

**С.О. Станішевський,
С.М. Мордовцев,
А.В. Якунін,
Л.О. Бистрова,
В.С. Ситникова**

Р Я Д И ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Харків – ХНАМГ – 2009

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

**С.О. Станішевський, С.М. Мордовцев,
А.В. Якунін, Л.О. Бистрова, В.С. Ситникова**

Р Я Д И ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Методичні рекомендації та дидактичні матеріали до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології” спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”

Харків – ХНАМГ – 2009

Ряди та їх застосування: Методичні рекомендації та дидактичні матеріали до самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів 2 курсу денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050701 “Електротехніка та електротехнології” спеціальностей “Електротехнічні системи електроспоживання” і “Світлотехніка і джерела світла”. / Укл.: С.О. Станішевський, С.М. Мордовцев, А.В. Якунін, Л.О. Бистрова, В.С. Ситникова; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2009. – 123 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. А.І. Колосов

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 3 від 24.10.2009 р.

Розділ 1. ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

1.1. Загальні поняття. Необхідна ознака збіжності

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$. Вираз $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ є його n -ою *частковою сумою*. Границя послідовності часткових сум $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ при $n \rightarrow \infty$ називається *сумою* S ряду, тобто $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Якщо ряд має скінченну суму, то він *збіжний*. Якщо вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то ряд *розбіжний*.

Для збіжності ряду необхідно, щоб його загальний член прямував до нуля, коли n нескінченно зростає. Тобто, *якщо ряд збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$* . (Необхідна ознака збіжності числового ряду).

Але не навпаки: коли $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то не можна зробити висновок, що ряд обов'язково збігається: він може, як збігатись, наприклад $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, так і розбігатись, наприклад $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, хоча як $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2 = 0$, так і $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. Ця ознака є лише необхідною, але не є достатньою для збіжності.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається. (Достатня ознака розбіжності числового ряду).

1.2. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n-3}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+2n+5}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{\sqrt{n}+4} \\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}}; & \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+2}; & \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n; \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2}; \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{n}{n^2+1}; \quad \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{2n-3} \right)^n; \\
 \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n}; \quad \text{і) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{n+1}; \quad \text{ї) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-3}{n+1}; \\
 \text{й) } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg} \frac{n}{n^3+1}; \quad \text{к) } \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right); \quad \text{л) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{n^2+n-1}{n^2+1}}.
 \end{aligned}$$

Розв'язання.

а) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності рядів:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+1/n}{2-3/n} = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

б) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2+2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3+2/n+5/n^2} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

в) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{\sqrt{n}+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-2/n}{1/\sqrt{n}+4/n} = \left| \frac{3}{0} \right| = \infty \neq 0.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.

г) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2+1/n}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Отже, даний ряд розбігається.

д) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/n+2/n^3} = \left| \frac{1}{0} \right| = \infty \neq 0.$$

Отже, даний ряд розбігається.

е) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{(n/3) \cdot 3} = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{n/3} \right)^3 = e^3 \neq 0. \end{aligned}$$

Отже, даний ряд розбігається.

є) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 1/n^2}{1/n^2} = \left| \begin{array}{l} \alpha = 1/n^2 \rightarrow 0 \\ \text{при } n \rightarrow \infty \end{array} \right| = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Отже, даний ряд розбігається.

ж) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{tg} \frac{n}{n^2+1} = \left| \begin{array}{l} \alpha = n/(n^2+1) \rightarrow 0 \\ \text{при } n \rightarrow \infty; \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha \end{array} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Ряд розбігається.

з) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{2n-3} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+2/n}{2-3/n} \right)^n = \left| \left(\frac{3}{2} \right)^{+\infty} \right| = +\infty \neq 0.$$

Отже, даний ряд розбігається.

и) Застосуємо необхідну ознаку:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} 1/n}{1/n} = 1 \neq 0.$$

(Оскільки $\alpha = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \alpha}{\alpha} = 1$).

Необхідна ознака не виконується. Ряд розбігається.

