Далі застосуємо розклад для синуса, в який замість x запишемо $x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots$, тобто виконаємо підстановку ряду в ряд:

$$sin\left(\frac{1}{1-x^2}-1\right)=\left(x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}\ldots\right)-\frac{\left(x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}\ldots\right)^3}{3!}+$$

$$+\frac{\left(x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}\ldots\right)^5}{5!}+\ldots=x^2+x^4+x^6-x^6\frac{1}{6}+x^8-\frac{3}{6}x^8+x^{10}-$$

$$-\frac{6}{6}x^{10}+\frac{x^{10}}{120}+\ldots=x^2+x^4+\frac{5}{6}x^6+\frac{1}{2}x^8+\frac{x^{10}}{120}+\ldots,\ |x|<1.$$

в) Для розвинення даної функції в ряд Маклорена необхідно розкласти в ряд Маклорена функції $e^{x/2}$ і $sin 2x$:

$$\ell^{\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\frac{1}{n!},\quad -\infty<x<+\infty;\ \ sin\ 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!},\ -\infty<x<+\infty$$

і отримані ряди перемножити за наступним правилом:

якщо $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ *для* $|x|<R_1$ *і* $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_nx^n+\ldots$ *для* $|x|<R_2$*, тоді*

$$f(x)\cdot g(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+$$

$$+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)x^3+(a_0b_4+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0)x^4+\ldots$$

для $|x|<r$*, де* r *– менше з чисел* R_1 *і* R_2.

Тоді $\ell^{\frac{x}{2}}sin 2x=\left(1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}+\left(\frac{x}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}+\left(\frac{x}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}+\ldots\right)\times$

$$\times\left(2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\frac{(2x)^7}{7!}+\ldots\right)=2x+x^2-\frac{13}{12}x^3-\frac{5}{8}x^4+\ldots,\ -\infty<x<+\infty.$$

Приклад 6. Розкласти в ряд Маклорена функції

а) $f(x)=ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; б) $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

Розв’язання. а) Відомо, що $\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. Розкладемо в ряд Маклорена функцію $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ скориставшись біноміальним рядом, в якому покладемо $m=-\frac{1}{2}$ і замість x запишемо x^2:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\ldots,\qquad |x|<1.$$

Проінтегруємо цей ряд почленно в межах від 0 до x і отримаємо ряд

$$ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\ldots,$$

який збігається при $|x|<1$.

б) Функцію $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ розкладемо в ряд за степенями x, використовуючи біноміальний ряд, в якому покласти $m=-2$ і замість x взяти $-x$.

Спочатку одержимо степеневий ряд :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots,\qquad (-1<x<1).$$

Диференціюючи цей ряд почленно, маємо

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots.$$

Але $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, тоді шуканий розклад $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

Інтервал збіжності отриманого ряду так само $(-1{,}1)$.

<u>Приклад 7</u>. Розкласти в ряд Тейлора функції:

а) $f(x)=sin\dfrac{\pi x}{4}$ за степенями $(x-2)$;

б) $f(x)=1/x$ за степенями $(x-3)$

та знайти області, в яких ряд збігається до відповідної функції.

<u>Розв'язання</u>. а) **Спосіб І**. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x),\ n=0,1,2,\ldots$ та їх значення $f^{(n)}(a),\ n=0,1,2,\ldots$, що входять у ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots,\ \text{де}\ \ a=2,$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f^{I}(x)=cos\frac{\pi x}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot1\right),$$

$$f^{II}(x)=-\frac{\pi^2}{4^2}\sin\frac{\pi x}{4}=-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right),$$

$$f^{III}(x)=-\frac{\pi^3}{4^3}\cos\frac{\pi x}{4}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 3\right),$$

$$f^{IV}(x)=\frac{\pi^4}{4}\sin\frac{\pi x}{4}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 4\right),$$

$$f^{V}(x)=-\frac{\pi^5}{4^5}\cos\frac{\pi x}{4}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^5\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 5\right),$$

....

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n\right),$$

....

$$f(2)=\sin\frac{\pi\cdot 2}{4}=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

$$f^{I}(2)=\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\sin\pi=0,$$

$$f^{II}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\sin\frac{3}{2}\pi=-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2,$$

$$f^{III}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\sin 2\pi=0,$$

$$f^{IV}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+\frac{\pi}{2}\cdot 4\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^4,$$

$$f^{V}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^5\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2+\frac{\pi}{2}\cdot 5\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^5\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

....

$$f^{(2k)}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\sin\left(\frac{\pi\cdot 2}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot 2k\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\cdot(-1)^k,$$

$$f^{(2k+1)}(2)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k=1}\sin\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(2k+1)\right]=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Підставляємо знайдені значення похідних в ряд Тейлора і маємо:

$$\sin\frac{\pi x}{4}=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\frac{(x-2)^{2k}}{(2k)!}+....$$

Оскільки $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right|\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^n<1$, то похідні функції $f(x)$ обмеженні в сукупності на всій числовій осі. Тому ряд Тейлора збігається до $f(x)$ на всій осі.

Отже, розвинення в ряд $sin\frac{\pi x}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\frac{(x-2)^{2k}}{(2k)!}$ справедливе при $-\infty<x<+\infty$.

Спосіб II. Спочатку подамо функцію $f(x)$ через нову змінну $z=x-2$:

$$sin\frac{\pi x}{4}=sin\frac{\pi}{4}(x-2+2)=sin\left[\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\right]=cos\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right].$$

Потім скористаємося розкладом $cos\,x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)'}$, $-\infty<x<+\infty$, в який замість x запишемо $(x-2)\cdot\frac{\pi}{4}$. Дістанемо:

$$cos\left[\frac{\pi}{4}(x-2)\right]=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!}+...$$

Цей ряд збігається до $f(x)=sin\frac{\pi x}{4}$ при $-\infty<\frac{\pi}{4}(x-2)<+\infty$, тобто при $-\infty<x<+\infty$. Отже,

$$sin\frac{\pi}{4}x=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k}\frac{(x-2)^{2k}}{(2k)!}+...,$$

$-\infty<x<+\infty$.

б) **Спосіб I**. Знаходимо похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(a)$ при $a=3$:

$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$, $\quad f(3)=\frac{1}{3}$,

$f^{I}(x)=-\frac{1}{x^2}=-1\cdot x^{-2}$, $\quad f^{I}(3)=-\frac{1}{3^2}$,

$f^{II}(x)=2\cdot x^{-3}=\frac{2}{x^3}=\frac{1\cdot 2}{x^3}$, $\quad f^{II}(3)=\frac{1\cdot 2}{3^3}$,

$f^{III}(x)=-6x^{-4}=-\frac{6}{x^4}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$, $\quad f^{III}(3)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^4}$,

$f^{IV}(x)=24x^{-5}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$, $\quad f^{IV}(3)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3^5}$,

… … … … … … … … … … … … …

$f^{(n)}(x)=(-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}},$ $\qquad\qquad$ $f^{(n)}(3)=\dfrac{n!(-1)^n}{3^{n+1}},$

… … … … … … … … … … … … ….

Підставимо знайдені значення похідних в ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\ a=3$$

і дістанемо: $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3}-\cdot\dfrac{1}{3^2\cdot 1!}(x-3)+\dfrac{1\cdot 2}{2!3^3}(x-3)^2-\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3!3^4}(x-3)^3+$

$$+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4!3^5}(x-3)^4+\ldots+\frac{(-1)^n n!}{n!3^{n+1}}(x-3)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{3^{n+1}}.$$

Звернемося до ознаки Даламбера для дослідження останнього ряду на збіжність:

$$|U_n|=\left|\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}\right| \quad |U_{n+1}|=\frac{\left|(x-3)^{n+1}\right|}{3^{n+2}};\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}3^{n+1}}{3^{n+2}(x-3)^n}\right|=$$

$=\dfrac{|x-3|}{3}<1;\quad |x-3|<3;\quad -3<x-3<3;\quad 0<x<6$ – інтервал збіжності.

Дослідимо збіжність на кінцях цього інтервалу.

При $x=0$ отримуємо числовий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-3)^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3}+\ldots$$

При $x=6$ маємо числовий ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ldots$

Обидва ряди розбіжні, тому що не виконується необхідна ознака збіжності $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Отже, областю збіжності останнього ряду є інтервал $(0,6)$.

Спосіб II. $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{(x-3)+3}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x-3}{3}}$. Скористаємося рядом

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots \quad |x|<1,$$

в який замість x запишемо $\dfrac{x-3}{3}$. Маємо:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{x-3}{3}+\left(\frac{x-3}{3}\right)^2-\left(\frac{x-3}{3}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n+\ldots\right)=\frac{1}{3}-\frac{x-3}{3^2}+$$
$$+\frac{(x-3)^2}{3^3}-\frac{(x-3)^3}{3^4}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}+\ldots$$

Інтервал збіжності: $\left|\frac{x-3}{3}\right|<1;\quad |x-3|<3\quad -3<x-3<3\quad 0<x<6$.

Бачимо, що відповіді однакові.

Приклад 8. Розкласти задану функцію $f(x)=\frac{1}{4-x}$ в ряд Тейлора за степенями $(x-2)$ та знайти його інтервал збіжності.

Розв'язання. Перетворимо задану функцію так, щоб можна було застосувати формулу: $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$; $-1<x<1$. (1)

Перетворимо задану функцію: $\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2-(x-2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}$; замінимо x на $\frac{x-2}{2}$ у формулі (1), тоді дістанемо:

$$\frac{1}{4-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}},\qquad \left|\frac{x-2}{2}\right|<1.$$

Отриманий ряд збігається при $|x-2|<2$. Звідки $0<x<4$.

Приклад 9. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y=sec\,x$ та знайти його область збіжності.

Розв'язання. Запишемо $sec\,x=\frac{1}{cos\,x}$, тоді $sec\,x\cdot cos\,x=1$

Нехай $sec\,x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$.

За правилом множення збіжних рядів маємо:

$$1=sec\,x\cdot cos\,x=\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6\ldots\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)=a_0\cdot1+a_1\cdot1\cdot x+\left(a_2+a_0\left(-\frac{1}{2!}\right)\right)x^2+$$
$$+\left(a_3\cdot1+a_1\left(-\frac{1}{2!}\right)\right)x^3+\left(a_4\cdot1+a_0\cdot\frac{1}{4!}+a_2\left(-\frac{1}{2!}\right)\right)x^4+$$
$$+\left(a_5\cdot1+a_3\left(-\frac{1}{2!}\right)+a_4\cdot\frac{1}{4!}\right)x^5+\left(a_6\cdot1+a_2\cdot\frac{1}{4!}+a_4\left(-\frac{1}{2!}\right)+a_0\left(-\frac{1}{6!}\right)\right)x^6+\ldots$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях:

x^0	$a_0\cdot 1=1,$	звідки $a_0=1$
x^1	$a_1\cdot 1=0,$	звідки $a_1=0$
x^2	$a_0\cdot\left(\frac{-1}{2!}\right)+a_2\cdot 1=0$	звідки $a_2=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$
x^3	$a_3\cdot 1+a_1\left(-\frac{1}{2!}\right)=0$	звідки $a_3=0$
x^4	$a_4\cdot 1+a_0\frac{1}{4!}+a_2\left(-\frac{1}{2!}\right)=0$	звідки $a_4=-\frac{1}{4!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}=\frac{5}{2!}=\frac{5}{4!}$
x^5	$a_5\cdot 1+a_1\frac{1}{4!}+a_3\left(-\frac{1}{2!}\right)=0$	звідки $a_5=0$
x^6	$a_6\cdot 1+a_2\frac{1}{4!}+a_4\left(-\frac{1}{2!}\right)+a_0\left(-\frac{1}{6}\right)=0$	звідки $a_6=1\cdot\frac{1}{6!}+\frac{5}{24}\cdot\frac{1}{2!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=$ $=\frac{61}{720}=\frac{61}{6!}$
…	… … … … … … … … … … … …	… … … … … … … … … …

Тоді шукане розвинення

$$sec\,x=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{5}{4!}x^4+\frac{61}{6!}x^6+...,\; x\in R,\; x\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),\; n\in Z.$$

2.1.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Розкласти задані функції за степенями x (варіанти №1–№14) чи за степенями $x-a$ (варіанти №15 – №25), використовуючи відомі розклади функцій e^x, $sin\,x$, $cos\,x$, $(1+x)^m$; $ln(1+x)$, $arctgx$ в ряд Маклорена:

№	Завдання	Відповідь
1	$f(x)=xe^{-2x}$	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!},\quad x\in(-\infty;+\infty)$
2	$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{2^n n!},\quad x\in(-\infty;+\infty)$
3	$f(x)=e^{-x}(1+x)$	$f(x)=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n!}x^n,\quad x(-\infty;+\infty)$

4	$f(x)=\sin\frac{x}{2}$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!},\quad x\in(-\infty;+\infty)$
5	$f(x)=\sqrt{1+x^2}$	$f(x)=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n n!}x^{2n},$ $x\in(-1;1)$
6	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$	$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2^{2n+1}n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},\ x\in(-2;2)$
7	$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2n-1}{2^n n!}x^{2n+2},\ x\in(-1;1)$
8	$f(x)=\ln(1+2x)$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n},\quad x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$
9	$f(x)=(1+x)\,arctgx$	$f(x)=x+x^2-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{5}-\ldots,\ x\in[-1;1]$
10	$f(x)=\frac{arctgx}{x}$	$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1},\quad x\in[-1;1]$
11	$f(x)=\cos^2 x$	$f(x)=1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty;+\infty)$
12	$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	$f(x)=1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^n n!}x^{3n},$ $x\in(-1;1)$
13	$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$	$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+x-\frac{\sqrt{3}}{2!}x^2-\frac{x^3}{3!}+\frac{\sqrt{3}}{4!}x^4+\frac{x^5}{5}-\ldots\right),$ $x\in(-\infty;+\infty)$
14	$f(x)=\sin\left(x^2\right)$	$f(x)=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}+\ldots$ $x\in(-\infty;+\infty)$
15	$f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $(x+6)$	$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+6)^n}{6^{n+1}},\ x\in(-12;0)$
16	$f(x)=\ln x$ за степенями $(x-1)$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n},\ 0<x\le2$

17	$f(x)=\dfrac{6}{8+2x-x^2}$ за степенями $(x-1)$	$\dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{3}$, $x\in(-2;4)$
18	$f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+7}$ за степенями $(x+2)$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$, $x\left(-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\right)$
19	$f(x)=\dfrac{1}{5+2x}$ за степенями $(x-3)$	$\dfrac{1}{11}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-3}{\frac{11}{2}}\right)^n$, $\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{17}{2}$
20	$f(x)=\dfrac{1}{4+3x}$ за степенями $(x+2)$	$-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x+2}{\frac{2}{3}}\right)^n$, $-\dfrac{8}{3}<x<-\dfrac{4}{3}$
21	$f(x)=cos^2\,x$ за степенями $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\,4^{n-1}}{(2n-1)!}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n-1}$, $x\in(-\infty;+\infty)$
22	$f(x)=ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}$ за степенями $(x-1)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^{2n}}{n}$, $0<x\le 2$
23	$f(x)=ln(5x+3)$ за степенями $(x-1)$	$ln\,8+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\dfrac{5}{8}\right)^n(x-1)^n$, $-\dfrac{3}{5}<x\le\dfrac{13}{5}$
24	$f(x)=\sqrt[3]{x}$ за степенями $(x-1)$	$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\,n!}(x-1)^n$, $0<x\le 2$
25	$f(x)=e^x$ за степенями $(x+2)$	$e^{-2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n!}$, $x\in(-\infty;+\infty)$

2.2. Застосування степеневих рядів

2.2.1. Знаходження границі функції. Приклади розв'язання задач

Приклад. Обчислити границі, використовуючи розклади функцій в ряд Маклорена:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\ell^{x}-3-3x-\frac{3}{2}x^{2}}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-arctgx}{x^{3}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(tgx-\sin x\right)x^{3}}{x^{5}}$.

