''-3x'-10x=6e^{2t}\cos 3t$; $x(0)=-4$; $x'(0)=2$	25	$x''-4x=12e^{-2t}\sin 2t$; $x(0)=2$; $x'(0)=-4$
11	$x''-5x'+6x=2e^{2t}\sin 2t$; $x(0)=6$; $x'(0)=3$	26	$x''-x'-6x=12e^{3t}\cos 2t$; $x(0)=0$; $x'(0)=-5$
12	$x''-6x'+10x=6te^{3t}$; $x(0)=-2$; $x'(0)=0$	27	$x''+2x'-24x=12t^2$; $x(0)=1$; $x'(0)=4$
13	$x''+2x'+17x=8\sin 4t$; $x(0)=2$; $x'(0)=6$	28	$x''-4x'+29x=10e^{2t}$; $x(0)=2$; $x'(0)=-2$
14	$x''-2x'-3x=6e^{3t}\sin 2t$; $x(0)=0$; $x'(0)=-2$	29	$x''+6x'-7x=6e^{-t}\sin 2t$; $x(0)=-2$; $x'(0)=6$
15	$x''+4x=4t^2$; $x(0)=-3$; $x'(0)=2$	30	$x''+9x=4e^{-3t}\sin 3t$; $x(0)=0$; $x'(0)=-4$

Завдання 4. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (знайти частинний розв'язок заданої диференціальної системи, який задовольняє вказаним початковим умовам).

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y + 6\cos 2t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 3$	11	$\begin{cases} x' = x + 5y - 2e^{2t} \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = -1$	21	$\begin{cases} x' = 4x - 5y - 2 \\ y' = 2x - 2y + 3t \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 0$
2	$\begin{cases} x' = -x + 3y + \sin t \\ y' = 3x - y \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 0$	12	$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y = 2\sin 3t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 0$	22	$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 3x + 2y - 4t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = -2$
3	$\begin{cases} x' = x + 4y + e^{-2t} \\ y' = x - 2y \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 5$	13	$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5t \\ y' = 3x + 2y - 3 \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 1$	23	$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = x + y - 4\cos 2t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = -4$
4	$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = -2x - y + 6t \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 0$	14	$\begin{cases} x' = 2x - y - 3e^{-t} \\ y' = x + 2y \end{cases}$ $x(0) = -2;\ y(0) = 1$	24	$\begin{cases} x' = x + 2y + 2e^{-t} \\ y' = 2x + y - 4 \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 1$
5	$\begin{cases} x' = -x + 3y - 3e^{-2t} \\ y' = x + y + e^{t} \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 1$	15	$\begin{cases} x' = 2x - y + 2\sin t \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = -3$	25	$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y + 4t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 1$
6	$\begin{cases} x' = 7x + 2y - 2\sin t \\ y' = -9x - 2y + \cos t \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 0$	16	$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -x - 2\cos t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 0$	26	$\begin{cases} x' = 4x + 6y + 4\cos 2t \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = -3$
7	$\begin{cases} x' = -2x - 6y \\ y' = -x - y + 6t \end{cases}$ $x(0) = 4;\ y(0) = 1$	17	$\begin{cases} x' = 6x - 10y \\ y' = x - y + 5\cos t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = -3$	27	$\begin{cases} x' = -x + y + e^{-2t} \\ y' = x - y + 2e^{t} \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 1$
8	$\begin{cases} x' = -3x - 4y + e^{t} \\ y' = x + y + e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = -1$	18	$\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^{-t} \\ y' = x + 2y - 3e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = 2$	28	$\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t \\ y' = 5x - y - \cos t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 2$
9	$\begin{cases} x' = -5x + 2y + 4e^{2t} \\ y' = 4x - 3y - 2e^{2t} \end{cases}$ $x(0) = 3;\ y(0) = -2$	19	$\begin{cases} x' = -3x - y + 2 \\ y' = x - y + e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = -2$	29	$\begin{cases} x' = 6x - 2y - 3e^{2t} \\ y' = 5x - y - e^{2t} \end{cases}$ $x(0) = 4;\ y(0) = 0$
10	$\begin{cases} x' = 2x + 4y + 4t \\ y' = 3x + 6y - 3 \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 6$	20	$\begin{cases} x' = 4x + y + 3\cos 2t \\ y' = -2x + 3y - \sin 2t \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 0$	30	$\begin{cases} x' = -x + 5y + e^{t} \\ y' = -x + 3y + 2 \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = -3$

Завдання 5. Методом операційного числення розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку, права частина якого $f(t)$ задана графічно: для варіантів №1–№5 – на рис. 13, для варіантів №6–№10 – на рис. 14, для варіантів №11–№15 – на рис. 15, для варіантів №16–№20 – на рис. 16, для варіантів №21–№25 – на рис. 17, для варіантів №26–№30 – на рис. 18.

Вказівка. Виходячи з графіка, виразити функцію $f(t)$ аналітично однією формулою, застосовуючи одиничну функцію Хевісайда. При розв'язанні врахувати наявність в правій частині $f(t)$ запізнювань.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$x'' - 4x = f(t);\ x(0) = 2;\ x'(0) = 0$	16	$x'' + 4x = f(t);\ x(0) = 0;\ x'(0) = -2$
2	$x'' + 2x' = f(t);\ x(0) = 3;\ x(0) = -1$	17	$x'' + 2x' + x = f(t);\ x(0) = 1;\ x'(0) = -2$
3	$x'' - 3x' + 2x = f(t);\ x(0) = 3;\ x'(0) = -1$	18	$x'' + 9x = f(t);\ x(0) = 0;\ x'(0) = -3$
4	$x'' - 2x' + x = f(t);\ x(0) = -2;\ x'(0) = 0$	19	$x'' + 3x' = f(t);\ x(0) = 0;\ x'(0) = -2$
5	$x'' - 9x = f(t);\ x(0) = -2;\ x'(0) = 0$	20	$x'' - 3x' - 4x = f(t);\ x(0) = 2;\ x'(0) = -1$
6	$x'' - 2x' + 2x = f(t);\ x(0) = -1;\ x'(0) = 2$	21	$x'' + 4x' + 4x = f(t);\ x(0) = -2;\ x'(0) = 0$
7	$x'' - 4x' + 8x = f(t);\ x(0) = 0;\ x'(0) = -1$	22	$x'' - 6x' + 9x = f(t);\ x(0) = -2;\ x'(0) = 0$
8	$x'' - x' - 6x = f(t);\ x(0) = -1;\ x'(0) = 2$	23	$x'' - 16x = f(t);\ x(0) = -2;\ x'(0) = 0$
9	$x'' + 16x = f(t);\ x(0) = 0;\ x'(0) = -3$	24	$x'' - 2x' - 8x = f(t);\ x(0) = -2;\ x'(0) = 1$
10	$x'' - 6x' + 10x = f(t);\ x(0) = 4;\ x'(0) = 0$	25	$x'' + 6x' + 10x = f(t);\ x(0) = 2;\ x'(0) = 3$
11	$x'' + 2x' + 5x = f(t);\ x(0) = -1;\ x'(0) = 2$	26	$x'' - 6x' = f(t);\ x(0) = 0;\ x'(0) = -2$
12	$x'' - 2x' + 10x = f(t);\ x(0) = 1;\ x'(0) = 2$	27	$x'' + 4x' + 3x = f(t);\ x(0) = 2;\ x'(0) = 2$
13	$x'' - 5x' + 6x = f(t);\ x(0) = 0;\ x'(0) = 2$	28	$x'' + 5x' + 6x = f(t);\ x(0) = 4;\ x'(0) = 1$
14	$x'' - 5x' - 6x = f(t);\ x(0) = -2;\ x'(0) = 1$	29	$x'' - 2x' + 17x = f(t);\ x(0) = 0;\ x'(0) = 2$
15	$x'' + 2x' + 17x = f(t);\ x(0) = 4;\ x'(0) = 0$	30	$x'' - 6x' + 8x = f(t);\ x(0) = -2;\ x'(0) = 1$

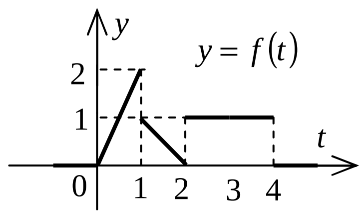

Рис. 13

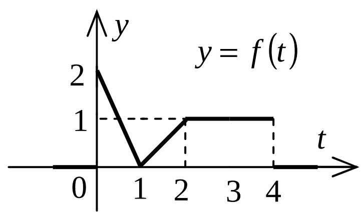

Рис. 14

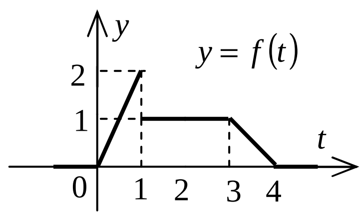

Рис. 15

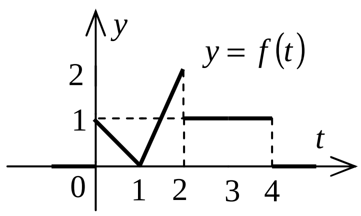

Рис. 16

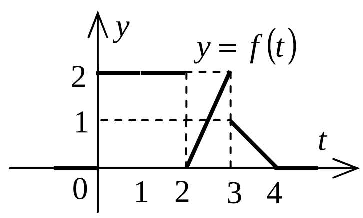

Рис. 17

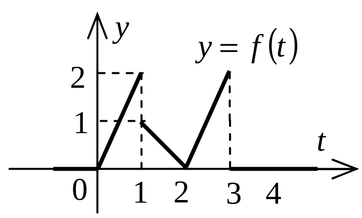

Рис. 18

Розділ 3. ЕЛЕМЕНТИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Методи варіаційного числення знаходять широке застосування в різних галузях науки та виробництва при постановці та розв'язанні задач моделювання, оптимізації та керування. Володіння ними стає складовою частиною сучасної інженерної освіти.