і) За необхідною ознакою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arcsin} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arcsin} \frac{1}{1+1/n} = \operatorname{arcsin} 1 = \frac{\pi}{2} \neq 0.$$

Даний ряд розбігається.

і) Необхідна ознака збіжності не виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 3/n^2}{1/n + 1/n^2} = \left| \frac{4}{0} \right| = \infty \neq 0.$$

Отже, даний ряд розбігається.

й) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \operatorname{arctg} \frac{n}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(n/(n^3 + 1))}{1/n^2} = \\ &= \left| \operatorname{arctg} \frac{n}{n^3 + 1} \sim \frac{n}{n^3 + 1} \text{ при } n \rightarrow \infty \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/(n^3 + 1)}{1/n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1/n^3} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Ряд розбігається.

к) Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} = 1 \neq 0.$$

Ряд розбігається.

л) За необхідною ознакою збіжності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1 + 1/n - 1/n^2}{1 + 1/n^2}} = \sqrt[3]{1} = 1 \neq 0.$$

Необхідна ознака не виконується. Ряд розбігається.

1.3. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n-4}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^2 - 2n + 7}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin \frac{n^2}{n^4 + 3}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln \frac{n^2 + 1}{n^2}$

3	$\sum_{n=1}^{\infty} n \ln(1 + 4/n)$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{3/n} - 1)$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\frac{2n^3 + n - 3}{n^3 + 5}}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg} \frac{2}{n^3}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \sin \frac{n^2}{n^4 + 1}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{3n + 4}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n + 1}{3n - 2} \right)^n$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^3 + 3}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + 7}{n} \right)^{n+1}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{3}{n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 + 1}{3n - 4}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{2n + 3}{2n + 5}$

1.4. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності *знакододатних числових рядів* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n \geq 0$.

1.4.1. Ознаки порівняння

При застосуванні ознак порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, що досліджується на збіжність, порівнюється з *еталонним рядом* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, про який відомо збігається він чи розбігається.

Перша (основна) ознака порівняння.

а) Нехай маємо збіжний еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причому $a_n \leq b_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ теж збігається.

(Якщо $a_n > b_n$, то жодних висновків робити не можна).

б) Нехай маємо розбіжний еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причому $a_n \geq b_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ теж розбігається. (Якщо $a_n < b_n$, то ніяких висновків робити не можна).

Таким чином, з розбіжним рядом порівнюємо «у бік більше»; а зі збіжним рядом – «у бік менше».

Друга (гранична) ознака порівняння.

$$\text{Якщо} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \quad (l \neq 0, l \neq \infty), \quad (*)$$

то обидва ряди поводять себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються чи розбігаються.

Співвідношення (*) говорить про те, що загальні члени a_n і b_n цих рядів є нескінченно малими одного порядку. Це треба мати на увазі також при використанні першої ознаки, тобто підбирати для порівняння еталонний ряд, загальний член якого b_n є нескінченно малою того ж порядку, що і загальний член a_n ряду, що досліджується: $a_n \sim b_n$.

За еталонні ряди часто приймають:

а) **узагальнений гармонічний ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, що збігається, коли $p > 1$, і розбігається при $p \leq 1$;

б) **геометричний ряд** (ряд, складений із членів геометричної прогресії) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$, що збігається при $q < 1$ і розбігається при $q \geq 1$.

1.4.2. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 4}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 1}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n + 3}; \\ \text{д) } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 4}{4n^6 - 2n^2 + 5n}; \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+3)}}; \quad \text{є) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{3n^5 + 1}}; \end{aligned}$$

$$\text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+3/n); \text{ з) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2+3}; \text{ и) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin(1/n^2);$$

$$\text{і) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3^n+2)}.$$

Розв'язання. а) Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1+4/n^2} = 0.$$

Застосуємо достатню граничну ознаку порівняння. Оскільки $a_n = \frac{n}{n^2+4} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} = b_n$, то порівнюємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+4/n^2} = 1.$$

Одержана границя є скінченною і відмінною від нуля. Отже ці ряди поведуть себе однаконо, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ також розбігається.

б) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1+4/n^2} = 0.$$

Застосуємо основну ознаку порівняння з більшим збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: $a_n = \frac{n}{n^3+4}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$. $\frac{n}{n^3+4} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Оскільки $a_n < b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+4}$ також збігається.

в) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2-4n+1} = 0.$$

Застосуємо граничну ознаку збіжності, порівнюючи даний ряд

зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 4/n + 1/n^2} = 1 \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

Ряди поведуть себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

г) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}/n}{n/n + 3/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1 + 3/n} = 0.$$

Оскільки $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з розбіжним узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+3/n} = 1 \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

Ряди поведуть себе однаково щодо збіжності. Таким чином, даний ряд розбігається.

д) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4}{4n^6 - 2n^2 + 5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^3 + 4/n^6}{4 - 2/n^4 + 5/n^5} = 0.$$

Оскільки $a_n = \frac{n^3 + 4}{4n^6 - 2n^2 + 5n} \sim \frac{n^3}{4n^6} \sim \frac{1}{n^3} = b_n$, застосуємо граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$, що збігається:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(n^3 + 4)}{4n^6 - 2n^2 + 5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 4n^2}{4n^5 - 2n + 5} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4/n^3}{4 - 2/n^4 + 5/n^5} = \frac{1}{4} \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отже, ці ряди поведуть себе однаково щодо збіжності, тобто

даний ряд теж збігається.

е) Необхідна ознака збіжності виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+3)}} = \left| \frac{1}{\infty} \right| = 0.$$

Оскільки $a_n = 1/\sqrt[3]{n^3 + 3n^2} \sim 1/\sqrt[3]{n^3} = 1/n = b_n$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3 + 3n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 3/n}} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

Оскільки гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ розбігається, то і даний ряд теж розбігається.

є). Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{3n^5 + 1}} = \left| \frac{1}{\infty} \right| = 0.$$

Оскільки $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{3n^5 + 1}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{3n^5}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}} = \frac{1}{n^{5/4}} = b_n$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{5/4}$. Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ збігається при $p > 1$. Оскільки $5/4 > 1$, то еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{5/4}$ – збіжний.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{5/4}}{\sqrt[4]{3n^5 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{n^5}{3n^5 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{1}{3 + 1/n^5}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Тобто a_n і b_n є нескінченно малі одного порядку, два ряди поведуть себе однаково щодо збіжності. Отже, даний ряд збігається.

ж) Відомо, що $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1/\alpha) \ln(1 + \alpha) = 1$. Тому для даного ряду можна застосувати граничну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \ln(1+3/n), \quad b_n = 1/n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3/n)}{1/n} = \\
 &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3/n)}{3/n} = \left| \alpha = 3/n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \right| = \\
 &= 3 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 3 \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}. \quad \text{Ряд розбігається.}
 \end{aligned}$$

з) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1/n}{1+3/n^2} = \sin 0 = 0.$$

Порівняємо даний ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. За граничною ознакою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n/(n^2+3))}{1/n} = 1 \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}. \quad \text{Ряд розбігається.}$$

и) Необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin(1/n^2) = \arcsin 0 = 0.$$

Порівняємо цей ряд за граничною ознакою порівняння зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(1/n^2)}{1/n^2} = 1 \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}$.

Отже, даний ряд збігається.

i) Очевидно, необхідна ознака виконується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(3^n+2)} = 0.$$

Застосуємо основну ознаку порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} (1/3)^n$.

Цей ряд збігається, як складений з членів геометричної прогресії зі знаменником $q = 1/3 < 1$. Справедлива нерівність

$$a_n = \frac{1}{n(3^n+2)} \leq \frac{1}{3^n+2} \leq \frac{1}{3^n} = b_n,$$

тобто члени даного ряду не перевищують членів збіжного еталонного ряду. Таким чином, цей ряд збігається.

1.4.3. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(5^n + 2)}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 9}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 - 5}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n - 3}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{n^2}{n^3 + 1}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 3}{5n^6 + n^2 - 4n + 1}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n + 7}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n}{n^3 + 8}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2(n+5)}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 5/n^2)$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^6 + 7}}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n + 3n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n + 3^n}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^3}{n^5 + 4}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{2^n}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^2}$

1.4.4. Інтегральна ознака Коші

Ця ознака заснована на порівнянні числового ряду з невласним інтегралом.