Розв'язання. а) Використаємо розклади функцій e^{x} та $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\ell^{x}-3-3x-\frac{3}{2}x^{2}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\left(1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+\ldots\right)-3-3x-\frac{3}{2}x^{2}}{x-\left(x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3+3x+\frac{3}{2}x^{2}+\frac{1}{2}x^{3}+\frac{3}{4!}x^{4}+\ldots-3-3x-x^{2}\cdot\frac{3}{2}}{x-x+\frac{x^{3}}{3!}-\frac{x^{5}}{5!}}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\frac{1}{2}x^{3}+\frac{3}{4!}x^{4}+\ldots}{\frac{x^{3}}{3!}-\frac{x^{5}}{5!}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x^{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4!}x+..\right)}{x^{3}\left(\frac{1}{3!}-\frac{x^{2}}{5!}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4!}x}{\frac{1}{3!}-\frac{x^{2}}{5!}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3!}}=3.$$

б) Використаємо розклади функцій $\sin x$ та $arctgx$ в ряд Маклорена:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-arctgx}{x^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\ldots-\left(x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\frac{x^{7}}{7}+\ldots\right)}{x^{3}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\ldots-x+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{5}}{5}+\frac{x^{7}}{7}+\ldots}{x^{3}}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)x^{3}+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{5}\right)x^{5}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7!}\right)x^{7}}{x^{3}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{5}\right)x^{2}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7!}\right)x^{4}+\ldots\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

в) Використаємо розклади функцій $\sin x$ та tgx в ряд Маклорена:

$$\lim_{x\to0}\frac{2\left(tgx-\sin x\right)-x^3}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\left[\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{7}{315}x^7+\ldots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)\right]-x^3}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{7}{315}x^7+\ldots-x+\frac{1}{3!}x^3-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\ldots\right)-x^3}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3!}\right)x^3+\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{5!}\right)x^5+\left(\frac{17}{315}+\frac{1}{7!}\right)x^7\right]-x^3}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x^5+\frac{91}{1680}x^7+\ldots\right)-x^3}{x^5}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+\frac{1}{4}x^5+\frac{91}{840}x^7+\ldots-x^3}{x^5}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{x^5\left(\frac{1}{4}+\frac{91}{840}x^2+\ldots\right)}{x^5}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{4}+\frac{91}{840}x^2\right)=\frac{1}{4}.$$

2.2.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Обчислити границі, використовуючи розклади функцій в ряд Маклорена:

№	Завдання	Відповідь	№	Завдання	Відповідь
1	$\lim_{x\to0}\frac{4\left(tgx-\sin x\right)-2x^3}{x^5}$	$\frac{1}{2}$	6	$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{4\cos x-4}$	$\frac{1}{2}$
2	$\lim_{x\to0}\frac{1-x^2-1\cos x}{3x^2}$	$-\frac{1}{6}$	7	$\lim_{x\to0}\frac{x-arctgx}{x^3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-ctgx\right)$	0	8	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}$	1
4	$\lim_{x\to0}\frac{2e^{-x}-2}{\ln\left(l+x\right)-1}$	$-2e$	9	$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}\right)$	$\frac{1}{60}$
5	$\lim_{x\to0}\frac{arctgx}{\ln\left(1-x\right)}$	-1	10	$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{ctgx}{x}\right)$	$\frac{1}{3}$

2.2.3. Наближене обчислення значень функцій. Приклади розв'язання задач

Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд в інтервалі $(-R,R)$ і $x_0 \in (-R,R)$, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$.

Тобто, якщо $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

то $$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n + ...$$

Наближене значення $f(x_0)$ дорівнює частковій сумі $S_n(x_0)$:

$$f(x_0) \approx S_n(x_0) = a_1 + a_2 x_0{}^2 + a_3 x_0{}^3 + ... + a_n x_0{}^n.$$

Похибка дорівнює залишку ряду

$$r_n(x_0) = a_{n+1} x_0^{n+1} + a_{n+2} x_0^{n+2} + a_{n+3} x_0^{n+3} + ...$$

Тому треба вміти оцінювати залишок $r_n(x_0)$.

Якщо ряд $f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0{}^2 + ... + a_n x_0{}^n + ...$ – знакопочерговий, то за теоремою Лейбниця залишок $r_n(x_0)$ має знак свого першого члена і за абсолютною величиною не перевищує його:

$$\left| r_n(x_0) \right| = \left| a_{n+1} x_0^{n+1} + a_{n+2} x_0^{n+2} + ... \right| \le \left| a_{n+1} x_0^{n+1} \right|.$$

Для довільних знакозмінних і знакододатних рядів величину залишку ряду $r_n(x_0)$, як правило, оцінюють так:

$$\left| r_n(x_0) \right| \le \left| a_{n+1} x_0^{n+1} \right| + \left| a_{n+2} x_0^{n+2} \right| + \left| a_{n+3} x_0^{n+3} \right| + ... < U_1 + U_2 + U_3 + ... = S,$$

де $U_1 + U_2 + U_3 + ...$ певний знакододатний збіжний ряд, сума якого S легко обчислюється (наприклад, геометрична прогресія), причому

$$\left| a_{n+1} x_0^{n+1} \right| \le U_1, \quad \left| a_{n+2} x_0^{n+2} \right| \le U_2, \quad \left| a_{n+3} x_0^{n+3} \right| \le U_3, ...$$

Треба також враховувати похибки округлення при обчисленні самих членів ряду.

Приклад 1. Обчислити $\sqrt[4]{650}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання. Знаємо, що $5^4 = 625$, тому запишемо:

$$\sqrt[4]{650} = \sqrt[4]{625 + 25} = \sqrt[4]{625\left(1 + \frac{25}{625}\right)} = 5\sqrt[4]{1 + \frac{1}{25}} = 5\left(1 + \frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Скористаємося біноміальним рядом, де покладемо $m = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{25}$ (зазначимо, що $\frac{1}{25} \in (-1,1)$) і дістанемо:

$$\sqrt[4]{650}=5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{4}}=5\left[1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{25}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{25}\right)^2+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{25}\right)^3+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{1}{25}\right)^n+\ldots\right]=$$

$$=5\left(1+\frac{1}{100}-\frac{3}{16\cdot 2!}\cdot\frac{1}{625}+\frac{21}{64\cdot 3!}\cdot\frac{1}{15625}-\frac{231}{256\cdot 4!}\cdot\frac{1}{390}+\ldots\right)=$$

$$=5+\frac{1}{20}-\frac{3}{4000}+\frac{7}{2000000}-\frac{77}{800000000}+\ldots.$$

Далі маємо: $\sqrt[4]{650}=5+0{,}05-0{,}00075+0{,}0000035-0{,}000000096+\ldots$.

Це збіжний знакопочерговий ряд. Бачимо, що його третій член $a_3=-0{,}00075$ за абсолютною величиною $|a_3|=0{,}00075<0{,}001$; Отже, $|r_2|\le 0{,}00075$ і достатньо зберегти тільки два перших члени, щоб знайти $\sqrt[4]{650}$ з точністю до $0{,}001$: $\sqrt[4]{650}\approx 5+0{,}05=5{,}05$.

Приклад 2. Обчислити з точністю до $0{,}0001$ значення $cos 18^0$.

Розв’язання. Скористаємося розкладом $cos\, x$ в ряд Маклорена, де покладемо $x=18^0$, тобто $x=\frac{\pi}{10}$, тоді:

$$cos 18^\circ=cos\frac{\pi}{10}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n}}{(2n)!}=1-\left(\frac{\pi}{10}\right)^2\frac{1}{2!}+\left(\frac{\pi}{10}\right)^4\frac{1}{4!}-\left(\frac{\pi}{10}\right)^6\frac{1}{6!}+\ldots.$$

Маємо збіжний знакопочерговий ряд. При цьому

$\frac{\pi}{10}=\frac{3{,}14159}{10}=0{,}31415$, $\left(\frac{\pi}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}=0{,}049348>0{,}00005$,

$\left(\frac{\pi}{10}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}=0{,}000405>0{,}00005$, $\left(\frac{\pi}{10}\right)^6\cdot\frac{1}{6!}=0{,}0000013<0{,}00005$.

Оскільки $|r_3|\le 0{,}0000013$, то достатньо зберегти тільки три перших члени. Тоді $\left(cos 18^\circ\approx 1-0{,}049348+0{,}000405\right)$.

Знайдемо похибки округлення при обчисленні членів ряду.

При округленні десяткових дробів застосовується правило:
якщо крайня ліва з відкинутих цифр менша за п’ять, то крайня права значуща цифра не змінюється; якщо цифра, яку відкидають, більша або дорівнює п’яти, то остання значуща цифра збільшується на одиницю.

Наприклад: якщо $a=7{,}038165$, то наближення з трьома десятковими цифрами $a = 7{,}038$, а з чотирма десятковими цифрами $a = 7{,}0382$.

Похибка першого наближення дорівнює $0{,}000165 < 0{,}0005$, тобто менше половини одиниці розряду останньої утриманої цифри $\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}001 = 0{,}0005\right)$. Похибка другого наближення дорівнює $0{,}000035 < 0{,}00005$, що також менше половини одиниці розряду останньої утриманої цифри $\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}0001 = 0{,}00005\right)$.

Вважають, що *наближене число має* k *вірних десяткових знаків, якщо його похибка менше половини одиниці розряду останньої утриманої цифри:* $\frac{1}{2}\cdot 10^{-k} = \frac{5}{10^{k+1}}$.

Повернемося до нашого прикладу. Точність обчислення $\varepsilon = 0{,}001$ задає граничну загальну абсолютну похибку $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, яка складається з абсолютної похибки округлення при обчисленні членів ряду (ε_2) та величини модуля залишку ряду $r_n(x_0)$ (ε_1). Звичайно беруть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\varepsilon$.

Маємо $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}001 = 0{,}0005 = \varepsilon_2$.

Тепер визначимо кількість вірних десяткових знаків, які повинні мати члени ряду після округлення, щоб виконувалася задана точність обчислення $\varepsilon_2 = 0{,}0005$. Маємо $\frac{1}{2}10^{-k}\cdot n \le \varepsilon_2$, де $n = 3$, тоді $\frac{1}{2}10^{-k}\cdot 3 \le 0{,}0005$; $10^{-k} < 0{,}0003$. Бачимо, що $10^{-k} < 0{,}0003$, якщо $k = 4$. Тому члени ряду округляємо до чотирьох знаків після коми:

$$cos 18^\circ = cos\frac{\pi}{10} \approx 1 - \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 \frac{1}{4!} \approx 1 - 0{,}0493 + 0{,}0004 = 0{,}9511.$$

<u>Приклад 3</u>. Обчислити з трьома вірними знаками число Ейлера e.

<u>Розв’язання</u>. Скористаємося рядом Маклорена для експоненти e^x, підставивши в цей ряд $x = 1$. Отримаємо знакододатній ряд

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots.$$

Оцінимо n-й залишок цього ряду:

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+4)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)} + \ldots\right].$$

Замінимо у знаменниках множник $(n+3)$ на множник $(n+2)$, множник $(n+4)$ на $(n+2)$ і т.д., від чого кожна дріб тільки збільшиться, тому маємо:

$$r_n < \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^3}+...\right]$$

У квадратних дужках стоїть збіжна геометрична прогресія, сума якої $S=\frac{a_1}{1-q}$, де $a_1=1$, $q=\frac{1}{n+2}$. Тоді

$$r_n < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{\frac{n+2-1}{n+2}}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1}.$$

Тепер треба підібрати n і число вірних десяткових цифр при обчисленні кожного доданка так, щоб загальна похибка була б менша ніж $0{,}0005$, тому що треба знайти число e з трьома вірними знаками. Тобто $\varepsilon=0{,}0005$.

Пригадаємо, що $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$. Тоді $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{0{,}0005}{2}=0{,}00025$.

Спочатку підбором знайдемо n. Візьмемо, наприклад, $n=5$, тоді $r_5<\frac{7}{6!6}=\frac{7}{720\cdot 6}=\frac{7}{4320}=0{,}0016>0{,}00025$; беремо $n=6$, тоді $r_6<\frac{8}{7!7}=\frac{8}{35280}=\frac{1}{4410}=0{,}0001<0{,}00025$. Тобто $n=6$:

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{6!}.$$

Визначимо кількість вірних десяткових знаків при округленні так, щоб $\varepsilon_2<0{,}00025:\frac{1}{2}10^{-k}\cdot 6\le 0{,}00025$ або $10^{-k}\cdot 3<0{,}00025$. Звідси $k\ge 5$. Тому члени ряду округляємо до 5 знаків:

$$e\approx 2+0{,}5+0{,}16667+0{,}0416+0{,}00833+0{,}0013=2{,}71806.$$

Остаточно $e\approx 2{,}718$ з трьома вірними знаками.