У цьому розділі наведено початкові теоретичні відомості з варіаційного числення з численними зразками розв’язання типових задач, доповнені контрольними запитаннями та індивідуальними розрахунково-графічними завданнями.

3.1. Функціонал та його варіація. Екстремум

3.1.1. Поняття про функціонал

Нехай задано деякий клас D функцій $y(x)$. Якщо кожній функції $y(x)$ із класу D за деяким законом ставиться у відповідність певне числове значення змінної I, то ця змінна I називається ***функціоналом*** від однієї функціональної змінної $y(x)$ і позначається $I = I[y] = I[y(x)]$.

Клас D функцій $y(x)$, на яких визначений функціонал, називається ***областю визначення*** функціоналу. При цьому функція $y(x)$ служить ***незалежною змінною (аргументом)*** функціоналу. Функції із області визначення D даного функціоналу I називаються ***функціями порівняння*** або ***допустимими функціями***.

Кожну функцію $y(x)$, яка належить області визначення D функціоналу $I[y]$, можна розглядати як точку (елемент) деякої множини (простору) функцій. Простори, елементами яких служать функції, називаються ***функціональними просторами***.

Функціонал — це функція, в якої значеннями незалежної змінної $y(x)$ є точки (елементи) функціонального простору, а значеннями залежної змінної I — числа.

Можна розглядати також функціонали від кількох незалежних функціональних змінних. Якщо скінченному набору функцій $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,y_n(x)$ з певного класу функцій D ставиться у відповідність за деяким законом певне числове значення змінної I, то I називається функціоналом від n функціональних змінних і позначається $I = I[y_1, y_2,\ldots,y_n] = I[y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)]$.

Приклад 1. Обчислити заданий функціонал при заданих значеннях аргументу:

а) $I[y] = y(4);\ y_1 = \sqrt{x};\ y_2 = \cos\dfrac{\pi x}{4}.$ б) $I[y] = \lim\limits_{x\to+\infty} y;\ y_1 = arctgx;\ y_2 = e^{-x}.$

в) $I[y] = y'(0);\ y_1 = \dfrac{x}{\cos x};\ y_2 = tg^2 x^3.$ г) $I[y] = \int\limits_0^2 y^2(x)dx;\ y_1 = \sin \pi x;\ y_2 = xe^x.$

д) $I[y] = \int\limits_0^{\pi/6} \sqrt{1+(y'(x))^2}dx;\ y_1 = x;\ y_2 = \ln\cos x.$ е) $I[y,z] = \int\limits_0^{\pi/2} y^3 z dx;\ y_1 = \cos x;\ z_1 = \sin^2 x.$

Розв'язання.

а) $I[y_1]=\sqrt{4}=2;\ I[y_2]=\cos\frac{4\pi}{4}=-1.$

б) $I[y_1]=\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx=\frac{\pi}{2};\ I[y_2]=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0.$

в) $I[y_1]=\left(\frac{x}{\cos x}\right)'\Bigg|_{x=0}=\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\Bigg|_{x=0}=1;$

$$I[y_2]=\left(tg^2x^3\right)'\Big|_{x=0}=2tgx^3\,\frac{1}{\cos^2 x^3}\cdot 3x^2\Bigg|_{x=0}=0.$$

г) $I[y_1]=\int\limits_0^2\sin^2\pi x dx=\int\limits_0^2\frac{1-\cos 2\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx--\frac{1}{2}\int\limits_0^2\cos 2\pi x dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^2-$

$-\frac{1}{4\pi}\sin 2\pi x\Big|_0^2=1;\ I[y_2]=\int\limits_0^2 xe^x dx=xe^x\Big|_0^2-\int\limits_0^2 e^x dx=2e^2-e^x\Big|_0^2=2e^2-e^2+e^0=e^2-1.$

д) $y'_1=x'=1;\ I[y_1]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+1^2}dx=\sqrt{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{6};\quad y_2=(\ln\cos x)'=-tgx;\ I[y_2]=$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(-tgx)^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\ln\left|tg\frac{\pi}{3}\right|-\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|=\ln\sqrt{3}.$$

е) $I[y_1,z_1]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin^2 xdx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos xdx=$

$$=\left|\begin{array}{l}\sin x=u;\ du=\cos xdx\\ \cos^2 x=1-u^2\\ u_H=\sin 0=0;\ u_B=\sin\frac{\pi}{2}=1\end{array}\right|=\int\limits_0^1 u^2\left(1-u^2\right)du=\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{15}.$$

Надалі будемо розглядати, в основному, функціонал вигляду $I[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx$, областю визначення якого служить клас функцій $C_1[a,b]$, що визначені та неперервні разом з першою похідною на відрізку $[a,b]$.

3.1.2. Екстремум функціоналу

Відстанню нульового порядку між функціями (лініями) $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $\rho_0=\rho_0(y_1,y_2)=\max\limits_{a\le x\le b}|y_1(x)-y_2(x)|$. При цьому вважається, що розглядувані функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$.

Відстанню першого порядку між функціями (лініями) $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число

$$\rho_1=\rho_1(y_1,y_2)=\max_{a\le x\le b}|y_1(x)-y_2(x)|+\max_{a\le x\le b}|y'_1(x)-y'_2(x)|.$$

При цьому вважається, що розглядувані функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні разом зі своїми першими похідними на відрізку $[a;b]$.

Приклад 2. Знайти відстань першого порядку між кривими $y = y_1(x) = x^2$ і $y = y_2(x) = x^3$ на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. $\rho_1 = \max\limits_{0\le x\le 1}|y_1(x) - y_2(x)| + \max\limits_{0\le x\le 1}|y'_1(x) - y'_2(x)|$.

Розглянемо функції $z_0(x) = y_1(x) - y_2(x) = x^2 - x^3$ і $z_1(x) = y'_1(x) - y'_2(x) = 2x - 3x^2$. Знайдемо їх найбільші та найменші значення на відрізку $[0;1]$:

$$z'_0(x) = 2x - 3x^2;\ z'_0(x) = 0;\ 2x - 3x^2 = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = \frac{2}{3};\ z_0(0) = 0;\ z_0(2/3) = (2/3)^2 -$$

$$-(2/3)^3 = 4/27;\ \ z_0(1) = 0;\quad \max_{0\le x\le 1} z_0(x) = 4/27;\quad \min_{0\le x\le 1} z_0(x) = 0;$$

$$z'_1(x) = 2 - 6x;\ z'_1(x) = 0;\ 2 - 6x = 0;\ x_1 = 1/3;$$

$$z_1(1/3) = 2\cdot(1/3) - 3\cdot(1/3)^2 = 1/3);\ z_1(0) = 0;\ z_1(1) = -1;\ \max_{0\le x\le 1} z_1(x) = 1/3;\quad \min_{0\le x\le 1} z_1(x) = -1.$$

Тоді

$$\max_{0\le x\le 1}|y_1(x) - y_2(x)| = \max_{0\le x\le 1}|z_0(x)| = \frac{4}{27};\ \max_{0\le x\le 1}|y'_1(x) - y'_2(x)| = \max_{0\le x\le 1}|z_1(x)| = 1;\ \rho_1 = \frac{4}{27} + 1 = 1\frac{4}{27}.$$

Нехай D_1 — деякий клас функцій порівняння (підмножина області визначення D) функціоналу $I = I[y]$. Функціонал $I = I[y]$ має в цьому класі D_1 ***абсолютний мінімум (максимум)***, який реалізується функцією $\overline{y}(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$ виконується нерівність

$$I[y(x)] \ge I[\overline{y}(x)] \quad \left(I[y(x)] \le I[\overline{y}(x)]\right).$$

Функціонал $I = I[y]$ має в класі D_1 ***локальний або відносний мінімум (максимум)***, який реалізується функцією $y_0(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$, яка близька до функції $y_0(x)$, виконується нерівність

$$I[y(x)] \ge I[y_0(x)] \quad (I[y(x)] \le I[y_0(x)]).$$

Максимуми і мінімуми називаються ***екстремумами***.