Якщо функція $f(x)$ неперервна, монотонно спадає і додатна при $x \geq a$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$

а) збігається, коли збігається невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, тобто якщо він дорівнює деякій скінченній величині;

б) розбігається, коли вказаний інтеграл розбігається, тобто $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

На практиці функцію $f(x)$ одержуємо, замінюючи у виразі загального члена a_n ряду дискретну змінну n на неперервну змінну x , причому нижня межа a дорівнює початковому значенню n для даного ряду.

Наприклад, $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$. Тоді $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$, $a = 2$, і

будемо розглядати невласний інтеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

1.4.5. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{1+n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n^2}$.

Розв'язання. а) Застосуємо достатню інтегральну ознаку Коші.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[2; +\infty)$, причому $f(n) = a_n$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} f(x)dx &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{d \ln x}{\sqrt{\ln x}} = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\ln x} \Big|_x^A = 2 \lim_{A \rightarrow +\infty} (\sqrt{\ln A} - \sqrt{\ln 2}) = +\infty. \end{aligned}$$

Оскільки цей невласний інтеграл розбігається, то даний ряд теж розбігається.

б) Застосуємо інтегральну ознаку Коші, вводячи функцію $f(x) = 1/(x \ln^4 x)$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[2; +\infty)$, причому $f(n) = a_n$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} f(x) dx &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^4 x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \ln^4 x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{d \ln x}{\ln^4 x} = \\
&= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \ln^{-4} x d(\ln x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{\ln^{-3} x}{-3} \right|_2^A = -\frac{1}{3} \lim_{A \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{\ln^3 x} \right|_2^A = \\
&= -(1/3) \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(1/\ln^3 A - 1/\ln^3 2 \right) = 1/(3 \ln^3 2) \neq \infty.
\end{aligned}$$

Отже, цей невластний інтеграл збігається, а тому даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 n}$ теж збігається.

в) Оскільки $(\arctg x)' = 1/(1+x^2)$, зручно застосувати інтегральну ознаку Коші. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\arctg x}{1+x^2}$, що на інтервалі $[1; +\infty)$ задовольняє умовам цієї ознаки. Дослідимо невластний інтеграл:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{\arctg x}{1+x^2} dx = \\
&= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \arctg x d(\arctg x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \arctg^2 x \Big|_1^A \right) = \\
&= 1/2 \cdot \lim_{A \rightarrow \infty} (\arctg^2 A - \arctg^2 1) = 1/2 \cdot (\arctg^2 \infty - \arctg^2 1) = \\
&= 1/2 \cdot \left((\pi/2)^2 - (\pi/4)^2 \right) = 3\pi^2/32 \neq \infty.
\end{aligned}$$

Невластний інтеграл збігається, тому даний ряд теж збігається.

г) Необхідна ознака виконується:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot e^{-n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{n^2}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n'}{(e^{n^2})'} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{n^2} \cdot 2n} = \left| \frac{1}{\infty} \right| = 0.
\end{aligned}$$

Застосуємо інтегральну ознаку Коші, вводячи функцію $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$, що на інтервалі $[1; +\infty)$ відповідає умовам цієї

ознаки. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A e^{-x^2} d(-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} e^{-x^2} \Big|_1^A = -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} (e^{-A^2} - e^{-1}) = -\frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{2e} \neq \infty.$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то і даний ряд теж збігається.

1.4.6. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n^3}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg 3n}{1+9n^2}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^2 n}{1+n^2}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\ln^4(3n+2)}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(3n-1)}{(3n-1)}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)\ln(4n+1)}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+4n^2)\arctg 2n}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{1/n}}{n^2}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n^2}}{n^3}$

1.4.7. Ознака Даламбера

Ця достатня ознака в своїй основі має порівняння даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$ ряд розбігається, а при $q = 1$ не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.

