МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

В.В. Бізюк, А.В. Якунін

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

для електротехніків

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник

Харків – ХНАМГ – 2008

УДК 510
ББК 22.1

Бізюк В.В., Якунін А.В.
Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків: Навчальний посібник. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 300 с.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України, рішення № 1.4/18 – Г – 134 від «11» червня 2008 р.

У навчальному посібнику за модульною технологією навчання викладено наступні спеціальні розділи: теорія функцій комплексної змінної; операційне числення; варіаційне числення; теорія поля; математична фізика, які об'єднує загальна прикладна спрямованість на застосування до електротехнічних задач. Кожен розділ може вивчатися незалежно від інших. Головну увагу приділено розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання для самостійної роботи.

Посібник призначений для студентів електротехнічних спеціальностей і може використовуватися для самоосвіти електротехніків-практиків.

Рецензенти:

В.К.Дубовий, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу (Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна);

А.Д.Тевяшев, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики (Харківський національний технічний університет радіоелектроніки);

Ю.Л.Геворкян, кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики (Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»)

© Бізюк В.В., Якунін А.В., 2008
ISBN 966-695-098-7
© ХНАМГ, 2008

З М І С Т

Передмова

У навчальному посібнику за модульною технологією навчання викладено наступні спеціальні розділи: теорія функцій комплексної змінної, операційне числення, варіаційне числення, теорія поля, математична фізика, які об'єднує загальна прикладна спрямованість на застосування до електротехнічних задач. Кожен розділ може вивчатися незалежно від інших і потребує напруженої самостійної роботи, що передбачає опрацювання теоретичного матеріалу, виконання поточних домашніх завдань та індивідуальних розрахунково-графічних робіт. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу. Мета посібника – в стислій доступній формі ознайомити з основами вказаних спеціальних розділів та їх застосуваннями. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах, частина з яких розрахована на самостійне опрацювання. Тонкі теоретичні питання і задачі, що вимагають більш глибокої математичної підготовки, залишаються поза належною увагою. Для їх вивчення, в разі необхідності, треба звернутись до спеціалізованої літератури. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання.

Посібник призначений для студентів електротехнічних спеціальностей і може використовуватися для самоосвіти електротехніків-практиків.

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Поняття і методи теорії функцій комплексної змінної успішно застосовуються в різних наукових і прикладних дисциплінах (теорія систем автоматичного керування, теоретична електротехніка, електродинаміка, гідро- і аеродинаміка та ін.). Зокрема, один з основних класів функцій комплексної змінної – аналітичні функції – знаходиться в тісному зв'язку з розв'язками рівняння Лапласа, до якого зводяться багато прикладних задач.

Важлива роль цього розділу і в самій математиці: цілий ряд задач піддається остаточному розв'язанню тільки відповідними методами.

1.1. Комплексні числа та дії над ними

1.1.1. Поняття комплексного числа

Комплексним числом (в алгебраїчній формі) називається вираз

$$z = x + iy,$$

де x, y – дійсні числа; i – ***уявна одиниця***, $i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$.

Числа x і y називаються відповідно ***дійсною й уявною частинами*** комплексного числа z. Позначаються

$$x = \operatorname{Re} z; \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Множина всіх комплексних чисел позначається C.

Будь-яке дійсне число x можна розглядати як комплексне число $z = x + i0 = x$, у якого уявна частина дорівнює нулю: $y = 0$. Таким чином, множина дійсних чисел R є підмножиною множини комплексних чисел C: $R \subset C$.

Комплексне число $z = iy = 0 + iy$, $y \neq 0$, у якого дійсна частина дорівнює нулю, а уявна частина відмінна від нуля, називається ***чисто уявним***.

Два комплексних числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються ***рівними,*** якщо відповідно рівні їх дійсні та уявні частини:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Комплексне число ***рівне нулю*** $z = 0$, якщо рівні нулю його дійсна та уявна частини:

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

<u>Зауваження</u>. Для комплексних чисел не існують поняття "більше", "менше".

Комплексне число $-z = -x - iy$ називається ***протилежним*** до числа $z = x + iy$.

Два комплексних числа $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$, у яких дійсні частини однакові, а уявні відрізняються тільки знаком, називаються ***комплексно спряженими***.

Очевидно, що $\bar{\bar{z}} = z$.

1.1.2. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Операції додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня здійснюються за правилами дій над многочленами з врахуванням умови $i^2 = -1$ і зведенням подібних.

Зокрема, ***додавання і віднімання*** комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ здійснюються покомпонентно:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Множення комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ здійснюється за правилом множення двочленів з урахуванням умови $i^2 = -1$ і зведенням подібних:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Зауваження 1. Для множення комплексного числа $z = x + iy$ на дійсне число a досить кожну його компоненту помножити на це число a: $az = ax + iay$.

Зауваження 2. Знайдемо натуральні степені уявної одиниці: $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$. Отже

$$i^{4k} = 1, \ i^{4k+1} = i, \ i^{4k+2} = -1, \ i^{4k+3} = -i.$$

Зауваження 3. При піднесенні комплексного числа до натурального степеня можна застосовувати відомі з елементарної математики формули скороченого множення.

Зауваження 4. Сума і добуток двох комплексно спряжених чисел $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$ є дійсним числом:

$$z + \bar{z} = 2x; \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

Зауваження 5. Дійсну і уявну частини комплексного числа $z = x + iy$ можна виразити через саме число та йому спряжене $\bar{z} = x - iy$:

$$x = (z + \bar{z})/2; \quad y = (z - \bar{z})/(2i).$$

Ділення комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 \neq 0$ виконується так: 1) треба чисельник і знаменник дробу z_1/z_2 домножити на число $\bar{z}_2$, спряжене до знаменника z_2; 2) врахувати, що $i^2 = -1$, і звести подібні; 3) почленно розділити чисельник на знаменник і одержати частку в алгебраїчній формі.

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Зауваження 6. Основні властивості розглянутих арифметичних операцій над комплексними числами співпадають з відповідними властивостями аналогічних операцій над дійсними числами. Тому для комплексних чисел залишаються справедливими всі теореми, правила, формули, що виведені для дійсних чисел на підставі цих властивостей.

Приклад 1. Виконати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі:

$$z = 3(2-3i)(2-i)-(3-i)^3+5(4-5i):(3+4i)\,.$$

Розв’язання. Виконуємо дії як над многочленами:

$$z = 3(2-3i)(2-i)-(3-i)^3+5(4-5i):(3+4i) = 3(4-2i-$$

$$-6i+3i^2)-27+27i-9i^2+i^3+5\cdot\frac{(4-5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=$$

$$=3(4-2i-6i-3)-27+27i+9-i+5\cdot\frac{12-16i-15i+20i^2}{9-16i^2}=$$

$$=3(1-8i)-18+26i+5\cdot\frac{12-16i-15i-20}{9+16}=$$

$$=3-24i-18+26i+\frac{-8-31i}{5}=-15+2i+\frac{-8-31i}{5}=$$

$$=(-75+10i-8-31i)/5=(-83-21i)/5=-83/5-i\cdot(21/5)\,.$$

1.1.3. Геометрична інтерпретація. Модуль і аргумент комплексного числа

Якщо на площині введено прямокутну декартову систему координат Oxy, то між множиною всіх точок цієї площини і множиною комплексних чисел C можна встановити взаємно однозначну відповідність: кожному комплексному числу $z = x+iy$ відповідає єдина точка $M(x;y)$ і навпаки (рис. 1). Дійсні числа зображаються точками осі абсцис Ox, тому вісь Ox називається ***дійсною віссю***. Чисто уявні числа зображаються точками осі ординат Oy, тому вісь Oy називається ***уявною віссю***. Числу $z=0$ відповідає початок координат $O(0;0)$.

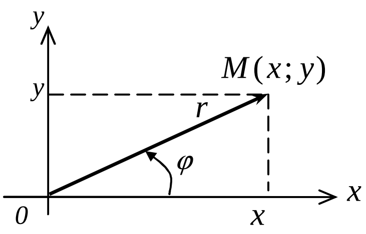


Рис. 1

Координатна площина Oxy, яка зображає множину всіх комплексних чисел C, називається ***комплексною площиною*** C або z***-площиною***.

Зауваження 1. Комплексне число $z = x+iy$ можна також зобразити радіус-вектором $\overrightarrow{OM}(x;y)$, що виходить із початку координат $O(0;0)$ і закінчується в точці $M(x;y)$ (рис. 1).

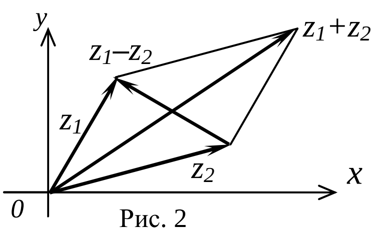


Рис. 2

Зауваження 2. Додавання і віднімання комплексних чисел можна здійснювати за правилами (трикутника і паралелограма) відповідних операцій над векторами (рис. 2). Множення комплексних чисел можна розглядати як ще один вид (поряд зі скалярним і векторним) добутку плоских векторів.

Якщо на комплексній площині (рис. 1) ввести також полярну систему координат $Or\varphi$ з полюсом у початку декартової системи координат і полярною віссю, суміщеною з віссю Ox, то точку $M(x;y)$, що зображає комплексне число $z = x+iy$ можна задати полярними координатами

$M(r;\varphi)$.

Полярний радіус r (довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$) називається ***модулем*** комплексного числа z і позначається $|z|=r$.

Очевидно, що $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Полярний кут φ (кут між радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$ і полярною віссю Ox) називається ***аргументом*** комплексного числа z і позначається $Arg\,z=\varphi$.

Аргумент φ, як кут повороту, визначається з точністю до сталого доданку вигляду $2\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,...$ (довільного числа повних обертів).

Єдине значення φ, що задовольняє умову $-\pi<\varphi\le\pi$, називається ***головним значенням аргументу*** і позначається $\arg z$.

Отже, $Arg\,z=\arg z+2\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,...$

Головне значення аргументу визначається за формулою:

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}(y/x), & x>0;\\ \operatorname{arctg}(y/x)+\pi, & x<0, y\ge 0;\\ \operatorname{arctg}(y/x)-\pi, & x<0,\ y<0;\\ \pi/2, & x=0;\ y>0;\\ -\pi/2, & x=0,\ y<0.\end{cases}$$

Зауваження 3. Для числа $z=0$ модуль дорівнює нулю $r=|0|=0$, а аргумент φ довільний.

Зауваження 4. У рівних комплексних чисел $z_1=z_2$ модулі також рівні $r_1=r_2$, а аргументи зв'язані співвідношенням $\varphi_1=\varphi_2+2\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,...$, тобто відрізняються на доданок $2\pi k$.

1.1.4. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Використовуючи зв'язок декартових і полярних координат $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, комплексне число $z=x+iy$ можна подати у вигляді

$$z=x+iy=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Вираз $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ називається ***тригонометричною формою комплексного числа***.

Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми задається співвідношеннями:

$$r=\sqrt{x^2+y^2};\quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Якщо звернутись до ***основної формули Ейлера***

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

(її доведення дається в теорії рядів), то від тригонометричної форми можна перейти до ***показникової форми комплексного числа*** $z = re^{i\varphi}$.

Зауваження. З основної формули Ейлера випливають ***допоміжні формули Ейлера***:

$$\cos\varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi}; \quad \sin\varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}; \quad \cos\varphi = \left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)/2; \quad \sin\varphi = \left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)/(2i).$$

Приклад 1. Довести тотожність:

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x \Big/ \sin\frac{x}{2}.$$

Розв'язання. Перейдемо до експонент, скористаємося формулою часткової суми геометричної прогресії, потім від експонент повернемось до тригонометричних функцій:

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \operatorname{Re}\left(e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{inx}\right) =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{e^{ix}\left(e^{inx} - 1\right)}{e^{ix} - 1} = \operatorname{Re}\frac{e^{ix}e^{inx/2}\left(e^{inx/2} - e^{-inx/2}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right)} =$$

$$= \operatorname{Re}\left(e^{i(n+1)x/2} \cdot \frac{e^{inx/2} - e^{-inx/2}}{2i} \cdot \frac{2i}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}\right) =$$

$$= \operatorname{Re} e^{i(n+1)x/2} \cdot \sin\frac{nx}{2} \Big/ \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x \Big/ \sin\frac{x}{2}.$$

Приклад 2. Зобразити на комплексній площині і подати в тригонометричній та показниковій формах наступні комплексні числа, що задані в алгебраїчній формі:

$$z_1 = -\sqrt{3} + i; \quad z_2 = 2 - 2i; \quad z_3 = 2i; \quad z_4 = -2; \quad z_5 = -2 - i.$$

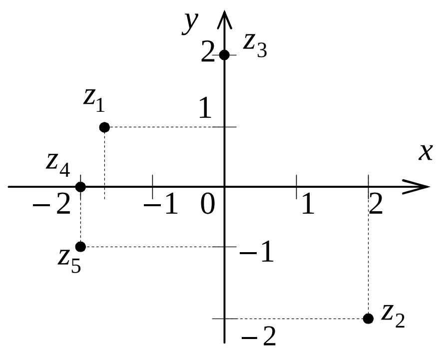


Рис. 3

Розв'язання. Побудуємо задані числа на комплексній площині (рис. 3). Знайдемо модуль і головне значення аргументу кожного з даних чисел та запишемо їх у тригонометричній та показниковій формах:

$$\underline{z_1 = -\sqrt{3} + i}: \quad x_1 = -\sqrt{3}; \quad y_1 = 1; \quad |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2;$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}(y_1/x_1) + \pi, \; x_1 < 0, y_1 \geq 0;$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\left(-1/\sqrt{3}\right) + \pi = -\pi/6 + \pi = 5\pi/6;$$

$$z_1 = 2\left(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)\right); \quad z_1 = 2\,e^{i(5\pi/6)}.$$

$$\underline{z_2 = 2 - 2i}: \quad x_2 = 2; \quad y_2 = -2; \quad |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 2\sqrt{2};$$

$$\arg z_2 = \operatorname{arctg}(y_2/x_2), \; x_2 > 0; \; \arg z_2 = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4;$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right); \quad z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{-i(-\pi/4)}.$$

$$\underline{z_3 = 2i}: \quad x_3 = 0; \quad y_3 = 2; \quad |z_3| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = 2; \quad \arg z_3 = \pi/2, \; x = 0; \, y > 0;$$

$$z_3 = 2\left(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\right); \quad z_3 = 2\,e^{i(\pi/2)}.$$

$$\underline{z_4=-2}: \quad x_4=-2;\ y_4=0;\quad |z_4|=\sqrt{x_4^2+y_4^2}=2;$$
$$\arg z_4=\operatorname{arctg}(y_4/x_4)+\pi,\ x_4<0, y_4\ge 0;$$
$$\arg z_4=\operatorname{arctg}0+\pi=\pi;\quad z_4=2(\cos\pi+i\sin\pi);\quad z_4=2e^{i\pi}.$$
$$\underline{z_5=-2-i}: \quad x_5=-2;\ y_5=-1;\quad |z_5|=\sqrt{x_5^2+y_5^2}=\sqrt{5};$$
$$\arg z_5=\operatorname{arctg}(y_5/x_5)-\pi,\ x_5<0, y_5<0;$$
$$\arg z_5=\operatorname{arctg}(1/2)-\pi;\quad z_5=\sqrt{5}\,e^{i(\operatorname{arctg}(1/2)-\pi)};$$
$$z_5=\sqrt{5}\left(\cos(\operatorname{arctg}(1/2)-\pi)+i\sin(\operatorname{arctg}(1/2)-\pi)\right).$$

1.1.5. Дії над комплексними числами в тригонометричній і показниковій формах

Якщо $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ і $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ – два комплексні числа в тригонометричній формі, то їх добуток:

$$z_1z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+$$
$$+i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\big)=r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right).$$

Добутком двох комплексних чисел z_1 і z_2 є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів, а аргумент – сумі аргументів співмножників.

Отже,

$$z_1z_2=r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right);\quad z_1z_2=r_1r_2\,e^{(\varphi_1+\varphi_2)i};$$
$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|;\qquad Arg(z_1z_2)=Arg\,z_1+Arg\,z_2\ .$$

Якщо $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ і $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ – два комплексні числа в тригонометричній формі, причому z_2 відмінне від нуля $z_2\ne 0$, то їх частка:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$
$$=(r_1/r_2)\cdot\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

Часткою z_1/z_2 двох комплексних чисел z_1 і z_2, де дільник $z_2\ne 0$, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого z_1 і дільника z_2, а аргумент – різниці аргументів діленого z_1 і дільника z_2.

Отже,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right);\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{(\varphi_1-\varphi_2)i};$$
$$|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|;\qquad Arg(z_1/z_2)=Arg\,z_1-Arg\,z_2\,.$$

Натуральним степенем z^n комплексного числа z називається комплексне число, отримане множенням числа z самого на себе n раз, де n – натуральне число.

Із правила множення комплексних чисел в тригонометричній формі випливає ***перша формула Муавра***:

$$z^n = (r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Коренем n-го степеня $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа z називається таке комплексне число, n-й степінь якого дорівнює z:

Очевидно, що корінь n-го степеня з нуля дорівнює нулю.

Якщо комплексне число z відмінне від нуля $z \neq 0$, то корінь n-го степеня $\sqrt[n]{z}$ має рівно n різних значень, що визначаються за ***другою формулою Муавра***:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

де $k = 0,1,2,\ldots,n-1$; $\sqrt[n]{r}$ – арифметичне значення кореня з додатного числа.

На комплексній площині всі корені n-го степеня $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа $z \neq 0$ зображуються вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$.

<u>Приклад 1</u>. Піднести до степеня: $\left(\sqrt{3} - i\right)^{40}$.

<u>Розв'язання</u>. Запишемо число $\sqrt{3} - i$ в тригонометричній формі

$$\sqrt{3} - i = 2(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)).$$

За першою формулою Муавра $\left(\sqrt{3} - i\right)^{40} = (2(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)))^{40} =$

$$= 2^{40}(\cos(-20\pi/3) + i\sin(-20\pi/3)) = 2^{40}(\cos(-6\pi - 2\pi/3) +$$

$$+ i\sin(-6\pi - 2\pi/3)) = 2^{40}(\cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3)) =$$

$$= 2^{40}\left(-1/2 + i \cdot \sqrt{3}/2\right) = -2^{39} + i \cdot 2^{39}\sqrt{3}.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти всі значення кореня: а) $\sqrt{-9i}$; б) $\sqrt[3]{i-1}$.

<u>Розв'язання</u>.

а) Запишемо підкореневе число $-9i$ в тригонометричній формі

$$-9i = 9(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)).$$

За другою формулою Муавра $\sqrt{-9i} = \sqrt{9(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))} =$

$$= \sqrt{9}\left(\cos\frac{-\pi/2 + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{-\pi/2 + 2\pi k}{2}\right) = 3(\cos(-\pi/4 + \pi k) + i\sin(-\pi/4 + \pi k)),$$

де $k = 0,1$.

При $k = 0$: $\sqrt{-9i} = 3(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)) = 3\sqrt{2}/2 - i \cdot 3\sqrt{2}/2$.

При $k = 1$: $\sqrt{-9i} = 3(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)) = -3\sqrt{2}/2 + i \cdot 3\sqrt{2}/2$.

б) Запишемо підкореневе число $i - 1$ в тригонометричній формі

$$i - 1 = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)).$$

За другою формулою Муавра

$$\sqrt[3]{i-1} = \sqrt[3]{\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3}\right),$$

де $k = 0,1,2$.

$=\sqrt[6]{2}\left(\cos(\pi/4+2\pi k/3)+i\sin(\pi/4+2\pi k/3)\right)$.

При $k=0$: $\sqrt[3]{i-1}=\sqrt[6]{2}\left(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i)$.

При $k=1$: $\sqrt[3]{i-1}=\sqrt[6]{2}\left(\cos(11\pi/12)+i\sin(11\pi/12)\right)$.

При $k=2$: $\sqrt[3]{i-1}=\sqrt[6]{2}\left(\cos(19\pi/12)+i\sin(19\pi/12)\right)=$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos(-5\pi/12)+i\sin(-5\pi/12)\right).$$

1.1.6. Многочлени. Розкладання на множники. Розв'язання квадратних рівнянь

Функція комплексної змінної

$$P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n$$

називається ***многочленом*** n***-го степеня*** стандартного вигляду.

Тут z – комплексний аргумент: n – степінь многочлена; a_0, a_1, ..., a_n – сталі комплексні коефіцієнти; a_0 називається старшим коефіцієнтом, причому $a_0\neq 0$; a_n називається вільним членом.

Теорема 1 (***теорема Безу***). *При діленні многочлена* $P_n(z)$ *на різницю* $z-a$ *остача від ділення дорівнює* $P_n(a)$.

Доведення. $P_n(z)=Q_{n-1}(z)\cdot(z-a)+R$. Нехай $z\to a$, тоді $P_n(a)=R$.

Наслідок 1. *Якщо* a – *корінь многочлена* $P_n(z)$, *то цей многочлен* $P_n(z)$ *ділиться без остачі на різницю* $z-a$, *тобто розкладається на множники*

$$P_n(z)=Q_{n-1}(z)\cdot(z-a),$$

де частка $Q_{n-1}(z)$ – многочлен на одиницю меншого степеня.

Теорема 2 (***основна теорема алгебри***). *Будь-який многочлен* $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n\geq 1$ *має хоча б один корінь (дійсний чи комплексний).*

Наслідок 2. *Будь-який многочлен* $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n\geq 1$ *має рівно* n *коренів, серед яких можуть бути однакові.*

Наслідок 3. *Будь-який многочлен* $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n\geq 1$ *розкладається на множники у вигляді:*

$$P_n(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m},$$

де a_0 – старший коефіцієнт; $z_1, z_2, \ldots, z_m$ – різні (дійсні чи комплексні) корені; $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – відповідні кратності цих коренів, причому $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$.

Корені квадратного рівняння

$$az^2+bz+c=0 \quad (a\neq 0)$$

з комплексними коефіцієнтами a,b,c знаходяться за відомими формулами

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}; \quad D=b^2-4ac,$$

де $\sqrt{D}$ – одне зі значень квадратного кореня з дискримінанта D.