Якщо близькість функцій розуміється в смислі відстані нульового порядку, тобто $\rho_0(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — досить мале число, то такий відносний екстремум називається ***сильним***.

Якщо близькість функцій розуміється в смислі відстані першого порядку, тобто $\rho_1(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — досить мале число, то такий відносний екстремум називається ***слабким***.

На рис. 1 зображені лінії, близькі в смислі відстані нульового порядку (координати їх близькі, а напрямки дотичних можуть суттєво відрізнятись), а на рис. 2 наведені криві, близькі в смислі відстані першого порядку (близькі не тільки їх координати, а і напрямки дотичних).

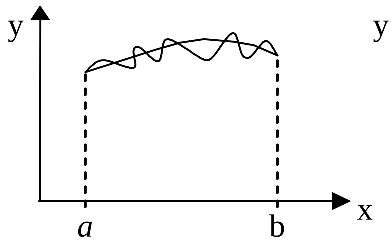

Рис.1

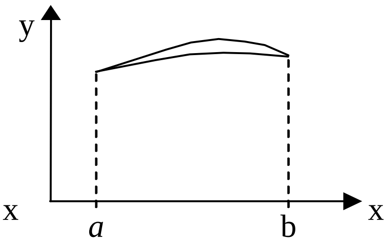

Рис.2

Абсолютний екстремум тим паче є відносним екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Сильний відносний екстремум тим паче є слабким екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Надалі будемо розглядати слабкий відносний екстремум і слова "слабкий", "відносний" будемо опускати.

Основною задачею варіаційного числення є дослідження функціоналу на екстремум.

3.1.3. Класичні задачі варіаційного числення

Задача про максимальну швидкодію (задача про брахістохрону). Знайти криву (рис.3), розміщену у вертикальній площині, що сполучає дві задані точки $A(a; y_a)$ і $B(b; y_b)$, які не лежать на одній вертикальній прямій, і таку, що матеріальна точка, рухаючись по цій кривій під дією сили тяжіння з точки A без початкової швидкості досягне точки B за найменший проміжок часу (рис.3). Така лінія називається ***брахістохроною***.

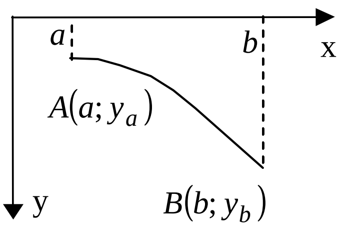

Рис. 3

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ знайти таку, яка доставляє мінімум функціоналу

$$I[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx \quad \text{при крайових умовах} \quad \begin{cases} y(a) = y_a; \\ y(b) = y_b. \end{cases}$$

Задача про геодезичні лінії. Нехай на поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$ задано дві точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$. Серед всіх ліній, які лежать на даній поверхні і з'єднують точки A і B, вибрати ту, дуга AB якої має найменшу довжину. Така найкоротша лінія називається ***геодезичною***.

Геодезична лінія — це найкоротша лінія, яка лежить на даній поверхні і сполучає дві дані точки.

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $x(t), y(t), z(t)$ параметра t знайти такі, які задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x(t), y(t), z(t)) = 0$ і доставляють мінімум функціоналу

$$I[y, y, z] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

при крайових умовах

$$x(t_1) = x_1;\ y(t_1) = y_1;\ z(t_1) = z_1;\quad x(t_2) = x_2;\ y(t_2) = y_2;\ z(t_2) = z_2.$$

Ізопериметрична задача (задача Дідо). Нехай на осі Ox задано дві точки $A(a;0)$ і $B(b;0)$. Серед всіх ліній заданої довжини l, які з'єднують на площині Oxy ці точки A і B, вибрати таку, що разом з відрізком AB обмежує найбільшу площу (рис.4).

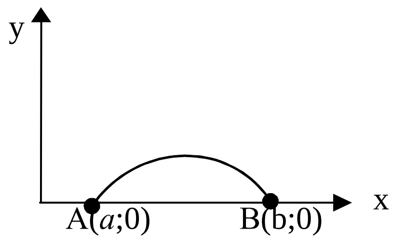

Рис. 4

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ вибрати таку, яка задовольняє рівняння зв'язку $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$ і доставляє максимум функціоналу $I[y] = \int_a^b y(x)dx$ при крайових умовах $\begin{cases} y(a) = 0; \\ y(b) = 0. \end{cases}$

3.1.4. Варіація функції та приріст функціоналу. Неперервність. Лінійний функціонал

Нехай функціонал $I = I[y]$ визначений на класі функцій D, $y(x)$ і $\overline{y}(x)$ — довільні функції даного класу D. Функція, яка дорівнює різниці функцій $\overline{y}(x)$ і $y(x)$, називається ***приростом або варіацією аргументу*** y функціоналу $I[y]$ і позначається δy: $\delta y = \delta y(x) = \overline{y}(x) - y(x)$. Тоді $\overline{y}(x) = y + \delta y$.

Різниця $\Delta I = \Delta I[y, \delta y] = I[y + \delta y] - I[y]$ називається ***приростом функціоналу*** $I[y]$, який відповідає варіації δy аргументу.

Зазначимо, що *похідна варіації функції дорівнює варіації похідної*: $(\delta y)' = \delta y'$.

Дійсно, $(\delta y)' = (\overline{y}(x) - y(x))' = \overline{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$.

Якщо нескінченно малому приросту функції δy відповідає нескінченно малий приріст функціоналу ΔI, то такий функціонал $I[y]$ називається ***неперервним***. Точніше, функціонал $I[y]$ називається ***неперервним*** на кривій $y = y(x)$ в смислі відстані k–ого порядку, якщо за довільно заданим $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при виконанні умови $\rho_k(y, y_0) < \delta$ справджується нерівність $|\Delta I| = |I[y] - I[y_0]| < \varepsilon$.

Функціонал $I[y]$ називається ***лінійним***, якщо виконуються умови:

1. Функціонал від алгебраїчної суми функцій дорівнює відповідній алгебраїчній сумі функціоналів: $I[y_1 + y_2] = I[y_1] + I[y_2]$.

2. Сталий множник можна виносити за знак функціоналу: $I[cy] = cI[y]$.

3.1.5. Перша та друга варіації функціоналу

Якщо для довільно малої варіації аргументу δy приріст функціоналу ΔI можна подати у вигляді суми головної частини, лінійної відносно δy, та нескінченно малої вищого порядку порівняно з δy: $\Delta I = L[y, \delta y] + \beta[y, \delta y]$, де $L[y, \delta y]$ — лінійний відносно δy функціонал, $\beta[y, \Delta y]$ — нескінченно малий вищого порядку порівняно з δy функціонал: $\beta[y, \delta y] = o(\delta y)$, тобто, $\beta[y, \delta y] = \gamma[y, \delta y] \cdot \max|\delta y|$, де $\lim\limits_{\max|\delta y| \to 0} \gamma[y, \delta y] = 0$, то сам функціонал $I[y]$ називається ***варійовним***, а головна лінійна відносно δy частина його приросту $L[y, \delta y]$ називається ***диференціалом*** або ***варіацією функціоналу*** і позначається δI: $\delta I = L[y,\delta y]$, $\Delta I = \delta I + \beta[y,\delta y]$, де $\beta[y,\delta y] = o(\delta y)$. (***Перше означення варіації*** функціоналу).

При дослідженні функціоналів варіація функціоналу відіграє роль, аналогічну тій, яку виконує при дослідженні функцій диференціал. В таблиці 1 наведено відповідність понять диференціального та варіаційного числень.

Таблиця 1

№ п/п	Диференціальне числення	Варіаційне числення
1	Аргумент — числова змінна x	Аргумент — числова функція $y(x)$
2	Залежна змінна — числова y	Залежна змінна — числова I
3	Приріст аргументу Δx	Варіація аргументу δy
4	Приріст функції Δy	Приріст функціоналу ΔI
5	Диференціал функції dy	Варіація функціоналу δI
6	Другий диференціал функції $d^2 y$	Друга варіація функціоналу $\delta^2 I$
7	Необхідна умова екстремуму $dy = 0$	Необхідна умова екстремуму $\delta I = 0$
8	Стаціонарна точка функції	Стаціонарна функція (допустима екстремаль) функціоналу
9	Достатня умова екстремуму: $d^2 y > 0$ – min, $d^2 y < 0$ – max	Достатня умова екстремуму: $\delta^2 I > 0$ – min, $\delta^2 I < 0$ – max

Варіацію δI називають також ***варіацією першого порядку*** або ***першою варіацією функціоналу*** $I[y]$. Варіацію другого порядку введемо аналогічно тому, як це робиться для диференціала другого порядку функції.