Щоб не натрапити на останній випадок невизначеності, ознаку Даламбера застосовують до таких рядів, загальний член яких має в своєму складі факторіал або показникову функцію від n , наприклад

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{2n+1}} \text{ або } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{(3n-1)!}.$$

Зауважимо, що a_{n+1} одержуємо з a_n , замінюючи n на $n+1$.

Наприклад, якщо $a_n = \frac{n^2}{3^{2n+1}}$, то $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{3^{2(n+1)+1}} = \frac{(n+1)^2}{3^{2n+3}}$, якщо

$$a_n = \frac{4n-3}{(3n-1)!}, \text{ то } a_{n+1} = \frac{4(n+1)-3}{(3(n+1)-1)!} = \frac{4n+1}{(3n+2)!}.$$

1.4.8. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{\sqrt[3]{n^2 \cdot 4^n}}$;
д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 5^n}{4^{n-2}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^{n+1}}$; є) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^{n-1}}{n^2+3}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin \frac{1}{3^n}$;
з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n(2n-1)}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n-1}}{(2n-3)!}$; і) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arctg \frac{n}{3^n}$; ї) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n-1}}{(n+1)!}$;
й) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{e^n}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n!}$; л) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}$.

Розв'язання. а) У загальний член цього ряду входить показ-

никова функція 5^n , тому доцільно застосувати достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{3n+2}{5^n}; a_{n+1} = \frac{3(n+1)+2}{5^{n+1}} = \frac{3n+5}{5^{n+1}}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+5) \cdot 5^n}{5^{n+1}(3n+2)} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{3n+2} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+5/n}{3+2/n} = \frac{1}{5} < 1.$$

Ряд збігається.

б) У загальний член цього ряду входить факторіал $n!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n!}{n^2+2}, a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^2+2}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n^2+2)}{((n+1)^2+2)n!} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n^2+2n+2}{n^2+2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n+2/n^2+2/n^3}{1/n+2/n^2+3/n^3} = \left| \frac{1}{0} \right| = \infty > 1.$$

Ряд розбігається.

в) У загальний член цього ряду входить $(2n)!$, тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n^2}{(2n)!}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(2(n+1))!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)!}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2(2n)!}{(2n+2)!n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \times$$

$$\times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$$= 1 \cdot 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

г) Загальний член цього ряду можна записати у вигляді

$$a_n = \frac{5n+1}{\sqrt[3]{n^2} \cdot 4^{n/3}}. \quad \text{До його складу входить показникова функція}$$

$$4^{n/3}. \quad \text{Тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:}$$

$$a_{n+1} = \frac{5(n+1)+1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} \cdot 4^{(n+1)/3}}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+6)\sqrt[3]{n^2} \cdot 4^{n/3}}{\sqrt[3]{(n+1)^2} \cdot 4^{(n+1)/3} (5n+1)} = \frac{1}{4^{1/3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+6}{5n+1} \times \\
&\times \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+2n+1}} = 4^{-1/3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+6/n}{5+1/n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{1+2/n+1/n^2}} = \\
&= 4^{-1/3} \cdot 1 \cdot \sqrt[3]{1} = 4^{-1/3} < 1. \quad \text{Ряд збігається.}
\end{aligned}$$

д) У загальному члені ряду є показникові функції 5^n і 4^{n-2} , тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n \cdot 5^n}{4^{n-2}} = \frac{n \cdot 5^n}{4^n \cdot 4^{-2}} = n \cdot (5/4)^n \cdot 4^2 = 16n \cdot (5/4)^n; \\
a_{n+1} &= 16(n+1)(5/4)^{n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16(n+1)(5/4)^{n+1}}{16n(5/4)^n} = \\
&= (5/4) \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n) = 5/4 > 1. \quad \text{Ряд розбігається.}
\end{aligned}$$

е) До загального члену ряду входить показникова функція 3^{n+1} , тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^4}{3^{n+1}}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^4}{3^{n+2}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 3^{n+1}}{3^{n+2} \cdot n^4} = \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^4 = \frac{1}{3} < 1. \quad \text{Ряд збігається.}
\end{aligned}$$

є) У загальному члені ряду є показникова функція 2^{n-1} , тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(n+1)2^{n-1}}{n^2+3}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+2)2^n}{(n+1)^2+3}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot 2^n (n^2+3)}{((n+1)^2+3)(n+1) \cdot 2^{n-1}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{(n+1)^2+3} = \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2/n}{1+1/n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3/n^2}{(1+1/n)^2+3/n^2} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 > 1.
\end{aligned}$$

Ряд розбігається.