На множині комплексних чисел для коренів квадратного рівняння залишається справедливою теорема Вієта:

$$z_1 + z_2 = -b/a\,, \qquad z_1 z_2 = c/a\,.$$

Приклад. Розв’язати квадратне рівняння:

а) $4z^2 + 4z + 5 = 0$; б) $z^2 - 4z + 7 - 4i = 0$; в) $z^2 + 2iz - 1 + 2i = 0$.

Розв’язання.

а) $D = 4^2 - 4\cdot 4\cdot 5 = -64$; $\sqrt{D} = \sqrt{-64} = 8i$; $z_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 8i}{2\cdot 4} = -\dfrac{1}{2} \pm i$.

б) $D = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot (7 - 4i) = -12 + 16i = 4(-3 + 4i)$;

$$\sqrt{D} = \sqrt{4(-3+4i)} = 2\sqrt{(1+4i+4i^2)} = 2\sqrt{(1+2i)^2} = 2(1+2i)\,;$$

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm 2(1+2i)}{2} = 2 \pm (1+2i)\,; \quad z_1 = 3 + 2i\,; \quad z_2 = 1 - 2i\,.$$

в) $D = (2i)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1+2i) = -8i$; $\sqrt{D} = \sqrt{-8i} = \sqrt{8\big(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)\big)} =$

$$= 2\sqrt{2}\,\big(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\big) = 2\sqrt{2}\,\Big(\sqrt{2}/2 - i\big(\sqrt{2}/2\big)\Big) = 2 - 2i\,;$$

$$z_{1,2} = \frac{-2i \pm (2-2i)}{2} = -i \pm (1-i)\ ; \quad z_1 = 1 - 2i\,; \quad z_2 = -1\,.$$

1.2. Топологія множини комплексних чисел. Комплексні функції дійсної змінної

1.2.1. Відстань між точками. Окіл точки. Нескінченно віддалена точка. Розширена комплексна площина

Розглядається комплексна площина C.

Відстанню $\rho(z_1, z_2)$ між точками M_1 і M_2, що зображають комплексні числа z_1 і z_2, називається довжина відповідного вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$:

$$\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|\,,$$

тобто відстань між комплексними числами z_1 і z_2 дорівнює модулю їх різниці $|z_1 - z_2|$.

Нехай ε – довільне додатне дійсне число $\varepsilon > 0$.

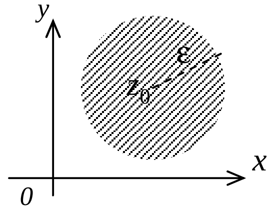


Рис. 4

Множина точок $U_\varepsilon(z_0)$, що задовольняють умову $|z - z_0| < \varepsilon$, називається ε***-околом скінченної точки*** z_0. Окіл точки z_0 – це внутрішність круга з центром в цій точці z_0 і радіусом ε (ε-окіл точки z_0 заштрихований на рис.4).

Для комплексних чисел особливу роль відіграє символ $z = \infty$ – ***нескінченно віддалена точка***.

Зауваження 1. Для невластивого комплексного числа $z = \infty$ модуль дорівнює $+\infty$, а поняття аргументу, дійсної та уявної частини позбавлені змісту.

Зауваження 2. Нескінченно віддалена точка $z=\infty$ – це зовнішність круга нескінченно великого радіуса з центром у початку координат. Іншими словами, нескінченно віддалена точка $z=\infty$ – це об'єднання всіх точок кола нескінченно великого радіуса з центром у початку координат.

Вся комплексна площина C, що доповнена нескінченно віддаленою точкою $z=\infty$, називається ***розширеною комплексною площиною*** $\overline{C}$.

Зауваження 3. Склеюючи всі точки кола нескінченно великого радіуса з центром у початку координат, отримуємо сферу – ще одне зображення розширеної множини комплексних чисел $\overline{C}$. Точка $z=\infty$ нічим не відрізняється від інших точок: можна розглядати її окіл, перетин ліній в $z=\infty$ і т.п.

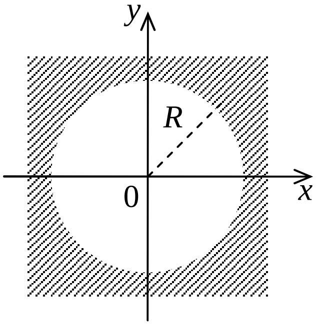


Рис. 5

Нехай R – довільне додатне дійсне число $R>0$.

Множина точок $U_R(\infty)$, що задовольняють умову $|z|>R$, називається R***-околом нескінченно віддаленої точки*** $z=\infty$. Окіл точки $z=\infty$ – це зовнішність круга з центром в початку координат і радіусом R (R-окіл точки $z=\infty$ заштрихований на рис.5).

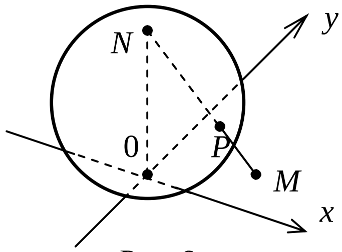


Рис. 6

Наочне уявлення про окіл нескінченно віддаленої точки $z=\infty$ дає ***стереографічна проекція***, що визначає взаємно однозначну відповідність точок розширеної комплексної площини та точок ***сфери Рімана*** – сфери одиничного діаметра, що дотикається до площини в початку координат (рис. 6).

Нехай ON – вертикальний діаметр (O – південний, а N – північний полюс). Для довільної скінченної точки M комплексної площини точка P перетину відрізка NM зі сферою називається ***стереографічною проекцією точки*** M.

Така відповідність буде взаємно однозначною для всієї розширеної комплексної площини, якщо прийняти, що північний полюс N служить стереографічною проекцією єдиної нескінченно віддаленої точки $z=\infty$.

Зауваження 4. Прямій чи колу на площині при стереографічній проекції відповідає коло на сфері. Зокрема, паралельним прямим відповідають кола, що дотикаються в точці N.

1.2.2. Область та її межа

Непорожня множина D комплексної площини чи розширеної комплексної площини називається ***областю***, якщо виконуються такі умови:

1) вона ***відкрита***, тобто разом з кожною своєю точкою містить деякий окіл цієї точки; 2) вона ***зв'язна***, тобто будь-які дві її точки можна сполучити деякою ламаною L, всі точки якої належать цій множині D.

Зауваження 1. Ламана L може бути необмеженою лінією, що проходить через $z=\infty$. При цьому вона залишається обмеженою на сфері Рімана.

Точка z_0 називається ***межовою точкою*** області D, якщо в кожному її околі містяться точки, що належать і що не належать цій області.

Множина всіх межових точок Γ області D називається ***межею*** цієї області.

Зауваження 2. Надалі розглядаються області, межа яких Γ складається зі скінченного числа кусково-гладких кривих та ізольованих точок. Межа може мати дві сторони – два "берега" розрізу.

Якщо при русі вздовж межі Γ область D весь час залишається зліва, то такий напрям орієнтації межі Γ називається ***додатним обходом***.

Об'єднання області D з її межею Γ, називається за***мкненою областю*** (***замиканням області*** D) і позначається $\overline{D}$.

Якщо межу області утворює одна лінія, що не має самоперетину, то область називається ***однозв'язною*** (рис. 7), а коли межу області утворюють k таких л1ній, що не мають самоперетину і спільних точок, то область називається k***-зв'язною*** (на рис. 8 зображена тризв'язна область).

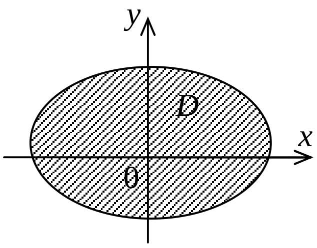


Рис. 7

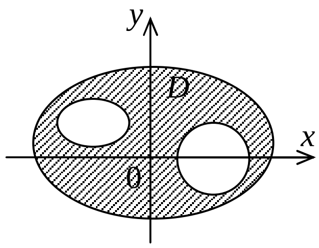


Рис. 8

Зауваження 3. Однозв'язна область D – це область, в якій довільну замкнену криву, що їй належить, можна неперервною деформацією стягнути в точку, залишаючись в цій області D. Однозв'язна область не містить "дірок", а багатозв'язна область – це область з "дірками".

1.2.3. Комплексні функції дійсної змінної. Лінії на комплексній площині

Комплексна функція z ***дійсної змінної*** t кожному значенню t з деякої непорожньої множини D дійсних чисел за певним законом ставить у відповідність одне єдине значення комплексної змінної z з деякої області E комплексної площини. Комплексна функція $z = z(t)$ дійсної змінної t визначається рівністю

$$z = x(t) + i\,y(t), \quad t \in D,$$

де $x(t)$ та $y(t)$ – задані дійсні функції (відповідно дійсна і уявна частини змінної $z = z(t)$).

Зауваження 1. Надалі розглядаються неперервні функції $x(t)$ та $y(t)$, задані на відрізку $D = [\alpha;\beta]$.

Функція $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$ в ***комплексно-параметричній формі*** задає деяку неперервну лінію L (рис. 9). Параметричні рівняння цієї лінії: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$.

Крива називається ***простою***, якщо вона не має точок самоперетину:

$\forall t_1, t_2 \in (\alpha;\beta)$, $t_1 \neq t_2$: $z(t_1) \neq z(t_2)$, тобто всі точки різні, крім, можливо, початкової $z(\alpha)$ і кінцевої $z(\beta)$.

Крива називається ***замкненою***, якщо її початкова і кінцева точки співпадають: $z(\alpha) = z(\beta)$.

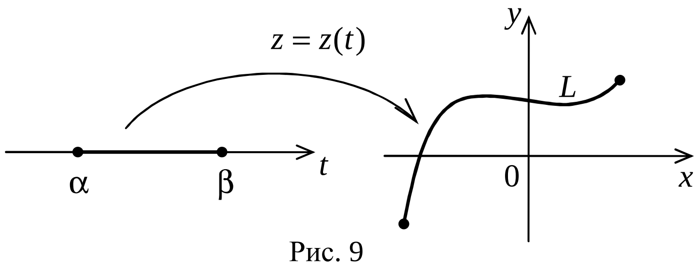


Рис. 9

Орієнтацію (напрям обходу) замкненої кривої L (контуру) можна задати трьома її точками або двома її точками і однією внутрішньою точкою області D, що обмежена даною лінією L.

Зауваження 2. Крива на комплексній площині може бути задана в неявній формі рівнянням $f(z) = 0$.

Приклад 1. Визначити вид і зобразити на комплексній площині лінії, задані рівняннями: а) $|z-2+i|=1$; б) $z=(1+2i)t$; в) $z = 2\cos t + 2i\sin t$.

Розв'язання. Щоб визначити вид лінії, підставимо в її рівняння $z = x + iy$ і зведемо його до відповідного стандартного вигляду. Потім побудуємо цю лінію.

а) $|x+iy-2+i|=1$; $|(x-2)+i(y+1)|=1$; $\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=1$;

$(x-2)^2+(y+1)^2=1$ – коло радіуса $r=1$ з центром у точці $M_0(2;-1)$ (рис.10).

б) $x+iy=(1+2i)t$; $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$ – похила пряма, задана в параметричній формі, її явне рівняння $y = 2x$ (рис.11).

в) $x+iy = 2\cos t + 2i\sin t$; $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$ – коло радіуса $r = 2$ з центром у початку координат, задане в параметричній формі (рис.12).

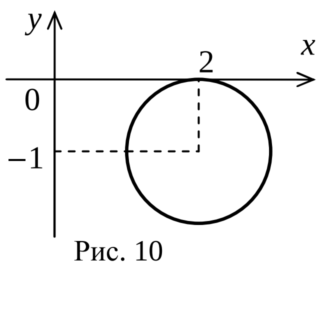


Рис. 10

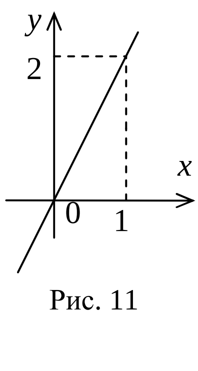


Рис. 11

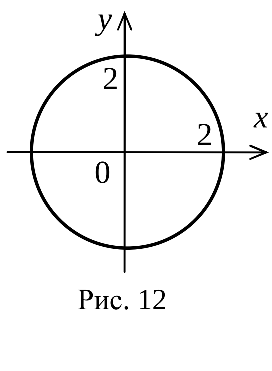


Рис. 12

Зауваження 3. Межа замкненої області D звичайно зображається суцільною лінією. У випадку відкритої області D частини її межі, що не входять в область, часто зображаються пунктирними лініями.

Приклад 2. На комплексній площині зобразити область D, що задана нерівностями:

а) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z + 2 \geq 0$, $|z + 2i| \leq 1$; б) $|z| \geq 2$, $-\pi/4 < \arg z \leq \pi/2$.

Розв’язання. Якщо замінити знак нерівності на знак рівності, то одержується рівняння лінії – частини межі відповідної області. Кожна лінія розбиває комплексну площину на частини. Вибирається та частина, довільно взята внутрішня пробна точка якої задовольняє відповідну нерівність. Шукана область, задана системою нерівностей, знаходиться як перетин вибраних множин.

а) $z = x + iy$; $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z + 2 = 0$, $x + y + 2 = 0$ – похила пряма; $|z + 2i| = 1$ – коло радіуса $r = 1$ з центром у точці $M_0(0; -2i)$. Шукана область замкнена. Вона заштрихована на рис. 13.

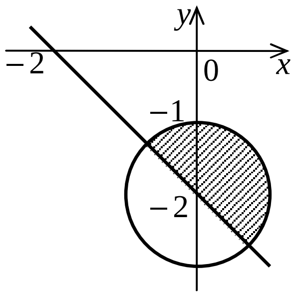


Рис. 13

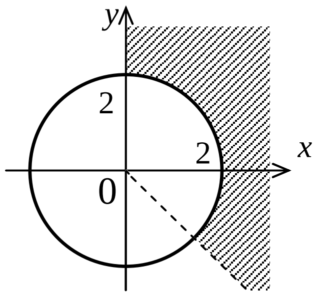


Рис. 14

б) $z = x + iy$; $|z| = 2$ – коло радіуса $r = 2$ з центром у початку координат; $\arg z = -\pi/4$ і $\arg z = \pi/2$ – два промені, що виходять з початку координат. Шукана область відкрита. Вона заштрихована на рис. 14. Пунктирно зображена лінія $\arg z = -\pi/4$, що не входить в цю область.

1.2.4. Диференціювання та інтегрування комплексної функції дійсної змінної

Комплексній змінній $z = z(t)$ відповідає вектор-функція, тому диференціювання та інтегрування комплексної функції дійсної змінної здійснюється аналогічно відповідним операціям над вектор-функцією дійсного аргументу.

Для знаходження похідної $z' = z'(t)$ комплексної функції $z = x(t) + i\,y(t)$ дійсної змінної треба продиференціювати окремо дійсну $x(t)$ та уявну $y(t)$ частини:

$$z' = x'(t) + i\,y'(t).$$

Зауваження 1. На комплексній площині дотична до кривої $z = z(t)$ в точці $z_0 = z(t_0)$ задається в комплексно-параметричній формі рівнянням $z - z_0 = z'(t_0) \cdot (t - t_0)$.

Приклад 1. Знайти рівняння дотичної до комплексно-параметрично заданої лінії L: $z = z(t)$ в точці z_0, що відповідає указаному значенню параметра t_0:

$$L:\ z = 4\cos^3 t + 4i\sin^3 t,\ t_0 = \pi/4.$$

Розв’язання. $z(\pi/4) = 4\cos^3(\pi/4) + 4i\sin^3(\pi/4) = 4 \cdot \left(\sqrt{2}/2\right)^3 + 4i \cdot \left(\sqrt{2}/2\right)^3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

$$z' = \left(4\cos^3 t + 4i\sin^3 t\right)' = -12\cos^2 t \cdot \sin t + 12i\sin^2 t \cdot \cos t; \quad z'(\pi/4) = -12\cos^2(\pi/4) \cdot \sin(\pi/4) +$$

$$+12i\sin^2(\pi/4) \cdot \cos(\pi/4) = -12 \cdot \left(\sqrt{2}/2\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2}/2\right) + 12i \cdot \left(\sqrt{2}/2\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2}/2\right) = -3\sqrt{2} + i3\sqrt{2};$$

$$z - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = \left(-3\sqrt{2} + i3\sqrt{2}\right) \cdot (t - \pi/4) \text{ – дотична.}$$

Для знаходження інтеграла $\int\limits_{\alpha}^{\beta} z(t)\,dt$ комплексної функції $z = x(t) + i\,y(t)$ дійсної змінної треба проінтегрувати окремо дійсну $x(t)$ та уявну $y(t)$ частини:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} z(t)\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\,dt.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти інтеграл $\int\limits_{0}^{1}\left(9t^2 + 8i\,t^3\right)dt$.

<u>Розв'язання</u>. $\int\limits_{0}^{1}\left(9t^2 + 8i\,t^3\right)dt = 9\int\limits_{0}^{1} t^2\,dt + 8i\int\limits_{0}^{1} t^3\,dt = 9\cdot\left.\dfrac{t^3}{3}\right|_0^1 + 8i\cdot\left.\dfrac{t^4}{4}\right|_0^1 = 3 + 2i$.

1.3. Функції комплексної змінної. Похідна. Поняття аналітичної функції. Конформне відображення

1.3.1. Поняття функції комплексної змінної. Границя та неперервність

Для геометричного тлумачення поняття функції комплексної змінної розглядаються два екземпляри площини комплексних чисел: z***-площина*** $z = x + i\,y$ і w***-площина*** $w = u + i\,v$.

Нехай на z-площині задана довільна множина точок D. Якщо кожній точці $z = x + i\,y$ множини D за певним законом f поставлено у відповідність одну точку $w = u + i\,v$ (або декілька точок) w-площини, то говорять, що на множині D задано однозначну (або багатозначну) ***комплексну функцію комплексної змінної*** $w = f(z)$. D називається ***множиною визначення*** функції $w = f(z)$, а множина E усіх значень w, що приймає функція, називається ***множиною значень*** функції $w = f(z)$.

<u>Зауваження 1</u>. Множина D може бути дуже складної та різноманітної структури. Надалі розглядаються лише випадки, коли множини D та E є областями.

Комплексна функція $w = f(z)$ – це відображення області D z-площини на область E w-площини (рис. 15). Якщо функція $w = f(z)$ відображає точку $z_0 = x_0 + i\,y_0$ площини z в точку $w_0 = u_0 + i\,v_0$ площини w, то w_0 називається ***образом*** , а z_0 – ***прообразом***.

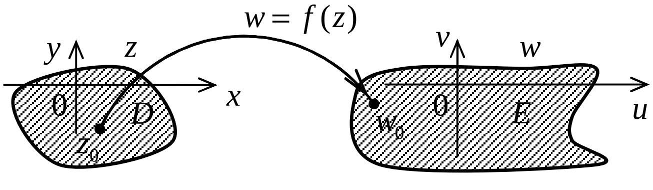


Рис. 15

Нерухомою точкою відображення $w = f(z)$ називається така точка z_0, що $f(z_0) = z_0$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти нерухомі точки заданого відображення:

$$w = z^2 + 3z + 5.$$

Розв'язання. Нерухомі точки визначаємо як корені рівняння

$$f(z)=z: \quad z^2+3z+5=z; \; z^2+2z+5=0; \; z_{1,2}=-1\pm 2i.$$

Відображення $w=f(z)$ називається ***взаємно однозначним*** або ***однолистим*** в області D, якщо довільним двом різним точкам $z_1 \neq z_2$ області D завжди відповідають дві різні точки $w_1 \neq w_2$ області E. У цьоиу випадку існує ***обернена функція*** $z=f^{-1}(w)$ – відображення області E на область D.

Зауваження 2. Відображення $w=f(z)$ є однолистим тоді і тільки тоді, коли пряма $w=f(z)$ і обернена $z=f^{-1}(w)$ функції однозначні.

Зауваження 3. Задання комплексної функції комплексної змінної $w=f(z)$, де $z=x+iy$ – комплексний аргумент, $w=u+iv$ – комплексна залежна змінна, рівносильне заданню упорядкованої пари дійсних функцій двох дійсних змінних $u=\operatorname{Re} w=u(x,y)$ і $v=\operatorname{Im} w=v(x,y)$. Тому поняття ***границі*** та ***неперервності*** функції комплексної змінної вводяться так само, як і відповідні поняття для функції дійсних змінних. Це дозволяє перенести на комплексні функції основні теореми дійсного аналізу.

Приклад 2. Знайти образи заданих ліній при відображенні функцією $w=z^2$:

а) пряма $\operatorname{Re} z=1$; б) коло $|z|=3$; в) промінь $\arg z=\pi/3$.

Розв'язання. $z=x+iy$; $w=u+iv$; $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$;

$u=u(x,y)=\operatorname{Re} w=x^2-y^2$; $v=v(x,y)=\operatorname{Im} w=2xy$;

а) пряма $\operatorname{Re} z=1$: $x=1$; $u=1-y^2$; $v=2y$; $y=v/2$;

$u=1-v^2/4$ – парабола (образ прямої $\operatorname{Re} z=1$).

б) коло $|z|=3$: $|w|=\left|z^2\right|=|z|^2=3^2$; $|w|=9$ – коло (образ кола $|z|=3$).

в) промінь $\arg z=\pi/3$: $\arg w=\arg z^2=2\cdot\arg z=2\pi/3$;

$\arg w=2\pi/3$ – промінь (образ променя $\arg z=\pi/3$).

Зауваження 4. Відображення $w=f(z)$, що однолисте і неперервне в замкненій області $\overline{D}$, переводить цю область $\overline{D}$ в деяку замкнену область $\overline{E}$. При цьому межа області $\overline{D}$ переходить в межу області $\overline{E}$ зі збереженням напряму обходу (***принцип збереження напряму обходу***).

1.3.2. Похідна. Умови Коші – Рімана

Нехай $w=f(z)$ – однозначна функція комплексної змінної у деякому околі фіксованої точки z.

Похідною $w'=f'(z)$ функції $w=f(z)$ у точці z називається границя відношення приросту функції Δw до приросту аргументу Δz, коли приріст аргументу прямує до нуля довільним способом:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Функція, що має скінченну похідну в точці z, називається ***диференційовною*** в цій точці.

Зауваження 1. Хоча зображенням функції комплексної змінної служить вектор-функція, комплексне диференціювання не зводиться до векторного диференціювання і накладає більш жорсткі вимоги на функцію $w = f(z)$.