Візьмемо довільну допустиму функцію $y = y(x)$ і довільну її варіацію $\delta y = \delta y(x)$ таку, що функція $y + \delta y$ є допустимою функцією. Зафіксуємо y та δy і розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $\overline{y} = y + \alpha\delta y$, де α — деяке число (параметр). Функціонал $I[y]$ на вказаній сім'ї функцій є функцією параметра α: $I[y + \alpha\delta y] = \Phi(\alpha)$.

Розкладемо цю функцію за формулою Тейлора до квадратичного члена включно в околі точки $\alpha = 0$:

$$I[y+\alpha\delta y] = I[y] + \left\{\frac{d}{d\alpha} I[y+\alpha\delta y]\right\}\Bigg|_{\alpha=0} \cdot \alpha + \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2}{d\alpha^2} I[y+\alpha\delta y]\right\}\Bigg|_{\alpha=0} \cdot \alpha^2 + R_2(y,\delta y,\alpha),$$

де залишковий член $R_2(y,\delta y,\alpha)$ є нескінченно малою вищого порядку порівняно з α^2: $R_2(y,\delta y,\alpha) = o(\alpha^2)$.

Тоді варіаціям першого та другого порядку можна дати такі означення.

Варіацією або ***першою варіацією функціоналу*** δI називається значення першої похідної функції $\Phi(\alpha)=I[y+\alpha\delta y]$ при $\alpha=0$: $\delta I=\delta I[y,\delta y]=\dfrac{d}{d\alpha}I[y+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}$.

(***Друге означення варіації*** функціоналу).

Можна показати, що це означення першої варіації рівносильне наведеному раніше. На практиці зручніше користуватись останнім означенням.

Другою варіацією функціоналу або ***варіацією другого порядку*** $\delta^2 I$ називається значення другої похідної функції $\Phi(\alpha)=I[y+\alpha\delta y]$ при $\alpha=0$: $\delta^2 I=\dfrac{d^2}{d\alpha^2}I[y+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}$.

Приклад 3. Знайти варіацію функціоналу

а) $I[y]=\int\limits_a^b y^2(x)dx$; б) $I[y]=\int\limits_a^b y(y+\sin x)dx$; в) $I[y]=\int\limits_a^b y^3(x)dx$;

користуючись першим означенням як головної лінійної відносно δy частини приросту ΔI.

Розв'язання. а) Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I=\int\limits_a^b (y(x)+\delta y)^2dx-\int\limits_a^b y^2(x)dx=\int\limits_a^b \left(y^2(x)+2y(x)\delta y+(\delta y)^2\right)dx-\int\limits_a^b y^2(x)dx=$$

$$=\int\limits_a^b y^2(x)dx+2\int\limits_a^b y(x)\delta y dx+\int\limits_a^b(\delta y)^2dx-\int\limits_a^b y^2(x)dx=2\int\limits_a^b y(x)\delta y dx+\int\limits_a^b(\delta y)^2dx.$$

За першим означенням $\delta I=2\int\limits_a^b y(x)\delta y dx.$

б) Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I=\int\limits_a^b (y+\delta y)(y+\delta y+\sin x)dx-\int\limits_a^b y(y+\sin x)dx=\int\limits_a^b \Big(y^2+y\delta y+y\sin x+y\delta y+$$

$$+(\delta y)^2+\sin x\cdot\delta y\Big)dx-\int\limits_a^b y(y+\sin x)dx=\int\limits_a^b\Big(y^2+2y\delta y+y\sin x+(\delta y)^2+\sin x\cdot\delta y-$$

$$-y^2-y\sin x\Big)dx=\int\limits_a^b\left(2y\delta y+(\delta y)^2+\sin x\cdot\delta y\right)dx=\int\limits_a^b(2y+\sin x)\delta y dx+\int\limits_a^b(\delta y)^2dx.$$

За першим означенням $\delta I=\int\limits_a^b(2y+\sin x)\delta y dx$.

в) Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I=\int\limits_a^b(y+\delta y)^3dx-\int\limits_a^b y^3dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left(y^3+3y^2\delta y+3y(\delta y)^2+(\delta y)^3\right)dx-\int\limits_a^b y^3dx=3\int\limits_a^b y^2\delta y dx+3\int\limits_a^b y(\delta y)^2dx+\int\limits_a^b(\delta y)^3dx.$$

За першим означенням $\delta I=3\int\limits_a^b y^2\delta y dx$.

Приклад 4.Знайти варіацію функціоналу

$$\text{а) } I[y]=\int_a^b y^2(x)dx;\ \text{б) } I[y]=\int_a^b x\sqrt{y}dx;\ \text{в) } I[y]=\int_a^b (y')^2\sin y dx;$$

користуючись другим означенням варіації функціоналу як похідної по параметру.

Розв'язання. У відповідності з другим означенням варіації функціоналу маємо:

$$\text{а) } \delta I=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b (y+\alpha\delta y)^2dx\Big|_{\alpha=0}=\int_a^b \left((y+\alpha\delta y)^2\right)'_\alpha dx\Big|_{\alpha=0}=\int_a^b 2(y+\alpha\delta y)\delta y dx\Big|_{\alpha=0}=2\int_a^b y\delta y dx;$$

$$\text{б) } \delta I=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b x\sqrt{y+\alpha\delta y}dx\Big|_{\alpha=0}=\int_a^b \left(x\sqrt{y+\alpha\delta y}\right)'_\alpha dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_a^b x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+\alpha\delta y}}\cdot(y+\alpha\delta y)'_\alpha dx\Big|_{\alpha=0}=\frac{1}{2}\int_a^b \frac{x\delta y}{\sqrt{y+\alpha\delta y}}dx\Big|_{\alpha=0}=\frac{1}{2}\int_a^b \frac{x\delta y}{\sqrt{y}}dx;$$

$$\text{в) } \delta I=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b \left((y+\alpha\delta y)'_x\right)^2\sin(y+\alpha\delta y)dx\Big|_{\alpha=0}=\int_a^b \frac{d}{d\alpha}\left((y'+\alpha\delta y')^2\sin(y+\alpha\delta y)\right)dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_a^b \left(2(y'+\alpha\delta y')\delta y'\sin(y+\alpha\delta y)+(y'+\alpha\delta y')^2\cos(y+\alpha\delta y)\cdot\delta y\right)\Big|_{\alpha=0}dx=$$

$$=\int_a^b \left(2y'\sin y\cdot\delta y'+(y')^2\cos y\cdot\delta y\right)dx.$$

3.2. Необхідна умова екстремуму. Диференціальне рівняння екстремалей

3.2.1. Необхідна умова екстремуму функціоналу

Як відомо, необхідна умова екстремуму функції полягає в рівності нулю її диференціала. Аналогічно, для функціоналу справедлива теорема (***необхідна умова екстремуму*** в варіаційній формі):

Якщо функціонал $I[y]$ *має варіацію* δI *і досягає на деякій функції* $y_0=y_0(x)$ *екстремуму, то його варіація на цій функції дорівнює нулю:* $\delta I[y_0,\delta y]=0$.

Доведення. Розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $y_0+\alpha\delta y$, де α — деяке число. На вказаній сім'ї функцій функціонал $I[y]$ є функцією параметра α: $\delta I[y_0,\delta y]=\Phi(\alpha)$, яка згідно з умовою теореми має екстремум при α=0.

У відповідності з необхідною умовою екстремуму функції маємо $\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=0$, тобто $\frac{d}{d\alpha}I[y_0+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}=0$. Згідно з другим означенням вказана похідна є варіацією функціоналу $\delta I[y_0,\delta y]$. Отже, $\delta I[y_0,\delta y]=0$.

Функції, на яких варіація функціоналу існує і дорівнює нулю, називаються ***стаціонарними функціями*** або ***допустимими екстремалями***.

3.2.2. Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями. Диференціальне рівняння екстремалей (рівняння Ейлера)

Розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення: Знайти мінімум (максимум) функціоналу $I[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ при крайових умовах $y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$ серед неперервно диференційовних на відрізку $[x_1;x_2]$ функцій $y=y(x)$, де x_1,x_2,y_1,y_2 — відомі числа.

Оскільки в даній задачі всі допустимі криві, серед яких шукається та, що доставляє екстремум функціоналу, проходять через дві різні нерухомі точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$, то поставлена задача називається ***варіаційною задачею з закріпленими кінцями***.

Теорема. *Допустимі екстремалі функціоналу з закріпленими кінцями* $I[y]=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$; $y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$, *визначаються як розв'язки диференціального рівняння* $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ *при крайових умовах* $y(x_1)=y_1$; $y(x_2)=y_2$.

Диференціальне рівняння другого порядку $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ називається ***рівнянням Ейлера***. Розв'язки рівняння Ейлера називаються ***екстремалями***, а само рівняння Ейлера — ***диференціальним рівнянням екстремалей***.

Таким чином, в даній задачі ***допустимі екстремалі*** виділяються зі всіх екстремалей врахуванням крайових умов.