<u>Приклад 4</u>. Обчислити з точністю до $0{,}001$ значення функції

$$arctg\,(\pi/10).$$

<u>Розв'язання</u>. Використаємо ряд Маклорена для $arctg\,x$, в якому покладемо $x=\pi/10$, де $x=\pi/10\in[-1;1]$. Тоді

$$arctg\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}-\left(\frac{\pi}{10}\right)^3\frac{1}{3}+\left(\frac{\pi}{10}\right)^5\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\left(\frac{\pi}{10}\right)^7+...=0{,}314159-\frac{1}{3}\cdot 0{,}031006+$$

$$+\frac{1}{5}\cdot 0{,}003060-\frac{1}{7}0{,}000030+...=0{,}314159-0{,}010335+0{,}000612-0{,}000043+...$$

Маємо збіжний знакопочерговий ряд. Оскільки загальна точність $\varepsilon=0{,}001$ і $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, де ε_1 – похибка, що відповідає залишку, $|r_n|\le|U_{n+1}|<\varepsilon_1$, ε_2 – похибка округлення обчислення членів ряду і $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{0{,}001}{2}=0{,}0005$.

Знайдемо n. Оскільки $|u_3|=|-0{,}000043|=0{,}000043<0{,}0005$, то $n=3$.

Тоді $\quad arctg\frac{\pi}{10}\approx 0{,}314159-0{,}010335+0{,}000612$;

Визначимо кількість вірних десяткових знаків при округленні так, щоб $\varepsilon_2<0{,}0005$: $\frac{1}{2}10^{-k}\cdot 3<0{,}0005$; $\quad 10^{-k}<\frac{0{,}0005\cdot 2}{3}=\frac{0{,}001}{3}=0{,}0003$, тобто $10^{-k}<0{,}0003$. Ця нерівність виконується при $k=4$: $10^{-4}=0{,}0001<0{,}0003$. Тому члени ряду округляємо до чотирьох знаків. Тоді маємо:

$$arctg\frac{\pi}{10}\approx 0{,}3142-0{,}0103+0{,}0006=0{,}3045.$$

Остаточно $arctg\frac{\pi}{10}\approx 0{,}305$ з трьома вірними знаками.

Приклад 5. Обчислити з точністю до 10^{-4} значення $ln1{,}2$.

Розв'язання. Використаємо ряд для $ln(1+x)$. Маємо $ln1{,}2=ln(1+0{,}2)$. Звідси $x=0{,}2$. Це значення належить області збіжності $(-1{,}1]$, тому

$$ln1{,}2=ln(1+0{,}2)=0{,}2-\frac{(0{,}2)^2}{2}+\frac{(0{,}2)^3}{3}-\frac{(0{,}2)^4}{4}+\frac{(0{,}2)^5}{5}-...=$$
$$=0{,}2-\frac{0{,}04}{2}+\frac{0{,}008}{3}-\frac{0{,}0016}{4}+\frac{0{,}00032}{5}-...=$$
$$=0{,}2-0{,}02+0{,}00266-0{,}0004+0{,}000064-....$$

Одержаний ряд – збіжний знакопочерговий.

Оскільки загальна похибка $\varepsilon=0{,}0001$ і $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, де ε_1 – залишкова похибка, $|r_n|<\varepsilon_1$, і ε_2 – похибка округлення. Враховуючи, що $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, маємо $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{0{,}0001}{2}=0{,}00005$. Знайдемо підбором n з умови $|r_n|\le|u_{n+1}|<0{,}00005$. Оскільки $0{,}2>0{,}0005$; $|-0{,}02|=0{,}02>0{,}00005$;

$$0{,}002666>0{,}00005;\ |-0{,}0004|=0{,}0004>0{,}00005;\ 0{,}000064<0{,}00005,$$

то починаючи з u_4 всі наступні члени відкидаємо, тобто $n=4$. Тоді

$$ln1{,}2\approx 0{,}2-0{,}02+0{,}002666-0{,}0004\quad .$$

Визначимо кількість десяткових знаків після коми при округленні членів ряду: $\frac{1}{2}10^{-k}\cdot 4<0{,}00005$; $10^{-k}<0{,}000025$, $k=5$. Тому округляємо до п'яти знаків після коми: $ln1,2 = 0,2 - 0,02 + 0,00267 - 0,0004 = 0,18227$.

Остаточно $ln1,2 = 0,1823$ з чотирма вірними знаками.

2.2.4. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Обчислити вказані вирази з заданою точністю, використовуючи відомі розклади відповідних функцій в ряд Маклорена:

№	Завдання	Відповідь	№	Завдання	Відповідь
1	$sin10^\circ$ з точністю до $0,0001$	0,1736	13	$\sqrt[3]{68}$ з точністю до 0,001	4,082
2	$cos10^\circ$ з точністю до $0,0001$	0,9848	14	$\sqrt[3]{30}$ з точністю до 0,001	3,107
3	$sin1$ з точністю до 0,00001	0,84146	15	$\sqrt[3]{500}$ з точністю до 0,001	7,937
4	$cos1$ з точністю до 0,0001	0,5403	16	$\sqrt[5]{250}$ з точністю до 0,0001	3,0173
5	$sin1^\circ$ з точністю до 0,0001	0,0175	17	$\sqrt[3]{130}$ з точністю до 0,0001	5,0658
6	$cos1^\circ$ з точністю до 0,001	1,000	18	$\frac{1}{e}$ з точністю до 0,0001	0,3679
7	$sh1$ з точністю до 0,0001	0,175	19	$\sqrt{e}$ з точністю до 0,001	1,649
8	$ln1,1$ з точністю до 0,0001	0,0953	20	e^2 з точністю до 0,001	7,389
9	$ln1,3$ з точністю до 0,0001	0,2624	21	$\sqrt[3]{751}$ з точністю до 0,0001	9,0896
10	$arctg\frac{1}{2}$ з точністю до $0,0001$	0,4636	22	$\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ з точністю до 0,0001	0,7788
11	$arcsin\frac{1}{3}$ з точністю до $0,001$	0,340	23	$arcsin1$ з точністю до $0,0001$	1,5708
12	$\sqrt[4]{17}$ з точністю до 0,0001	2,0305	24	$sin0,5$ з точністю до $0,0001$	0,4794

2.2.5. Наближене обчислення інтегралів. Приклади розв'язання задач

Багато інтегралів, що зустрічаються на практиці, не беруться в елементарних функціях або складні й незручні для обчислень. Розглянемо випадок, коли підінтегральну функцію можна розкласти в степеневий ряд. Такий ряд можна почленно проінтегрувати, використавши відповідну властивість степеневих рядів. Одержаний ряд дає точне значення інтеграла. Наближене значення дорівнює частковій сумі. Похибку обчислень визначають так само, як і при знаходженні значень функцій.

Приклад 1. Обчислити інтеграли, розклавши підінтегральну функцію в ряд Маклорена:

а) $\int x^3 arctgx dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; в) $\int \frac{arctg\, x}{x} dx$; г) $\int_0^x \sqrt{1+x^3} dx$; д) $\int_0^x \frac{sin\, x}{x} dx$.

Розв'язання. а) Помножимо почленно на x^3 розклад $arctg\, x$ в ряд Маклорена і отриманий ряд для підінтегральної функції почленно проінтегруємо:

$$\int x^3 arctgx dx = \int x^3 \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ... \right) dx =$$

$$\int \left(x^4 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{5} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+2}}{2n-1} + ... \right) dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{3\cdot 7} + \frac{x^9}{5\cdot 9} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+3}}{(2n-1)\cdot(2n+3)} + ... \quad + C \text{ для } -1 \le x \le 1.$$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \left(1-x^4\right)^{-1/2} dx$. Використаємо біноміальний ряд, в якому покладемо $m = -\frac{1}{2}$ і замість x підставимо $\left(-x^4\right)$. Одержаний степеневий ряд для підінтегральної функції почленно проінтегруємо**:**

$$\int \left(1-x^4\right)^{-1/2} dx = \int \left(1 + (1/2)x^4 + (-1/2)(-1/2-1)x^4/2! + \right.$$

$$\left. + (-1/2)(-1/2-1)\,(-1/2-2)\left(-x^{12}/3!\right) + ... \right) dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{x^8}{2!} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\frac{x^{12}}{3!} + ... \right) dx = x + \frac{x^5}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3x^9}{2\cdot 4\cdot 9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^{13}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13} +$$

$$+ ... + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot (2n-1)\, x^{4n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \quad 2n \quad (4n+1)} + ... + C = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)} + C.$$

в) $$\int \frac{arctgx}{x} dx = \int \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ... \right) dx =$$

$$=\int\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{2n-1}+...\right)dx=x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-...+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}+...+C.$$

Тут використано степеневий ряд для функції $arctg\,x$.

г) $\int\limits_0^x\sqrt{1+x^3}\,dx=\int\limits_0^x\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}dx=$

$$\int\limits_0^x\left(1+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{\left(x^3\right)^2}{2!}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\frac{\left(x^3\right)^3}{3!}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\frac{\left(x^3\right)^4}{4!}+...\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^x\left(1+\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^6}{2!}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{x^9}{3!}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{x^{12}}{4!}+...\right)dx=$$

$$=\left(x+\frac{x^4}{2\cdot4}-\frac{1\cdot x^7}{2^2\cdot2!\cdot7}+\frac{1\cdot3\cdot x^{10}}{2^3\cdot3!\cdot10}-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot x^{13}}{2^4\cdot4!\cdot13}+...\right)\Bigg|_0^x=$$

$$=x+\frac{x^4}{2\cdot4}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-3)}{2^n n!}\frac{x^{3n+1}}{3n+1},\ |x|<1.$$

Тут використано біноміальний ряд, де покладено $m=\frac{1}{2}$, а замість x взято x^3.

д) $\int\limits_0^x\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^x\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+...\right)dx.$

Тут використано ряд Маклорена для $\sin x$. Далі інтегруємо почленно:

$$\int\limits_0^x\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^x\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+...\right)dx=$$

$$=x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}-\frac{x^7}{7!7}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}+...;\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Зауваження. Функція $Si\,x=\int\limits_0^x\frac{\sin x}{x}dx,\quad x\in(-\infty,+\infty)$ називається *інтегральним синусом* і служить прикладом функцій, що не беруться в елементарних функціях.

Приклад 2. Обчислити з точністю до 0,001 визначений інтеграл $\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}dx$.

Розв'язання. Через те, що первісна функції e^{-x^2} не виражається через елементарні, розвинемо цю функцію в степеневий ряд , використовуючи ряд Маклорена для експоненти e^x, де замість x підставимо $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots, \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Відрізок $[0;1/2]\subset(-\infty;+\infty)$, тому цей степеневий ряд можна інтегрувати почленно на $[0;1/2]$. Маємо:

$$\int\limits_0^{1/2}\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}+\frac{x^9}{4!9}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5-\frac{1}{3!\cdot7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1}{4!\cdot9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9-\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\frac{1}{(2n+1)}+\ldots.$$

Одержано збіжний знакопочерговий ряд. Знайдемо значення членів ряду і порівняємо їх з необхідною точністю обчислення до $\varepsilon_2=\frac{1}{2}\cdot0,001=0,0005$.

$$|a_1|=\frac{1}{2}=0,5>0,0005;\ |a_2|=\left|-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right|=\frac{1}{24}=0,041667>0,0005;$$

$$|a_3|=\left|\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\right|=0,003125;$$

$$|a_4|=\left|-\frac{1}{3!}\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\right|=\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{128}=\frac{1}{5376}=0,000186<0,0005.$$

Тоді $|r_3|\le|a_4|=0,000186$ і залишаємо тільки три перших члени ряду:

$$\int\limits_0^{1/2}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=0,5-0,041667+0,003125.$$

Тепер знаходимо необхідну кількість десяткових знаків при обчисленні цих членів. Загальна похибка подається як сума $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2$. де ε_1 –

похибка залишкова, ε_2 – похибка округлення. За умовою $\varepsilon = 0{,}001$. Якщо $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}0005$. З нерівності $(1/2)\cdot 10^{-k}\cdot 3 < 0{,}0005$ маємо: $10^{-k} < 0{,}0003$, $k \ge 4$.

Беремо $k = 4$. Тобто, обчислюємо десяткові дроби з чотирма десятковими знаками. Маємо: $\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}dx \approx 0{,}5 - 0{,}0417 + 0{,}0031 = 0{,}4614$.

Округляючи до трьох знаків, отримуємо $\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}dx \approx 0{,}461$ з точністю до 0,001.

<u>Приклад 3</u>. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{0{,}5} x\,ln(1-x)\,dx$ з точністю до 0,001.

<u>Розв'язання</u>. Скористаємося рядом Маклорена для $ln(1+x)$, де x заміняємо на $-x$: $ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$, де $|x| < 1$.

Помножимо всі члени ряду на x:

$$x\,ln(1-x) = -x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n} - \ldots, \text{ де } |x| < 1.$$

Як відомо, степеневий ряд можна почленно інтегрувати на проміжку, що повністю знаходиться в інтервалі збіжності. Оскільки відрізок $[0; 0,5]$ належить до інтервалу збіжності $(-1,1)$, то маємо:

$$\int\limits_0^{0{,}5} x\,ln(1-x)\,dx = \int\limits_0^{0{,}5}\left(-x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{4} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n} - \ldots\right)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2\cdot 4} - \frac{x^5}{3\cdot 5} - \frac{x^6}{4\cdot 6} - \ldots - \frac{x^{n+2}}{n(n+2)} - \ldots\right)\Bigg|_0^{0{,}5} =$$

$$= -\frac{(0{,}5)^3}{3} - \frac{(0{,}5)^4}{8} - \frac{(0{,}5)^5}{15} - \frac{(0{,}5)^6}{24} - \ldots - \frac{(0{,}5)^{n+2}}{n(n+2)} - \ldots =$$

$$= -\left(\frac{1}{2^3\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 8} + \frac{1}{2^5\cdot 15} + \frac{1}{2^6\cdot 24} + \ldots + \frac{1}{2^{n+2}n(n+2)} + \ldots\right).$$

З'ясуємо, скільки членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася точність обчислень $\varepsilon = 0{,}001$. Для цього оцінимо n-й залишок:

$$|r_n| = \frac{1}{2^{n+3}(n+1)(n+3)} + \frac{1}{2^{n+4}(n+2)(n+4)} + \frac{1}{2^{n+5}(n+3)(n+5)} + \ldots <$$

$$<\frac{1}{2^{n+3}(n+1)(n+3)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right).$$

Добутки $(n+2)(n+4)$; $(n+3)(n+5)$; $(n+4)(n+6)\ldots$, які стоять в знаменниках дробів, замінили на добуток $(n+1)(n+3)$, від чого кожний дріб збільшився. У дужках записана нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q=\frac{1}{2}<1$. Її сума $S=\frac{1}{1-1/2}=2$. Тоді

$$|r_n|<\frac{1}{2^{n+3}(n+1)(n+3)}\cdot 2=\frac{1}{2^{n+2}(n+1)(n+3)}.$$

Треба підібрати n так, щоб $|r_n|<0{,}0005$:

$n=2$: $|r_2|<\frac{1}{2^4\cdot 3\cdot 5}=\frac{1}{240}=0{,}00417>0{,}0005$;

$n=3$: $|r_3|<\frac{1}{2^5\cdot 4\cdot 6}=\frac{1}{768}=0{,}001302>0{,}0005$;

$n=4$: $|r_4|<\frac{1}{2^6\cdot 5\cdot 7}=\frac{1}{2240}=0{,}0004<0{,}0005$.