Теорема (***необхідні та достатні умови комплексної диференційовності***). *Функція* $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ *диференційовна в точці* $z = x + i\,y$ *тоді і тільки тоді, коли існують неперервні частинні похідні функцій* $u = u(x, y)$ *і* $v = v(x, y)$ *за обома змінними* x *і* y *в точці* $M(x, y)$ *і виконуються* ***умови Коші – Рімана***:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

Доведення.

Необхідність. Нехай функція $w = f(z)$ в фіксованій точці $z = x + i\,y$ має похідну $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$, $f'(z) = A + iB$. Звідси $\Delta w = f\,'(z) \cdot \Delta z + \alpha\,\Delta z$, де $\alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2$ – нескінченно мала функція при $\Delta z \to 0$, тому її дійсна α_1 і уявна α_2 частини також нескінченно малі.

Підставимо вирази $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$; $f'(z) = A + iB$; $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$; $\alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2$

у співвідношення для приросту функції і відділимо дійсну та уявну частини

$$\Delta u + i\Delta v = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\,\alpha_2)(\Delta x + i\Delta y);$$

$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1 \Delta x - \alpha_2 \Delta y\,;\quad \Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \alpha_2 \Delta x + \alpha_1 \Delta y\ .$$

Останні дві рівності показують, що функції $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$ диференційовні в точці $M(x, y)$, причому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -B\,;\quad \frac{\partial v}{\partial x} = B;\quad \frac{\partial v}{\partial y} = A\,.$$

Звідси $\qquad A = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,;\quad -B = \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}\ .$

Достатність умов Коші – Рімана приймемо без доведення.

Зауваження 2. Згідно з умовами Коші – Рімана похідну функції комплексної змінної можна подати через частинні похідні дійсної та уявної частин наступними чотирма способами:

$$f\,'\{z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\ .$$

Приклад 1. Перевірити, що функція $w = 1/z$ задовольняє умови Коші – Рімана, і знайти її похідну.

Розв'язання. $\quad z = x + i\,y$; $\quad w = u + i\,v$; $\quad w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x + i\,y} = \dfrac{x - i\,y}{x^2 + y^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2}$;

$$u=\frac{x}{x^2+y^2}; \quad v=\frac{-y}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Знайдені частинні похідні задовольняють умови Коші – Рімана. Обчислимо комплексну похідну:

$$f'\{z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+i\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-(x-iy)^2}{(x+iy)^2(x-iy)^2}=\frac{-1}{(x+iy)^2}=-\frac{1}{z^2}.$$

<u>Зауваження 3</u>. Умови Коші – Рімана можна подати в геометричній формі:

$$grad\, u \cdot grad\, v = 0; \quad |grad\, u| = |grad\, v|,$$

де вектори градієнтів

$$grad\, u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}; \quad grad\, v=\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}.$$

З такого геометричного тлумачення умов Коші – Рімана випливає, що вони зберігаються для будь-яких двох взаємно перпендикулярних напрямів $\vec{m}, \vec{n}$ з тією ж взаємною орієнтацією, що і осі Ox, Oy (рис. 16):

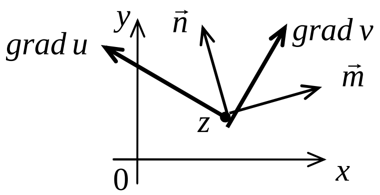


Рис. 16

$$\frac{\partial u}{\partial m}=\frac{\partial v}{\partial n}; \quad \frac{\partial u}{\partial m}=-\frac{\partial v}{\partial l}.$$

Зокрема, в полярній системі координат умови Коші – Рімана мають вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

<u>Зауваження 4</u>. Як і в дійсному аналізі, диференційовна в деякій точці функція комплексної змінної є неперервною в цій точці. З означення похідної і властивостей границь випливає, що правила диференціювання і таблиця похідних функцій комплексної змінної не відрізняються від аналогічних співвідношень для функцій дійсної змінної.

1.3.3. Поняття аналітичної функції. Зв'язок аналітичних функцій з гармонічними

Функція $w=f(z)$ називається ***аналітичною*** в точці z, якщо вона диференційовна в цій точці та в деякому її околі.

Функція $w=f(z)$, що аналітична в кожній точці деякої області D, називається ***аналітичною*** (***голоморфною*** або ***регулярною***) в цій області D.

Точка, в якій функція $w=f(z)$ є аналітичною, називається ***правильною точкою*** цієї функції. Точка, в якій функція $w=f(z)$ не є аналітичною, називається ***особливою точкою*** цієї функції.

Наприклад, функція $w=z^2$ аналітична на всій комплексній площині; функція $w=\dfrac{z}{(z-1)(z+2i)}$ аналітична на всій комплексній площині за винятком двох особливих точок $z_1=1$ і $z_2=-2i$; функція $w=z\,\mathrm{Im}\,z$ не аналітична в жодній точці і має похідну тільки при $z=0$.

Нехай функція $w=f(z)$ – аналітична в деякій області D. Тоді для її дійсної $u=u(x,y)$ і уявної $v=v(x,y)$ частин справедливі умови Коші – Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \ .$$

Якщо продиференціювати першу рівність по x, а другу – по y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \ .$$

і скористатись рівністю змішаних похідних з різним порядком диференціювання, то можна одержати співвідношення

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

що називається ***рівнянням Лапласа***.

Аналогічно можна одержати рівняння Лапласа для функції $v=v(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Функція, що задовольняє рівняння Лапласа, називається ***гармонічною***.

Зауваження 1. Якщо останнє рівняння домножити почленно на уявну одиницю і скласти з попереднім, то можна одержати:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0; \quad \frac{\partial^2 (u+iv)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 (u+iv)}{\partial y^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

– рівняння Лапласа для комплексної функції $w=f(z)$.

Дійсна $u=u(x,y)$ і уявна $v=v(x,y)$ частини аналітичної функції $w=f(z)$ є гармонічними. Ці функції також пов’язані умовами Коші – Рімана і тому називаються ***спряженими гармонічними***.

Зауваження 2. Дійсна і уявна частини аналітичної функції є залежними як спряжені гармонічні. Знаючи одну з них, можна знайти іншу з точністю до сталого доданка і відновити аналітичну функцію. Для знаходження конкретного значення сталого доданка досить задати значення комплексної функції в деякій фіксованій точці.

Приклад 1. Перевірити на аналітичність задану функцію і, у випадку аналітичності, подати її у вигляді $w=f(z)$: $w=x^2-y^2-x+i(2xy-y)$.

Розв’язання. $z=x+iy$; $w=u+iv$; $u=x^2-y^2-x$; $v=2xy-y$.

Частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y\,; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y\,; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1$$

неперервні і задовольняють умови Коші – Рімана, тому функція аналітична.

Якщо в початковий вираз для комплексної функції підставити

$$x = (z + \bar{z})/2\,; \qquad y = (z - \bar{z})/(2i)\,,$$

то отримаємо її вираз у вигляді $w = f(z)$:

$$w = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 - \frac{z+\bar{z}}{2} + i\left(2 \cdot \frac{z+\bar{z}}{2} \cdot \frac{z-\bar{z}}{2i} - \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = z^2 - z\,.$$

<u>Приклад 2</u>. Перевірити, чи існує аналітична функція, дійсна частина якої $u = xy - x^2 + y^2$. В разі позитивної відповіді знайти уявну частину $v = v(x, y)$ і відновити саму аналітичну функцію $w = f(z)$ при додатковій умові $w\left(i\sqrt{2}\right) = 2$.

<u>Розв'язання</u>. Частинні похідні $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2$ і $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$ задовольняють рівняння Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, тому функція $u = xy - x^2 + y^2$ – гармонічна. Значить, існує така спряжена гармонічна функція $v = v(x, y)$, що функція $w = u + iv$ буде аналітичною.

З умов Коші – Рімана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x - 2y\,; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = y - 2x\,.$$

Функцію $v = v(x, y)$ можна знайти за її частинними похідними як криволінійний інтеграл від її повного диференціала:

$$v = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + C\,; \quad v = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (-x - 2y)\,dx + (y - 2x)\,dy + C = \int\limits_0^x (-x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_0^y (y - 2x)\,dy + C = -x^2/2 + y^2/2 - 2xy + C\,.$$

Тоді $\quad w = u + iv = \left(xy - x^2 + y^2\right) + i\left(-x^2/2 + y^2/2 - 2xy + C\right)$.

Щоб подати функцію у вигляді $w = f(z)$, треба підставити $x = (z + \bar{z})/2$; $y = (z - \bar{z})/(2i)$. Тоді

$$w = \frac{z+\bar{z}}{2} \cdot \frac{z-\bar{z}}{2i} - \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 - \frac{i}{2}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{i}{2}\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 - 2i \cdot \frac{z+\bar{z}}{2} \cdot \frac{z-\bar{z}}{2i} + Ci = -\frac{2+i}{2} z^2 + Ci\,.$$

З додаткової умови $w\left(i\sqrt{2}\right) = 2$ знайдемо значення довільної сталої C:

$$-\frac{2+i}{2}\left(i\sqrt{2}\right)^2 + Ci = 2\,; \qquad C = -1\,.$$

Шукана аналітична функція $w=-\dfrac{2+i}{2}z^2-i$.

1.3.4. Геометричний зміст модуля й аргументу похідної. Поняття про конформне відображення

Нехай аналітична функція $w=f(z)$ відображає область D z-площини на область E w-площини (рис. 17), при цьому точці z_0 відповідає точка w_0, а дуга AB довільної гладкої кривої L переходить у дугу A_wB_w відповідної гладкої кривої L_w.

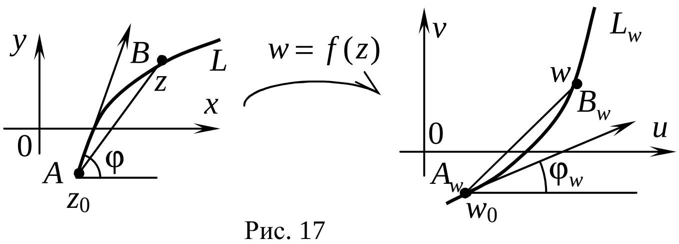


Рис. 17

Нехай похідна $f'(z_0)$ скінченна $f'(z_0)\neq\infty$ і відмінна від нуля $f'(z_0)\neq 0$, а Δz прямує до нуля вздовж кривої L.

Локальним коефіцієнтом розтягу в точці z_0 називається границя відношення довжин дуги-образу A_wB_w і дуги-прообразу AB: $k=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\cup AB}{\cup A_wB_w}$.

Замінюючи відношення дуг відношенням їх хорд, можна одержати:

$$k=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|=\left|\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|=\left|f'(z_0)\right| .$$

<u>Геометричний зміст модуля похідної</u>: оскільки границя $k=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\cup AB}{\cup A_wB_w}$ не залежить від характеру прямування Δz до нуля (від вибору кривої L), то локальний коефіцієнт розтягу в точці z_0 під дією аналітичної функції $w=f(z)$ в усіх напрямах однаковий і дорівнює модулю похідної $k=\left|f'(z_0)\right|$ (***властивість сталості розтягу***)..

Нехай $\varphi=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\arg\Delta z$ і $\varphi_w=\lim\limits_{\Delta w\to 0}\arg\Delta w$ – кути нахилу дотичних відповідно до кривої L у точці z_0 і до кривої L_w у точці w_0.

Локальним коефіцієнтом повороту в точці z_0 називається різниця кутів нахилу дотичних відповідно до дуги-образу A_wB_w і дуги-прообразу AB: $\alpha=\varphi_w-\varphi$.

Оскільки кут нахилу дотичної дорівнює границі кута нахилу січної, , а з диференційовності випливає неперервність, то

$$\alpha=\varphi_w-\varphi=\lim_{\Delta w\to 0}\arg\Delta w-\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta z=\left|\Delta w\to 0\Rightarrow\Delta z\to 0\right|=\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta w-$$

$$-\lim_{\Delta z\to 0}\arg\Delta z=\lim_{\Delta z\to 0}\arg\frac{\Delta w}{\Delta z}=\arg\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\arg f'(z_0) .$$

<u>Геометричний зміст аргументу похідної</u>: локальний коефіцієнт повороту в

точці z_0 під дією аналітичної функції $w = f(z)$ не залежить від вибору кривої L і дорівнює аргументу похідної $\alpha = \arg f'(z_0)$. Якщо через точку z_0 провести дві різні лінії, то кут між образами дорівнюватиме куту між прообразами як за величиною, так і за напрямом (***властивість консерватизму*** (зберігання) ***кутів***).

Відображення, що має властивості консерватизму кутів та сталості розтягу, називається ***конформним***.

Отже, аналітична функція $w = f(z)$ здійснює конформне відображення у кожній точці z_0, де $f'(z_0) \neq \infty$ і $f'(z_0) \neq 0$.

Відображення називається ***конформним в області*** D, якщо воно конформне в кожній точці цієї області.

Зауваження 1. При конформному відображенні нескінченно малі фігури перетворюються в подібні собі нескінченно малі фігури. Проте від точки до точки значення коефіцієнтів k і α змінюються, тому форми скінченних фігур змінюються, хоча зберігаються кути між лініями.

Основна задача конформного відображення: знайти аналітичну функцію $w = f(z)$, яка однолисто і конформно відображає задану область D z-площини на область E w-площини. Якщо ці області однозв'язні та їх межі складаються більш ніж з однієї точки, то ця задача має нескінченну кількість розв'язків. Для виділення конкретного розв'язку треба задати додаткові умови, наприклад, образи однієї внутрішньої та однієї межової точки області D.

Зауваження 2. Викликає значний інтерес також більш проста задача: знайти образ E однозв'язної області D при заданому відображенні аналітичною функцією $w = f(z)$. Правило її розв'язання: 1) знаходимо образ Γ_w межі Γ області D, при цьому лінія Γ_w розбиває w-площину на частини; 2) щоб вибрати з них відповідну частину E, треба скористатися принципом збереження напряму обходу: якщо задана орієнтація межі області D, то при відображенні образ E повинен залишатися по ту ж сторону від межі, що й прообраз D.

Приклад 1. Визначити, яка частина комплексної площини розтягується і яка стискається при відображенні $w = z^2 + z$?

Розв'язання. Знайдемо похідну: $w' = 2z + 1 = 2(x+iy) + 1 = (2x+1) + 2yi$.

Обчислимо її модуль: $|w'| = \sqrt{(2x+1)^2 + 4y^2}$.

Оскільки коефіцієнт лінійного розтягу дорівнює модулю похідної, то область, де $|w'| < 1$, стискається, а область, де $|w'| > 1$, розтягується. Знайдемо межову лінію: $|w'| = 1$; $(2x+1)^2 + 4y^2 = 1$; $4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 = 1$;

$$x^2 + x + y^2 = 0; \quad (x + 1/2)^2 + y^2 = 1/4.$$

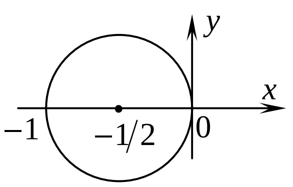


Рис. 18

Таким чином, межею служить коло з центром у точці $z_0 = -1/2$ і радіусом $r = 1/2$ (рис. 18). Внутрішня частина круга стискається, а зовнішня – розтягується.

Приклад 2. Знайти образ квадрата (рис. 19) D: $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1$ при відображенні функцією $w = z^2 + z - i$.

<u>Розв'язання</u>. Знаходимо дійсну й уявну частини заданої функції:

$$w = u + iv = z^2 + z - i = (x+iy)^2 + x + iy - i = \left(x^2 - y^2 + x\right) =$$
$$+ i\left(2xy + y - 1\right); \quad u = x^2 - y^2 + x; \quad v = 2xy + y - 1.$$

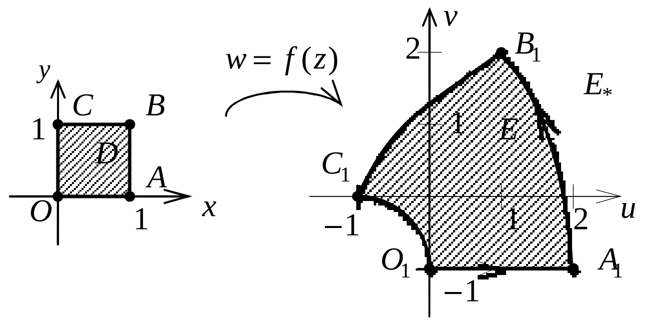


Рис. 19

Визначаємо образи сторін квадрата:

1) OA: $y = 0$; $0 \le x \le 1$, тому $u = x^2 + x$; $v = -1$. Образом відрізка OA служить відрізок $O_1A_1: v = -1;\ 0 \le u \le 2$, паралельний осі Ou.

2) AB: $x = 1$; $0 \le y \le 1$, тому $u = 2 - y^2$; $v = 3y - 1$. Тоді $y = (v+1)/3$; $u = 2 - (v+1)^2/9$. Образом відрізка AB служить дуга параболи A_1B_1: $u = 2 - (v+1)^2/9$; $-1 \le v \le 2$.

3) BC: $y = 1$; $0 \le x \le 1$, тому $u = x^2 + x - 1$; $v = 2x$. Тоді $x = v/2$; $u = v^2/4 + v/2 - 1$. Образом відрізка BC служить дуга параболи B_1C_1: $u = v^2/4 + v/2 - 1$; $0 \le v \le 2$.

4) OC: $x = 0$; $0 \le y \le 1$, тому $u = -y^2$; $v = y - 1$. Тоді $y = v + 1$; $u = -(v+1)^2$. Образом відрізка OC служить дуга параболи O_1C_1: $u = -(v+1)^2$; $-1 \le v \le 0$.

Контур $O_1A_1B_1C_1O_1$ розбиває w-площину на дві частини: внутрішню E і зовнішню E_* (рис. 19). Користуючись відповідністю кутових межових точок і принципом збереження напряму обходу контуру, визначаємо, що образом квадрата служить внутрішня область E.

1.4. Деякі елементарні функції комплексної змінної та їх властивості

1.4.1. Лінійна функція

Лінійна функція має вигляд $w = az + b$, де $a \ne 0$, b – комплексні сталі.

Лінійна функція визначена на всій комплексній площині, однозначна і неперервна. Обернена їй функція $z = w/a - b/a$ також лінійна і однозначна. Похідна $w' = a \ne 0$. Отже, лінійна функція аналітична, однолиста і здійснює конформне відображення на всій площині.

Лінійне відображення $w = az + b$ є перетворенням подібності, що зводиться до послідовної суперпозиції: а) повороту площини на кут $\arg a$; 2) розтягування її в $|a|$ разів; 3) зміщення її вздовж вектора b.

Лінійне відображення має ***кругову властивість***: пряма переходить в пряму, а коло – в коло.

1.4.2. Степенева і коренева функції

Степенева функція з натуральним показником n має вигляд $w=z^n$, де $n\in N$.

Степенева функція $w=z^n$ визначена на всій комплексній площині, однозначна, неперервна. Похідна $w'=nz^{n-1}$ всюди неперервна. Отже, степенева функція аналітична на всій комплексній площині.

Промінь $\arg z=\varphi_0$ відображається в промінь $\arg w=n\varphi_0$. Якщо точка $z=re^{i\varphi}$ належить сектору $-\pi/n<\arg z\le\pi/n$, різним z відповідають різні w. Значить, функція $w=z^n$ є однолистою в цьому секторі. Указаний сектор відображається в w-площину з розрізом по від'ємній дійсній півосі (рис.20).

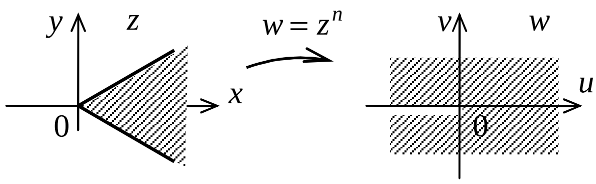


Рис. 20

Коренева функція має вигляд $w=z^p$, де $p=m/n$ – нескоротний правильний дріб: $0<m/n<1,\ m,\ n\in N$.

Коренева функція (радикал) $w=z^p$ визначена на всій комплексній площині і багатозначна. Похідна $w'=p\,z^{p-1}$ всюди визначена і неперервна, крім $z=0$. Тому ця функція аналітична на всій площині за винятком точки $z=0$. Оскільки функція $w=z^{m/n}$ n-значна, то для визначення єдиного образу при цьому відображенні необхідні додаткові умови. Функція $w=z^p$ стає однолистою на всій площині, якщо вважати значення функції $w=z^p$ додатним дійсним для додатного дійсного аргументу. Тоді z-площина з розрізом по від'ємній дійсній півосі відображається на сектор $-\pi p<\arg w\le\pi p$.

1.4.3. Показникова функція

Показникова (***експоненціальна***) ***функція*** комплексної змінної визначається рівністю

$$w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y).$$

На дійсній осі $y=0$ ця функція збігається з дійсною експонентою e^x. Зберігається основне правило: при множенні експонент їх показники додаються $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$. Справедливі також співвідношення: $e^{z_1}/e^{z_2}=e^{z_1-z_2}$; $\left(e^z\right)^n=e^{nz}$.

Модуль комплексної експоненти $\left|e^z\right|=e^x$, а аргумент $Arg\,e^z=y+2\pi n$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$. Отже, ця функція є періодичною з уявним періодом $2\pi i$: $e^{z+2\pi ni}=e^z$.

Похідна комплексної експоненти $w=e^z$ дорівнює їй самій і всюди відмінна від нуля $w'=e^z\ne0$. Тому ця функція аналітична у всій комплексній площині і задає конформне відображення. При цьому довільна горизонтальна пряма перетворюється у відкритий промінь, що виходить з початку координат, а довільний вертикальний відрізок довжиною 2π переходить в коло з центром у початку координат.

Через періодичність комплексної експоненти $w = e^z$ відображення буде однолистим у кожній горизонтальній смузі

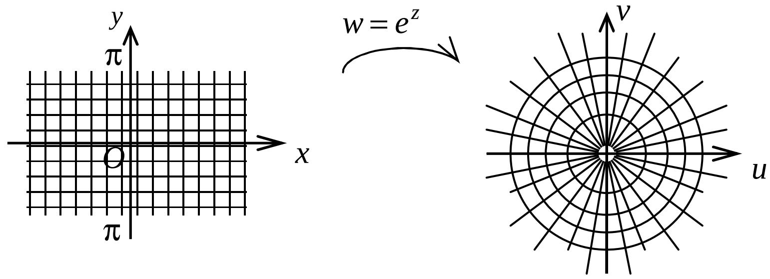


Рис. 21

$$-\pi + 2\pi n < \operatorname{Im} z \le \pi + 2\pi n\,,$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Кожна така смуга відображається в w-площину з вилученим початком координат (рис. 21). При цьому координатна сітка декартової системи на z-площині перетворюється в сітку полярних координат на w-площині.