Доведення. Необхідна умова екстремуму, з якої знаходяться екстремалі, має вигляд $\delta I[y,\delta y]=0$. Оскільки ця умова повинна виконуватись для будь-якої варіації функції δy, то при закріплених кінцях повинні справджуватись рівності $\delta y(x_1)=0,\ \ \delta y(x_2)=0$.

Виразимо варіацію функціоналу через функцію $F(x,y,y')$ та її похідні:

$$\delta I=\left.\frac{d}{d\alpha}I[y_0+\alpha\,\delta y]\right|_{\alpha=0}=\left.\frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2}[F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')dx\right|_{\alpha=0}=$$

$$=\left.\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\alpha}F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\,dx\right|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot(y+\alpha\delta y)'_\alpha+$$

$$+F'_{y'}(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')(y'+\alpha\delta y')'_\alpha\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot\delta y+$$

$$+F'_{y'}(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot\delta y'\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y(x,y,y')\cdot\delta y+$$

$$+F'_{y'}(x,y,y')\cdot\delta y'\Big]dx=\int_{x_1}^{x_2}F'_y\,\delta y\,dx+\int_{x_1}^{x_2}F'_{y'}\,\delta y'\,dx\ \text{, де }\ F'_y=F'_y(x,y,y'),\quad F'_{y'}=F'_{y'}(x,y,y').$$

До другого доданка останньої рівності застосуємо інтегрування частинами:

$$\int_{x_1}^{x_2} F'_{y'}\,\delta y'\,dx = \left| \begin{array}{c} u = F'_{y'}; \quad du = \dfrac{d}{dx}F'_{y'}\cdot dx \\ dv = \delta y'\cdot dx = (\delta y)'\,dx; \quad v = \int (\delta y)'\,dx = \delta y \end{array} \right| = F'_{y'}\cdot\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2} \delta y\cdot\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot dx = F'_{y'}\cdot\delta y(x_2) - F'_{y'}\cdot\delta y(x_1) - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\cdot dx = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\cdot dx,$$

оскільки $\delta y(x_1) = 0$ і $\delta y(x_2) = 0$.

Тоді варіацію функціоналу можна подати у вигляді

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} F'_y\cdot\delta y\,dx - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y\,dx.$$

На екстремалі варіація функціоналу повинна дорівнювати нулю:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y\,dx = 0,$$

причому для довільної варіації функції δy такої, що $\delta y(x_1) = 0$ і $\delta y(x_2) = 0$. Це можливо лише за умови, що вираз в дужках під знаком інтеграла дорівнює нулю для всіх x із відрізка $[x_1; x_2]$:

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0.$$

<u>Приклад 5.</u> Знайти екстремалі функціоналу:

а) $I[y] = \int_0^1 \left(2y - 2xy' + (y')^2\right)dx$; б) $I[y] = \int_0^{+\infty}\left(a^2y^2 + (y')^2\right)dx$, де $a = const > 0$.

<u>Розв'язання.</u> а)Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = 2y - 2xy' + (y')^2; \quad F'_y = 2; \quad F'_{y'} = -2x + 2y'; \quad \frac{d}{dx}F'_{y'} = \frac{d}{dx}(-2x + 2y') = -2 + 2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду: $2 - (-2 + 2y'') = 0$; $y'' - 2 = 0$. Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y' = \int 2dx = 2x + C_1; \quad y = \int (2x + C_1)dx = x^2 + C_1x + C_2.$$

Отже, екстремалями служать функції $\underline{y = x^2 + C_1x + C_2}$, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = a^2y^2 + (y')^2; \; F'_y = 2a^2y; \;\; F'_{y'} = 2y'; \; \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду

$$2a^2y - 2y'' = 0; \quad y'' - a^2y = 0.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$k^2 - \alpha^2 = 0; \; k_{1,2} = \pm\alpha; \quad \underline{y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{-\alpha x}}$$

— шукані екстремалі, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

<u>Приклад 6.</u> Знайти екстремалі функціоналу, що задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

а) $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(9y^2-(y')^2\right)dx;\ y(0)=2;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$

б) $I[y]=\int\limits_0^{\pi}\left(4y\cos x+(y')^2-y^2\right)dx;\ y(0)=0;\ y(\pi)=0;$

в) $I[y]=\int\limits_0^{1}\left(y^2+(y')^2+8y\left(e^{-x}+3e^{2x}\right)\right)dx;\quad y(0)=4;\ y(1)=4e^2;$

г) $I[y]=\int\limits_0^{1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}dx;\ y(0)=1;\ y(1)=0.$

<u>Розв'язання.</u> а) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=9y^2-(y')^2;\ F'_y=18y;\ F'_{y'}=-2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'}=-2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду

$$18y-(-2y'')=0;\quad y''+9y=0.$$

Розв'яжемо одержане рівняння: $k^2+9=0$; $k_{1,2}=\pm 3i$.

Екстремалями служать функції $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Знайдемо конкретні значення C_1 і C_2 із крайових умов:

$$\begin{cases} C_1\cos 0+C_2\sin 0=2; & C_1=2; \\ C_1\cos\frac{3\pi}{2}+C_2\sin\frac{3\pi}{2}=0; & C_2=0. \end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y=2\cos 3x}$.

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=4y\cos x+(y')^2-y^2;\ F'_y=4\cos x-2y;\ F'_{y'}=2y';\quad \frac{d}{dx}F'_{y'}=2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду:

$$4\cos x-2y-2y''=0;\quad y''+y=2\cos x.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y''+y=0;\quad k^2+1=0;\quad k_{1,2}=\pm i;\quad \overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x;$$

$$y_*=(A\cos x+B\sin x)x;\quad y'_*=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x);$$

$$y''_*=2(-A\sin x+B\cos x)-x(A\cos x+B\sin x);$$

$$2(-A\sin x+B\cos x)-x(A\cos x+B\sin x)+$$

$$(A\cos x+B\sin x)x=2\cos x;\quad -A\sin x+B\cos x=\cos x;$$

$$\begin{matrix}\cos x: \\ \sin x:\end{matrix}\begin{cases} B=1; & B=1; \\ -A=0; & A=0; \quad y_*=x\sin x; \end{cases}$$

$$y=\overline{y}+y_*=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x$$

— екстремалі, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Крайові умови дають систему алгебраїчних рівнянь для знаходження C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 + 0\cdot\sin 0 = 0; \\ C_1\cos\pi + C_2\sin\pi + \pi\cdot\sin\pi = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_1 + C_2\cdot 0 = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_1 = 0; \\ 0\cdot C_2 = 0. \end{matrix}$$

З останньої рівності випливає, що C_2 може набувати довільних значень. Значить, допустимими екстремалями служать функції $\underline{y = C_2\sin x + x\sin x}$, де C_2 — довільна стала.

Таким чином, варіаційна задача має нескінченну множину розв'язків.

в) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y') = y^2 + (y')^2 + 8y\left(e^{-x} + 3e^{2x}\right);\ F'_y = 2y + 8\left(e^{-x} + 3e^{2x}\right);\ F'_{y'} = 2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду:

$$2y + 8\left(e^{-x} + 3e^{2x}\right) - 2y'' = 0; \quad y'' - y = 4e^{-x} + 12e^{2x}.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y'-y=0;\quad k^2-1=0;\quad k_{1,2}=\pm 1;\quad \bar{y} = C_1e^x + C_2e^{-x};\quad f_1(x) = 4e^{-x};\quad y_{*1} = Axe^{-x};$$

$$y'_{*1} = Ae^{-x} - Axe^{-x};\quad y''_{*1} = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} = Axe^{-x} - 2Ae^{-x};$$

$$Axe^{-x} - 2Ae^{-x} - Axe^{-x} = 4e^{-x};\quad -2A = 4;\quad A = -2;\quad y_{*1} = -2xe^{-x};\quad f_2(x) = 12e^{2x};\quad y_{*2} = Ae^{2x};$$

$$y'_{*2} = 2Ae^{2x};\quad y''_{*2} = 4Ae^{2x};\quad 4Ae^{2x} - Ae^{2x} = 12e^{2x};\quad 3A = 12;\quad A = 4;$$

$$y_{*2} = 4e^{2x};\quad y_* = y_{*1} + y_{*2} = -2xe^{-x} + 4e^{2x};\quad y = \bar{y} + y_* = C_1e^x + C_2e^{-x} - 2xe^{-x} + 4e^{2x}$$

— екстремалі, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Використаємо крайові умови для знаходження C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1e^0 + C_2e^{-0} - 2\cdot 0\cdot e^{-0} + 4e^{2\cdot 0} = 4; \\ C_1e^1 + C_2e^{-1} - 2\cdot 1\cdot e^{-1} + 4e^{2\cdot 1} = 4e^2; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1e + C_2e^{-1} = 2e^{-1}; \end{cases}$$

$$C_1 = C_2;\ -C_2\cdot e + C_2\cdot\frac{1}{e} = 2\cdot\frac{1}{e};\ C_2\left(-e^2+1\right) = 2;\ C_2 = \frac{2}{1-e^2};\quad C_1 = -\frac{2}{1-e^2} = \frac{2}{e^2-1}.$$