Отже, досить взяти чотири перших члени ряду:

$$\int_0^{0,5} x\,ln(1-x)\,dx\approx-\left(\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 8}+\frac{1}{2^5\cdot 15}+\frac{1}{2^6\cdot 24}\right)=-\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{128}+\frac{1}{480}+\frac{1}{1535}\right)=$$
$$=-(0{,}04166+0{,}00781+0{,}00208+0{,}00065).$$

Якщо кожний доданок обчисляти з чотирма десятковими знаками, то похибка округлення буде не більше $4\cdot 0{,}00005=0{,}0002$, а загальна похибка від відкидання членів ряду і від округлення буде за абсолютним значенням менша $0{,}0002+0{,}0004=0{,}0006<0{,}001$.

Таким чином, $\int_0^{0,5} x\,ln(1-x)\,dx\approx-(0{,}0417+0{,}0078+0{,}0021+0{,}0007)=$

$=-0{,}0523\approx-0{,}052$ з точністю до 0,001.

Приклад 4. Обчислити наближене значення інтеграла $\int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 arctg\,x\,dx$, взявши три перших члени розкладу підінтегральної функції в ряд Маклорена. Вказати похибку.

Розв'язання. Скористаємося рядом Маклорена для $arctg\,x$, тоді

$$x^3 arctgx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+4}}{2n+1},\ -1\le x\le 1.$$

Відрізок $\left[0;\sqrt{3}/3\right]$ належить області збіжності $[-1;1]$, тому отриманий степеневий ряд можна почленно інтегрувати на ньому:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 arctgx dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+4}}{2n+1} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(x^4 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{5} - \frac{x^{10}}{7} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{3\cdot 7} + \frac{x^9}{5\cdot 9} - \frac{x^{11}}{7\cdot 11} + \ldots \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^7 \frac{1}{3\cdot 7} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^9 \frac{1}{5\cdot 9} -$$

$$-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{11} \frac{1}{7\cdot 11} + \ldots = \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot 5} - \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^7 \cdot 21} + \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^9 \cdot 45} - \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{11}} \cdot \frac{1}{77} + \ldots.$$

Маємо збіжний знакопочерговий ряд.

Обчислимо перші три його члени:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot 5} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot 9\cdot 5} = \frac{\sqrt{3}}{135} \approx \frac{1,73205}{135} = 0,01283;$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^7 \cdot 21} = \frac{1}{3^3 \cdot \sqrt{3} \cdot 21} = \frac{\sqrt{3}}{3^4 \cdot 21} \approx \frac{1,73205}{1701} = 0,00102;$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^9 \cdot 45} = \frac{\sqrt{3}}{3^5 \cdot 45} \approx \frac{1,73205}{10935} = 0,00016;$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^{11} \cdot 77} = \frac{\sqrt{3}}{3^6 \cdot 77} \approx \frac{1,73205}{56133} = 0,000031.$$

За теоремою Лейбниця $|r_3| \le |u_4| = 0,000031$. Тоді

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 arctgx dx \approx \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot 5} - \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^7 \cdot 3\cdot 7} + \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^9 \cdot 9\cdot 5} =$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 arctgx dx \approx \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^5 \cdot 5} - \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^7 \cdot 3\cdot 7} + \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^9 \cdot 9\cdot 5} =$$

$$= 0,01283 - 0,00102 + 0,00016 = 0,01197.$$

Члени ряду обчислені з п'ятьма знаками, тому похибка округлення: $0,000005 \cdot 3 = 0,000015$, а загальна похибка $0,000031 + 0,000015 = 0,000048$.

Отже, $\int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 arctg\, x\; dx \approx 0,01197$ з точністю до $0,00005$.

Приклад 5. Обчислити з точністю до $0,0001$ інтеграл $\int\limits_{0,1}^{0,2}\frac{e^{-x}}{x^3}dx$.

Розв'язання. Спираючись на розклад в ряд Маклорена експоненти, розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд:

$$\frac{\ell^{-x}}{x^3}=\frac{1}{x^3}\left(1-x+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+\frac{(-x)^4}{4!}+\frac{(-x)^5}{5!}+\ldots+\frac{(-x)^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{x^3}\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)=x^{-3}-x^{-2}+\frac{1}{2}x^{-1}-\frac{1}{6}+$$

$$+\frac{x}{24}-\frac{x^2}{120}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n-3}}{n!}+\ldots.$$

Тоді $\int\limits_{0,1}^{0,2}\frac{e^{-x}}{x^3}dx=\int\limits_{0,1}^{0,2}\left(x^{-3}-x^{-2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{x}-\frac{1}{3!}+\frac{x}{4!}-\frac{x^2}{5!}+\frac{x^3}{6!}+\ldots\right)dx=$

$$=\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}\ln x-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!\,2}-\frac{x^3}{5!\,3}+\frac{x^4}{6!\,4}-\ldots\right)\Bigg|_{0,1}^{0,2}=$$

$$=-\left(\frac{1}{0,08}-\frac{1}{0,02}\right)+(5-10)+\frac{1}{2}(\ln 0,2-\ln 0,1)-\frac{1}{6}(0,2-0,1)+\frac{1}{48}(0,04-0,01)-$$

$$-\frac{1}{360}(0,008-0,001)+\frac{1}{2880}(0,0016-0,0001)-\ldots=37,5-5+\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{60}+$$

$$+\frac{1}{1600}-\frac{7}{360000}+\frac{1}{1920000}-\ldots=37,5-5+0,346573-0,016667+$$

$$+0,000625-0,0000194+0,0000005-\ldots.$$

Значення абсолютної похибки від заміни суми збіжного знакопочергового ряду n-ю частковою сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів: $|S-S_n|=|r_n|\le|u_{n+1}|$. Оскільки $|u_5|=|-0,0000194|<0,0001$, то починаючи з u_5 всі наступні члени відкидаємо. Тоді маємо:

$$\int\limits_{0,1}^{0,2}\frac{e^{-x}}{x^3}dx\approx 32,5+0,346573-0,016667+0,000625.$$

Якщо кожний додаток обчислити з чотирма десятковими знаками, то похибка округлення буде не більше $3\cdot 0,00005=0,00015$, а загальна похибка від відкидання членів ряду і від округлення буде не більше $0,00015+0,0000194=0,0001694>0,0001$, тобто більше точності обчислення $0,0001$.

Якщо кожний додаток обчислити з п'ятьма десятковими знаками, то похибка округлення буде не більше $3\cdot 0,000005=0,000015$, а загальна похибка $0,000015+0,0000194=0,0000344<0,0001$, тобто менша заданої граничної похибки.

Отже, $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3} dx \approx 32,5 + 0,34657 - 0,01667 + 0,00063 = 32,83053$.

Відповідь: $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3} dx \approx 32,8305$ з точністю до $0,0001$.

2.2.6. Задачі для самостійної роботи

Завдання 1. Виразити у формі ряду задані невизначені інтеграли, використовуючи розклади в степеневий ряд підінтегральних функцій:

№	Завдання	Відповідь
1	$\int \frac{cos\,x}{x} dx$	$ln\|x\| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!\,2n} + C$; $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
2	$\int \frac{e^x}{x} dx$	$ln\|x\| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,n} + C$; $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3	$\int \frac{e^x}{x^2} dx$	$-\frac{1}{x^2} + ln\|x\| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)!} + C$; $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
4	$\int\limits_0^x t^2 sht dt$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n-1)!(2n+2)}$; $x \in (-\infty, +\infty)$
5	$\int\limits_0^x \frac{tdt}{\sqrt{t+t^4}}$	$\frac{x^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)}$, $x \in (-1; 1)$
6	$\int\limits_0^x \frac{ln(1+4t)}{t} dt$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cdot 4^n x^n$, $x \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$
7	$\int\limits_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}}$	$\frac{x^3}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$, $x \in (-1; 1)$
8	$\int\limits_0^x \sqrt{1+x^3} dt$	$x + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-5)!!}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)}$, $x \in (-1; 1)$
9	$\int\limits_0^x sin(t^2) dt$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{(2n-1)!(4n-1)}$, $x \in (-\infty, +\infty)$
10	$\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$	$x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)}$, $x \in (-1; 1)$

Завдання 2. Обчислити з точністю до 0,001 задані визначені інтеграли:

№	Завдання	Відповідь	№	Завдання	Відповідь
1	$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$	0,608	11	$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$	0,494
2	$\int_0^1 \sin\left(x^2\right)dx$	0,3103	12	$\int_0^{0,1} \frac{\ln\left(1+x\right)}{x}dx$	0,098
3	$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$	0,337	13	$\int_0^1 \cos\left(x^2\right)dx$	0,905
4	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}dx$	0,507	14	$\int_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$	0,072
5	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$	0,497	15	$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\sin x\,dx$	0,608
6	$\int_0^{0,8} x^{10}\sin x dx$	0,006	16	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$	0,927
7	$\int_0^{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{x}\cos^2 x dx$	0,047	17	$\int_0^{10} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$	0,384
8	$\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}\cdot e^x dx$	0,0258	18	$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$	2,835
9	$\int_0^1 e^{\frac{-x^2}{4}}dx$	0,923	19	$\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx$	3,057
10	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctgx}{x}dx$	0,488	20	$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$	0,622

2.2.7. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів. Приклади розв'язання задач

Коли точно проінтегрувати диференціальне рівняння за допомогою елементарних функцій не вдається, його розв'язок можна шукати у вигляді ряду Тейлора або Маклорена.

Зокрема, при розв'язуванні задачі Коші:

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0$$

використовується ряд Тейлора з центром розвинення у початковій точці x_0:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

де $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а решта похідних $y^{(n)}(x_0)(n = 2,3,...)$ знаходяться шляхом послідовного диференціювання вказаного диференціального рівняння та підстановки даних у вирази цих похідних.

Приклад 1. Знайти у вигляді степеневого ряду (до перших чотирьох членів включно) частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = y - x^2$, що задовольняє початковій умові $y(1) = 2$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = y(1) + \frac{y^{I}(1)}{1!}(x-1) + \frac{y^{II}(1)}{2!}(x-1)^2 + ... +$$

$$+ \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + ...$$

За умовою $y(1) = 2$. З диференціального рівняння $y^{I} = y - x^2$ знаходимо $y^{I}(1) = y(1) - 1^2 = 2 - 1 = 1$. Далі диференціюємо послідовно і одержуємо:

$$y^{II}(x) = y^{I} - 2x; \qquad y^{II}(1) = y^{I}(1) - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1;$$

$$y^{III}(x) = y^{II} - 2; \qquad y^{III}(1) = -1 - 2 = -3.$$

Отже, $y(x) = 2 + (x-1) + \frac{(-1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{-3}{3!}(x-1)^3 + ... =$

$$= 2 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3 + ...$$

Цим же *методом послідовного диференціювання* можна розв'язувати диференціальні рівняння вищих порядків.

Приклад 2. Знайти чотири перші, відмінні від нуля, члени розкладу в степеневий ряд частинного розв'язку диференціального рівняння

$y^{II} + xy^{I} + y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1,\ y^{I}(0) = 0$.

Розв'язання. Оскільки початкова точка $x = 0$, то шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n = y(0) + \frac{y^{I}(0)}{1!} x + \frac{y^{II}(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots.$$

Для визначення коефіцієнтів ряду використовуємо розглянутий вище метод послідовного диференціювання даного рівняння, виходячи з умов $y(0) = 1,\ y^{I}(0) = 0$ і враховуючи, що число обчислених ненульових коефіцієнтів повинно дорівнювати чотирьом:

$y^{II} = -xy^{I} - y;$ $\quad y^{II}(0) = 0 \cdot 0 - 1 = -1;$

$y^{III} = -y^{I} - xy^{II} - y^{I} = -2y^{I} - xy^{II};$ $\quad y^{III}(0) = 0;$

$y^{IV} = -2y^{II} - y^{II} - xy^{III};$ $\quad y^{IV}(0) = (-3)(-1) - 0 = 3;$

$y^{V} = -3y^{III} - y^{III} - xy^{IV};$ $\quad y^{V}(0) = -4 \cdot 0 - 0 = 0;$

$y^{VI} = -4y^{IV} - y^{IV} - xy^{V};$ $\quad y^{VI}(0) = -5 \cdot 3 - 0 = -15.$

Підставляємо знайдені значення похідних у ряд Маклорена:

$$y(x) = 1 - 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{4!} x^4 - 15 \cdot \frac{1}{6!} x^6 + \ldots.$$

Отже, $\quad y(x) = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{48} x^6 + \ldots.$

Приклад 3. Знайти у вигляді степеневого ряду частинний розв'язок диференціального рівняння $y^{II} - xy^{I} + y = 1$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 0;\ y^{I}(0) = 0$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок у вигляді степеневого ряду:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Тоді $y^{I} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$.

Враховуючи початкові умови $y(0) = y^{I}(0) = 0$, маємо $a_0 = a_1 = 0$.