1.4.4. Тригонометричні та гіперболічні функції

Тригонометричні та гіперболічні функції комплексного аргументу визначаються за допомогою ***основної формули Ейлера***

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

і узагальнюють відповідні дійсні функції:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}; \quad ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}};$$

$$sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}; \quad ch\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}; \quad th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}}; \quad cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z} = \frac{e^{z} + e^{-z}}{e^{z} - e^{-z}}.$$

Оскільки комплексна експонента e^z є періодичною з уявним періодом $2\pi i$, то тригонометричні функції $\sin z$ і $\cos z$ також періодичні на всій комплексній площині з дійсним періодом 2π, а $tg\, z$ і $ctg\, z$ – з дійсним періодом π:

$$\sin z = \sin(z + 2\pi); \quad \cos z = \cos(z + 2\pi); \quad tg\, z = tg\,(z + \pi); \quad ctg\, z = ctg\,(z + \pi).$$

Причому на відміну від дійсних функцій, на всій комплексній площині $\sin z$ і $\cos z$ є необмеженими:

$$|\cos z| \to +\infty, \quad |\sin z| \to +\infty \quad \text{при } y \to \pm\infty.$$

Гіперболічні функції $sh\, z$ і $ch\, z$ на всій комплексній площині є періодичними з уявним періодом $2\pi i$, а $th\, z$ і $cth\, z$ – з уявним періодом πi:

$$sh\, z = sh\,(z + 2\pi i); \quad ch\, z = ch\,(z + 2\pi i); \quad th\, z = th\,(z + \pi i); \quad cthz = cth(z + \pi i).$$

Комплексні тригонометричні функції $\sin z$ і $\cos z$ приймають нульові значення тільки в точках дійсної осі, в яких відповідно $\sin x = 0$ і $\cos x = 0$. Аналогічно, комплексні гіперболічні функції $sh\, z$ і $ch\, z$ приймають нульові значення тільки в точках уявної осі, в яких відповідні тригонометричні функції перетворюються в нуль: $\sin y = 0$ і $\cos y = 0$.

Зауваження 1. Для тригонометричних і гіперболічних функцій комплексного аргументу залишаються справедливими основні тотожності (синус і косинус суми, різниці та ін.), а також формули диференціювання.

Допоміжні формули Ейлера

$$sh\,z = -i\sin iz\,;\quad ch\,z = \cos iz\,;\quad th\,z = -i\,tg\,iz\,;\quad cth\,z = i\,ctg\,iz$$

дають зв'язок гіперболічних функцій з тригонометричними.

Зауваження 2. Геометрично зв'язок гіперболічних функцій з тригонометричними зводиться до поворотів на $\pi/2$ образів і прообразів.

Зауваження 3. При комплексних аргументах зникають принципові відмінності між показниковою, тригонометричними і гіперболічними функціями: експонента e^z стає періодичною, $\sin z$ і $\cos z$ – необмеженими і т.п. Формули Ейлера відображають тісний внутрішній зв'язок цих функцій: їх можна розглядати як різні прояви одних і тих же закономірностей.

Приклад 1. Знайти $\sin(1+2i)$.

Розв'язання. $\sin(1+2i) = \dfrac{e^{i-2} - e^{2-i}}{2i} = \dfrac{e^{-2}e^{i} - e^{2}e^{-i}}{2i} =$

$$\left(e^{-2}(\cos 1 + i\sin 1) - e^{2}(\cos 1 - i\sin 1)\right)/(2i) = \left(\cos 1(e^{-2} - e^{2}) + i\sin 1(e^{2} + e^{-2})\right)/(2i) = =$$

$$= \frac{e^{2} + e^{-2}}{2}\sin 1 + i\,\frac{e^{2} - e^{-2}}{2}\cos 1 = ch2\sin 1 + i\,sh2\cos 1.$$

1.4.5. Логарифмічна функція

Логарифмічна функція комплексної змінної визначається як обернена до показникової:

Комплексне число $w = Ln\,z$ називається ***натуральним логарифмом*** ненульового комплексного числа z, якщо виконується рівність $e^{w} = z$.

Нехай $w = u + iv$; $z = r\,e^{i\varphi}$. Тоді за означенням

$$e^{u+iv} = r\,e^{i\varphi};\quad e^{u}e^{iv} = r\,e^{i\varphi};$$

$$e^{u} = r\,;\quad v = \varphi + 2\pi k\,,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Звідси $u = \ln r = \ln|z|$ – звичайний натуральний логарифм додатного числа $|z| > 0$; $v = \arg z + 2\pi n = Arg\,z$ – вся множина значень аргументу ненульового комплексного числа $z \neq 0$.

Отже,

$$Ln\,z = \ln|z| + i\,Arg\,z\,.$$

Останній вираз показує, що функція $w = Ln\,z$ є нескінченнозначною і визначена на всій комплексній площині, за винятком початку координат $z = 0$.

Нехай в деякій області D вибором одного зі значень багатозначної функції $w = F(z)$ одержана деяка однозначна функція $w = f(z)$. Якщо ця функція $w = f(z)$ неперервна в області D, то вона називається ***однозначною гілкою*** багатозначної функції $w = F(z)$.

Зауваження 1. Багатозначну функцію $w = F(z)$ можна розглядати як однозначну, але не на комплексній площині, а на деякому більш складному геометричному об'єкті – ***Рімановій поверхні***, що утворюється шляхом "склеювання" певним чином між собою відповідної (скінченної чи нескінченної) кількості екземплярів комплексної площини. Наприклад, кореневу функцію $w = z^{2/3}$ можна розглядати як однозначну, множиною визначення якої служить трилиста поверхня ("склеєна" з трьох екземплярів площини), а множиною значень є дволиста поверхня ("склеєна" з двох екземплярів площини).

Однозначну гілку логарифмічної функції $w = Ln\, z$ можна отримати в будь-якій частині комплексної площини, що не містить початку координат, шляхом виділення відповідного проміжку змінювання його уявної частини.

Якщо для аргументу $z \neq 0$ обмежитися його головним значенням $-\pi < \arg z \leq \pi$, то одержимо однозначну гілку $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, що називається ***головним значенням логарифму***.

Зауваження 2. Якщо число z – дійсне додатне, тоді головне значення аргументу $\arg z = 0$ і головне значення логарифму співпадає зі звичайним натуральним логарифмом $\ln z = \ln|z|$.

Зауваження 3. На логарифм комплексної змінної поширюються основні властивості звичайного логарифму дійсного аргументу:

$$Ln(z_1 z_2) = Ln\, z_1 + Ln\, z_2; \quad Ln(z_1/z_2) = Ln\, z_1 - Ln\, z_2; \quad Ln(z)^n = n\, Ln\, z.$$

Область D, що відповідає однозначній гілці логарифму, не може включати точку $z = 0$ як внутрішню. Точку $z = 0$ не можна обійти, залишаючись у цій області, оскільки при кожному обході в заданому напрямі аргумент z одержує приріст 2π чи -2π і відбувається перехід до нового значення логарифму $w = Ln\, z$. Тому $z = 0$ є так званою ***точкою розгалуження*** багатозначного логарифму $w = Ln\, z$.

Зауваження 4. Точкою розгалуження логарифмічної функції є також $z = \infty$.

Зауваження 5. За допомогою логарифмічної функції визначаються:

а) ***загальна степенева функція*** $w = z^a = e^{a\, Ln\, z}$, де показник $a = \alpha + i\beta$ – довільне комплексне число. Ця функція багатозначна, її головне значення $w = e^{a \ln z}$.

б) ***загальна показникова функція*** $w = a^z = e^{z\, Ln\, a}$, де основа $a = \alpha + i\beta \neq 0$ – довільне ненульове комплексне число. Ця функція багатозначна, її головне значення $w = e^{z \ln a}$.

в) ***показниково-степенева функція*** $w = z_1^{z_2} = e^{z_2\, Ln\, z_1}$, де основа відмінна від нуля $z_1 \neq 0$. Ця функція нескінченнозначна, її головне значення $w = e^{z_2 \ln z_1}$.

Зауваження 6. Багатозначні ***обернені тригонометричні*** і ***обернені гіперболічні функції*** визначаються як розв'язки відповідних рівнянь для прямих функцій. Переходячи в цих рівняннях за формулами Ейлера до експоненти, вказані аркфункції також можна виразити через логарифмічну функцію. Наприклад:

$$Arc\sin z = -i\, \mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right); \quad Arc\cos z = -i\, \mathrm{Ln}\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right);$$

$$Arsh\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right); \quad Arch\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Приклад 1. Знайти $w=i^{-i}$.

Розв'язання.

$$w=i^{-i}=e^{-i\,Ln\,i}=e^{-i\,(\ln|i|+i\,Arg\,i)}=e^{-i\,(\ln 1+i(\pi/2+2\pi n))}=e^{\pi/2+2\pi n};\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots .$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sin z=-2$.

Розв'язання. $z=Arc\sin(-2)=-i\,\mathrm{Ln}\left(i(-2)+\sqrt{1-(-2)^2}\right)=$

$$=-i\,Ln\left(-2i+\sqrt{-3}\right)=-i\,Ln\left(\left(-2\pm\sqrt{3}\right)i\right)=-i\left(Ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)+Ln(-i)\right)=-i\left(\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)+\ln|-i|+\right.$$

$$\left.+\,i\,Arg(-i)\right)=-i\left(\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)+\ln 1+i\left(-\pi/2+2\pi n\right)\right)=\left(-\pi/2+2\pi n\right)-i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right);$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\ldots .$$

1.5. Інтеграл функції комплексної змінної

1.5.1. Поняття комплексного інтеграла

Нехай функція $w=f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ неперервна та однозначна в деякій області D, а L_{AB} – будь-яка кусково-гладка крива в цій області (рис. 22). Розіб'ємо цю криву довільним чином на n елементарних дуг $\Delta L_i=z_{i-1}z_i$, $i=\overline{1,n}$ точками z_i, $i=\overline{0,n}$ у напрямку від точки $A=z_0$ до точки $B=z_n$. Кожній елементарній дузі ΔL_i відповідає елементарна хорда $\Delta z_i=z_i-z_{i-1}$. На кожній елементарній дузі ΔL_i виберемо довільну точку ζ_i і складемо ***інтегральну суму*** $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta z_i$ для функції $f(z)$ на кривій L_{AB}.

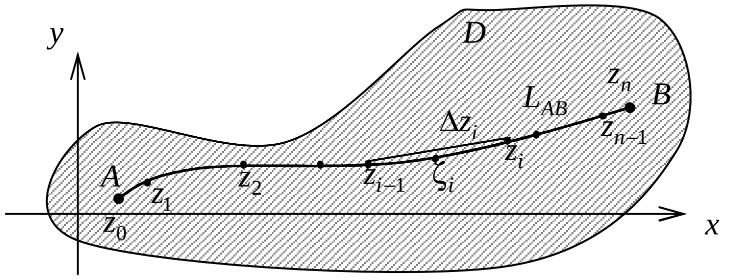


Рис. 22

Границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття (незалежно від способу розбиття та вибору точок) називається ***інтегралом*** (***контурним інтегралом***) ***комплексної функції*** $f(z)$ ***по кривій*** (***контуру***) L_{AB}:

$$\int\limits_{L_{AB}}f(z)\,dz=\lim_{\max|\Delta z_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta z_i\,,$$

де $dz=dx+i\,dy$ – диференціал комплексного аргументу.

Інтеграл від комплексної функції можна виразити через два дійсні криволінійні інтеграли за координатами:

$$\int\limits_{L_{AB}}f(z)\,dz=\int\limits_{L_{AB}}(u+i\,v)\,(dx+i\,dy)=\int\limits_{L_{AB}}u\,dx-v\,dy+i\int\limits_{L_{AB}}v\,dx+u\,dy\,.$$

Тому для інтеграла від комплексної функції справедливі відповідні властивості криволінійних інтегралів. Зокрема, при зміні напряму обходу кривої цей інтеграл тільки змінює знак:

$$\int_{L_{BA}} f(z)\,dz = -\int_{L_{AB}} f(z)\,dz\,.$$

Як і для дійсних криволінійних інтегралів, обчислення інтеграла від комплексної функції зводиться за допомогою методу заміни змінної до обчислення звичайного визначеного інтеграла.

Приклад. Обчислити заданий інтеграл по вказаній дузі:

а) $I = \int\limits_L \dfrac{dz}{z - z_0}$; $L\colon z = z_0 + R\cdot e^{it},\ t \in [0;2\pi]$ – коло.

б) $I = \int\limits_L (2z + \bar{z} + i)\,dz$; $L\colon y = x^2,\ z_1 = 0,\ z_2 = 1 + i$ – дуга параболи.

Розв'язання.

а) $$I = \int\limits_L \frac{dz}{z - z_0} = \left| \begin{matrix} z = z_0 + Re^{it};\ dz = iRe^{it}dt \\ z_1 = 0;\quad z_2 = 2\pi \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}dt}{\mathrm{Re}^{it}} = i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i\ .$$

б) $$I = \int\limits_L (2z + \bar{z} + i)\,dz = \left| \begin{matrix} y = x^2;\ z = x + iy = x + ix^2;\ \bar{z} = x - ix^2;\ dy = 2xdx; \\ dz = dx + idy = dx + i2xdx = (1 + 2xi)\,dx;\ x_1 = 0;\ x_2 = 1; \\ f(z) = 2z + \bar{z} + i = 2\left(x + ix^2\right) + x - ix^2 + i = 3x + i\left(x^2 + 1\right); \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(3x + i\left(x^2 + 1\right)\right)(1 + 2xi)\,dx = \int\limits_0^1 \left(3x - 2x\left(x^2 + 1\right)\right)dx + i\int\limits_0^1 \left(\left(x^2 + 1\right) + 6x^2\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x - 2x^3\right)dx + i\int\limits_0^1 \left(7x^2 + 1\right)dx = \left(x^2/2 - x^4/2\right)\Big|_0^1 + i\left(7x^3/3 + x\right)\Big|_0^1 = \frac{10}{3}i\ .$$

Зауваження. Для існування інтеграла досить неперервності підінтегральної функції $w = f(z)$, тому інтеграл може існувати і у випадку неаналітичності цієї функції.

1.5.2. Первісна функції комплексної змінної. Інтегральна теорема Коші

Якщо крива L_{AB} лежить в області аналітичності функції $w = f(z)$, то комплексний інтеграл $I = \int\limits_{L_{AB}} f(z)\,dz$ не залежить від форми шляху інтегрування, а тільки від початкової та кінцевої точок. Це пояснюється тим, що для аналітичної функції виконуються умови Коші–Рімана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, які співпадають з умовами незалежності від шляху інтегрування обох відповідних дійсних криволінійних інтегралів $\int\limits_{L_{AB}} u\,dx - v\,dy$ і $\int\limits_{L_{AB}} v\,dx + u\,dy$.

Таким чином, інтеграл аналітичної функції можна подати у вигляді $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$.

Якщо зафіксувати нижню межу інтегрування, то одержаний інтеграл

$F(z)=\int\limits_a^z f(\xi)\,d\xi$, як функція верхньої межі, служить ***первісною*** для $f(z)$:

$$F'(z)=\left(\int\limits_a^z f(\xi)\,d\xi\right)' = f(z)\,.$$

Множина всіх первісних для даної функції утворює відповідний ***невизначений інтеграл***.

Для інтеграла аналітичної функції справджується формула Ньютона – Лейбніца

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2)-F(z_1)\,,$$

де $F(z)$ – довільна первісна.

Зауваження. Таблиця інтегралів аналогічна відповідній таблиці для функцій дійсного аргументу, але підлогарифмові вирази не містять модуля.

Приклад. Користуючись таблицею інтегралів, обчислити заданий інтеграл аналітичної функції:

$$I=\int\limits_0^i \frac{dz}{\sqrt{z^2+4}}\ .$$

Розв’язання. $I=\int\limits_0^i \frac{dz}{\sqrt{z^2+4}}=\ln\left(z+\sqrt{z^2+4}\right)\Big|_0^i=\ln\left(i+\sqrt{i^2+4}\right)-\ln 2=$

$$=\ln\left(\sqrt{3}+i\right)-\ln 2=\ln\left|\sqrt{3}+i\right|+i\arg\left(\sqrt{3}+i\right)-\ln 2=\ln 2+i\pi/6-\ln 2=i\pi/6\,.$$

Умови незалежності криволінійного інтеграла $\int\limits_L P\,dx+Q\,dy$ від форми шляху інтегрування $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ еквівалентні рівності нулю цього інтеграла по довільному замкненому контуру L, що лежить в даній однозв’язній області

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy=0\ .$$

Аналогічне твердження справедливе для комплексного інтеграла аналітичної функції.

Теорема (***інтегральна теорема Коші*** для однозв’язної області). *Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв’язній області D, що обмежена кусково-гладким контуром C і неперервна в замкненій області $\overline{D}$, то інтеграл функції $f(z)$ по контуру C дорівнює нулю*

$$\int\limits_C f(z)\,dz=0\ .$$

Теорема Коші поширюється на багатозв’язну область (рис. 23): *якщо функція $f(z)$ аналітична в багатозв’язній області D, що обмежена зовнішнім контуром C_0 і внутрішніми контурами C_k, $k=\overline{1,n}$, і неперервна в замкненій області $\overline{D}$, то інтеграл функції $f(z)$ по повній межі області в додатному напрямі* *дорівнює нулю*

$$\int_{C_0} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz = 0 \;.$$

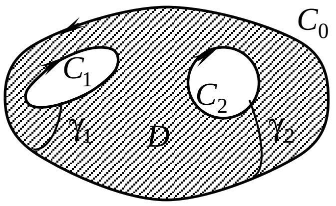


Рис. 23

Іншими словами, <u>для складеного контуру</u> справедливо: *інтеграл функції* $f(z)$ *по зовнішньому контуру дорівнює сумі інтегралів по всіх внутрішніх контурах при умові, що обіг усіх контурів здійснюється проти ходу годинникової стрілки*

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz \;.$$

При доведенні багатозв'язна область перетворюється в однозв'язну область за допомогою розрізів γ_k, $k=\overline{1,n}$, що з'єднують внутрішні контури із зовнішнім (рис. 23). Кожна лінія розрізу γ_k проходиться двічі в протилежних напрямах, тому інтеграли по ній при додаванні взаємно знищуються.

1.5.3. Інтегральна формула Коші та її наслідки

Інтегральна теорема Коші відкриває можливість визначення значень аналітичної функції всередині області через її значення на межі цієї області.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, що обмежена кусково-гладким контуром C і неперервна в замкненій області $\overline{D}$ (рис. 24). Для довільної фіксованої внутрішньої точки z_0 області D допоміжна функція $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ є аналітичною в цій області, крім хіба що точки z_0. Обведемо точку z_0 колом γ з центром у цій точці та радіусом r таким, що все коло лежить всередині області D. Тоді допоміжна функція $\varphi(z)$ буде аналітичною у двозв'язній області D_1 між контурами γ і C. За теоремою Коші

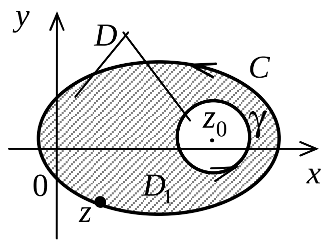


Рис. 24

$$\int_C \varphi(z)\,dz = \int_\gamma \varphi(z)\,dz \;; \qquad \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz \,.$$

Тоді

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_\gamma \frac{f(z_0)+f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = f(z_0)\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} +$$

$$+\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = \left| \begin{array}{ll} \gamma\colon\; z-z_0 = r\,e^{it}\,; & t_1=0;\; t_2 = 2\pi; \\ dz = ir\,e^{it}dt; & z = z_0 + r\,e^{it} \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi i f(z_0) + \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+r\,e^{it}) - f(z_0)}{r\,e^{it}}\, ir\,e^{it}\,dt = 2\pi i f(z_0) + \int_0^{2\pi}\Big(f(z_0+r\,e^{it}) - f(z_0)\Big)dt \,\mathbf{.}$$

Із неперервності підінтегральної функції випливає, що останній інтеграл прямує до нуля при $r \to 0$ і при $r = 0$ стає рівним нулю. Дістаємо ***інтегральну формулу Коші*** (***інтеграл Коші***)

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz .$$

Зауваження 1. У випадку багатозв'язної області інтегрування треба проводити по повній межі у додатному напрямі.

Зауваження 2. Оскільки z_0 – довільна точка області аналітичності, то індекс можна опустити, а межові точки позначити через ζ. Тоді формула Коші (інтеграл Коші) набуває вигляду

$$f\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta .$$

Інтеграл Коші виражає значення аналітичної функції $f(z)$ в довільній точці z через її значення ζ на довільному контурі C, що лежить в області аналітичності функції $f(z)$ і містить точку z всередині. В цей інтеграл змінна z входить як параметр.

Наслідок 1. $\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases} f(z), & z\in D;\\ 0, & z\notin D.\end{cases}$

Зауваження 3. Нехай функція $f(z)$ – аналітична в області D з межею C і неперервна в замкненій області $\overline{D}$. Нехай a – довільна точка межі C. Тоді в силу неперервності функції $f(z)$ до самої межі C з наслідку 1 випливає:

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\in D}}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=f(a)\,;\quad \lim_{\substack{z\to a\\ z\notin D}}\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=0 .$$

Таким чином, на межі області D функція $f(z)$ має стрибок, що дорівнює $f(a)$ – значенню цієї функції на межі.

Наслідок 2. Нехай функція $f(z)$ – аналітична в області D з межею C і z – довільна внутрішня точка цієї області. Тоді функція $f(z)$ нескінченно разів диференційовна, причому

$$f'\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\left(z-\zeta\right)^2}d\zeta \;;\quad f^{(n)}\left(z\right)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\left(z-\zeta\right)^{n+1}}d\zeta .$$

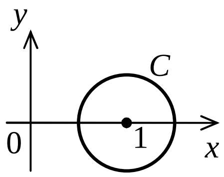
Ці співвідношення одержуються диференціюванням інтеграла Коші, де похідна по параметру береться від підінтегральної функції.