Отже, допустима екстремаль

$$\underline{y = \frac{2}{e^2-1}e^x + \frac{2}{1-e^2}e^{-x} - 2xe^{-x} + 4e^{2x}.}$$

г) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x};\ F'_y = 0;\ F'_{y'} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+(y')^2}}2y' =$$

$$= \frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}};\quad \frac{d}{dx}F'_{y'} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}\right).$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду:

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}}\right) = 0.$$

Звідси

$$y' = \frac{C_1 x}{\sqrt{1 - C_1^2 x^2}}; \quad y = \int \frac{C_1 x dx}{\sqrt{1 - C_1^2 x^2}} = \begin{vmatrix} u = 1 - C_1^2 x^2; \\ du = -2C_1^2 x dx \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2C_1}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{C_1}\sqrt{u} + C_2 = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1 - C_1^2 x^2} + C_2.$$

Отже, $y = -\frac{1}{C_1}\sqrt{1 - C_1^2 x^2} + C_2$ або в неявній формі $x^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{C_1^2}$ - рівняння екстремалей.

Як бачимо, екстремалями служить сім'я кіл.

Використовуючи крайові умови, знаходимо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} 0^2 + (1 - C_2)^2 = \frac{1}{C_1^2}; \\ 1^2 + (0 - C_2)^2 = \frac{1}{C_1^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - 2C_2 + C_2^2 = \frac{1}{C_1^2}; \\ 1 + C_2^2 = \frac{1}{C_1^2}; \end{cases} \quad \begin{matrix} -2C_2 = 0; \quad C_2 = 0; \\ \frac{1}{C_1^2} = 1; \quad C_2 = 1. \end{matrix}$$

Тоді $\underline{x^2 + y^2 = 1}$ —допустима екстремаль.

Приклад 7. Визначити форму твердого тіла, що рухається в потоці газу з найменшим опором. Вважати шукане тіло тілом обертання.

Розв'язання. З фізичних міркувань випливає, що задача зводиться до мінімізації сили опору

$$I[y] = 4\pi\rho v^2 \int_0^l (y')^3 y dx \text{ при крайових умовах } \begin{cases} y(0) = 0; \\ y(l) = R, \end{cases},$$

де ρ — густина газу, v —швидкість газу відносно тіла, l — довжина тіла обертання, R — його поперечний радіус.

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = (y')^3 y; \quad F'_y = (y')^3; \quad F'_{y'} = y \cdot 3(y')^2 = 3y(y')^2;$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = \frac{d}{dx}\left(3y(y')^2\right) = 3\left(y' \cdot (y')^2 + y \cdot 2y' \cdot y''\right) = 3(y')^3 + 6y \cdot y' \cdot y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$ набуває вигляду:

$$(y')^3 - \left(3(y')^3 + 6y \cdot y' \cdot y''\right) = 0; \quad 3y \cdot y' \cdot y'' + (y')^3 = 0.$$

Ясно, що $y \neq const$, тоді $y' \neq 0$. Останнє рівняння спрощується: $3yy'' + (y')^2 = 0.$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y' = p, \quad p = p(y); \quad y'' = p' \cdot p; \quad p' = \frac{dp}{dy}; \quad 3y \cdot p' \cdot p + p^2 = 0 \quad \Big| \; : p = y' \neq 0; \quad 3y \cdot p' + p = 0;$$

$$3y\frac{dp}{dy} = -p; \quad \int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{3}\int \frac{dy}{y}; \quad \ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln|C_1|;$$

$$p = C_1 y^{-\frac{1}{3}}; \quad y' = C_1 y^{-\frac{1}{3}}; \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y^{-\frac{1}{3}}; \quad \int y^{\frac{1}{3}} dy = C_1 \int dx; \quad \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} = C_1 x + C_2; \; y = \left(\frac{4(C_1 x + C_2)}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$$

— екстремалі, де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{4(C_1\cdot 0+C_2)}{3}\right)^{\frac{3}{4}}=0; & C_2=0; \\ \left(\dfrac{4(C_1\cdot l+C_2)}{3}\right)^{\frac{3}{4}}=R; & \dfrac{3}{4}C_1 l=R^{\frac{4}{3}};\quad C_1=\dfrac{3}{4}R^{\frac{4}{3}}l^{-1}. \end{cases}$$

Тоді $y=\left(\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{4}R^{\frac{4}{3}}l^{-1}x\right)^{\frac{3}{4}}=R\left(\dfrac{x}{l}\right)^{\frac{3}{4}}$ — допустима екстремаль.

Оскільки допустима екстремаль єдина і з фізичних міркувань випливає, що поставлена задача має розв'язок, то функція $\underline{y=R(x/l)^{\frac{3}{4}}}$ визначає форму тіла обертання з найменшим опором.

3.2.3. Диференціальне рівняння екстремалей функціоналу, в який входять похідні вищих порядків (рівняння Ейлера–Пуассона)

Ставиться задача знаходження мінімуму (максимуму) функціоналу

$$I[y]=\int_{x_1}^{x_2}F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)dx$$

при крайових умовах

$$y^{(i)}(x_1)=y_1^{(i)},\ y^{(i)}(x_2)=y_2^{(i)},\ i=\overline{0,n-1}.$$

Із необхідної умови екстремуму $\delta I=0$ при $\delta y(x_1)=0$ і $\delta y(x_2)=0$ випливає, що допустимі екстремалі є розв'язками диференціального рівняння $F_y'+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\dfrac{d^i}{dx^i}F_{y^{(i)}}'=0$ при крайових умовах $y^{(i)}(x_1)=y_1^{(i)},\ y^{(i)}(x_2)=y_2^{(i)},\ i=\overline{0,n-1}.$

Розв'язки останнього диференціального рівняння називаються ***екстремалями***, а саме рівняння називається диференціальним рівнянням екстремалей або ***рівнянням Ейлера–Пуассона***.

Приклад 8. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

а) $I[y]=\int_0^1\left(y^2+2(y')^2+(y'')^2\right)dx;\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\quad y(1)=0,\ y'(1)=-sh1;$

б) $I[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((y'')^2-y^2\right)dx;\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1;$

в) $I[y]=\int_{-1}^{0}\left(240y-(y''')^2\right)dx;\ y(-1)=1,\ y'(-1)=-\dfrac{9}{2},\quad y''(-1)=16,\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

Розв'язання. а) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера–Пуассона:

$$F(x,y,y',y'')=y^2+2(y')^2+(y'')^2;\ \ F_y'=2y;\ \ F_{y'}'=2\cdot 2y'=4y';\ \ F_{y''}'=2y'';$$

$$\frac{d}{dx}F_{y'}'=\frac{d}{dx}(4y')=4y'';\ \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}'=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(2y'')\right)=\frac{d}{dx}(2y''')=2y^{IV}.$$

Тоді рівняння Ейлера–Пуассона

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} = 0$$

набуває вигляду $2y - 4y'' + 2y^{IV} = 0;\ y^{IV} - 2y'' + y = 0.$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$k^4 - 2k^2 + 1 = 0;\ \left(k^2 - 1\right)^2 = 0;\ k_1 = k_2 = 1;\ k_3 = k_4 = -1; \quad y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$$

— екстремалі, де C_1, C_2, C_3, C_4 — довільні сталі.

Допустимі екстремалі знайдемо, визначивши конкретні значення C_1, C_2, C_3, C_4 із крайових умов:

$$y' = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x - C_3 e^{-x} + C_4 e^{-x} - C_4 x e^{-x};$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 e^0 + C_3 e^{-0} + C_4 \cdot 0 e^{-0}; \\ 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 + C_2 \cdot 0 e^0 - C_3 e^{-0} + C_4 e^{-0} - C_4 \cdot 0 e^{-0}; \\ 0 = C_1 e^1 + C_2 \cdot 1 e^1 + C_3 e^{-1} + C_4 \cdot 1 e^{-1}; \\ -sh1 = C_1 e^1 + C_2 e^1 + C_2 \cdot 1 e^1 - C_3 e^{-1} + C_4 e^{-1} - C_4 \cdot 1 e^{-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_3; \\ 1 = C_1 + C_2 - C_3 + C_4; \\ 0 = C_1 e + C_2 e + C_3 e^{-1} + C_4 e^{-1}; \\ -sh1 = C_1 e + 2C_2 e - C_3 e; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_1 = \frac{1}{2}; & C_3 = -\frac{1}{2}; \\ C_2 = -\frac{1}{2}; & C_4 = \frac{1}{2}. \end{matrix}$$

Отже, допустима екстремаль

$$y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} = \underline{(1-x)sh\, x}.$$

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера–Пуассона:

$$F(x, y, y', y'') = (y'')^2 - y^2;\ F'_y = -2y;\ F'_{y'} = 0;\ F'_{y''} = 2y'';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = 0;\ \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} = 2y^{IV}.$$

Тоді рівняння Ейлера–Пуассона

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} = 0$$

набуває вигляду $-2y - 0 + 2y^{IV} = 0;\ y^{IV} - y = 0.$

Розв'яжемо останнє рівняння:

$$k^4 - 1 = 0;\ \left(k^2 - 1\right)\left(k^2 + 1\right) = 0;\ \left[\begin{matrix} k^2 - 1 = 0;\ k_{1,2} = \pm 1; \\ k^2 + 1 = 0;\ k_{3,4} = \pm i; \end{matrix}\right. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

— екстремалі.