Тепер розв'язок $y(x)$ має вигляд:

$$y(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n.$$

Далі знаходимо похідні, що входять у дане диференціальне рівняння:

$$y^{I} = 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^{n-1};$$

$$y^{II}=2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\ldots+(n-1)na_nx^{n-2}+\ldots=\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\cdot na_nx^{n-2}.$$

Підставляємо ці вирази в диференціальне рівняння:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n=2}^{\infty}a_nnx^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\cdot x^n=1$$

$$\text{або } \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=1.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва та справа у цій тотожності:

x^0	$2\cdot 1a_2=1$ звідки маємо	$a_2=\frac{1}{2}$
x^1	$3\cdot 2a_3=0$ звідки маємо	$a_3=0$
x^2	$4\cdot 3a_4-2a_2+a_2=0$	$a_4=\frac{a_2}{12}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$
x^3	$5\cdot 4a_5-3a_3+a_3=0$	$a_5=\frac{2a_3}{4\cdot 5}=\frac{0}{20}=0$
x^4	$6\cdot 5a_6-4a_4+a_4=0$	$a_6=\frac{3a_4}{5\cdot 6}=\frac{3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$
x^5	$7\cdot 6a_7-5a_5+a_5=0$	$a_7=\frac{4a_5}{7\cdot 6}=\frac{0}{7\cdot 6}=0$
x^6	$8\cdot 7a_8-6a_6+a_6=0$	$a_8=\frac{5a_6}{7\cdot 8}=\frac{3\cdot 5}{6!\cdot 7\cdot 8}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8!}$
…	… … … … … … ... …	… … … … … … … … … …

Отримуємо, що $a_{2m+1}=0,\ m=1,2,3,\ldots;\ a_2=\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2!};$

$$a_4=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{1}{4!};\ \ a_6=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{1\cdot 3}{6!};\ \ a_8=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8!};\ \ldots .$$

Враховуючи, що $a_0=a_1=0$, підставимо отримані значення коефіцієнтів у степеневий ряд і дістанемо:

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1\cdot 3}{6!}\cdot x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{8!}x^8+\ldots=\frac{x^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!}x^{2k+2}.$$

Знайдемо інтервал збіжності цього ряду за ознакою Даламбера:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k+1)!!\,x^{2k+4}(2k+2)!}{(2k+4)!(2k-1)!!\,x^{2k+2}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{(2k+3)(2k+4)}\cdot x^2=0<1$$

при $x\in R$.

У цьому прикладі використано *метод невизначених коефіцієнтів*.

Приклад 4. Знайти у вигляді степеневого ряду (до перших п'яти членів включно) частинний розв'язок диференціального рівняння $y^{II}+3y^{I}+y=\ell^{x}$, що задовольняє початковим умовам $y(0)=1;\ y^{I}(0)=0$.

Розв'язання. Будемо шукати розв'язок у вигляді ряду:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n+...$$

Для знаходження значень a_2, a_3, …, a_n, … використовуємо розглянутий вище метод невизначених коефіцієнтів.

Продиференціюємо цей ряд:

$$y^{I}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot nx^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}+...$$

Враховуючи початкові умови $y(0)=1;\ y^{I}(0)=0$, знаходимо a_0 та a_1:

$1=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+...+a_n\cdot 0+...;\qquad a_0=1;$

$0=a_1+2a_2\cdot 0+3a_3\cdot 0+...+na_n\cdot 0+...;\ \ a_1=0.$

Отже, маємо $y(x)=1+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n+....$ Тоді

$$y^{I}(x)=2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+...+na_nx^{n-1}+...;$$

$$y^{II}(x)=2a_2+6a_3x+12a_4x^2+...+n(n-1)a_nx^{n-2}+...,$$

Підставимо ці вирази та розклад в ряд Маклорена експоненти e^x в дане диференціальне рівняння. Дістанемо:

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+...+n(n-1)x^{n-2}+...$$

$$+3\left(2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+na_nx^{n-1}+...\right)+1+a_2x^2+a_3x^3+...+a_nx^n=1+x+$$

$$+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+....$$

Для знаходження значень a_2, a_3, …, a_n, … прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x ліворуч та праворуч у цій тотожності:

x^0	$2a_2+1=1$	звідки маємо	$a_2=0$.
x^1	$6a_3+6a_2=1$	звідки маємо	$a_3=\frac{1}{6}(1-6\cdot 0)=\frac{1}{6}$.
x^2	$12a_4+9a_3+a_2=\frac{1}{2!}$	звідки маємо	$a_4=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{1}{2}-9\cdot\frac{1}{6}-0\right)=-\frac{1}{12}$.
x^3	$20a_5+12a_4+a_3=\frac{1}{3!}$	звідки маємо	$a_5=\frac{1}{20}\left(\frac{1}{6}-12\left(-\frac{1}{12}\right)-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{20}$.
…	… … … … … …	… … … …	… … … … … … … … … … …

Підставимо отримані значення коефіцієнтів у шуканий ряд і отримаємо: $y(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 - \ldots.$

2.2.8. Задачі для самостійної роботи

Завдання. У варіантах №1 – №9 знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в степеневий ряд частинного розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє вказаним початковим умовам.

У варіантах №10 – №25 знайти п'ять перших членів розкладу в степеневий ряд частинного розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє вказаним початковим умовам (нульові члени у відповідь не записувати):

№	Завдання	Відповідь
1	$y'' + \left(2 + x^2\right)y = 0;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$	$y = 2x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \ldots$
2	$y'' = x^2 y - y';$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y = 1 + \frac{2}{4!}x^4 - \frac{2}{5!}x^5 + \ldots$
3	$y'' - xy' + y - 1 = 0;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$	$y = \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + + \frac{3}{6!}x^6 + \ldots$
4	$y' = xy + ln(x + y);$ $y(1) = 0$	$y = \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} - \frac{(x-1)^4}{6} + \ldots$
5	$y' = 2x + cos\, y;\ y(0) = 0$	$y = x + x^2 - \frac{x^3}{6} + \ldots$
6	$2y' - (x + y)y - e^x = 0;$ $y(0) = 2$	$y = 2 + \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}x^2 + \ldots$
7	$y'' = x^2 + y^2;$ $y(-1) = 0,\ y'(-1) = 0$	$y = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(x+1)^3}{3} + \frac{(x+1)^4}{12} + \ldots$
8	$y'' = (y')^2 + xy - 2x;$ $y(2) = 0,\ y'(2) = 2$	$y = 2(x-2) + \frac{(x-2)^3}{3} + \frac{(x-2)^4}{2} + \ldots$
9	$y''' = y'' + (y')^2 + y^3 - 2x;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$	$y = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} + \ldots$
10	$y' = 2\cos x - xy^2;\ y(0) = 1$	$y = 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + \ldots$

11	$y' = x^2 + y^2;\ y(0) = 1$	$y = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} + \ldots$
12	$y' = 2x - y;\ y(0) = 2$	$y = 4\left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)$
13	$y'' = -2xy;\ y(0) = y'(0) = 1$	$y = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \ldots$
14	$y'' = y\cos x + x;$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
15	$y'' + y' = x^2 y;$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y = 1 + \frac{x^4}{12} + \ldots$
16	$y'' - xy = 0;$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \ldots$
17	$y'' - xy = 0;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$	$y = x + \frac{x^4}{12} + \ldots$
18	$y'' = x^2 y;$ $y(0) = y'(0) = 1$	$y = 1 + x + \frac{x^4}{12} + \ldots$
19	$y'' + y\cos x = 0;$ $y(0) = 3,\ y'(0) = 0$	$y = 3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots$
20	$y'' = \sqrt{y'} + xy;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$	$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{12} + \ldots$
21	$y' - 2xy = 0;\ y(0) = 1$	$y = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \ldots$
22	$y'' = x\,y' + y^2;$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \ldots$
23	$y'' = y\sin x + (y')^2;$ $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$	$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + \ldots$
24	$y' = e^y + xy;\ y(0) = 0$	$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^4}{24} + \ldots$
25	$y'' = e^{xy};$ $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	$y = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

Розділ 3. РЯДИ ФУР'Є

3.1. Ряд Фур'є періодичної функції з періодом $T=2\pi$

3.1.1. Короткі теоретичні відомості

Рядом Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ називається тригонометричний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b \sin nx, \qquad (1)$$

де a_0, a_n, b_n $(n=1,2,3,...)$ – ***коефіцієнти Фур'є***, що знаходяться за формулами:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx; \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx; \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$(n=1,2,3,...).$$

Якщо ряд (1) збігається, то його сума $S(x)$ є періодичною функцією з періодом $T=2\pi$, тобто $S(x+2\pi)=S(x)$.

Примітка. Для скорочення запису за знаком підсумовування $\sum$ зовнішні дужки часто опускають.

Для обчислення коефіцієнтів a_n та b_n часто застосовується інтегрування частинами та різні довідкові таблиці інтегралів.

Теорема Діріхле (***достатня умова розкладання*** періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ ***в ряд Фур'є***). *Якщо функція $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ є кусково-гладкою на відрізку $[-\pi,\pi]$, то її ряд Фур'є збігається в кожній точці $x\in[-\pi,\pi]$, причому сума ряду $S(x)$ задовольняє наступні умови*:

1) $S(x)=f(x)$, *якщо x є точкою неперервності функції $f(x)$*;

2) $S(x)=\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, *якщо x є точкою розриву першого роду функції $f(x)$*;

3) $S(\pi)=S(-\pi)=\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Нагадаємо, що ***кусково-гладкою*** на відрізку $[a,b]$ називається функція, що неперервна разом з першою похідною в усіх точках $x\in(a,b)$ за винятком скінченного числа точок розриву першого роду.

Якщо функція $f(x)$ з періодом $T=2\pi$ є парною, то її ряд Фур'є не містить синусів і є ***рядом косинусів***:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ \text{де}\ a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx;\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx. \quad (2)$$

Якщо функція $f(x)$ є непарною, то її ряд Фур'є не містить вільного члена та косинусів і є ***рядом синусів***:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\quad \text{де}\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx;\ a_0=0,\ a_n=0. \qquad (3)$$

Якщо функція $f(x)$ задана на $[0,\pi]$, то для розкладання в ряд Фур'є її довизначають на відрізок $[-\pi,0]$ довільним чином, а потім продовжують періодично з періодом $T=2\pi$ на всю числову пряму $(-\infty;+\infty)$. Одержану продовжену функцію розкладають в ряд Фур'є. Найчастіше довизначають функцію $f(x)$ так, щоб виконувалась одна з двох умов:

а) $f(-x)=f(x)$. У цьому випадку функція $f(x)$ довизначена парним способом і розкладається в ряд косинусів (2).

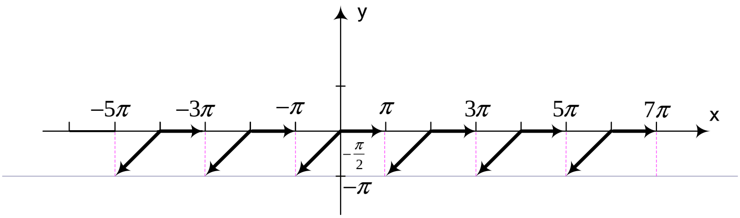
б) $f(-x)=-f(x)$. У цьому випадку функція $f(x)$ довизначена непарним способом і розкладається в ряд синусів (3).

3.1.2. Приклади розв'язання задач

<u>Приклад 1</u>. Розкласти в ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{якщо}\ -\pi<x<0\\ 0, & \text{якщо}\ 0\le x<\pi\end{cases}$$

<u>Розв'язання</u>. Побудуємо графік функції $f(x)$:



Функція $f(x)$ – неперервна на $(-\pi,\pi)$ та має кусково-неперервну першу похідну. Тому її можна розкласти в ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Знаходимо коефіцієнти a_0 і a_n цього ряду:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}x\,dx+\int_0^{\pi}0\,dx+\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{0}=-\frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} x\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} 0\cos nxdx\right].$$

Другий інтеграл у дужках дорівнює нулю, а для обчислення першого використовуємо інтегрування частинами: $\int_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

Нехай $u = x$, $du = dx$, тоді $dv = \cos nxdx$, $v = \int \cos nxdx = \frac{1}{n}\sin nx$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx\right) = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}(\cos 0 - \cos n\pi) = \frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right).$$

Маємо: $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)^2\pi}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Знайдемо коефіцієнти b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} x\sin nxdx + \int_{-\pi}^{0} 0\sin nxdx\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{1}{n}\cos nx\,dx\right) = -\frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{n}\cos n\pi = -\frac{1}{n}(-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, ряд Фур’є має вигляд:

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x + \frac{2}{\pi\cdot 3^2}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{2}{\pi\cdot 5^2}\cos 5x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots.$$

Ця рівність справедлива у точках неперервності $f(x)$.

У точках $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, …, де функція має розрив першого роду, сума ряду $S(x)$ приймає значення:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+0}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

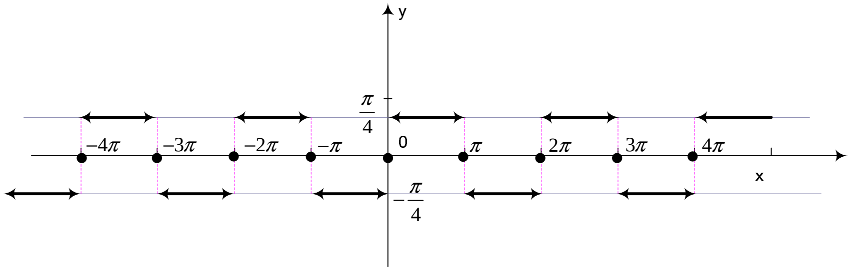
і $$S(\pm 3\pi) = S(\pm 5\pi) = \ldots = -\frac{\pi}{2}.$$

Графік функції $S(x)$ – суми ряду Фур’є – відрізняється від графіка функції $f(x)$ точками $\left(\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(3\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(-3\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$… .