Теорема і формула Коші знаходять широке застосування при обчисленні інтегралів по замкнутих контурах.

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int_C\frac{e^{2z}\,dz}{z\left(z-1\right)^2}$ по вказаному замкненому контуру C: **а)** C: $|z-1|=1/2$; **б)** C: $|z-i|=1/2$; **в)** C: $|z|=2$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(z)=\frac{e^{2z}}{z\left(z-1\right)^2}$ всюди аналітична за винятком двох особливих точок $z_1=0$ і $z_2=1$.

а) Особлива точка $z_1=0$ не входить всередину області D, обмеженої контуром C: $|z-1|=1/2$ (рис. 25). У підінтегральному виразі виділимо функцію $\varphi(z)=e^{2z}/z$, що аналітична в області D. Тоді для обчислення інтеграла можна скористатися формулою Коші для першої похідної:



$$I=\int_C \frac{e^{2z}\,dz}{z(z-1)^2}=\int_C \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-1)^2}=2\pi i\,\varphi'(z)\big|_{z=1}=$$

$$=\left|\varphi'(z)=\frac{2e^{2z}z-e^{2z}}{z^2}\right|=2\pi i\cdot\frac{2e^{2\cdot1}\cdot1-e^{2\cdot1}}{1^2}=2\pi e^2 i\ .$$

Рис. 25

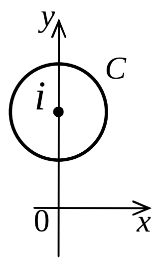


Рис. 26

б) Обидві особливі точки $z_1=0$ і $z_2=1$ не входять всередину області D, обмеженої контуром C: $|z-i|=1/2$ (рис. 26). Підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{z(z-1)^2}$ аналітична в цій області, тоді за теоремою Коші

$$I=\int_C \frac{e^{2z}\,dz}{z(z-1)^2}=0\ .$$

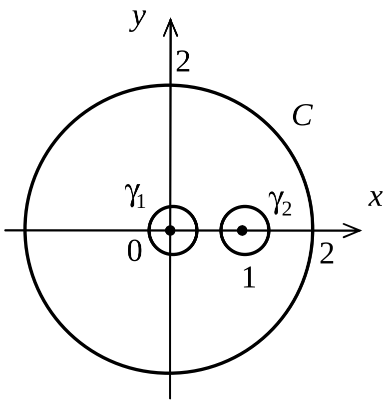


Рис. 27

в) Обидві особливі точки $z_1=0$ і $z_2=1$ входять всередину області D, обмеженої контуром C: $|z|=2$ (рис. 27). Побудуємо кола γ_1 і γ_2 з центрами відповідно в точках $z_1=0$ і $z_2=1$ достатньо малих радіусів так, щоб вони не перетинались ні з контуром C, ні між собою. У тризв'язній області, обмеженій ззовні контуром C, а зсередини – колами γ_1 і γ_2, підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{z(z-1)^2}$ аналітична. За теоремою Коші для складеного контуру

$$I=\int_C \frac{e^{2z}\,dz}{z(z-1)^2}=\int_{\gamma_1} \frac{e^{2z}\,dz}{z(z-1)^2}+\int_{\gamma_2} \frac{e^{2z}\,dz}{z(z-1)^2}\ ,$$

де обхід всіх контурів здійснюється проти годинникової стрілки.

У підінтегральному виразі першого доданка виділимо функцію $\varphi(z)=e^{2z}/(z-1)^2$, що аналітична в області, обмеженій контуром γ_1. Тоді за формулою Коші:

$$I_1=\int_{\gamma_1} \frac{e^{2z}\,dz}{z(z-1)^2}=\int_{\gamma_1} \frac{\varphi(z)}{z}\,dz=2\pi i\cdot\varphi(z)\big|_{z=0}=2\pi i\cdot e^{2\cdot0}\big/(0-1)^2=2\pi i.$$

Другий доданок $I_2=\int_{\gamma_2} \dfrac{e^{2z}\,dz}{z(z-1)^2}$ не залежить від вибору контуру γ_2, що охоплює тільки одну особливу точку $z_2=1$, тому його значення співпадає з обчисленим в пункті а). Отже,

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{e^{2z}\,dz}{z(z-1)^2} = 2\pi e^2 i\ .$$

Таким чином,

$$I = I_1 + I_2 = 2\pi i + 2\pi e^2 i = 2\pi\left(e^2+1\right)i\ .$$

1.6. Ряди функцій комплексної змінної

1.6.1. Основні поняття про ряди з комплексними членами

Теорема 1. ***Числовий ряд з комплексними членами*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, *де* $c_n = a_n + i b_n$, $a_n \in R$, $b_n \in R$ *збігається тоді і тільки тоді, коли збігаються обидва ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *складені з дійсних і уявних частин.*

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд з модулів його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ називається ***умовно збіжним***, якщо сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається, а ряд з модулів його членів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ розбігається.

Зауваження. Дослідження на збіжність рядів з комплексними членами зводиться до дослідження рядів з дійсними членами, що здійснюється за відомими ознаками збіжності дійсних рядів.

Приклад 1. Дослідити на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} + i\,\frac{1}{n^n} \right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + i\,\frac{1}{n!} \right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + i2^n \right)$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left((n+1)/n + i\ln n\right)$.

Розв'язання.

а) Обидва дійсні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ збігаються – перший за ознакою Даламбера, а другий за радикальною ознакою Коші (покажіть це самостійно). Тому заданий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} + i\,\frac{1}{n^n} \right)$ також збігається.

б) Ряд з дійсних частин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається як гармонічний, тому заданий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + i\,\frac{1}{n!} \right)$ теж розбігається (хоча ряд з уявних частин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ збігається за ознакою Даламбера).

в) Ряд з дійсних частин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається як узагальнений гармонічний з показником степеня $\alpha = 2 > 1$, а ряд з уявних частин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$ розбігається як геометрична прогресія зі знаменником $q = 2 \geq 1$. Тому заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} + i2^n\right)$ теж розбігається.

г) Обидва дійсні ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)/n$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n$ розбігаються, оскільки не задовольняють необхідну ознаку збіжності (покажіть це самостійно). Тому заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)/n + i\ln n)$ також розбігається.

<u>Приклад 2</u>. Показати, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}((1+2i)/5)^n$ збігається абсолютно.

<u>Розв'язання</u>. Дослідимо на збіжність ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|((1+2i)/5)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}(|1+2i|/5)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{5}/5\right)^n .$$

Цей ряд збігається як геометрична прогресія зі знаменником $q = \sqrt{5}/5 < 1$. Тому заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}((1+2i)/5)^n$ збігається абсолютно.

Нехай в деякій області D комплексної площини задана послідовність функцій комплексної змінної $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$, ... Вираз (нескінченна сума)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

називається ***функціональним рядом з комплексними членами***.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ називається ***збіжним*** у точці z_0, якщо збігається відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$.

Множина всіх точок збіжності називається ***областю збіжності***.

<u>Теорема 2</u> (***теорема Вейерштрасса***). *Якщо члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ неперервні в області D і ряд збігається рівномірно, то сума ряду $S(z)$ – неперервна в D і допускає почленне інтегрування вздовж довільної кривої L, що лежить в області D*:

$$\int_L S(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_L f_n(z)\,dz .$$

<u>Теорема 3</u>. *Якщо члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ аналітичні в області D і ряд збігається рівномірно в будь-якій замкненій області, що належить D, то сума ряду $S(z)$ – аналітична в області D і допускає почленне диференціювання довільне число разів*:

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z); \qquad S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) .$$

1.6.2. Степеневі ряди. Ряд Тейлора

Степеневим рядом з центром у точці z_0 називається функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n (z-z_0)^n + \ldots,$$

де c_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ – ***коефіцієнти ряду*** (комплексні числа).

Очевидно, що степеневий ряд завжди збігається в своєму центрі $z = z_0$.

Теорема 1 (***теорема Абеля***). *Якщо степеневий ряд збігається в деякій точці z_1 $(z_1 \neq z_0)$, то він абсолютно збігається в крузі радіуса $|z_1 - z_0|$ з центром z_0. Якщо степеневий ряд розбігається в деякій точці z_2 $(z_2 \neq z_0)$, то він розбігається поза кругом радіуса $|z_2 - z_0|$ з центром z_0.*

За теоремою Абеля для степеневого ряду завжди існує так званий ***круг збіжності*** $|z - z_0| < R$, всередині якого ряд збігається, зовні – розбігається, а на самому колі $|z - z_0| = R$ можуть бути як точки збіжності, так і розбіжності. Радіус цього R круга називається ***радіусом збіжності***.

Зауваження 1. Очевидно, $0 \le R \le +\infty$. Якщо $R = 0$, то ряд збігається тільки в центрі $z = z_0$. Якщо $R = +\infty$, то ряд збігається на всій комплексній площині.

Застосовуючи до ряду з модулів ознаку Даламбера чи радикальну ознаку Коші, радіус збіжності степеневого ряду можна знайти відповідно за формулами:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad \text{або} \quad R = 1\Big/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad .$$

Приклад 1. Знайти радіус збіжності степеневого ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (n-2i)(z+i)^n \ ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} z^n / n! \, ; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (n+i)^n (z-1+i)^n \, .$$

Розв'язання.

$$\text{а) } R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|n-2i|}{|n+1-2i|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{(n+1)^2+4}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4}{(n+1)^2+4}} = 1 \ .$$

$$\text{б) } R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1/n!|}{|1/(n+1)!|} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty \ .$$

$$\text{в) } R = 1\Big/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1\Big/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(n+i)^n|} = 1\Big/\lim_{n\to\infty} |n+i| = 1\Big/\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} = 0 \ .$$

Теорема 2 (***теорема Тейлора***). *Нехай функція $f(z)$ – аналітична всередині круга радіуса R з центром у точці z_0. Тоді вона може бути подана у цьому крузі збіжним степеневим* ***рядом Тейлора***

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \, ; \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0,1,2,\ldots) \, .$$

Причому цей ряд визначається однозначно.

Зауваження 2. Спираючись на наслідок 2 формули Коші, коефіцієнти ряду Тейлора можна подати у вигляді

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

де γ – довільний замкнений контур, що лежить в крузі $|z-z_0| < R$ і охоплює точку z_0.

Зауваження 3. Якщо функція $f(z)$ – аналітична в області D і z_0 – внутрішня точка цієї області, то радіус збіжності ряду Тейлора $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ не менший, ніж відстань точки z_0 до межі C області (рис. 28). Таким чином, *радіус збіжності ряду Тейлора дорівнює відстані від центра* z_0 *до найближчої до нього особливої точки функції* $f(z)$.

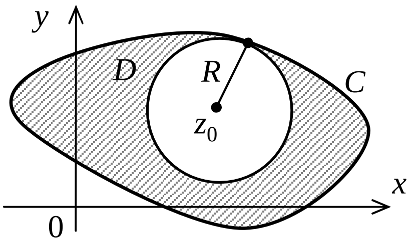


Рис. 28

Зауваження 4. Теорема Тейлора дозволяє дати еквівалентне означення аналітичної функції як функції, ряд Тейлора якої збігається до неї самої, що співпадає з прийнятим у дійсному аналізі.

Зауваження 5. Ряд Тейлора для функції $f(z)$ в точці z_0 єдиний, тобто, якщо функція $f(z)$ якимось чином подана рядом за степенями $(z-z_0)$, то це і буде ряд Тейлора. Тому на практиці для розкладу функції в степеневий ряд використовують відомі розвинення елементарних функцій. Наведемо деякі з них:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}; \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}; \quad \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n};$$

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \ldots.$$

Розвинення для експоненти, синуса і косинуса справедливі на всій комплексній площині. Радіус збіжності R ряду для логарифму дорівнює 1. Радіус збіжності R біноміального ряду залежить від показника степеня α: $R = +\infty$ при натуральному α і $R = 1$ при ненатуральному α.

Приклад 2. Розкласти функцію $f(z) = \frac{z}{z+4}$ в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 1$ і знайти радіус збіжності отриманого ряду.

Розв’язання. Подамо функцію у вигляді

$$f(z) = \frac{z}{z+4} = \frac{z+4-4}{z+4} = 1 - \frac{4}{z+4} = 1 - \frac{4}{(z-1)+5} =$$

$$= 1 - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{1+(z-1)/5} = 1 - \frac{4/5}{1-(-(z-1)/5)}.$$

Якщо $|-(z-1)/5| < 1$, то другий доданок в останньому виразі можна розглядати як суму $S=\dfrac{a_1}{1-q}$ нескінченно спадної геометричної прогресії $a_1\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ з першим членом $a_1=4/5$ і знаменником $q=-(z-1)/5$. Тоді

$$f(z)=1-(4/5)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-(z-1)/5\right)^{n-1}=1-\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\left(-\frac{z-1}{5}\right)-\frac{4}{5}\left(-\frac{z-1}{5}\right)^2-\ldots-\frac{4}{5}\left(-\frac{z-1}{5}\right)^n-\ldots=$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}(z-1)^n .$$

Отриманий ряд в силу однозначності розвинення і є шуканим рядом Тейлора. Радіус збіжності цього ряду визначається з умови $\left|-(z-1)/5\right|<1$. Тоді $|z-1|<5$. Отже, $R=5$.

Радіус збіжності $R=5$ можна знайти інакше як відстань від центра ряду $z_0=1$ до найближчої особливої точки $z=-4$ функції $f(z)=\dfrac{z}{z+4}$ (у даної функції особлива точка єдина).

1.6.3. Ряд Лорана

Розглянемо ***узагальнений степеневий ряд***

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n ,$$

де c_n $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ – коефіцієнти ряду;, z_0 – центр ряду.

Цей ряд містить як невід’ємні, так і від’ємні степені різниці $(z-z_0)$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ називається ***головною частиною***, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ – ***правильною частиною***. Узагальнений степеневий ряд збігається, якщо одночасно збігаються його головна і правильна чистини. Правильна частина як звичайний степеневий ряд збігається всередині деякого круга з центром z_0 і радіусом $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left(|c_n|/|c_{n+1}|\right)$. Якщо у головній частині зробити заміну $\zeta=1/(z-z_0)$, то отриманий звичайний степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}\zeta^n$ збігається всередині деякого круга з центром $\zeta=0$ і радіусом $R_1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(|c_{-n}|/|c_{-n-1}|\right)$. Нехай $r=1/R_1$. Повертаючись до змінної z, можна встановити, що головна частина збігається зовні круга з центром z_0 і радіусом $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left(|c_{-n-1}|/|c_n|\right)$.

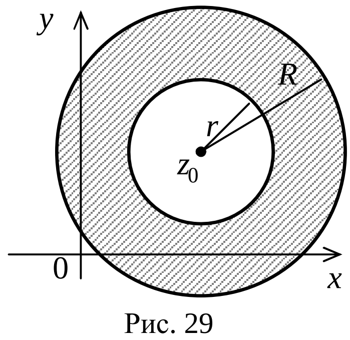


Рис. 29

Якщо області $|z-z_0|<R$ і $|z-z_0|>r$ мають непорожній переріз, то узагальнений степеневий ряд збігається у їх спільній частині – кільці $r<|z-z_0|<R$ (рис. 29). На межі кільця ряд може як збігатися, так і розбігатися.

<u>Приклад 1</u>. Знайти область збіжності узагальненого степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(z-i)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{3^n n^5}$$

Розв'язання. Знайдемо область збіжності головної частини $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(z-i)^n}$. Застосовуючи радикальну ознаку Коші до ряду з модулів, визначаємо радіус збіжності $r=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|e^n|}=e$. Тобто, головна частина абсолютно збігається при $|z-i|>e$. На колі $|z-i|=e$ цей ряд розбігається, оскільки для відповідного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{(z-i)^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ не виконується необхідна ознака збіжності.

Знайдемо область збіжності правильної частини $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{3^n n^5}$. Застосовуючи ознаку Даламбера до ряду з модулів, визначаємо радіус збіжності

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)^5}{3^n n^5}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5=3.$$

Тобто, правильна частина абсолютно збігається при $|z-i|<3$. На колі $|z-i|=3$ цей ряд теж абсолютно збігається, оскільки відповідний ряд з модулів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(z-i)^n}{3^n n^5}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ є збіжним узагальненим гармонічним рядом. Тоді областю збіжності правильної частини служить замкнений круг $|z-i|\le 3$.

Отже, областю збіжності початкового сумарного ряду служить спільна частина знайдених областей – кільце $e<|z-i|\le 3$ з центром $z_0=i$.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в деякій області D за винятком окремих особливих точок. Візьмемо довільну точку z_0 цієї області. Якщо точка z_0 – правильна, то функцію $f(z)$ можна розвинути в ряд Тейлора, радіус збіжності якого дорівнює відстані від центра z_0 до найближчої особливої точки. Якщо точка z_0 – особлива, то функцію $f(z)$ не можна розкласти в ряд Тейлора за степенями $(z-z_0)$.

Проведемо концентричні кола з центром z_0 через кожну особливу точку області D. Тоді всередині кожного кільця між сусідніми колами особливих точок не буде. Наступна теорема дає розв'язок задачі: розкласти функцію $f(z)$, що аналітична в кільці $r<|z-z_0|<R$, в узагальнений степеневий ряд.

Теорема 1 (***теорема Лорана***). *Нехай функція $f(z)$ – аналітична в круговому кільці $r<|z-z_0|<R$ з центром у точці z_0. Тоді вона може бути однозначно подана у цьому кільці збіжним узагальненим степеневим* ***рядом Лорана***

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n;\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\quad (n=0,\pm1,\pm2,...),$$

де γ – довільний замкнений контур, що охоплює внутрішнє коло і повністю лежить у кільці.

Зауваження 1. Збіжний в деякому кільці до функції $f(z)$ ряд Лорана можна почленно диференціювати та інтегрувати. Отримані при цьому ряди збіжні у тому ж кільці.

Зауваження 2. Ряд Тейлора є окремим випадком ряду Лорана, коли в останньому відсутня головна частина ($c_{-n}=0$, $n=1,2,\ldots$).

Зауваження 3. Нехай функція $f(z)$ аналітична в круговому кільці $R<|z|<+\infty$ – в проколотому околі нескінченно віддаленої точки $z_0=\infty$. Якщо перейти до нової змінної $\zeta=1/z$, то одержана функція $f(1/\zeta)$ аналітична в кільці $0<|\zeta|<1/R$ – в проколотому околі точки $\zeta_0=0$. Розкладаючи функцію $f(1/\zeta)$ в ряд Лорана в околі точки $\zeta_0=0$ і повертаючись до змінної z, можна отримати ряд Лорана за степенями z функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки $z_0=\infty$:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n};\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)dz}{z^{n+1}},$$

де $\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$ – головна частина; $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}$ – правильна частина (зміст і назви частин ряду протилежні тим, що мають місце для ряду Лорана з центром у скінченній точці).

Зауваження 4. Нехай функція $f(z)$ – аналітична в круговому кільці $r<|z-z_0|<R$. Тоді коефіцієнти ряду Лорана задовольняють ***нерівності Коші***

$$|c_n|\le M/\rho^n,$$

де $M=\max\limits_{z\in\gamma_\rho}|f(z)|$, $r<\rho<R$, $\gamma_\rho:\ |z-z_0|=\rho$, $(n=0,\pm1,\ldots)$.

Приклад 2. Розкласти в ряд за степенями z функцію $f(z)=\frac{z^2-2z+10}{(z-2)(z^2+1)}$

а) у крузі $|z|<1$ (в околі точки $z_0=0$);

б) у кільці $1<|z|<2$;

в) у кільці $2<|z|<\infty$ (в околі нескінченно віддаленої точки $z_0=\infty$).

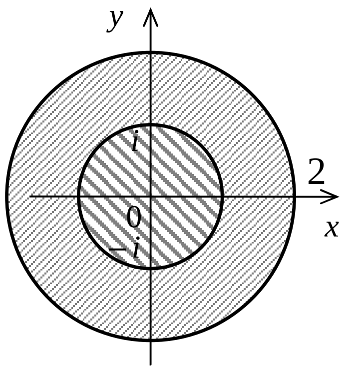


Рис. 30

Розв'язання. Особливими точками даної функції $f(z)$ є точки $z=2$ і $z=\pm i$ (у цих точках знаменник $(z-2)(z^2+1)$ дорівнює нулю). Тому існують три області з центром у правильній точці $z_0=0$ (рис. 30), де функція $f(z)$ є аналітичною і може бути розвинена в ряд за степенями z:

а) у крузі $|z|<1$ – в ряд Тейлора; б) у кільці $1<|z|<2$ – в ряд Лорана; в) у кільці $2<|z|<\infty$ – в ряд Лорана.