ж) Застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$a_n = n \cdot \arcsin(1/3^n); \quad a_{n+1} = (n+1) \cdot \arcsin(1/3^{n+1}).$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \arcsin(1/3^{n+1})}{n \arcsin(1/3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \times \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin(1/3^{n+1})}{\arcsin(1/3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/3^{n+1}}{1/3^n} = \\ &= \left| \arcsin \alpha \sim \alpha \text{ при } \alpha \rightarrow 0 \right| = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1. \quad \text{Ряд збігається.} \end{aligned}$$

з) У загальному члені ряду є показникова функція 10^n і факторіал $n!$, тому можемо застосувати ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n!}{10^n(2n-1)}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}(2(n+1)-1)} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}(2n+1)}; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot 10^n(2n-1)}{10^{n+1}(2n+1)n!} = \frac{1}{10} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n-1)}{2n+1} = \\ &= \frac{1}{10} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+1/n)(2-1/n)}{2/n+1/n^2} = \left| \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{0} \right| = \infty > 1. \quad \text{Ряд розбігається.} \end{aligned}$$

и) У загальному члені ряду є показникова функція 3^{n-1} і факторіал $(2n-3)!$. Отже, застосуємо ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n \cdot 3^{n-1}}{(2n-3)!}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1) \cdot 3^n}{(2(n+1)-3)!} = \frac{(n+1) \cdot 3^n}{(2n-1)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n (2n-3)!}{(2n-1)! \cdot n \cdot 3^{n-1}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n-3)!}{n(2n-3)!(2n-2)(2n-1)} = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-2)(2n-1)} = 3 \cdot 1 \cdot 0 = 0 < 1. \end{aligned}$$

Ряд збігається.

і) У складі загального члена ряду є показникова функція 3^n . Отже, можемо застосувати ознаку Даламбера:

$$a_n = n^2 \cdot \arctg(n/3^n); \quad a_{n+1} = (n+1)^2 \cdot \arctg((n+1)/3^{n+1});$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \operatorname{arctg}((n+1)/3^{n+1})}{n^2 \operatorname{arctg}(n/3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \\ \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}((n+1)/3^{n+1})}{\operatorname{arctg}(n/3^n)}.$$

За допомогою правила Лопітала знаходимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n \ln 3} = 0.$$

За першою чудовою границею $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \alpha}{\alpha} = 1$, тобто

$\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$. Тоді $\operatorname{arctg} \frac{n}{3^n} \sim \frac{n}{3^n}$ при $\alpha = \frac{n}{3^n} \rightarrow 0$ і

$\operatorname{arctg} \frac{n+1}{3^{n+1}} \sim \frac{n+1}{3^{n+1}}$ при $\alpha = (n+1)/3^{n+1} \rightarrow 0$. Еквівалентні нескін-

ченно малі у відношенні замінюються одна на іншу. Таким чином,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}((n+1)/3^{n+1})}{\operatorname{arctg}(n/3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)/3^{n+1}}{n/3^n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3}.$$

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$. Ряд збігається.