Приклад 2. Розкласти в ряд Фур’є періодичну з періодом 2π функцію

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & \text{якщо} \quad -\pi<x<0 \\ 0, & \text{якщо} \quad x=0, \quad \pi, -\pi \\ +\dfrac{\pi}{4}, & \text{якщо} \quad 0<x<\pi \end{cases}$$

Розв’язання. Побудуємо графік функції $f(x)$:



Ця функція непарна, оскільки її графік симетричний відносно початку координат, і задовольняє умови теореми Діріхле. Тому її можна розкласти в ряд синусів $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Знайдемо коефіцієнти b_n:

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx:$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nx dx=\frac{1}{2n}(-\cos nx)\Big|_0^{\pi}=\frac{-1}{2n}(\cos n\pi-\cos 0);$$

$$b_n=-\frac{1}{2n}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad n=2k \\ \dfrac{1}{n}, & \text{якщо} \quad n=2k-1 \end{cases}$$

Записуємо шуканий ряд:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots+$$

$$\ldots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\ldots, \quad x\in(-\infty;+\infty).$$

У точках неперервності функції $f(x)$ цей ряд збігається саме до неї $S(x)=f(x)$, а в її точках розриву першого роду $\pm 2m\pi$, $\pm(2m+1)\pi$ $(m=0,1,2,\ldots)$ сума ряду $S(x)$ приймає значення:

$$S(\pm 2m\pi)=S(0)=\frac{1}{2}\left(f(0-0)+f(0+0)\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=0=f(\pm 2m\pi);$$

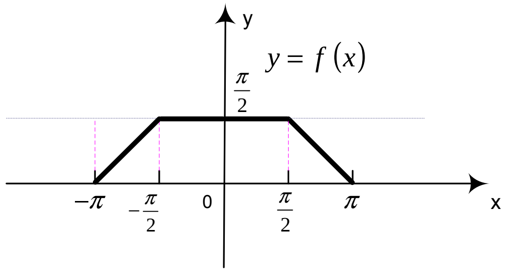
$$S(\pm(2m+1)\pi)=S(\pm\pi)=\frac{1}{2}\left(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=0=f\left(\pm(2m+1)\pi\right).$$

Отже, ряд збігається до функції $f(x)$ при всіх $x\in(-\infty;+\infty)$.

Приклад 3. Розкласти в ряд Фур'є функцію

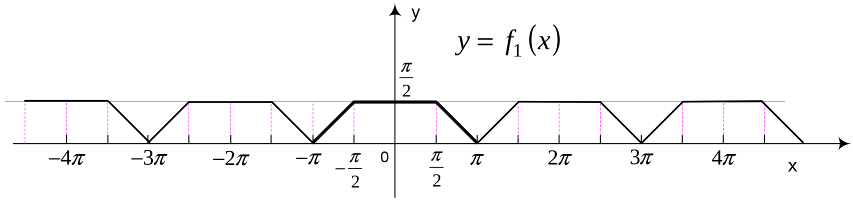
$$f(x)=\begin{cases} x+\pi, & \text{якщо} \quad -\pi<x<-\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо} \quad -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ -x+\pi, & \text{якщо} \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо графік функції $f(x)$:



Бачимо, що функція $f(x)$ є парною на $(-\pi,\pi)$, оскільки її графік симетричний відносно осі ординат. Зрозуміло, що вона неперіодична. Тому треба побудувати періодичне продовження цієї функції на всю числову вісь – утворити допоміжну функцію $f_1(x)$, яка періодична з періодом $T=2\pi$ і така, що $f_i(x)=f(x)$ на інтервалі $(-\pi,\pi)$ і $f_i(-\pi)=f_i(\pi)$.

Покладемо $f_1(-\pi)=f_1(\pi)=0$. Побудуємо графік функції $f_i(x)$:



Так побудовану парну періодичну функцію $f_i(x)$ з періодом $T=2\pi$ розкладаємо в ряд косинусів: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$.

Оскільки на $(-\pi,\pi)$ виконується умова $f_i(x)=f(x)$, то маємо:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

Проведемо обчислення коефіцієнтів a_0 і a_n:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\,dx\right)=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{8}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}\cos nx dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\cos nx dx\right)=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi-x}{n}\sin nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx dx\right)=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\left(0-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{\pi n^2}\cos n\pi+\frac{2}{\pi n^2}\cos\frac{n\pi}{2}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

Задана функція неперервна в $(-\pi,\pi)$, тому маємо:

$$f(x)=\frac{3}{8}\pi+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos nx \quad \text{або}$$

$$f(x)=\frac{3}{8}\pi+\frac{2}{\pi}\left(\cos x-\frac{2\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{1}{5^2}\cos 5x-\frac{2}{6^2}\cos 6x+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{7^2}\cos 7x+\ldots\right),\ \text{якщо}\ x\in(-\pi,\pi).$$

На кінцях інтервалу $(-\pi,\pi)$ справедливо:

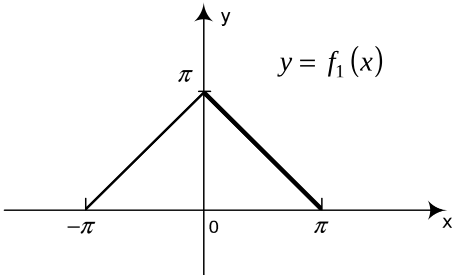
$$S(\pm\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=0.$$

Приклад 4. Розкласти функцію $f(x)=\pi-x$ на відрізку $0\le x\le\pi$ в ряд Фур'є: а) за косинусами; б) за синусами.

Розв'язання. Задана функція при її парному або непарному продовженні на відрізок $[-\pi;0]$ буде кусково-гладкою, тобто задовольнятиме умови теореми Діріхле. Розглянемо ці два способи продовження функції. Тоді матимемо відповідно розвинення в ряд косинусів та ряд синусів.

а) Розкладання даної функції в ряд за косинусами.

Продовжимо функцію $f(x)=\pi-x$ на відрізок $[-\pi;0]$ парним чином. Дістанемо парну функцію $f_i(x)$ таку, що $f_1(x)=f(x)$ на $[0;\pi]$:



Побудовану функцію $f_i(x)$ продовжимо періодично з періодом $T=2\pi$ на всю числову вісь. Одержимо другу допоміжну функцію $f_2(x)$ таку, що $f_2(x)=f_1(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$ та $f_2(x)=f(x)$, $x\in[0;\pi]$. Ця функція $f_2(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле. Розкладемо її в ряд косинусів $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, де коефіцієнти Фур'є визначаються так:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_2(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi;\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_2(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx.$$

Використовуємо інтегрування частинами. Нехай $u=\pi-x$; $du=-dx$; $dv=\cos nxdx$; $v=\int\cos nxdx=\frac{1}{n}\sin nx$, тоді:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left((\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{2}{\pi}\left(0-\frac{1}{n^2}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=$$

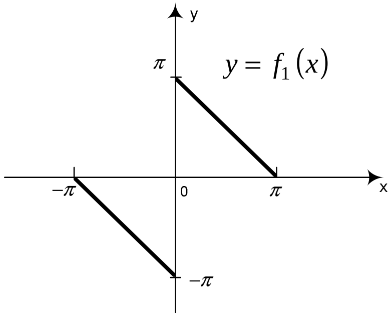
$$=-\frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi-\cos 0)=\frac{2}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi n^2}, & \text{якщо } n=2k-1\\ 0, & \text{якщо } n=2k.\end{cases}$$

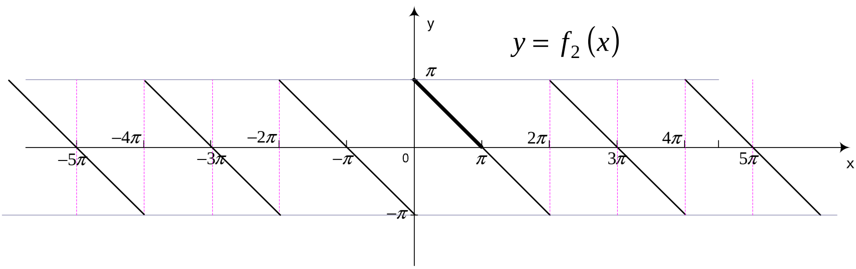
Отже, $a_{2k-1}=\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}$ та $f_2(x)=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$, якщо $x\in(-\infty;+\infty)$ і $f(x)=\pi-x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$, якщо $x\in[0,\pi]$.

б) Розкладання даної функції в ряд Фур'є за синусами.

Спочатку продовжимо функцію $f(x)=\pi-x$ на відрізок $[-\pi,0]$ непарним чином. Дістанемо непарну функцію $f_i(x)$ таку, що $f_1(x)=f(x)$ на $[0;\pi]$:



Далі функцію $f_1(x)$ продовжимо періодично з періодом $T=2\pi$ на всю числову вісь і отримаємо функцію $f_2(x)$ таку, що $f_2(x)=f_1(x)$ на $(-\pi,\pi)$.



Утворену непарну функцію $f_2(x)$ розкладемо в ряд синусів $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, пам'ятаючи, що на відрізку $[0,\pi]$ $f_2(x)=f(x)$:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_2(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx dx.$$

Використовуємо інтегрування частинами:

$$u=\pi-x,\ du=-dx,\ \sin nx dx=dv,\ v=\int \sin nx dx=-\frac{1}{n}\cos nx.$$

Маємо: $b_n=\frac{2}{\pi}\left[(\pi-x)\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right]=$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\cos 0-\frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{2}{n},\quad n=1,2,3,\dots .$$

Отже, $f_2(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$ або $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$,

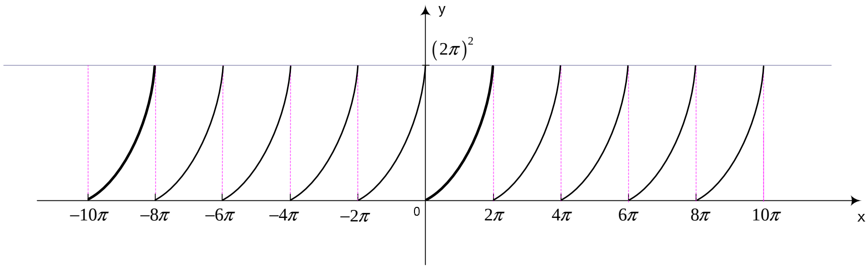
$$\pi-x=2\left(\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+...+\frac{\sin x}{n}+...\right),\ \ 0<x\le\pi.$$

При $x=0$ сума ряду $S(x)$ така:

$$S(0)=\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0.$$

Приклад 5. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$, визначену на проміжку $(0,2\pi)$.

Розв'язання. Наведемо графік заданої функції $f(x)=x^2$ на $(0,2\pi)$ та її періодичного продовження на всю числову вісь, тобто будуємо функцію $f_1(x)$, яка періодична з періодом $T=2\pi$ і така, що $f_1(x)=f(x)=x^2$ на проміжку $(0,2\pi)$ і в точках $x_k=2k\pi$, $k\in Z$: $f_1(x_k)=(2\pi)^2$.



Функцію $f_1(x)$ розкладемо в ряд Фур'є. При знаходженні коефіцієнтів a_0, a_n і b_n використаємо наступну властивість: *визначений інтеграл від періодичної функції $f(x)$ по будь-якому відрізку довжиною в період T має одне й те саме значення*: $\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_b^{b+T} f(x)\,dx$. Тоді:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{8}{3}\pi^2;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nxdx.$$

Скористаємось двічі інтегруванням частинами:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(x^2\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(0\ -\frac{2}{n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\times\right.\right.$$

$$\times\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\Bigg)\Bigg)=-\frac{2}{\pi n}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos 2n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{4}{n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f_1(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x^2\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{2\pi}x\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\Bigg(-\frac{4\pi^2}{n}\cos n2\pi+0+$$

$$+\frac{2}{n}\left(x\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right)\Bigg)=-\frac{4\pi}{n}\cos 2n\pi+\frac{2}{\pi n}\Big(0+$$

$$+\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{2\pi}\Big)=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{\pi n^3}(\cos 2n\pi-\cos 0)=-\frac{4\pi}{n}.$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти a_0, a_n і b_n у ряд Фур'є та дістаємо:

$$x^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\left(\cos x-\pi\sin x+\frac{1}{2^2}\cos 2x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi}{n}\sin nx+\ldots\right.$$

$$\text{або}\quad x^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\quad x\in(0,2\pi).$$

Тому що функція $f(x)=x^2$ неперервна на $(0,2\pi)$, одержаний ряд збігається до $f(x)=x^2$ при будь-якому $x\in(0,2\pi)$. У точках $x=2\pi n$ $(n=0,1,2...)$ сума ряду дорівнює:

$$S(2\pi)=\frac{f_1(2\pi-0)+f_1(2\pi+0)}{2}=\frac{4\pi^2+0}{2}=2\pi^2.$$

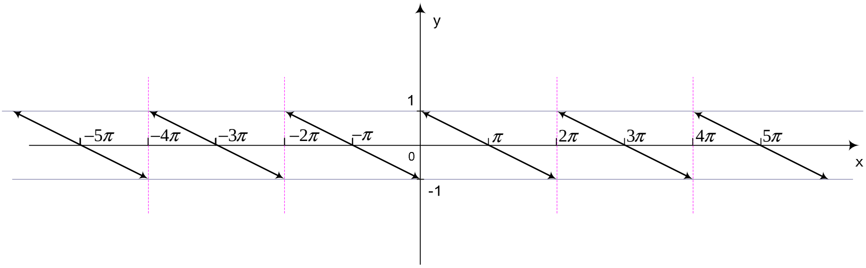
Безпосередньо підставимо в ряд $x=2\pi$ і , враховуючи $\cos 2n\pi=1$ і $\sin 2\pi n=0$, отримаємо

$$2\pi^2=\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2\pi n=\frac{4}{3}\pi^2+4\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right).$$

Звідси $4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=2\pi^2-\frac{4}{3}\pi^2=\frac{2}{3}\pi^2$, тобто $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Одержано суму збіжного узагальненого гармонічного ряду.

Приклад 6. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\frac{1}{\pi}(\pi-x)$, визначену на проміжку $(0,2\pi)$.