Оскільки дана функція $f(z)$ є правильним раціональним дробом, то 1) розкладемо її на суму елементарних дробів; 2) у відповідній області кожен з доданків перетворимо до вигляду суми нескінченно спадної геометричної прогресії і перейдемо до відповідної прогресії; 3) підставляючи отримані розклади у вираз для функції $f(z)$, знайдемо шукане розвинення цієї функції в ряд Лорана у відповідній області.

$$f(z)=\frac{z^2-2z+10}{(z-2)\left(z^2+1\right)}=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+i}+\frac{C}{z-i}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} A(z+i)(z-i)+B(z-2)(z-i)+C(z-2)(z+i)= \\ =z^2-2z+10; \\ z=2:\ 5A=10;\quad A=2; \\ z=i:\ 2i(i-2)C=-1-2i+10;\quad C=-1/2+2i; \\ z=-i:\ 2i(i+2)B=-1+2i+10;\ B=-1/2-2i \end{array}\right|=$$

$$=2\cdot\frac{1}{z-2}+\frac{-1-4i}{2}\cdot\frac{1}{z+i}+\frac{-1+4i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}\ .$$

а) У крузі $|z|<1$:

$$2\cdot\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{1-z/2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}\ ;$$

$$\frac{-1-4i}{2}\cdot\frac{1}{z+i}=\frac{-1-4i}{2}\cdot\frac{-i}{1-iz}=\frac{-4+i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(iz)^n=\frac{-4+i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}i^n z^n\ ;$$

$$\frac{-1+4i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}=\frac{-1+4i}{2}\cdot\frac{i}{1-(-iz)}=\frac{-4-i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^n=\frac{-4-i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ i^n z^n\ ;$$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}+\frac{-4+i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}i^n z^n+\frac{-4-i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n i^n z^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(i^n+2^{n-1}(-4+i)+2^{n-1}(-1)^{n+1}(4+i)\right)\big/2^n\right)i^n z^n\ .$$

б) У кільці $1<|z|<2$:

$2\cdot\dfrac{1}{z-2}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^n}$ (для першого доданку використовуємо знайдене в пункті а) розвинення);

$$\frac{-1-4i}{2}\cdot\frac{1}{z+i}=\frac{-1-4i}{2z}\cdot\frac{1}{1-(-i/z)}=\frac{-1-4i}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-i/z)^n=\frac{-1-4i}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{z^n}\ ;$$

$$\frac{-1+4i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}=\frac{-1+4i}{2z}\cdot\frac{1}{1-i/z}=\frac{-1+4i}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(i/z)^n=\frac{-1+4i}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^n}\ ;$$

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}+\frac{-1-4i}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{z^n}+\frac{-1+4i}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^n}=$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left((-1)^n(1+4i)+(-1+4i)\right)\big/2\right)i^{n-1}\frac{1}{z^n}\ .$$

в) У кільці $2<|z|<\infty$:

$$2\cdot\frac{1}{z-2}=\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-(2/z)}=\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(2/z)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}\ .$$

Для другого і третього доданків використовуємо знайдені в пункті б) розвинення:

$$\frac{-1-4i}{2}\cdot\frac{1}{z+i}=\frac{-1-4i}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{z^n}=\frac{-1-4i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}i^{n-1}}{z^n}\ ;$$

$$\frac{-1+4i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}=\frac{-1+4i}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^n}=\frac{-1+4i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{z^n}\ .$$

Тоді

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}+\frac{-1-4i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}i^{n-1}}{z^n}+\frac{-1+4i}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n-1}}{z^n}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2^{n+1}i^{n-1}+(-1)^n(1+4i)+(-1+4i)}{2}i^{n-1}\frac{1}{z^n}\,.$$

<u>Приклад 3</u>. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{z^2-2z+10}{(z-2)\left(z^2+1\right)}$ в (проколотому) околі точки $z_0=2$.

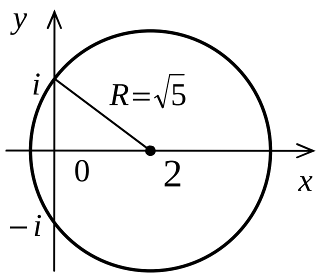


Рис. 31

<u>Розв’язання</u>. Особливими точками даної функції $f(z)$ є точки $z=2$ і $z=\pm i$ (див. попередній прикл. 2). Тому існують дві області з центром в особливій точці $z_0=2$ (рис. 31), де функція $f(z)$ є аналітичною і може бути розвинена в ряд за степенями різниці $z-2$:

а) у кільці $0<|z-2|<\sqrt{5}$ (у проколотому околі точки $z_0=2$) – в ряд Лорана;

б) у кільці $\sqrt{5}<|z-2|<\infty$ – в ряд Лорана.

У поставленій задачі розглядається (проколотий) окіл $0<|z-2|<\sqrt{5}$ точки $z_0=2$. Радіус $R=\sqrt{5}$ визначається як відстань від центра $z_0=2$ до найближчої особливої точки (в даному випадку обидві особливі точки $z=\pm i$ розміщені на однаковій відстані від точки $z_0=2$).

Розкладемо функцію $f(z)$ на суму елементарних дробів (див. попередній прикл. 2):

$$f(z)=2\cdot\frac{1}{z-2}+\frac{-1-4i}{2}\cdot\frac{1}{z+i}+\frac{-1+4i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}\,.$$

Перший доданок виражений через степінь різниці $z-2$, тобто має потрібний вигляд. Другий і третій доданки перетворимо до вигляду суми нескінченно спадної геометричної прогресії відносно різниці $z-2$ і перейдемо до відповідної прогресії. Підставляючи отримані розклади у вираз для функції $f(z)$, знайдемо розвинення цієї функції в ряд Лорана в (проколотому) околі точки $z_0=2$:

$$\frac{-1-4i}{2}\cdot\frac{1}{z+i}=\frac{-1-4i}{2}\cdot\frac{1}{i+2+z-2}=\frac{-1-4i}{2(2+i)}\cdot\frac{1}{1-\left(-(z-2)/(2+i)\right)}=\frac{-1-4i}{2\,(2+i)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{2+i}\right)^{n}=\frac{-6-7i}{10}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2+i)^n}(z-2)^n=\frac{-6-7i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}(2-i)^n(z-2)^n\ ;$$

$$\frac{-1+4i}{2}\cdot\frac{1}{z-i}=\frac{-1+4i}{2}\cdot\frac{1}{2-i+z-2}=\frac{-1+4i}{2(2-i)}\cdot\frac{1}{1-\left(-(z-2)/(2-i)\right)}=\frac{-1+4i}{2\,(2-i)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{2-i}\right)^{n}=\frac{-6+7i}{10}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2-i)^n}(z-2)^n=\frac{-6+7i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}(2+i)^n(z-2)^n\ ;$$

$$f(z)=2\cdot\frac{1}{z-2}+\frac{-6-7i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}(2-i)^n(z-2)^n+\frac{-6+7i}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}(2+i)^n(z-2)^n=$$

$$=\frac{2}{z-2}+\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}\left(-(6+7i)(2+i)^n+(-6+7i)(2-i)^n\right)(z-2)^n\ .$$

1.6.4. Ізольовані особливі точки та їх класифікація

Точка z_0 називається ***ізольованою особливою точкою*** функції $f(z)$, якщо дана функція аналітична в деякому околі цієї точки, за винятком самої точки (в проколотому околі).

Класифікація ізольованих особливих точок здійснюється за характером розвинення функції в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\ ;\qquad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

в (проколотому) околі особливої точки z_0. При цьому можливі три випадки:

а) Головна частина ряду Лорана відсутня (в ряді не має членів з від’ємними степенями різниці $z-z_0$), тобто

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\ .$$

Тоді z_0 називається ***усувною особливою точкою***.

При цьому $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$, тобто *в усувній особливій точці* z_0 *функція* $f(z)$ *має скінченну границю*.

Якщо доозначити функцію $f(z)$ в точці z_0 рівністю $f(z_0)=c_0$, то функція $f(z)$ стане аналітичною в точці z_0, а відповідний ряд буде рядом Тейлора для функції $f(z)$. Оскільки $|c_0|<+\infty$, то в околі усувної особливої точки функція $f(z)$ обмежена.

б) Головна частина ряду Лорана m членів, тобто

$$f(z)=\sum_{n=1}^{m}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n\ .$$

Тоді z_0 називається ***полюсом*** m***-го порядку***. Полюс першого порядку також називають ***простим полюсом***.

Ясно, що коли точка z_0 – полюс m-го порядку функції $f(z)$, то для функції $\varphi(z)=(z-z_0)^m f(z)$ ця точка z_0 є усувною особливою. Тоді $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=c_{-m}\neq 0$. Тому

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}=\infty,$$

тобто *в полюсі* z_0 *функція* $f(z)$ *має нескінченну границю. Порядком полюса служить найбільше натуральне значення* m*, при якому існує скінченна границя* $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)\neq 0$.

Якщо точка z_0 – полюс m-го порядку функції $f(z)$, то для функції $f(z)=1/f(z)$ ця точка z_0 служить m-кратним коренем. Справедливе також обернене твердження.

в) Головна частина ряду Лорана має нескінченну кількість членів, тобто

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Тоді z_0 називається ***істотно особливою точкою***.

В істотно особливій точці z_0 *функція* $f(z)$ *не має границі ні скінченної, ні нескінченної*. У залежності від вибору шляху прямування точки z до точки z_0 функція $f(z)$ буде мати різні границі.

<u>Нескінченно віддалена точка</u>. Особлива точка $z_0=\infty$ називається ізольованою особливою точкою, якщо функція $f(z)$ аналітична в круговому кільці $R<|z|<+\infty$ (зовні кола $|z|=R$) – в проколотому околі нескінченно віддаленої точки $z_0=\infty$. Функція $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки $z_0=\infty$ розвивається в ряд Лорана за степенями z:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}.$$

(зміст і назви частин ряду протилежні тим, що мають місце для ряду Лорана з центром у скінченній точці).

Ізольована особлива точка $z_0=\infty$ називається: а) усувною особливою точкою, якщо ряд Лорана не містить додатних степенів z; б) полюсом m-го порядку, якщо найбільша додатна степінь z в ряді Лорана дорівнює m; в) істотно особливою точкою, якщо ряд Лорана має нескінченну кількість додатних членів.

Наприклад, для функції $f(z)=(z-1)^m$ точка $z_0=\infty$ – полюс m-го порядку, а для функції $f(z)=\cos z$ точка $z_6=\infty$ – істотно особлива.

<u>Приклад</u>. Знайти всі особливі точки функції та визначити їх характер:

$$f(z)=\frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)}\,e^{1/(z+i)}.$$

Розв'язання. Знайдемо точки, де функція $f(z)$ не визначена: $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=2i$, $z_4=-2i$, $z_5=-i$, $z_6=\infty$. Дослідимо поведінку функції в околі кожної з цих точок.

$$\underline{z_1=0}:\ \lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)}\,e^{1/(z+i)}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\times$$

$$\times\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-1)^2(z^2+4)}\,e^{1/(z+i)}=1\cdot\frac{1}{4}e^{1/i}=\frac{1}{4}e^{-i};$$

$z_1=0$ – усувна особлива точка.

$$\underline{z_2=1}:\ \lim_{z\to 1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)}\,e^{1/(z+i)}=\infty;$$

$$\lim_{z\to 1} f(z)(z-1)^2=\lim_{z\to 1}\frac{\sin z}{z(z^2+4)}\,e^{1/(z+i)}=\frac{\sin 1}{5}\,e^{1/(1+i)}=$$

$=(\sin 1/5)\,e^{1/2-i/2}$; $z_2=1$ – полюс другого порядку.

$$\underline{z_3=2i}:\ \lim_{z\to 2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)}\,e^{1/(z+i)}=\infty;$$

$$\lim_{z\to 2i} f(z)(z-2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{\sin z}{z(z-1)^2(z+2i)}\,e^{1/(z+i)}=\frac{\sin 2i}{2i(2i-1)^2(2i+2i)}\,e^{1/(2i+i)}=-\frac{\sin 2i}{8(2i-1)^2}\,e^{-i/3};$$

$z_3=2i$ – простий полюс.

$$\underline{z_4=-2i}:\ \lim_{z\to -2i} f(z)=\lim_{z\to -2i}\frac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)}\,e^{1/(z+i)}=\infty;$$

$$\lim_{z\to -2i} f(z)(z+2i)=\lim_{z\to -2i}\frac{\sin z}{z(z-1)^2(z-2i)}\,e^{1/(z+i)}=$$

$$=\frac{\sin(-2i)}{(-2i)(-2i-1)^2(-2i-2i)}\,e^{1/(-2i+i)}=\frac{\sin 2i}{8(2i+1)^2}\,e^{i};$$

$z_4=-2i$ – простий полюс.

$\underline{z_5=-i}$: $\lim\limits_{z\to -i} f(z)=\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)}\,e^{1/(z+i)}$ – не існує, оскільки не існує $\lim\limits_{z\to -i} e^{1/(z+i)}$; $z_5=-i$ – істотно особлива точка.

$\underline{z_6=\infty}$: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\sin z}{z(z-1)^2(z^2+4)}\,e^{1/(z+i)}$ – не існує, оскільки не існує $\lim\limits_{z\to\infty}\sin z$; $z_6=\infty$ – істотно особлива точка.

Зауваження. Особливі точки можуть бути неізольованими. Наприклад, функція $f(z)=\left(e^{1/z}-1\right)^{-1}$ має полюси $z_n=i/(2\pi n)$ $(n=\pm 1,\pm 2,\ldots)$. Тому в довільному околі особливої точки $z=0$ є інші особливі точки. Початок координат $z=0$ є ***точкою згущення полюсів*** цієї функції.

1.7. Лишки та їх застосування

1.7.1. Поняття лишку. Основна теорема про лишки

Нехай z_0 – ізольована особлива точка функції $f(z)$, а γ – довільний контур, що охоплює цю єдину особливу точку z_0 і повністю лежить в області аналітичності даної функції (всередині контуру, окрім точки z_0, і на самому контурі функція аналітична). ***Лишком*** функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці z_0 називається комплексне число

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta,$$

де обхід контуру здійснюється проти годинникової стрілки.

Інтегруючи почленно ряд Лорана, можна одержати:

а) $\underset{z=z_0}{res} f(z) = c_{-1}$ – у скінченній точці $z_0 \neq \infty$.

Тобто *лишок функції* $\underset{z=z_0}{res} f(z)$ *в скінченній ізольованій особливій точці* $z_0 \neq \infty$ *дорівнює коефіцієнту* c_{-1} *при мінус першій степені в розвиненні даної функції в ряд Лорана в околі цієї точки*.

б) $\underset{z=\infty}{res} f(z) = -c_{-1}$ – у нескінченно віддаленій точці $z_0 = \infty$, оскільки додатному обходу для цієї точки відповідає рух за годинниковою стрілкою.

Тобто *лишок функції* $\underset{z=\infty}{res} f(z)$ *в нескінченно віддаленій ізольованій особливій точці* $z_0 = \infty$ *дорівнює мінус коефіцієнту* c_{-1} *при мінус першій степені в розвиненні даної функції в ряд Лорана в околі цієї точки*.

Зауваження 1. З означення лишку випливає, що лишок функції в скінченній правильній чи усувній особливій точці $z_0 \neq \infty$ дорівнює нулю (ряд Лорана не містить від'ємних степенів).

Зауваження 2. Лишок функції $\underset{z=\infty}{res} f(z)$ в нескінченно віддаленій точці $z_0 = \infty$ може бути відмінним від нуля й у випадку, коли дана функція $f(z)$ має скінченну границю в цій точці $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \neq \infty$, і навіть при її аналітичності в $z_0 = \infty$. При цьому

$$\underset{z=\infty}{res} f(z) = -c_{-1} = -\lim_{z\to\infty} z\left(f(z) - \lim_{z\to\infty} f(z)\right).$$

Якщо z_0 *– простий полюс функції* $f(z)$, *то*

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0) f(z).$$

Зауваження 3. Якщо функція $f(z)$ має вигляд дробу $f(z) = g(z)/h(z)$, $h(z_0) \neq 0$ і z_0 – простий полюс цієї функції $f(z)$, то

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = g(z_0)/h'(z_0).$$

Якщо z_0 *– полюс* m*-го порядку функції* $f(z)$*, то*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right].$$

Зауваження 4. Якщо z_0 – істотно особлива точка, то для знаходження лишку слід безпосередньо скористатися розвиненням функції в ряд Лорана і виділити коефіцієнт c_{-1}.

Теорема 1 (***основна теорема про лишки***).

Нехай функція $f(z)$ *аналітична в області* D *з межею* Γ *за винятком скінченного числа* n *внутрішніх ізольованих особливих точок* z_k $(k=1,2,...,n)$ *і неперервна на межі* Γ. *Тоді інтеграл по контуру* Γ *дорівнює сумі лишків у всіх внутрішніх ізольованих особливих точках*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) \ ,$$

де обхід межі Γ *здійснюється в додатному напрямі*.

Доведення. Охопимо кожну особливу точку окремим колом γ_k так, щоб ці кола не перетиналися одне з одним і з межею Γ. В одержаній багатозв'язній області, що обмежена контурами Γ, γ_1, γ_2, γ_n, функція $f(z)$ буде аналітичною. За теоремою Коші (для складеного контуру) справедливо

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) \ .$$

Наслідок 1. Якщо функція $f(z)$ аналітична в комплексній площині за винятком скінченного числа n ізольованих особливих точок $z_k \neq \infty$ $(k=1,2,...,n)$, то *сума всіх лишків, включаючи лишок у нескінченно віддаленій точці, дорівнює нулю*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z_k) = 0 .$$

Наслідок 2. Нехай функція $f(z)$ аналітична в комплексній площині. Якщо всередині області D з межею Γ знаходяться ізольовані особливі точки z_k $(k=1,2,...,n)$, а зовні неї – ізольовані особливі точки z_k $(k=n+1, n+2,...,n+p)$, причому $z_{n+p}=\infty$, тоді *інтеграл по контуру* Γ *дорівнює взятій з протилежним знаком сумі лишків у всіх зовнішніх ізольованих особливих точках*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = -2\pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname*{res}_{z=z_{n+j}} f(z) \ .$$

Зауваження 5. Наведені в цьому пункті формули одержані в припущенні, що на контурах інтегрування немає особливих точок.

Приклад 1. Обчислити вказані лишки:

$$\text{а) } \operatorname*{res}_{z=0} \frac{tg\, z}{z(z-\pi/4)}; \quad \text{б) } \operatorname*{res}_{z=\pi/4} \frac{tg\, z}{z(z-\pi/4)};$$

в) $\underset{z=2i}{res}\dfrac{z}{(z-2i)^2(z-1)}$; г) $\underset{z=0}{res}\, z^2e^{1/z}$; д) $\underset{z=\infty}{res}\dfrac{\sin z}{z^4}$.

Розв’язання.

а) Для функції $f(z)=\dfrac{tg\, z}{z(z-\pi/4)}$ точка $z=0$ – усувна особлива, оскільки

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{tg\, z}{z(z-\pi/4)}=\lim_{z\to 0}\frac{tg\, z}{z}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-\pi/4}=-\frac{4}{\pi}\neq\infty .$$

Тому $\underset{z=0}{res}\dfrac{tg\, z}{z(z-\pi/4)}=0$.

б) Для функції $f(z)=\dfrac{tg\, z}{z(z-\pi/4)}$ точка $z=\pi/4$ – простий полюс, оскільки

$$\lim_{z\to\pi/4} f(z)=\lim_{z\to\pi/4}\frac{tg\, z}{z(z-\pi/4)}=\infty;\quad \lim_{z\to\pi/4}(z-\pi/4)f(z)=\lim_{z\to\pi/4}\frac{(z-\pi/4)tg\, z}{z(z-\pi/4)}=\frac{4}{\pi}\neq 0 .$$

Тому $\underset{z=\pi/4}{res}\dfrac{tg\, z}{z(z-\pi/4)}=\lim\limits_{z\to\pi/4}\dfrac{(z-\pi/4)tg\, z}{z(z-\pi/4)}=\dfrac{4}{\pi}$.

в) Для функції $f(z)=\dfrac{z}{(z-2i)^2(z-1)}$ точка $z=2i$ – полюс другого порядку, оскільки

$$\lim_{z\to 2i} f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{z}{(z-2i)^2(z-1)}=\infty;\quad \lim_{z\to 2i}(z-2i)^2 f(z)=\lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)^2 z}{(z-2i)^2(z-1)}=\frac{2i}{2i-1}\neq 0 .$$

Тому

$$\underset{z=2i}{res}\frac{z}{(z-2i)^2(z-1)}=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 2i}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[\frac{\left(z-2i\right)^2 z}{(z-2i)^2(z-1)}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{z-1-z}{(z-1)^2}=-\lim_{z\to 2i}\frac{1}{(z-1)^2}=-\frac{1}{(2i-1)^2}=\frac{3-4i}{25} .$$

г) Для функції $f(z)=z^2e^{1/z}$ точка $z=0$ – істотно особлива, оскільки не існує ні скінченної, ні нескінченної границі $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0} z^2e^{1/z}$. Знайдемо ряд Лорана:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!};\quad e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\, z^n};$$

$$f(z)=z^2e^{1/z}=z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\, z^n}=z^2+z+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\dots .$$

Тому $\underset{z=0}{res}\, z^2e^{1/z}=c_{-1}=1/3!=1/6$.

д) Для функції $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4}$ точка $z=\infty$ – істотно особлива, оскільки не існує ні скінченної, ні нескінченної границі $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\sin z}{z^4}$. Знайдемо ряд Лорана:

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!};\quad f(z)=\frac{\sin z}{z^4}=\frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{3!z}+\frac{z}{5!}-\frac{z^3}{7!}+\dots\ .$$

Тому

$$\underset{z=\infty}{res}\frac{\sin z}{z^4}=-c_{-1}=-\left(-1/3!\right)=1/6\,.$$

1.7.2. Обчислення інтегралів за допомогою лишків

Обчислення комплексних інтегралів по замкненому контуру. За допомогою лишків можна обчислювати інтеграли по замкненому контуру від однозначних функцій, що не містять особливостей на контурі, або від однозначних гілок багатозначних функцій, якщо всередині контуру відсутні точки розгалуження.

Приклад 1. Обчислити комплексний інтеграл

$$\oint_L \frac{e^z\,dz}{z^3(z-i)},\quad \text{де а) } L:|z|=2/3;\quad \text{б) } L:|z-i|=2.$$

Розв’язання. Підінтегральна функція $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-i)}$ має три особливі точки (самостійно переконайтеся в цьому і дослідіть їх характер): $z_1=0$ – полюс третього порядку, $z_2=i$ – простий полюс, $z_3=\infty$ – істотно особлива точка ((рис. 32).