Конкретні значення C_1, C_2, C_3, C_4 знайдемо з крайових умов:

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x;$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + C_3; \\ 0 = C_1 - C_2 + C_4; \\ 0 = C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + C_4; \\ -1 = C_1 e^{\frac{\pi}{2}} - C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - C_3; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_1 = 0; & C_3 = 1; \\ C_2 = 0; & C_4 = 0. \end{matrix}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y = \cos x}.$

в) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера–Пуассона:

$$F(x, y, y', y'', y''') = 240y - (y''')^2;\ F_y^{'} = 240;\ F_{y'}^{'} = 0;\ F_{y''}^{'} = 0;$$

$$F_{y'''}^{'} = -2y''';\ \frac{d}{dx}F_{y'}^{'} = 0;\ \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}^{'} = 0;\ \frac{d^3}{dx^3}F_{y'''}^{'} = -2y^{(6)}.$$

Тоді рівняння Ейлера–Пуассона

$$F_{y'}^{'} - \frac{d}{dx}F_{y'}^{'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}^{'} - \frac{d^3}{dx^3}F_{y'''}^{'} = 0$$

набуває вигляду $240 - 0 + 0 - \left(-2y^{(6)}\right) = 0;\ y^{(6)} + 120 = 0.$

Розв'яжемо останнє рівняння:

$$y^{(6)} = -120;\quad y^{(5)} = -120x + C_1;\qquad y^{(4)} = \int(-120x + C_1)dx = -60x^2 + C_1x + C_2;$$

$$y^{(3)} = \int\left(-60x^2 + C_1x + C_2\right)dx = -20x^3 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3;$$

$$y^{(2)} = \int\left(-20x^3 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3\right)dx = -5x^4 + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4;$$

$$y^{(1)} = \int\left(-5x^4 + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4\right)dx = -x^5 + C_1\frac{x^4}{24} + C_2\frac{x^3}{6} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4x + C_5;$$

$$y = \int\left(-x^5 + C_1\frac{x^4}{24} + C_2\frac{x^3}{6} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4x + C_5\right)dx = -\frac{x^6}{6} +$$

$$+ C_1\frac{x^5}{120} + C_2\frac{x^4}{24} + C_3\frac{x^3}{6} + C_4\frac{x^2}{2} + C_5x + C_6$$

— екстремалі, де $C_1, C_2, \ldots, C_6$ — довільні сталі.

Використавши крайові умови, знайдемо значення $C_1, C_2, \ldots, C_6$.

Спочатку із крайових умов $y^{(i)}(0) = 0,\ i = \overline{0,2}$ визначаємо $C_4 = C_5 = C_6 = 0$. Тоді на основі крайових умов

$$y(-1) = 1;\ y'(-1) = -\frac{9}{2};\ y''(-1) = 16$$

одержуємо систему для знаходження C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} 1 = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{C_1}{120} + \dfrac{C_2}{24} - \dfrac{C_3}{6}; \\ -\dfrac{9}{2} = 1 + \dfrac{C_1}{24} - \dfrac{C_2}{6} + \dfrac{C_3}{2}; \\ 16 = -5 - \dfrac{C_1}{6} + \dfrac{C_2}{2} - C_3; \end{cases}\quad \begin{matrix} C_3 = -1; \qquad C_2 = 0; \\ C_1 = -120. \end{matrix}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y = -\frac{x^6}{6} - x^5 - \frac{x^3}{6}}.$

3.2.4. Система диференціальних рівнянь екстремалей функціоналу, що залежить від кількох функцій (система рівнянь Ейлера–Лагранжа)

Ставиться задача знаходження мінімуму (максимуму) функціоналу

$$I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)dx$$

при крайових умовах $y_i(x_1) = y_{i1},\ y_i(x_2) = y_{i2},\ i = \overline{1, n}.$

Із необхідної умови екстремуму $\delta I = 0$ при $\delta y_i(x_1) = 0$ і $\delta y_i(x_2) = 0$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ випливає, що допустимі екстремалі є розв'язками системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} F'_{y_1} - \dfrac{d}{dx} F'_{y'_1} = 0; \\ F'_{y_2} - \dfrac{d}{dx} F'_{y'_2} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F'_{y_n} - \dfrac{d}{dx} F'_{y'_n} = 0 \end{cases} \text{ при крайових умовах } \begin{cases} y_i(x_1) = y_{i1}, \\ y_i(x_2) = y_{i2}, \end{cases} i = \overline{1, n}.$$

Розв'язки останньої диференціальної системи називаються ***екстремалями***, а сама система – системою диференціальних рівнянь екстремалей або ***системою рівнянь Ейлера–Лагранжа***.

Приклад 9. Знайти екстремалі функціоналу, які задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

а) $I[y, z] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2\right)dx;\quad y(0) = 0;\quad z(0) = 0;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;\ z\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{16};$

б) $I[y, z] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((y')^2 + (z')^2 - 2yz\right)dx;\quad y(0) = 0;\quad z(0) = 0;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;\ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Розв'язання. а) Знайдемо похідні, що входять в систему рівнянь Ейлера–Лагранжа:

$$F(x, y, z, y', z') = 2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2;\quad F'_y = -8y;$$

$$F'_{y'} = 2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y'';\ F'_z = 2;\ F'_{z'} = -2z';\ \frac{d}{dx}F'_{z'} = -2z''.$$

Тоді система рівнянь Ейлера–Лагранжа

$$\begin{cases} F'_y - \dfrac{d}{dx} F'_{y'} = 0; \\ F'_z - \dfrac{d}{dx} F'_{z'} = 0 \end{cases}$$

набуває вигляду: $\begin{cases} -8y - 2y'' = 0; \\ 2 - (-2z'') = 0; \end{cases}\quad \begin{cases} y'' + 4y = 0; \\ z'' + 1 = 0. \end{cases}$

Розв'яжемо останню систему:

$$y''+4y=0;\ k^2+4=0;\ k_{1,2}=\pm 2i;\ \ \underline{y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x};$$

$$z''=-1;\ z'=\int(-1)dx=-x+C_3;\ z=\int(-x+C_3)dx=\underline{-\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4}.$$

Конкретні значення довільних сталих C_1, C_2, C_3, C_4 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{array}{ll} y(0)=0: & \\ z(0)=0: & \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1: & \\ z\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi^2}{16}: & \end{array} \begin{cases} 0=C_1; & C_1=0; \\ 0=C_4; & C_4=0; \\ 1=C_2; & C_2=1; \\ -\frac{\pi^2}{16}=-\frac{\pi^2}{32}+C_3\frac{\pi}{4}; & C_3=-\frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

Отже, допустимі екстремалі

$$\underline{\begin{cases} y=\sin 2x; \\ z=-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{\pi x}{8}. \end{cases}}$$

б) Знайдемо похідні, що входять в систему рівнянь Ейлера–Лагранжа:

$$F(x,y,z,y',z')=(y')^2+(z')^2-2yz;\quad F'_y=-2z;$$

$$F'_{y'}=2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'}=2y'';\ F'_z=-2y;\ F'_{z'}=2z';\ \frac{d}{dx}F'_{z'}=2z''.$$

Тоді система рівнянь Ейлера–Лагранжа

$$\begin{cases} F'_y-\dfrac{d}{dx}F'_{y'}=0; \\ F'_z-\dfrac{d}{dx}F'_{z'}=0 \end{cases}$$

набуває вигляду $\begin{cases} -2z-2y''=0; \\ -2y-2z''=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y''+z=0; \\ z''+y=0. \end{cases}$

Розв'яжемо останню систему зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку:

$$y'''+z'=0;\ y^{IV}+z''=0;\ z''=-y;\ y^{IV}-y=0;\ k^4-1=0;\ (k^2+1)(k^2-1)=0;$$

$$k^2-1=0 \text{ або } k^2+1=0;\ k_{1,2}=\pm 1;\ k_{3,4}=\pm i;\ \ y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x;$$

$$z=-y'';\ y'=C_1e^x-C_2e^{-x}-C_3\sin x+C_4\cos x;\ \ y''=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x;$$

$$z=-C_1e^x-C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Використавши крайові умови, знайдемо C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{array}{l} y(0)=0: \\ z(0)=0: \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1: \\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=1: \end{array} \begin{cases} 0=C_1+C_2+C_3; \\ 0=-C_1-C_2+C_3; \\ 1=C_1e^{\frac{\pi}{2}}+C_2e^{-\frac{\pi}{2}}+C_4; \\ 1=-C_1e^{\frac{\pi}{2}}-C_2e^{-\frac{\pi}{2}}+C_4; \end{cases} \quad \begin{array}{l} C_3=0;\ C_4=1; \\ C_1=0;\ C_2=0. \end{array}$$

Отже, допустимі екстремалі: $\underline{\begin{cases} y=\sin x; \\ z=\sin x. \end{cases}}$

3.2.5. Канонічні рівняння екстремалей

Розглянемо систему рівнянь Ейлера–Лагранжа

$$F'_{y_i} - \frac{d}{dx} F'_{y'_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Позначимо $p_i = F'_{y'_i}$, $i = \overline{1,n}$. Функції $y_i, p_i, i = \overline{1,n}$ називаються ***канонічними змінними*** для функціоналу

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx.$$

При цьому змінні y_i і p_i називаються ***спряженими***.