Розв'язання. Продовжимо задану функцію $f(x)$ періодично з періодом $T=2\pi$ на всю числову вісь так, що на $(0,2\pi)$ справедливо $f_1(x)=f(x)$. Наведемо графік функції $f(x)$ на $(0,2\pi)$ та її періодичного продовження $f_1(x)$:



Утворена функція $f_1(x)$ непарна, оскільки її графік симетричний відносно початку координат, і задовольняє умови теореми Діріхле. Тому розкладемо її в ряд синусів. Знайдемо коефіцієнти b_n, застосовуючи інтегрування частинами:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{\pi}\cdot \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} (\pi - x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi^2}\left[(\pi - x)\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi}\cos nx dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\pi\cdot\frac{1}{n}\cos 2\pi n + \frac{\pi}{n}\cos 0 - \frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{2\pi} \right) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{2\pi}{n} - 0\right) = \frac{2}{\pi n}.$$

Підставимо одержані коефіцієнти та отримаємо ряд синусів, сума якого:

$$S(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx = \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx + \ldots\right).$$

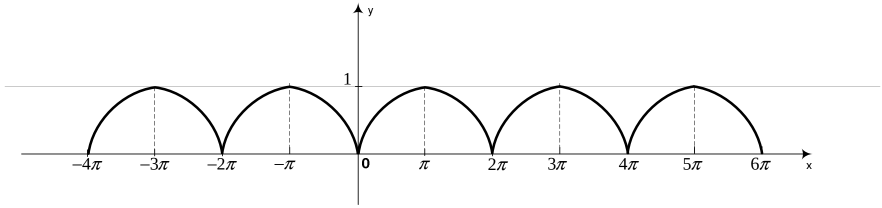
Згідно з теоремою Діріхле $S(x) = f(x) = \frac{1}{\pi}(\pi - x)$, якщо $x \in (0, 2\pi)$ та

$$S(0) = S(2\pi) = \frac{f(0+0) + f(2\pi - 0)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0.$$

Отже, $\quad \frac{1}{\pi}(\pi - x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{x}, \; x \in (0, 2\pi).$

<u>Приклад 7</u>. Розкласти функцію $f(x) = 1 - \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)^2$, що визначена на відрізку $[0, 2\pi]$, в ряд Фур'є.

<u>Розв'язання</u>. Продовжимо задану функцію $f(x)$ періодично з періодом $T = 2\pi$ на всю числову вісь так, що на $[0, 2\pi]$ справедливо $f_1(x) = f(x)$. Наведемо графік функції $f(x)$ на $[0, 2\pi]$ та її періодичного продовження $f_1(x)$:



Одержана функція $f_1(x)$ парна, оскільки її графік симетричний відносно осі ординат, і задовольняє умови теореми Діріхле. Тому розкладемо її в ряд косинусів. Знайдемо коефіцієнти a_0 і a_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{\pi^2}(\pi-x)^2\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(x-\frac{1}{\pi^2}\frac{(x-\pi)^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\Bigg) =$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(2\pi-\frac{1}{\pi^2}\frac{\pi^3}{3}\right)+\frac{1}{\pi^2}\frac{(-\pi)^3}{3}\right] = 2-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2\right)\cos nx dx =$$

$$=\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi 3}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos nx dx = 0-\frac{1}{\pi^3}I \text{, де } I=\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos nx dx$$

знайдемо інтегруванням частинами двічі:

$$I=(x-\pi)^2\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\cdot(x-\pi)\,dx =$$

$$=0-\frac{2}{n}\left(-\frac{x-\pi}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx dx\right)=\frac{2}{n^2}2\pi-\frac{2}{n^3}\sin nx\Big|_0^{2\pi}=\frac{4\pi}{n^2}.$$

Маємо: $a_n = 0-\frac{1}{\pi^3}\cdot\frac{4\pi}{n^2} = -\frac{4}{n^2\pi^2}$.

Підставимо отримані коефіцієнти в ряд косинусів і одержимо:

$$1-\frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2 = \frac{2}{3}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos x+\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+...+\frac{1}{n^2}\cos nx+...\right),$$
$$x\in[0,2\pi].$$

<u>Зауваження</u>. Аналіз розв’язання двох останніх прикладів показує:

1) Коли графік функції $f(x)$, $x\in(0,2\pi)$, що розкладається в ряд Фур’є, має на осі Ox центр симетрії – точку O_1 (рис. 1), то, беручи точку O_1 за новий початок координат, маємо $f(-x_1)=-f(x_1)$. Одержана функція $f(x_1)$ – непарна і розкладається в ряд синусів.

2) Коли графік функції $f(x)$, $x \in (0, 2\pi)$, що розкладається в ряд Фур'є, має вісь симетрії (рис. 2), то, взявши цю пряму за нову вісь ординат, а точку O_1 її перетину з Ox за новий початок координат, маємо $f(-x_1) = f(x_1)$. Одержана функція $f(x_1)$ – парна і розкладається в ряд косинусів.

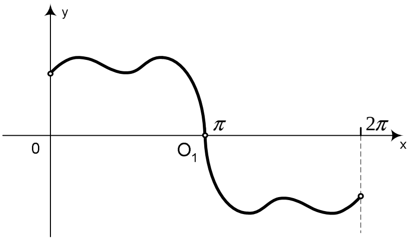


Рис. 1

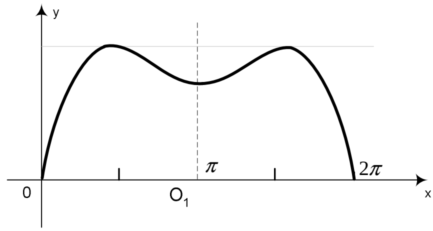
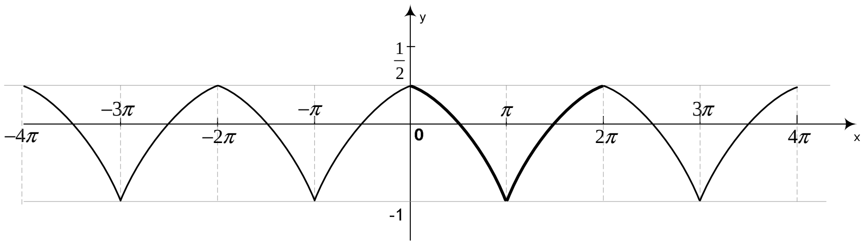


Рис. 2

Приклад 8. Розкласти в ряд Фур'є функцію:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{3}{\pi^2} x^2\right), & \text{якщо} \quad 0 \le x \le \pi, \\ \dfrac{1}{2}\left[1 - \dfrac{3}{\pi^2}(x - 2\pi)^2\right., & \text{якщо} \quad \pi < x \le 2\pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо графік функції $f(x)$ на $[0; 2\pi]$ та її періодичного продовження.



Графік заданої функції $f(x)$, $x \in (0, 2\pi)$, що розкладається в ряд Фур'є, має вісь симетрії. Спираючись на зауваження, запишемо її ряд косинусів $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$. Знайдемо коефіцієнти a_0 і a_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\pi^2}x^2\right)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\pi^2}(x - 2\pi)^2\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(x-\frac{3}{\pi^2}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\left(x-\frac{3}{\pi^2}\frac{(x-2\pi)^3}{3}\right)\Bigg|_{\pi}^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\pi-\frac{\pi^3}{\pi^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left(2\pi-\frac{\pi^3}{\pi^2}-\pi+0\right)=0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{\pi^2}x^2\right)\cos nxdx+\right.$$

$$\left.+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{\pi^2}(x-2\pi)^2\right)\cos nxdx\right]=\frac{1}{2\pi}[I_1+I_2].$$

Знайдемо I_1 та I_2 окремо, використовуючи інтегрування частинами двічі:

$$I_1=\int_0^{\pi}\left(1-\frac{3}{\pi^2}x^2\right)\cos nxdx=\frac{1}{n}\sin nx\cdot\left(1-\frac{3}{\pi^2}x^2\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{6}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sin\pi n\cdot\left(1-3\frac{1}{\pi^2}\pi^2\right)-\sin 0\cdot 1\right)+\frac{6}{\pi^2 n}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\cdot dx\right)=$$

$$=-\frac{6}{\pi^2 n^2}\left((\pi\cos n\pi-0)-\frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=-\frac{6}{\pi n^2}\cos n\pi+0=-6\cdot\frac{1}{\pi n^2}(-1)^n=$$

$$=\frac{6}{\pi n^2}(-1)^{n+1};\ \text{так само}\ I_2=\int_{\pi}^{2\pi}\left(1-\frac{3}{\pi^2}(x-2\pi)^2\right)\cos nx\cdot dx=\frac{6}{\pi n^2}(-1)^{n+1}.$$

Тоді

$$a_n=\frac{1}{2\pi}(I_1+I_2)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{6}{\pi n^2}(-1)^{n+1}+\frac{6}{\pi n^2}(-1)^{n+1}\right)=\frac{1}{\pi^2 n^2}6(-1)^{n+1}.$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в ряд:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi^2 n^2}(-1)^{n+1}\cos nx=\frac{6}{\pi^2}\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx+\ldots\right),\ \text{де}\ x\in[0,2\pi]$$

Якщо в отриманому ряді косинусів покласти $x=0$, то дістанемо:

$$\frac{1}{2}=\frac{6}{\pi^2}\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\ldots\right).$$

Звідси $$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\ldots\ .$$

3.2. Ряд Фур'є періодичної функції з періодом $T = 2l$

3.2.1. Короткі теоретичні відомості

Задачу розвинення періодичної функції $f(x)$ з довільним періодом $T = 2l$, $l > 0$ в ряд Фур'є заміною $x_1 = \pi x / l$ можна звести до розглянутого випадку періодичної функції $f(x_1)$ з періодом $T = 2\pi$.

Ряд Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом $T = 2l$ має вигляд:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

де a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ – коефіцієнти Фур'є, що знаходяться за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx;\; a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\,dx;\; b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$(n = 1, 2, 3, ...).$$

Згідно з теоремою Діріхле, що поширюється на цей випадок, у точках неперервності функції $f(x)$ маємо:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Якщо функція $f(x)$ – парна, то її ряд Фур'є набуває вигляду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad \text{– ряд косинусів,}$$

де $$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Якщо функція $f(x)$ – непарна, то її ряд Фур'є спрощується до вигляду:

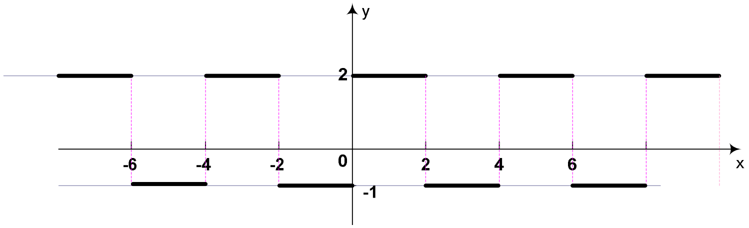
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{– ряд синусів, де } b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[0, l]$, то для розвинення в ряд Фур'є цю функцію довизначають на відрізок $[-l, 0]$ довільним чином, а потім поширюють на всю числову пряму. Як правило, $f(x)$ продовжують парним або непарним способом і розкладають відповідно в ряд косинусів або в ряд синусів.

3.2.2. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію з періодом $T = 2l = 4$, задану на відрізку $[-2,2]$: $f(x) = \begin{cases} -1, \; якщо \quad -2 \le x \le 0, \\ 2, \quad якщо \quad 0 < x \le 2. \end{cases}$

Розв'язання. Побудуємо графік функції $f(x)$



Задана функція – кусково-гладка, тому задовольняє умови теореми Діріхле. Розкладемо її в ряд Фур'є: $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \dfrac{n\pi x}{l} + b_n \sin \dfrac{n\pi x}{l} \right)$.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є, враховуючи що $l = 2$:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0}(-1)\,dx + \int\limits_{0}^{2} 2dx\right) = \frac{1}{2}\left(-x\Big|_{-2}^{0} + 2x\Big|_{0}^{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(-2+4) = 1; \quad a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int\limits_{0}^{2} 2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\sin 0 - \frac{2}{n\pi}\sin n\pi + \frac{4}{\pi n}\sin n\pi - \frac{4}{\pi n}\sin 0\right) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int\limits_{0}^{2} 2\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) - \frac{4}{n\pi}(\cos n\pi - 1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{6}{n\pi} - \frac{6}{n\pi}\cos n\pi\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{3}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad якщо \quad n - парне, \\ \dfrac{6}{n\pi}, \; якщо \quad n - непарне. \end{cases}$$

Отже, $\quad b_{2k-1}=\dfrac{6}{(2k-1)\pi}$ та $b_{2k}=0 \ \ (k=1,2,...)$.

Підставимо отримані коефіцієнти в ряд Фур'є

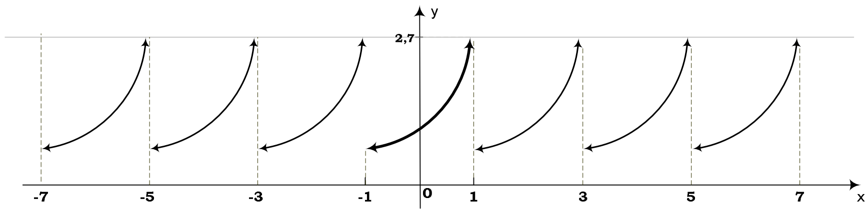
$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}sin\frac{\pi(2k-1)}{2}x.$$

Ця рівність справедлива в точках неперервності функції $f(x)$. У точках розриву першого роду $0;\ \pm 2;\ \pm 4;\ \pm 6,...$ сума ряду $S(x)$ така:

$$S(0)=S(\pm 2)=S(\pm 4)=...=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}.$$

<u>Приклад 2</u>. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=e^x$ в інтервалі $(-1,1)$.

<u>Розв'язання</u>. Функція $f(x)=e^x$ на проміжку $(-1;1)$ неперервна і монотонна. Продовжимо її періодично на всю вісь, тобто розглянемо допоміжну функцію $f_1(x)$ періодичну з періодом $T=2$, значення якої на $(-1;1)$ збігаються зі значеннями функції $f(x)$: $f_1(x)=f(x)$. Одержана функція $f_1(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле. Побудуємо графік функції $f_1(x)$:



Розвинемо функцію $f_1(x)$ в ряд Фур'є. Знайдемо коефіцієнти ряду, враховуючи, що $f_1(x)=f(x)$ на проміжку $(-1,1)$ і $l=1$:

$$a_0=\int_{-1}^{1}f_1(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}e^xdx=e^x\Big|_{-1}^{1}=e^1-e^{-1}.$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f_1(x)cos\,n\pi xdx=\int_{-1}^{1}f(x)cos\,n\pi xdx=\int_{-1}^{1}e^x\,cos\,n\pi xdx=$$

$$=\frac{cos\,n\pi}{1+n^2\pi^2}\left(e^1-e^{-1}\right)=\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\left(e-e^{-1}\right);$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f_1(x)sin\,n\pi xdx=\int_{-1}^{1}f(x)sin\,n\pi xdx=\int_{-1}^{1}e^x\,sin\,n\pi xdx=$$

$$=-\frac{n\pi\cos n\pi}{1+n^2\pi^2}\left(e^1-e^{-1}\right)=\frac{(-1)^n n\pi}{1+n^2\pi^2}\left(e-e^{-1}\right).$$

Тут використано інтегрування частинами.