а) Усередині кола $L:|z|=2/3$ розміщена тільки одна особлива точка $z_1=0$ – полюс третього порядку. За основною теоремою про лишки

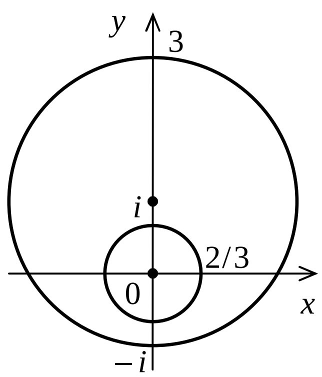


Рис. 32

$$\oint_L \frac{e^z\,dz}{z^3(z-i)}=2\pi i\,\underset{z=0}{res}\frac{e^z}{z^3(z-i)}\ ;\quad \underset{z=0}{res}\frac{e^z}{z^3(z-i)}=$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3\frac{e^z}{z^3(z-i)}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z(z-i)-e^z}{(z-i)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{\left(e^z(z-1-i)+e^z\right)(z-i)^2-2(z-i)e^z(z-1-i)}{(z-i)^4}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{e^z\left(z^2-(2+2i)z+1+2i\right)}{(z-2i)^3}=\frac{1+2i}{(-2i)^3}=1-\frac{1}{2}i\,;$$

$$\oint_L \frac{e^z\,dz}{z^3(z-i)}=2\pi i\cdot\left(1-\frac{1}{2}i\right)=\pi+2\pi i\ .$$

б) Перший спосіб. Усередині кола $L:|z-i|=2$ розміщені дві особливі точки $z_1=0$ – полюс третього порядку і $z_2=i$ – простий полюс. За основною теоремою про лишки

$$\oint_L \frac{e^z\,dz}{z^3(z-i)}=2\pi i\left(\underset{z=0}{res}\frac{e^z}{z^3(z-i)}+\underset{z=i}{res}\frac{e^z}{z^3(z-i)}\right)\ ;$$

$$\underset{z=i}{res}\frac{e^z}{z^3(z-i)}=\lim_{z\to i}\left((z-i)\frac{e^z}{z^3(z-i)}\right)=\lim_{z\to i}\frac{e^z}{z^3}=\frac{e^i}{i^3}=ie^i\ ;$$

$$\oint_L\frac{e^z\,dz}{z^3(z-i)}=2\pi i\left(1-\frac{1}{2}i+ie^i\right)=\pi+2\pi i-2\pi e^i\ .$$

Другий спосіб. Зовні кола $L:|z-i|=2$ розміщена тільки одна особлива точка $z_3=\infty$ – істотно особлива. За наслідком 2 із основної теореми про лишки

$$\oint_L\frac{e^z\,dz}{z^3(z-i)}=-2\pi i\underset{z=\infty}{res}\frac{e^z}{z^3(z-i)}\ .$$

Розвинемо підінтегральну функцію $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3(z-i)}$ в ряд Лорана:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots;\quad \frac{1}{z^3(z-i)}=\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{1-i/z}=\frac{1}{z^4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n=\frac{1}{z^4}+\frac{i}{z^5}+\frac{i^2}{z^6}+\ldots;$$

$$f(z)=\left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots\right)\left(\frac{1}{z^4}+\frac{i}{z^5}+\frac{i^2}{z^6}+\ldots\right)\ .$$

Звідси

$$c_{-1}=1\cdot\frac{1}{3!}+i\cdot\frac{1}{4!}+i^2\cdot\frac{1}{5!}+\ldots=\frac{1}{i^3}\left(\frac{i^3}{3!}+\frac{i^4}{4!}+\frac{i^5}{5!}+\ldots\right)=\frac{1}{i^3}\left(\left(1+\frac{i}{1!}+\frac{i^2}{2!}+\frac{i^3}{3!}+\ldots\right)-\left(1+\frac{i}{1!}+\frac{i^2}{2!}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{i^3}\left(e^i-\frac{1}{2}-i\right)=1+ie^i-\frac{1}{2}i\ ;\qquad \underset{z=\infty}{res}\frac{e^z}{z^3(z-i)}=-c_{-1}=-\left(1+ie^i-\frac{1}{2}i\right).$$

Тоді $\displaystyle\oint_L\frac{e^z\,dz}{z^3(z-i)}=-2\pi i\left(-\left(1+ie^i-\frac{1}{2}i\right)\right)=\pi+2\pi i-2\pi e^i$.

Обчислення дійсних інтегралів за допомогою переходу до комплексних інтегралів. Звичайно, контур інтегрування вибирають так, щоб інтеграл по деякій частині контуру при необмеженому його розширенні перетворювався в заданий дійсний інтеграл, а інтеграл по частині, що залишилася, прямував до нуля.

Лема (***лема Жордана***). *Нехай* a *– додатне число* $a>0$ *і* C_R *– півколо* $\{|z|=R,\ \operatorname{Im}z>0\}$, *що лежить в області* D *– верхній півплощині* $\operatorname{Im}z>0$ *(рис. 33). Якщо функція* $f(z)$ *– аналітична в області* D *за винятком скінченного числа* n *ізольованих особливих точок* z_k $(k=1,2,\ldots,n)$ *і прямує до нуля в цій області, коли* $|z|\to\infty$, *тоді* $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}e^{iaz}f(z)\,dz=0$.

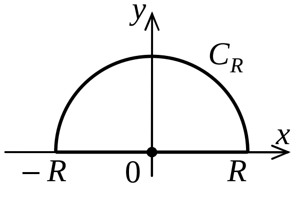


Рис. 33

Наслідок. *Нехай функція* $f(x)$ *дійсної змінної* x *неперервна на всій дійсній осі* $(-\infty;+\infty)$, *а відповідна функція* $f(z)$ *комплексної змінної* z *задовольняє лемі Жордана, тоді*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iax}f(x)\,dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res}\,e^{iaz}f(z)\ .$$

Приклад 2. Обчислити дійсний невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=1/(x^2+4)^2$ неперервна на дійсній осі, а відповідна комплексна функція $f(z)=1/(z^2+4)^2$ аналітична у верхній півплощині за винятком однієї особливої точки $z=2i$ – полюса другого порядку. Крім того, $f(z)\to 0$ при $|z|\to\infty$. Знайдемо лишок:

$$\underset{z=2i}{res}\frac{1}{(z^2+4)^2}=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}\right)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+2i)^2}=\lim_{z\to 2i}\frac{-2}{(z+2i)^3}=-\frac{2}{(4i)^3}=\frac{1}{32i}.$$

Тоді за наслідком леми Жордана (при $a=0$)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2}=2\pi i\cdot\frac{1}{32i}=\frac{\pi}{16}.$$

Приклад 3. Обчислити дійсний невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-2)\cos 2x dx}{x^2-4x+5}$.

Розв'язання. Застосуємо заміну $\cos 2x=\operatorname{Re} e^{2ix}$. Відповідна комплексна функція $f(z)=\frac{(z-2)e^{2iz}}{z^2-4z+5}$ у верхній півплощині має одну особливу точку $z=2+i$ – простий полюс. Знайдемо лишок:

$$\underset{z=2+i}{res}\frac{(z-2)e^{2iz}}{z^2-4z+5}=\lim_{z\to 2+i}\left((z-2-i)\frac{(z-2)e^{2iz}}{z^2-4z+5}\right)=\lim_{z\to 2+i}\frac{(z-2)e^{2iz}}{z-2+i}=\frac{(2+i-2)e^{2i(2+i)}}{2+i-2+i}=\frac{1}{2}e^{-2+4i}.$$

Тоді, виділяючи дійсну частину, за наслідком леми Жордана отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-2)\cos 2x dx}{x^2-4x+5}=\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-2)e^{2ix}dx}{x^2-4x+5}=\operatorname{Re}\big(2\pi i\times$$
$$\times(1/2)e^{-2+4i}\big)=\operatorname{Re}\big(\pi i e^{-2}(\cos 4+i\sin 4)\big)=-\pi e^{-2}\sin 4.$$

Зауваження. Інколи зручно формувати контур інтегрування у вигляді прямокутника чи криволінійного трикутника.

1.7.3. Функції від матриці та їх обчислення за допомогою лишків

Операції диференціювання та інтегрування матриці здійснюються поелементно

$$[A'(\lambda)]_{kl}=\left([A(\lambda)]_{kl}\right)'\ ;\ \left[\int A(\lambda)\,d\lambda\right]_{kl}=\int [A(\lambda)]_{kl}\,d\lambda$$

де $A=A(\lambda)$ – матриця-функція комплексного аргументу λ; $m\times n$ – розмір матриці; $k=\overline{1,m}$; $l=\overline{1,n}$.

Нехай A – довільна квадратна матриця m-го порядку, $f(z)$ – деяка функція комплексного аргументу. Цю функцію можна задати інтегралом Коші

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)(\zeta-z)^{-1}d\zeta.$$

Визначимо відповідну ***функцію від матриці*** $f(A)$ аналогічною формулою

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\lambda)(\lambda E-A)^{-1}d\lambda\ ,$$

де C – довільний контур, що охоплює всі власні числа матриці A.

Зауваження 1. Як правило, інтеграл від матриці обчислюється за допомогою лишків. Наприклад, для діагональної матриці $A=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right)$:

$$(\lambda E-A)^{-1}=diag\left((\lambda-\lambda_1)^{-1},(\lambda-\lambda_2)^{-1},...,(\lambda-\lambda_m)^{-1}\right);\quad f(A)=diag\left(f(\lambda_1),\ f(\lambda_2),...,\ f(\lambda_m)\right),$$

оскільки $\underset{\lambda=\lambda_k}{res}\dfrac{f(\lambda)}{\lambda-\lambda_k}=f(\lambda_k)$.

Зауваження 2. Відомі з лінійної алгебри означення поширених функцій від матриці не суперечать наведеному. Розглянемо, наприклад, ***матричний многочлен***.

Нехай $P_n(\lambda)=a_0+a_1\lambda+...+a_n\lambda^n$ – звичайний многочлен. За прийнятим означенням матричний многочлен задається рівністю

$$P_n(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C P_n(\lambda)(\lambda E-A)^{-1}d\lambda\,.$$

При $|\lambda|>m\cdot\max\limits_{1\le k,l\le m}|a_{ij}|$ розвинемо підінтегральну функцію в збіжний ряд за степенями матриці A і проінтегруємо його почленно:

$$(\lambda E-A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left(E-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left(E+\frac{A}{\lambda}+\frac{A^2}{\lambda^2}+...\right);$$

$$P_n(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\left(\frac{a_0}{\lambda}+a_1+...+a_n\lambda^{n-1}\right)\left(E+\frac{A}{\lambda}+\frac{A^2}{\lambda^2}+...\right)d\lambda=a_0E+a_1A+a_2A^2+...+a_nA^n\,.$$

Отриманий вираз співпадає з означенням матричного многочлена, прийнятим в лінійній алгебрі.

1.7.4. Логарифмічна похідна та її лишки. Принцип аргументу

Похідна логарифму функції $f(z)$ називається ***логарифмічною похідною***

$$\left(\ln f(z)\right)'=\frac{f'(z)}{f(z)}\ .$$

Логарифмічним лишком функції $f(z)$ називається лишок її логарифмічної похідної.

Розвиваючи логарифмічну похідну в ряд Лорана в околі кореня z_0 функції $f(z)$, можна отримати, що *m-кратний корінь z_0 функції $f(z)$ також служить простим полюсом її логарифмічної похідної, причому*

$$\underset{z=z_0}{res}\frac{f'(z)}{f(z)}=m\,.$$

Розвиваючи логарифмічну похідну в ряд Лорана в околі полюса z_0 функції $f(z)$, можна отримати, що *полюс* p*-го порядку* z_0 *функції* $f(z)$ *служить простим полюсом її логарифмічної похідної, причому*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\frac{f'(z)}{f(z)}=p\,.$$

Теорема (***Принцип аргументу***). Нехай D - обмежена однозв'язна область, Γ - її межа, а функція $f(z)$ аналітична в замкненій області $\overline{D}$ за винятком скінченного числа P полюсів, причому на межі Γ немає ні коренів, ні полюсів цієї функції. Тоді *приріст аргументу функції* $\Delta_\Gamma \arg f(z)$ *при однократному обході межі* Γ *області* D *в додатному напрямі дорівнює добутку числа* 2π *на різницю числа коренів* K *і полюсів функції* $f(z)$*, причому кожний корінь рахується стільки разів, яка його кратність, а полюс – стільки разів, який його порядок*:

$$\Delta_\Gamma \arg f(z)=\frac{1}{i}\oint_\Gamma\frac{f'(z)dz}{f(z)}=2\pi(K-P)\ .$$

Зауваження 1. Число коренів K скінченне, інакше функція $f(z)$ тотожно дорівнювала б нулю. Число полюсів P скінченне, інакше функція $f(z)$ мала б неізольовану особливість.

Зауваження 2. Аргумент функції $f(z)$ визначається неоднозначно, але його приріст на кривій Γ знаходиться однозначно при будь-якому фіксованому початковому (зокрема, головному) значенні аргументу.

1.8. Фазові криві диференціальних рівнянь

1.8.1. Лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталим комплексним коефіцієнтом і його розв'язок

Лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталим комплексним коефіцієнтом має вигляд

$$z'=cz\,,$$

де $c=\alpha+\beta i$ – сталий коефіцієнт (комплексне число); $z=z(t)=x(t)+i\,y(t)$ – шукана комплексна функція дійсного аргументу t.

Відокремлюючи змінні, можна знайти його ***загальний розв'язок***

$$z=C\,e^{ct}\,,$$

де C – довільна комплексна стала.

Як і в дійсному випадку, розв'язком рівняння служить експонента (при $C\neq 0$) – єдина відмінна від тотожного нуля функція, в якої похідна пропорційна їй самій, а також тотожний нуль (при $C=0$). Інших розв'язків рівняння не має.

Зауваження. Рівняння $z'=cz$ можна розв'язати інакше, якщо виділити дійсну та уявну частини і перейти до рівносильної системи двох дійсних рівнянь:

$$x'(t)+i\,y'(t)=(\alpha+i\beta)\big(x(t)+i\,y(t)\big)\ ;\quad x'(t)+i\,y'(t)=$$

$$= \left(\alpha\, x(t) - \beta\, y(t)\right) + i\left(\beta\, x(t) + \alpha\, y(t)\right)\ ; \quad \begin{cases} x'(t) = \alpha\, x(t) - \beta\, y(t) \\ y'(t) = \beta\, x(t) + \alpha\, y(t) \end{cases} .$$

1.8.2. Фазові криві лінійного однорідного диференціального рівняння

Інтегральними кривими даного диференціального рівняння $z' = cz$ служать графіки його загального розв'язку $z = C\,e^{ct}$ в тривимірному просторі $\{(t; x; y)\}$, утвореному незалежною змінною t і двома залежними змінними $x = x(t)$ і $y = y(t)$. Інтегральні криві утворюють однопараметричну сім'ю ліній. Кожна інтегральна крива цієї сім'ї є графіком частинного розв'язку, що відповідає конкретному значенню довільної сталої C – параметра.

Проекція інтегральної кривої на площину залежних змінних $\{(x; y)\}$ (комплексну площину) називається ***фазовою кривою***.

Зауваження. Різні фазові криві, як і відповідні інтегральні криві, ніколи не перетинаються.

Розглянемо фазові криві на комплексній площині, де задано декартову Oxy і полярну $Or\varphi$ системи координат з полюсом у початку декартової системи координат і полярною віссю, суміщеною з віссю Ox.

При довільному значенні коефіцієнта $c = \alpha + \beta i$ рівняння $z' = cz$ завжди має сталий (нерухомий) розв'язок $z(t) = 0$ – полюс (при нульовому значенні довільної сталої C – початкової точки $C = 0$).

Нехай тепер довільна стала C (початкова точка) відмінна від нуля $C \neq 0$. Подамо її, а також ненульовий експоненціальний розв'язок у показниковій формі:

$$C = r_0\, e^{i\varphi_0} \neq 0; \quad z(t) = r(t)\; e^{i\,\varphi(t)}.$$

Тоді

$$z(t) = C\,e^{ct} = r_0\, e^{i\varphi_0} e^{(\alpha + i\beta)t} = r_0\, e^{\alpha t} e^{i(\varphi_0 + \beta t)}; \quad r(t) = r_0\, e^{\alpha t}; \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \beta t\ .$$

а) Якщо коефіцієнт c – дійсне число, тобто $c = \alpha,\ \beta = 0$, тоді для ненульового розв'язку полярний кут залишається сталим $\varphi(t) = \varphi_0$, а полярний радіус $r(t) = r_0\, e^{\alpha t}$. Таким чином, при зміні t відбувається переміщення від початкової точки $C \neq 0$ по променю $\varphi = \varphi_0$: вбік віддалення від полюса при $\alpha > 0$ чи вбік наближення до полюса при $\alpha < 0$ (рис. 34). Такий вигляд картини фазових кривих називається ***нестійким*** (при $\alpha > 0$) чи ***стійким*** (при $\alpha < 0$) ***вузлом***.

б) Якщо коефіцієнт c – чисто уявне число, тобто $c = \beta i,\ \alpha = 0$, тоді для ненульового розв'язку полярний радіус залишається сталим $r(t) = r_0$, а полярний кут $\varphi(t) = \varphi_0 + \beta t$. Таким чином, при зміні t відбувається обертання від початкової точки $C \neq 0$ по колу $r = r_0$ з центром у полюсі: проти годинникової стрілки при $\beta > 0$ чи за годинниковою стрілкою при $\beta < 0$ (рис. 35). Такий вигляд картини фазових кривих називається ***центром***.

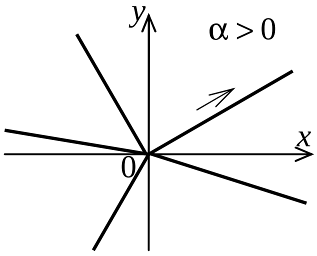


Рис. 34

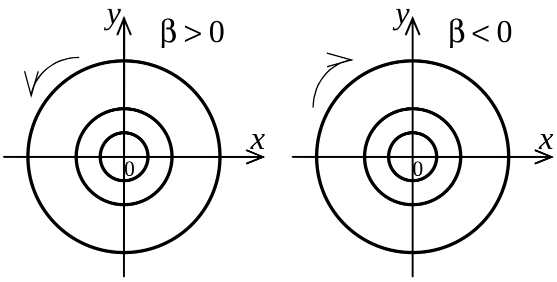


Рис. 35

в) Якщо в коефіцієнті $c = \alpha + \beta i$ відмінні від нуля як дійсна $\alpha \neq 0$, так і уявна $\beta \neq 0$ частини, тоді для ненульового розв'язку змінюються як полярний кут $\varphi(t) = \varphi_0 + \beta t$, так і полярний радіус $r(t) = r_0\, e^{\alpha t}$. Таким чином, при зміні t відбувається накладання обертального руху навколо полюса з віддаленням чи наближенням до полюса, починаючи від початкової точки $C \neq 0$: проти годинникової стрілки при $\beta > 0$ чи за годинниковою стрілкою при $\beta < 0$ (рис. 36). Фазовими кривими служать логарифмічні спіралі. Такий вигляд картини фазових кривих називається ***нестійким*** (при $\alpha > 0$) чи ***стійким*** (при $\alpha < 0$) ***фокусом***.

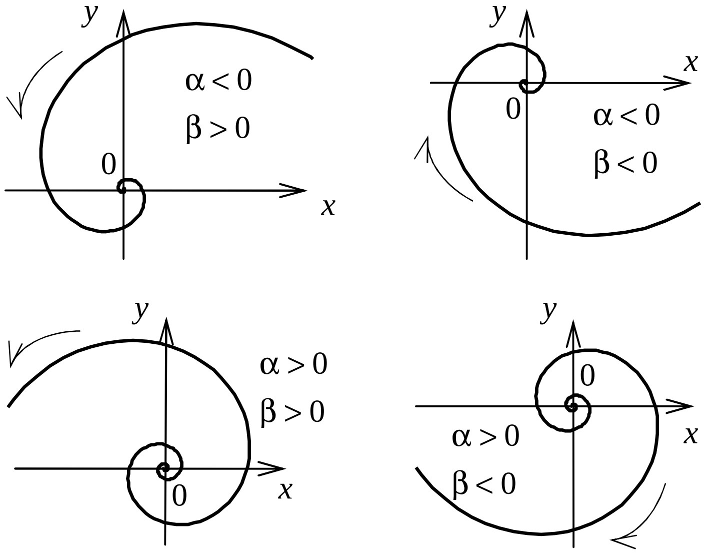


Рис. 36

1.9. Плоске векторне поле. Комплексний потенціал

1.9.1. Спеціальні плоскі векторні поля. Комплексний потенціал

Нехай в деякій області D координатної площини Oxy задано ***плоске векторне поле***, що визначається вектор-функцією

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j},$$

де функції $a_x = a_x(x, y)$ і $a_y = a_y(x, y)$ – неперервні разом зі своїми частинними похідними в області D за винятком, можливо, окремих точок.

Нехай γ – деяка орієнтована крива в області D, а $\vec{l}$ і $\vec{n}$ – одиничні вектори відповідно дотичної та зовнішньої нормалі (рис. 37).

Плоске векторне поле характеризується:

дивергенцією $div\,\vec{a} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y}$ і ***ротором*** $rot\,\vec{a} = \left(\dfrac{\partial a_y}{\partial x} - + \dfrac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$.

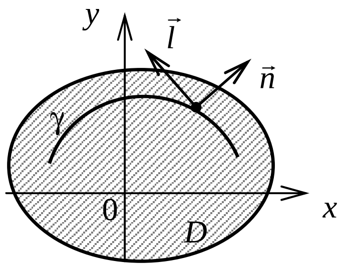


Рис. 37

Поле, в якому відсутні джерела і витоки, називається ***соленоїдальним*** (***трубчатим***).

Критерієм соленоїдальності є рівність нулю дивергенції $div\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} = 0$ або, що еквівалентно, рівність нулю потоку Φ поля через довільний замкнений контур. Для потоку Φ соленоїдального поля через довільну (можливо, незамкнену) криву γ можна одержати

$$\Phi = \int_\gamma \vec{a}\,\vec{n}\,dl = \int_\gamma (a_x n_x + a_y n_y)\,dl = \int_\gamma (a_x\, l_y - a_y\, l_x)\,dl = \int_\gamma - a_y dx + a_x dy = \int_\gamma dv\,.$$

Тобто, для соленоїдального поля існує ***функція потоку*** (***силова функція***) $v = v(x, y)$, що визначається умовами

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -a_y\ ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_x\,.$$

Поле, в якому відсутні вихори, називається ***потенціальним*** (***безвихровим***).

Критерієм потенціальності є рівність нулю ротора $rot\,\vec{a} = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - + \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$ або, що еквівалентно, рівність нулю циркуляції C поля по довільному замкненому контуру. Для циркуляції C потенціального поля по довільній (можливо, незамкненій) кривій γ можна одержати

$$C = \int_\gamma \vec{a}\,\vec{l}\,dl = \int_\gamma (a_x\, l_x + a_y\, l_y)\,dl = \int_\gamma a_x dx + a_y dy = \int_\gamma du\ .$$

Тобто, для потенціального поля існує ***потенціальна функція*** (***потенціал***) $u = u(x, y)$, що визначається умовами

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_x\ ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a_y\,.$$

Поле називається ***гармонічним***, якщо воно одночасно є соленоїдальним і потенціальним.