Введемо так звану ***функцію Гамільтона (гамільтоніан)***

$$H = H(x, y_1, y_2, \dots, y_n, p_1, p_2, \dots, p_n) =$$

$$= -F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) + \sum_{i=1}^{n} y'_i \, p_i.$$

Знайдемо частині похідні гамільтоніана H по y_i та $p_i, i = \overline{1,n}$: $\frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}$, $\frac{\partial H}{\partial p_i} = y'_i$, $i = \overline{1,n}$.

Оскільки $y'_i = \frac{dy_i}{dx}$, а з системи рівнянь Ейлера–Лагранжа $\frac{\partial F}{\partial y_i} = F'_{y_i} = \frac{d}{dx} F'_{y'_i} = \frac{dp_i}{dx}$, то мають місце співвідношення:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_i}{dx} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}, & i = \overline{1,n}; \\ \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, & i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Одержана система називається ***канонічною системою рівнянь екстремалей*** для функціоналу

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx.$$

3.3. Достатні умови екстремуму. Умовний екстремум. Варіаційні принципи

3.3.1. Достатні умови екстремуму

У багатьох варіаційних задачах існування та характер екстремуму очевидні з геометричного чи фізичного змісту. Якщо при цьому допустима екстремаль єдина, то вона й буде розв'язком варіаційної задачі. У загальному випадку для того, щоб встановити наявність і характер екстремуму, треба скористатись достатніми умовами екстремуму.

Нехай функція $y_0(x)$ є допустимою екстремаллю функціоналу $I[y]$ в деякому класі допустимих функцій D_1, тобто на цій кривій виконується необхідна умова екстремуму $\delta I[y_0, \delta y] = 0$. Характер екстремуму (максимум чи мінімум) визначається знаком приросту функціоналу: якщо $\Delta I \geq 0$, то функціонал має мінімум, а якщо $\Delta I \leq 0$, то — максимум. Оскільки на допустимій екстремалі перша варіація дорівнює нулю $\delta I[y_0, \delta y] = 0$, то знак приросту функціоналу ΔI для довільної досить малої варіації аргументу δy визначається знаком другої варіації функціоналу $\delta^2 I$.

Достатня умова екстремуму у варіаційній формі: *якщо на деякому класі допустимих функцій D_1 для довільної досить малої варіації функції δy на допустимій екстремалі $y_0(x)$ друга варіація функціоналу $\delta^2 I$ додатня $\delta^2 I > 0$, то на цій екстремалі функціонал має мінімум, якщо друга варіація функціоналу $\delta^2 I$ від'ємна $\delta^2 I < 0$, то — максимум, якщо ж друга варіація функціоналу $\delta^2 I$ набуває значень обох знаків, то екстремуму немає.*

При певних умовах знак другої варіації $\delta^2 I$ функціоналу $I[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$ визначається знаком другої похідної $F''_{y'y'}$. Звідси випливають ***достатні умови Лежандра***:

1. ***Посилені достатні умови Лежандра слабкого екстремуму***: *якщо на допустимій екстремалі $y_0(x)$ виконується нерівність $F''_{y'y'}\Big|_{y=y_0(x)} > 0$, то на цій екстремалі функціонал має слабкий мінімум, а якщо нерівність $F''_{y'y'}\Big|_{y=y_0(x)} < 0$, то — слабкий максимум.*

2. ***Достатні умови Лежандра сильного екстремуму***: *якщо в усіх точках $(x; y)$, які близькі до допустимої екстремалі $y_0(x)$, виконується нерівність $F''_{y'y'} \geq 0$ $\left(F''_{y'y'} \leq 0\right)$ при довільних значеннях y', то ця екстремаль реалізує сильний мінімум (сильний максимум).*

<u>Приклад 10.</u> Користуючись достатніми умовами Лежандра, дослідити на екстремум функціонал при заданих крайових умовах:

а) $I[y] = \int\limits_1^e \left(x + 2y + \frac{(y')^2 x}{2} \right) dx;\ y(1) = 3;\ y(e) = 2e + 1.$

б) $I[y] = \int\limits_0^1 e^x \left(2y^2 + (y')^2\right) dx;\ y(0) = 1;\ y(1) = e.$

в) $I[y] = \int\limits_0^e (e + x)(y')^2\, dx;\ y(0) = 1 - \ln 2;\ y(e) = 1.$

г) $I[y] = \int\limits_0^e \frac{e^{-y}}{y'} dx;\ \ y(0) = 1;\ y(e) = 1 + \ln 2.$

<u>Розв'язання</u>. а) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = x + 2y + \frac{(y')^2 x}{2};\ F'_y = 2;\ F'_{y'} = \frac{1}{2} \cdot 2y' x = y' x; \quad \frac{d}{dx} F'_{y'} = y'' x + y'.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$ набуває вигляду

$$2-y''x-y'=0;\ y''+\frac{1}{x}y'=\frac{2}{x}.$$

Розв'яжемо останнє рівняння зниженням порядку:

$$p=y';\ y''=p';\ p'+\frac{1}{x}p=\frac{2}{x};\ p=uv;\ p'=u'v+v'u;\ u'v+v'u+\frac{1}{x}uv=\frac{2}{x};$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{1}{x}v\right)=\frac{2}{x};\quad v'+\frac{1}{x}v=0;\ \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x};\ \ln|v|=-\ln|x|;\ v=\frac{1}{x};$$

$$u'\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x};\ u'=2;\ u=2x+C_1;\ \ p=(2x+C_1)\cdot\frac{1}{x};\ y'=(2x+C_1)\cdot\frac{1}{x};$$

$$y=\int\left(2+C_1\frac{1}{x}\right)dx=2x+C_1\ln|x|+C_2 \text{ — екстремалі.}$$

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{cases}3=2+C_2; & C_2=1;\\ 2e+1=2e+C_1+C_2; & C_1=0.\end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y=2x+1}$.

Оскільки $F''_{y'y'}=x\geq 0$ при $x\in[1;e]$ і довільних значеннях y, то функціонал має сильний мінімум. Знайдемо його значення:

$$y'=2;\ F(x,y,y')=x+2(2x+1)+\frac{(2)^2x}{2}=7x+2;$$

$$I_{\min}=I[2x+1]=\int_1^e(7x+2)dx=\frac{7x^2}{2}\Bigg|_1^e+2x\Big|_1^e=\underline{\frac{7e^2+4e-11}{2}}.$$

б) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=e^x\left(2y^2+(y')^2\right);\ F'_y=4e^xy;\ F'_{y'}=2e^xy';\quad \frac{d}{dx}F'_{y'}=2\left(e^xy'+e^xy''\right)=2e^x(y'+y'').$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду

$$4e^xy-2e^x(y'+y'')=0;\ y''+y'-2=0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння:

$$k^2+k-2=0;\ k_1=1;\ k_2=-2;\ y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$$

— екстремалі.

Використавши крайові умови, знайдемо C_1 і C_2:

$$\begin{cases}1=C_1+C_2; & C_1=1;\\ e=C_1e+C_2e^{-2}; & C_2=0.\end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль $\underline{y=e^x}$.

Оскільки $F''_{y'y'}=2e^x\geq 0$ при $x\in[0;1]$ і довільних значеннях y, то функціонал має сильний мінімум. Знайдемо його значення:

$$y'=e^x;\ F(x,y,y')=e^x\left(2\cdot e^{2x}+e^{2x}\right)=3e^{3x};\ \ I_{\min}=I\left[e^x\right]=\int_0^1 3e^{3x}dx=e^{3x}\Big|_0^1=\underline{e^3-1}.$$

в) Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=(e+x)(y')^2;\ F'_y=0;\ F'_{y'}=2(e+x)y';$$