Підставимо знайдені коефіцієнти a_n та b_n в ряд Фур'є і дістанемо:

$$S(x)=\frac{e^1-e^{-1}}{2}+\left(e^1-e^{-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^{n+1}\sin n\pi x}{1+n^2\pi^2}\right),$$

$S(x)=f(x)=e^x$ на проміжку $(-1,1)$, де $f(x)=e^x$ неперервна.

На кінцях інтервалу $S(\pm1)=\dfrac{f(-1+0)+f(1-0)}{2}=\dfrac{e^1-e^{-1}}{2}$

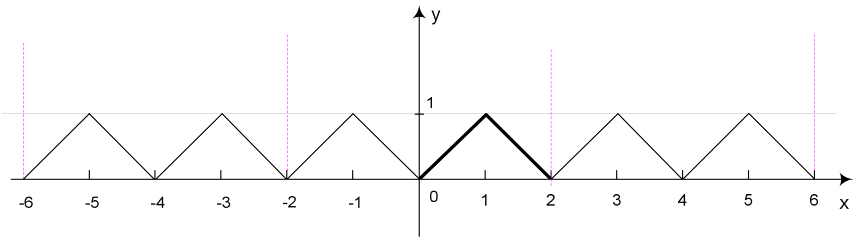
Отже, маємо: $e^x=\left(e^1-e^{-1}\right)\left(\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(\cos n\pi x-\sin n\pi x)\right)$, $-1<x<1$.

<u>Приклад 3</u>. Розкласти функцію $f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,1]\\ 2-x, & x\in(1,2)\end{cases}$ в ряд Фур'є на проміжку $(0;2)$: а) за косинусами; б) за синусами.

<u>Розв'язання</u>. а) Розкладання в ряд косинусів.

Продовжимо функцію $f(x)$ на проміжок $(-2;0)$ парним чином. Одержану функцію продовжимо на всю числову вісь з періодом $T=2l=4$.

Побудуємо функцію $f(x)$ та її продовження:



При $l=2$ ряд косинусів має вигляд: $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{2}$.

Обчислимо коефіцієнти:

$$a_0=\frac{1}{2}\cdot2\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2(2-x)\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}+4-2-2+\frac{1}{2}=1;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot2\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx.$$

Знайдемо кожний інтеграл окремо, використовуючи інтегрування частинами:

$$\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx = x\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}+$$

$$+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2 n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos 0\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2 n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right);$$

$$\int_1^2 (2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = (2-x)\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 + \frac{2}{\pi n}\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 = -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

Тоді:

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{\pi^2 n^2}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos n\pi+$$

$$+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi}{2}=\frac{8}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi+1).$$

Оскільки $\cos\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & \textit{якщо} \quad n-\textit{непарне число}\\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \textit{якщо} \quad n-\textit{парне число}\end{cases}$

і $\quad \cos n\pi+1=(-1)^n+1=\begin{cases}0, & \textit{якщо} \quad n-\textit{непарне число}\\ 2, & \textit{якщо} \quad n-\textit{парне число}\end{cases}$

то

$$a_{2k}=\frac{8(-1)^k}{\pi^2(2k)^2}-\frac{8}{\pi^2(2k)^2}=\frac{8}{\pi^2(2k)^2}\left((-1)^k-1\right)=\frac{2}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k-1\right)=$$

$$=\begin{cases}0, & \textit{якщо} \quad k=2m\\ -\dfrac{4}{\pi^2(2m-1)^2}, & \textit{якщо} \quad k=2m-1\end{cases}$$

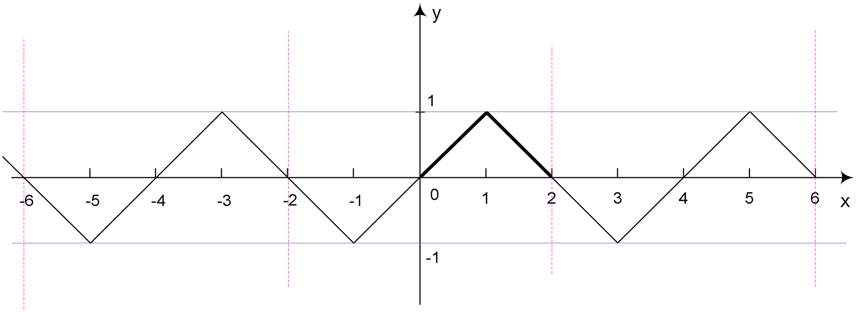
Підставимо знайдені коефіцієнти в ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)\pi x, \quad x\in(0,2).$$

б) Розкладання в ряд синусів.

Продовжимо функцію $f(x)$ на проміжок $(-2,0)$ непарним чином. Одержану функцію продовжимо періодично на всю числову вісь з періодом

$T=2l=4$. Побудуємо функцію $f(x)$ та її періодичне продовження.



При $l=2$ ряд синусів має вигляд: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$.

Обчислимо коефіцієнти:

$$b_n=\frac{2}{2}\int\limits_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\int\limits_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int\limits_1^2(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx.$$

Знайдемо кожний інтеграл окремо, використовуючи інтегрування частинами:

$$\int\limits_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=x\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^1+\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{n\pi}{2};$$

$$\int\limits_1^2(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=(2-x)\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_1^2-\int\limits_1^2\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_1^2=\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{\pi^2n^2}\sin n\pi+\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{n\pi}{2}..$$

Тоді

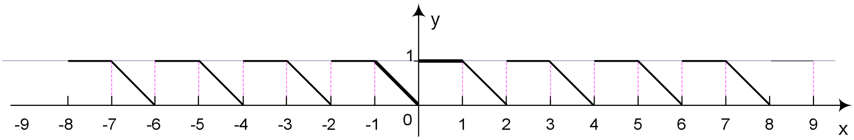
$$b_n=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{\pi^2n^2}\sin n\pi+\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\frac{n\pi}{2}=$$

$=\frac{8}{\pi^2n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$. Оскільки $\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad n=2k\\ (-1)^{k-1}, & \text{якщо} \quad n=2k-1\end{cases}$, то

$b_{2k}=0$ і $b_{2k-1}=\frac{8(-1)^{k-1}}{\pi^2(2k-1)^2}$. Отже,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2},\quad x\in(0,2).$$

Приклад 4. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$, задану графічно



Розв'язання. Перейдемо до аналітичного задання функції $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}-x, \ \text{якщо} \ \ -1\le x\le 0\\ 1, \ \text{якщо} \ \ 0<x\le 1\end{cases}$$

Функція $f(x)$ періодична з періодом $T=2l=2$, тобто $l=1$. Її ряд Фур'є має вигляд: $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x\right)$.

Обчислимо коефіцієнти:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\int_{-l}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{1}1\cdot dx=-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0}+x\Big|_0^1=\frac{1}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\int_{-1}^{0}(-x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx+\int_{0}^{1}1\cdot\cos\frac{n\pi x}{1}dx=$$

$$=-\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x\Bigg|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x dx\right)+\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Bigg|_0^1=$$

$$=-\left(\frac{1}{n\pi}\sin(-n\pi)+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Bigg|_{-1}^{0}\right)+\frac{1}{n\pi}\sin n\pi-\frac{1}{n\pi}\sin 0=$$

$$=-\frac{1}{n^2\pi^2}(\cos 0-\cos n\pi)=-\frac{1}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right);$$

оскільки $1-(-1)^n=\begin{cases}0, & \text{якщо} \ \ n-\text{парне число}\\ 2, & \text{якщо} \ \ n-\text{непарне число}\end{cases}$

то $a_{2k}=0$ і $a_{2k-1}=\dfrac{-2}{\pi^2(2k-1)^2}$;

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\int_{-1}^{0}(-x)\sin n\pi x dx+\int_{0}^{1}1\sin n\pi x dx=$$

$$=-\left(x\cdot\frac{-1}{n\pi}\cos\pi n x\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{\pi n}\int_{-1}^{0}\cos n\pi x dx\right)-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\Bigg|_0^1=$$

$$=-\left(0-\frac{1}{n\pi}\cos\pi n+\frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Bigg|_{-1}^{0}\right)-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi+\frac{1}{n\pi}\cos 0=$$

$$=+\frac{1}{n\pi}\cos n\pi+0-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi+\frac{1}{n\pi}=\frac{1}{n\pi}.$$

Підставимо отримані коефіцієнти в ряд Фур'є і дістанемо:

$$f(x)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{\pi^2(2n-1)^2}\cos n\pi x+\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right)=$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos n\pi x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}.$$

Сума ряду співпадає з функцією $f(x)$ у всіх точках неперервності. У точках розриву сума ряду така: $S(0)=S(\pm 2)=\frac{f(-0)+f(+0)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$.

3.3. Задачі для самостійної роботи

Завдання. У варіантах №1 – №9 розкласти в ряд Фур'є задані періодичні з періодом 2π функції. Навести графіки цих функцій.

У варіантах №10 – №14 розкласти в ряд косинусів функції, задані на вказаних проміжках. Навести графіки продовжених періодичних функцій.

У варіантах №15– №20 розкласти в ряд синусів функції, задані на вказаних проміжках. Навести графіки продовжених періодичних функцій.

У варіантах №21 – №26 розкласти в ряд Фур'є задані періодичні з періодом $T=2l$ функції. Навести графіки цих функцій.

№	Завдання	Відповідь
1	$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\pi,0)\\ 1, & x\in(0,\pi)\end{cases}$	$f(x)=\frac{4}{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$
2	$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\pi,0)\\ 3, & x\in(0,\pi)\end{cases}$	$f(x)=2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$
3	$f(x)=x-\pi,\ x\in(-\pi,\pi)$	$f(x)=-\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$
4	$f(x)=x+\pi,\ x\in(-\pi,\pi)$	$f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$
5	$f(x)=\lvert x\rvert,\ x\in(-\pi,\pi)$	$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n-1)^2}$
6	$f(x)=\begin{cases}\pi, & x\in(-\pi,0)\\ \pi-x, & x\in(0,\pi)\end{cases}$	$f(x)=\frac{3}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)$

7	$f(x)=\frac{\pi-x}{2},\ x\in(0,2\pi)$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$
8	$f(x)=x^3,\ x\in(-\pi,\pi)$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi}{n}\right)\sin nx$
9	$f(x)=e^x-1,\ x\in(0,2\pi)$	$f(x)=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n\sin nx}{1+n^2}\right)\right]-1$
10	$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},\ x\in(0,\pi)$	$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$
11	$f(x)=\begin{cases}x, & x\in(0;\pi/2)\\ \pi-x, & x\in(\pi/2;\pi)\end{cases}$	$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$
12	$f(x)=\sin\frac{x}{2},\ x\in(0,\pi)$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{4n^2-1}$
13	$f(x)=1-x,\ x\in(0,1)$	$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}$
14	$f(x)=x,\ \ x\in(0,2)$	$f(x)=\frac{2}{2}-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$
15	$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},\ x\in(0,\pi)$	$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}$
16	$f(x)=x^2,\ \ x\in(0,\pi)$	$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}\left((-1)^n-1\right)\right]\sin nx$
17	$f(x)=x(\pi-x),\ x\in(0,\pi)$	$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$
18	$f(x)=x(2-x),\ x\in(0,2)$	$f(x)=\frac{32}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2}$
19	$f(x)=x^2,\ \ x\in(0,1)$	$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3\pi^2}\right)\sin\pi nx$
20	$f(x)=x,\ \ x\in(0,2)$	$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$
21	$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-2,0)\\ 2, & x\in[0,2)\end{cases}\quad l=2$	$f(x)=1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2}$
22	$f(x)=x,\ x\in(-1,1),\ l=1$	$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x$

23	$f(x)=\|x\|,\ x\in(-2,2),\ l=2$	$f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2}$
24	$f(x)=\begin{cases}-x, & x\in(-2,0)\\ 0, & x\in[0,2)\end{cases}$ $l=2$	$f(x)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}-$ $-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2}$
25	$f(x)=4-x^2,\ x\in(-2,2),$ $l=2$	$f(x)=\frac{8}{3}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$
26	$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-1,0)\\ 1-x, & x\in[0,1)\end{cases}$ $l=1$	$f(x)=\frac{3}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}+$ $+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin n\pi x}{n}$

Список літератури

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического ана¬лиза. – М.: Наука, 1985. – 383 с.

2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс матема¬ти¬чес¬кого ана¬лиза. – СПб.: Лань, 2003. – 736 с.

3. Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. За ред. В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К.: А.С.К., 2003. – 479 с.

4. Вища математика: Збірник задач: У 2 ч. / За заг. ред. П.П. Овчинников. – К.: Техніка, 2003. Ч.2 / П.П. Овчин¬ников, П.С. Кропив’янський, С.П. Полушкін та ін. – 2003. – 375 с.

5. Вища математика. Практикум / В.Г. Кривуца, В.В. Бар¬ковсь¬кий, Н.В. Барковська. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.

6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая мате¬матика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: Наука, 1997. Ч.2 – 415 с.

7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

8. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1994. – 206 с.

9. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – Донецьк: Стал¬кер, 2003. – 495 с.

10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчис¬ление. В 2 т. Т.2 – М.: Наука, 1985. – 560 с.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

РЯДИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Методичні рекомендації та дидактичні матеріали до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології” спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”

Укладачі:

Степан Олександрович Станішевський,
Сергій Михайлович Мордовцев,
Анатолій Вікторович Якунін,
Людмила Олександрівна Бистрова,
Валентина Семенівна Ситникова

Відповідальний за випуск: М.Й. Кадець

Редактор: М.З. Аляб’єв

План 2009, поз. 190 М

Підп. до друку 25.12.2009 р.	Формат 60x84 1/16
Папір офісний	Друк на ризографі
Умовн.-друк.арк. 7,4	Обл.-вид.арк. 8,1
Тираж 100 прим.	Замовл. №

ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ
ХНАМГ, 61002, Харків, вул. Революції, 12