Для гармонічного поля існують як потенціал $u = u(x, y)$, так і функція потоку $v = v(x, y)$. З наведених співвідношень випливає, що ці функції $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$ зв'язані умовами Коші – Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

Отже, ці функції є спряженими гармонічними і складають ***комплексний потенціал***

$$w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)\,.$$

Вектор-функцію гармонічного поля можна подати в комплексній формі

$$a = a(z) = a_x(x, y) + i\,a_y(x, y)\,.$$

Комплексна вектор-функція $a = a_x + i\,a_y$ зв'язана з похідною комплексного потенціалу операцією спряження:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=a_x-i\,a_y=\bar{a}\ ;\qquad a=\overline{f'(z)}\ .$$

Зауваження. Комплексний потенціал, як функція точки, може бути виражений у вигляді інтеграла вздовж кривої з фіксованим початком

$$w=f(z)=C+i\,\Phi=\int_\gamma du+i\int_\gamma dv=\int_\gamma df=\int_\gamma f'(z)dz\ .$$

1.9.2. Елементарні точкові особливості векторного поля – джерело (витік) і вихор. Точковий диполь

Довільне векторне поле можна подати у вигляді суперпозиції потенціального поля, породженого джерелами (витоками), і соленоїдального поля, породженого вихорами. Точкове джерело чи точковий вихор є найпростішими випадками, коли аналітичність функції комплексної змінної порушується тільки в одній ізольованій особливій точці $z_0=x_0+i\,y_0$. Наведемо вирази для відповідних комплексних потенціалів.

Точкове джерело (витік) у точці $z_0=0$ (рис. 38).

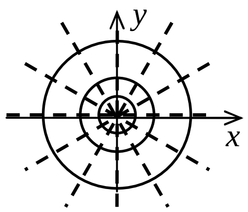


Рис. 38

Комплексний потенціал має вигляд $f(z)=\frac{Q}{2\pi}Ln\,z$, де Q – інтенсивність джерела (витоку): $Q>0$ – для джерела, $Q<0$ – для витоку.

Виділяючи в комплексному потенціалі дійсну $u=u(x,y)$ (потенціал) і уявну $v=v(x,y)$ (функція потоку) частини і переходячи до полярних координат, отримаємо $u=\frac{Q}{2\pi}\ln r$, $v=\frac{Q}{2\pi}\varphi$.

Силові лінії $v=C=const$ – промені, що виходять з джерела (входять в витік): $\varphi=(2\pi C)/Q$.

Лінії рівного потенціалу $u=C=const$ – концентричні кола з центром у джерелі (витоку): $r=e^{(2\pi C)/Q}$.

Точковий вихор у точці $z_0=0$ (рис. 39).

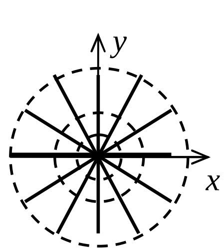


Рис. 39

Комплексний потенціал має вигляд $f(z)=\frac{C}{2\pi i}Ln\,z$, де C – інтенсивність вихору (його циркуляція): $C>0$ – у додатному напрямі (проти годинникової стрілки), $C<0$ – у від‘ємному напрямі.

Потенціал $u=u(x,y)$ і функція потоку $v=v(x,y)$ для вихору мають вигляд $u=\frac{C}{2\pi}\varphi$, $v=-\frac{C}{2\pi}\ln r$.

Силові лінії $v=const$ – концентричні кола з центром у вихорі.

Лінії рівного потенціалу $u=const$ – промені, що виходять з вихору.

Зауваження 1. Якщо в точці $z_0=0$ одночасно знаходяться джерело і вихор, то в результаті накладання розглянутих вище полів виникає поле, силові лінії і лінії рівного потенціалу якого утворюють дві сім'ї взаємно ортогональних логарифмічних спіралей.

<u>Точковий диполь</u> у точці $z_0 = 0$ (рис. 40).

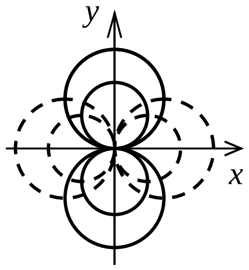


Рис. 40

Розмістимо джерело Q і витік $-Q$ (рівної інтенсивності) в точках $z = h$ і $z = -h$, $h > 0$. Утворюється диполь з моментом $M = 2Qh$. Його комплексний потенціал

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} Ln(z-h) - \frac{Q}{2\pi} Ln(z+h) = \frac{M}{4\pi h} Ln\frac{z-h}{z+h} .$$

Якщо припустити, що при наближенні джерела і витоку один до одного, коли $h \to 0$, їх дипольний момент залишається сталим, то переходячи до границі при $h \to 0$, отримаємо комплексний потенціал точкового диполю $f(z) = -\dfrac{M}{2\pi z}$.

Потенціал $u = u(x, y)$ і функція потоку $v = v(x, y)$ для диполю мають вигляд

$$u = -\frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\cos\varphi}{r} , \quad v = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\sin\varphi}{r} .$$

Лінії рівного потенціалу $u = const$ і силові лінії $v = const$ утворюють дві сім'ї кіл: кола рівного потенціалу дотикаються до дійсної осі Ox в диполі $z_0 = 0$, а кола силових ліній дотикаються до уявної осі Oy в диполі $z_0 = 0$.

<u>Зауваження 2</u>. У широкому розумінні, всі особливі точки аналітичної функції (як ізольовані, так і ні) є проявом наявності в них джерел (витоків), вихорів та їх суперпозицій.

<u>Зауваження 3</u>. В інтегралі Коші вираз $\dfrac{1}{2\pi i} \cdot \dfrac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$ можна розглядати як комплексний потенціал точкового диполю з моментом, величина і напрям якого визначаються значенням функції $f(\zeta)$ в точці ζ контуру інтегрування. Інтеграл Коші зводиться до неперервного підсумовування комплексних потенціалів точкових диполів вздовж усього контуру.

1.10. Контрольні запитання

1) Як записується комплексне число в алгебраїчній формі?
2) Чим відрізняється між собою пара комплексно спряжених чисел? Як виразити дійсну та уявну частини комплексного числа через саме число і йому спряжене?
3) Що служить геометричним зображенням комплексного числа і всієї множини комплексних чисел?
4) Для яких двох точок на розширеній комплексній площині аргумент невизначений? Чому дорівнює модуль кожного з цих чисел?
5) Що називається околом скінченної точки комплексної площини?
6) Що називається околом нескінченно віддаленої точки розширеної комплексної площини?

7) Які арифметичні операції зручно виконувати в алгебраїчній, а які – в тригонометричній чи показниковій формах?
8) Чим відрізняється добуток комплексних чисел від скалярного і векторного добутку векторів?
9) Скільки різних значень має корінь n-го степеня з комплексного числа? Як розміщені ці значення на комплексній площині?
10) Який вигляд має розклад многочлена на множники на множині комплексних чисел?
11) Яка множина точок комплексної площини називається областю? Замкненою областю?
12) Яка область називається однозв'язною? k-зв'язною?
13) Яке відображення називається комплексною функцією дійсної змінної? Що служить графіком такої неперервної функції?
14) Як здійснюється диференціювання та інтегрування комплексної функції дійсної змінної?
15) Яке відображення називається комплексною функцією комплексної змінної?
16) У чому полягають умови Коші – Рімана диференційовності функції комплексної змінної?
17) Як виражається похідна функції комплексної змінної через частинні похідні її дійсної та уявної частин?
18) Яка функція комплексної змінної називається аналітичною в даній точці?
19) Що таке правильна і особлива точки аналітичної функції?
20) У чому полягає геометричний зміст модуля й аргументу похідної функції комплексної змінної ?
21) Яке відображення називається конформним? Чому відображення, що задається аналітичною функцією, є конформним?
22) Як визначається комплексна показникова функція e^z? Які її основні властивості?
23) Якими формулами виражається зв'язок тригонометричних і гіперболічних функцій з комплексною експонентою e^z?
24) Як визначається комплексна логарифмічна функція $Ln z$ та її головне значення $\ln z$? Які основні властивості комплексного логарифму?
25) Як інтеграл функції комплексної змінної виражається через дійсні криволінійні інтеграли?
26) У чому полягає інтегральна теорема Коші? Як вона узагальнюється на випадок багатозв'язної області?
27) Як записується інтегральна формула Коші, що виражає значення аналітичної функції у довільній внутрішній точці через її значення на межі області?
28) Як виражається похідна n-го порядку від аналітичної функції через комплексний інтеграл?
29) Який числовий ряд з комплексними членами називається збіжним? Абсолютно збіжним? Умовно збіжним?

30) Що служить областю збіжності степеневого ряду?
31) Як визначається радіус збіжності степеневого ряду?
32) Як записується ряд Тейлора аналітичної функції? Як на практиці знаходять розвинення аналітичної функції в ряд Тейлора?
33) Який вигляд має узагальнений степеневий ряд Лорана? Що називається його головною і правильною частинами?
34) Що служить областю збіжності ряду Лорана?
35) Яка ізольована особлива точка називається усувною? Полюсом m-го порядку? Істотно особливою?
36) Що називається лишком аналітичної функції в її ізольованій особливій точці?
37) Чому дорівнює лишок в усувній ізольованій особливій точці?
38) Як знаходяться лишок в полюсі? В істотно особливій точці?
39) Як знаходяться лишок в нескінченно віддаленій точці?
40) У чому полягає основна теорема про лишки?
41) Чому дорівнює сума всіх лишків, включаючи лишок у нескінченно віддаленій точці, для функції, що має скінченне число особливих точок?
42) Як визначається матричний многочлен через інтеграл Коші? Порівняйте це означення з тим, що прийняте в лінійній алгебрі.
43) Чому дорівнює лишок логарифмічної похідної в корені функції? В полюсі функції?
44) У чому полягає принцип аргументу?
45) Що називається фазовою кривою диференціального рівняння? Назвіть основні види картин фазових кривих.
46) Яке плоске векторне поле називається соленоїдальним (трубчатим)?
47) Яке плоске векторне поле називається потенціальним (безвихровим)?
48) Яке плоске векторне поле називається гармонічним?
49) Як виражається комплексна вектор-функція плоского гармонічного поля через похідну комплексного потенціалу?
50) Який вигляд мають силові лінії та лінії рівного потенціалу для точкового джерела (витоку) і точкового вихору?
51) Який вигляд мають силові лінії та лінії рівного потенціалу для точкового диполю?

1.11. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Задано квадратний тричлен az^2+bz+c з дійсними сталими коефіцієнтами a, b, c і комплексною змінною z. Необхідно:

а) знайти корені z_1 і z_2 заданого квадратного тричлена на множині комплексних чисел (в алгебраїчній формі $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$), розкласти тричлен на множники $az^2+bz+c= \;=a(z-z_1)(z-z_2)$ і перевірити теорему Вієта $z_1+z_2=-b/a$; $z_1 z_2=c/a$;

б) обчислити вираз $\dfrac{z_1+ci}{z_2+a}+z_1^2(a+bi)-z_2 i$, виконуючи дії в алгебраїчній формі;

в) зобразити числа $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ на комплексній площині, знайти модуль і аргумент кожного з цих чисел та подати z_1 і z_2 у тригонометричній і показниковій формах;

г) користуючись тригонометричною формою, знайти z_1^4 та $\sqrt[3]{z_2}$.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$z^2+6z+13$	11	$5z^2+2z+10$	21	$10z^2-6z+1$
2	$z^2-4z+29$	12	$z^2+10z+26$	22	z^2+4z+8
3	z^2+4z+5	13	$z^2-8z+17$	23	z^2-4z+8
4	$z^2+2z+10$	14	$4z^2+6z+5$	24	$z^2+6z+10$
5	$z^2-6z+13$	15	$z^2-2z+10$	25	$z^2+10z+29$
6	$4z^2+4z+5$	16	$5z^2+8z+5$	26	$5z^2+6z+5$
7	$8z^2-4z+1$	17	z^2-2z+2	27	$5z^2-6z+5$
8	$5z^2+2z+2$	18	z^2+2z+5	28	$5z^2+8z+4$
9	$z^2-4z+13$	19	$2z^2-2z+5$	29	$5z^2-8z+4$
10	$z^2-6z+10$	20	$4z^2+8z+5$	30	$10z^2+6z+1$

Завдання 2. На комплексній площині зобразити область D, що задана нерівностями.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z-2\le 0$, $\|z-2i\|\le 1$	16	$\|z-1-i\|\le 1$, $\|z+1\|<2$
2	$\|z-2i\|\le 2$, $\operatorname{Re} z>1$	17	$\|z-i\|>4$, $\operatorname{Im} z>1$
3	$\|z+2i\|\le 2$, $\|z\|\ge 1$	18	$\|z-2\|\le 2$, $\|z+1\|>1$
4	$2\operatorname{Re} z+3\operatorname{Im} z-6\ge 0$, $\|z\|<4$	19	$\|z-2i\|<4$, $\operatorname{Im} z>-1$
5	$\|z-2-2i\|\le 4$, $\operatorname{Im} z\le 2$	20	$\|z-1+i\|\ge 2$, $\operatorname{Re} z<0$
6	$\|z+2i\|<2$, $\operatorname{Re} z>-1$	21	$\|z\|\ge 1$, $\|\operatorname{Im} z\|<2$
7	$\|z\|<4$, $\|\arg z\|\le \pi/4$	22	$\|z\|\ge 2$, $\|\arg z\|\le \pi/4$
8	$\|z-2i\|\le 3$, $-\pi/4<\arg z\le \pi/3$	23	$\|z+2i\|>2$, $-3\pi/4<\arg z\le -\pi/4$
9	$\|z\|\ge 2$, $-3\pi/4\le \arg z<-\pi/2$	24	$\|z-1\|\ge 2$, $-\pi<\arg z<-\pi/2$

10	$\operatorname{Re} z > -4$, $-\pi/4 \le \arg z \le 3\pi/4$	25	$\operatorname{Im} z < 2$, $\pi/4 \le \arg z \le 3\pi/4$
11	$\operatorname{Re} z \le -1$, $-3\pi/4 \le \arg z < 0$	26	$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z + 1 > 0$, $\lvert z \rvert \le 1$
12	$\lvert z - 1 + i \rvert \le 3$, $0 < \arg z \le 3\pi/4$	27	$\lvert z - 1 - i \rvert \le 2$, $3\pi/4 < \arg z < \pi$
13	$\operatorname{Im} z \ge 2$, $0 < \arg z \le 3\pi/4$	28	$\operatorname{Im} z \le -1$, $-\pi < \arg z < 3\pi/4$
14	$\lvert \operatorname{Re} z \rvert \le 3$, $\lvert \operatorname{Im} z \rvert \le 2$	29	$\lvert \operatorname{Re} z \rvert > 1$, $\lvert \operatorname{Im} z \rvert \le 2$
15	$\lvert \operatorname{Re} z \rvert \le 2$, $\lvert \operatorname{Im} z \rvert > 2$	30	$\lvert z \rvert \ge 1$, $\lvert \operatorname{Re} z \rvert < 2$

Завдання 3. Обчислити значення заданої функції $w = f(z)$ у вказаній точці z_0.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$w = Ln\, z$, $z_0 = -1 + 2i$	16	$w = \cos 2z$, $z_0 = \pi - 2\pi i$
2	$w = \cos(1/z)$, $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$	17	$w = (-1)^z$, $z_0 = \sqrt{3} + i$
3	$w = \cos(\pi z)$, $z_0 = -4 + i$	18	$w = \sin z^3$, $z_0 = 2 - i$
4	$w = (-3 + 4i)^z$, $z_0 = 2 - i$	19	$w = \cos z$, $z_0 = -3 + 4i$
5	$w = tg\,(iz)$, $z_0 = 3 - 4i$	20	$w = Ln(z + i)$, $z_0 = -1 + i$
6	$w = 1/\cos z$, $z_0 = \pi + \pi i$	21	$w = \sin(\pi z)$, $z_0 = 1 - i$
7	$w = \sin(1/z)$, $z_0 = 4 + 3i$	22	$w = 1/Ln\, z$, $z_0 = 1 - i$
8	$w = z\,\sin(iz)$, $z_0 = 3\pi - \pi i$	23	$w = ctg\,\pi z$, $z_0 = 2 - i$
9	$w = 1/Ln(iz)$, $z_0 = -1 + 5i$	24	$w = tg\,(\pi z)$, $z_0 = 2 - 3i$
10	$w = (-1 + 3i)^z$, $z_0 = -2i$	25	$w = z\,\cos(1/z)$, $z_0 = 1 - 2i$
11	$w = z/\sin z$, $z_0 = \pi + \pi i$	26	$w = z/tg\, z$, $z_0 = 2\pi - \pi i$
12	$w = \cos z^2$, $z_0 = 1 + 3i$	27	$w = \sin^2 z$, $z_0 = 2\pi - \pi i$
13	$w = z\, ctg\,(iz)$, $z_0 = \pi - \pi i$	28	$w = (-3 + i)^z$, $z_0 = 1 + i$
14	$w = tg\,(iz)$, $z_0 = 1 - 2i$	29	$w = (3 - 4i)^{-2z}$, $z_0 = 2 + i$
15	$w = (z - 2i)^{2-i}$, $z_0 = 2 + 3i$	30	$w = \sin(z/\bar{z})$, $z_0 = 1 - i$

Завдання 4. Знайти аналітичну функцію $f(z) = u + iv$ за відомою дійсною $u = u(x, y)$ чи уявною $v = v(x, y)$ частиною і значенням $f(z_0)$ після попередньої перевірки заданої функції на гармонічність.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$u = 2x^2 - 2y^2 - 3x + 3y$, $f(1+i) = 3$	16	$v = x^3 - 3xy^2 + 7x^2 - 7y^2$, $f(1) = i$
2	$u = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 7i$	17	$u = x^3 - 3xy^2 - x$, $f(-1+i) = 0$
3	$v = x^2 - y^2 - 3x$, $f(-i) = 2 + 5i$	18	$v = x^2 - y^2 - 2x$, $f(2i) = -3 + i$
4	$u = 2x^2 - 2y^2 - 7x + 7y$, $f(-1) = 5i$	19	$u = 2x^2 - 2y^2 - 5x + 3y$, $f(0) = 7$

5	$u = x^2 - y^2 - 2y$, $f(2i) = 3 - 2i$	20	$v = x^2 - y^2 + 2x$, $f(1-i) = -4$
6	$v = x^3 - 3xy^2 - x$, $f(1+i) = 1 - i$	21	$v = y^3 - 3x^2y$, $f(1) = 2 - 3i$
7	$v = x^2 - y^2 + 5x + y$, $f(-i) = 2 + 5i$	22	$u = 3x^2 - 3y^2 - 2xy - 5y$, $f(i) = 2$
8	$u = y^3 - 3x^2y + y$, $f(1-2i) = 0$	23	$v = x^2 - y^2 - 2x$, $f(-2i) = 1 - 6i$
9	$v = y^3 - 3x^2y - y$, $f(1+i) = -4i$	24	$v = y^3 - 3x^2y + 2y$, $f(1-i) = 2i$
10	$u = -3x^2 + 3y^2 + 2x + y$, $f(1+i) = 3$	25	$v = 3y^3 - 9x^2y + 2y^2 - 2x^2$, $f(i) = 1$
11	$v = y^3 - 3x^2y - 2y$, $f(1) = -4i$	26	$u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $f(-i) = 2 + i$
12	$u = -x^3 + 3xy^2 - 2x$, $f(1+i) = -i$	27	$v = x^3 - 3xy^2 + 4x$, $f(1) = -1 + 2i$
13	$u = x^2 - y^2 - xy - 2x$, $f(2i) = 0$	28	$v = y^3 - 3x^2y + 3y$, $f(i) = 5 - 4i$
14	$v = 3x^3 - 9xy^2 + 2x^2 - 2y^2$, $f(-i) = 3$	29	$u = y^3 - 3x^2y + 7y^2 - 7x^2$, $f(0) = 3i$
15	$u = 3x^2 - 3y^2 + 2xy$, $f(2) = 1 - 3i$	30	$u = 2x^3 - 6xy^2 + 3x^2y - y^3$, $f(i) = 2$

Завдання 5. Використовуючи відомі розклади, розвинути задану функцію $f(z)$ в ряд Лорана за степенями різниці $z - z_0$ у круговому кільці $r < |z - z_0| < R$.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$f(z) = \dfrac{z+8i}{z^2+iz+6}$; $z_0 = 0$; $r = 2$; $R = 3$	16	$f(z) = \dfrac{10iz-8}{z^2+4}$; $z_0 = -i$; $r = 1$; $R = 3$
2	$f(z) = \dfrac{-iz+6}{z^2+4}$; $z_0 = 2i$; $r = 0$; $R = 4$	17	$f(z) = \dfrac{iz+25}{z^2+25}$; $z_0 = i$; $r = 4$; $R = 6$
3	$f(z) = \dfrac{(4+i)z+5}{z^2-5iz}$; $z_0 = 2i$; $r = 2$; $R = 3$	18	$f(z) = \dfrac{3iz+19i}{z^2+z-6}$; $z_0 = -1$; $r = 2$; $R = 3$
4	$f(z) = \dfrac{5z-10i}{(z-4i)(z+i)}$; $z_0 = i$; $r = 2$; $R = 3$	19	$f(z) = \dfrac{(2+3i)z-23}{(z+i)(z-10)}$; $z_0 = 0$; $r = 1$; $R = 10$
5	$f(z) = \dfrac{(3+i)z-3}{z^2+3iz}$; $z_0 = -2i$; $r = 1$; $R = 2$	20	$f(z) = \dfrac{(2+3i)z+18}{(z+3)(z-4i)}$; $z_0 = -3$; $r = 0$; $R = 5$
6	$f(z) = \dfrac{3iz+8}{z^2-6iz-8}$; $z_0 = 2i$; $r = 0$; $R = 2$	21	$f(z) = \dfrac{(1+i)z-2}{(z-1)(z+4i)}$; $z_0 = 0$; $r = 1$; $R = 4$
7	$f(z) = \dfrac{iz+2-i}{z^2-9}$; $z_0 = -1$; $r = 2$; $R = 4$	22	$f(z) = \dfrac{z+2-i}{z^2-4iz-3}$; $z_0 = i$; $r = 0$; $R = 2$