ї) У загальному члені ряду є факторіал $(n+1)!$, а також показникова функція 5^{2n-1} , тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{5^{2n-1}}{(n+1)!}, \quad a_{n+1} = \frac{5^{2(n+1)-1}}{(n+1+1)!} = \frac{5^{2n+1}}{(n+2)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{2n+1}(n+1)!}{(n+2)5^{2n-1}} = 25 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)} = 25 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = \\ = 25 \cdot 0 = 0 < 1. \text{ Ряд збігається.}$$

й) У загальному члені ряду є показникова функція e^n , тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{n+1}{e^n}, \quad a_{n+1} = \frac{n+2}{e^{n+1}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)e^n}{e^{n+1} \cdot (n+1)} =$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2/n}{1+1/n} = \frac{1}{e} < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

к) У загальному члені є факторіал $n!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{3n-1}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{3n+2}{(n+1)!};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)n!}{(n+1)!(3n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{(3n-1)(n+1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3/n + 2/n^2}{(3-1/n)(1+1/n)} = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

л) Застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}, \quad a_{n+1} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)(2n+3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)(3n+2)}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)(2n+3) \cdot 2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)(3n+2) \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3/n}{3+2/n} = \frac{2}{3} < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

1.4.9. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{7^n}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^3+1}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(3n)!}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arctg \frac{1}{5^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2) \cdot 3^n}{6^{n+1}}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^{n+2}}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+4}}{n^2+5}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-4}{\sqrt[3]{n \cdot 5^{n-1}}}$

5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{4^n(3n+1)}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^{n+3}}{(2n+1)!}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg} \frac{n^2}{6^n}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+3}}{(n+4)!}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{e^{n+2}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{(n+2)!}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+3)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{n}{4^n}$

1.4.10. Радикальна ознака Коші

Ця ознака є достатньою і базується, як і ознака Даламбера, на порівнянні даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд збігається, при $q > 1$ ряд розбігається, а при $q = 1$ не можна зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду.

Радикальну ознаку Коші зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від n , з яких досить просто добувається корінь n -го степеня. Наприклад,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{n+2} \frac{n}{n^2-3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln^{3n} \frac{2n+1}{n+3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{7n+3} \right)^{n^2}.$$

1.4.11. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-3}{3n+1} \right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{n}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n^3-2} \right)^{n+1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arcsin} \frac{n+3}{n+1} \right)^n$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+6}{2n+1} \right)^{n-2}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n^n}$;

$$\begin{aligned}
& \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2} \right)^{2n^2-3} ; \text{ ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+2n}{n^2+4} \right)^{3n^2+1} ; \text{ з) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \frac{n^2}{n+1} ; \\
& \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} 4^n / \left(\operatorname{arctg} \frac{n}{n+2} \right)^{n-3} ; \quad \text{і) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{n+1} \frac{n+3}{n^2} ; \\
& \text{ї) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arcsin} \frac{n+1}{2n+5} \right)^{3n-1} ; \quad \text{й) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1} \right)^n ; \\
& \text{к) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{2n-3}{2n+3} \right)^{3n^2+1} ; \quad \text{л) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n 1/n}{5^{n+2}} .
\end{aligned}$$

Розв'язання. а) Загальний член ряду є n -м степенем дробу $(2n-3)/(2n+1)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-3}{3n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-3/n}{3+1/n} = \frac{2}{3} < 1.$$

Ряд збігається.

б) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\sin(n/(n^2+1))$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin^n \frac{n}{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1/n}{1+1/n^2} = \\
&= \sin 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}
\end{aligned}$$

в) Загальний член ряду є степенем з показником $n+1$ виразу $\operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n^3-2}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n^3-2} \right)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{n^2+1}{n^3-2} \right)^{(n+1)/n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1/n+1/n^3}{1-2/n^3} \right)^{1+1/n} = \operatorname{arctg} 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}
\end{aligned}$$

г) Загальний член ряду є n -м степенем виразу $\arcsin \frac{n+3}{n+1}$,

тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\arcsin \frac{n+3}{n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{n+3}{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1+3/n}{1+1/n} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} > 1. \end{aligned}$$

Ряд розбігається.

д) Загальний член ряду є $(n-2)$ -м степенем виразу $(5n+6)/(2n+1)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+6}{2n+1}\right)^{\frac{n-2}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5+6/n}{2+1/n}\right)^{1-2/n} = \left(\frac{5}{2}\right)^1 = \frac{5}{2} > 1. \end{aligned}$$

Ряд розбігається.

е) Загальний член ряду $a_n = \frac{3^{n+2}}{n^n} = \frac{3^n \cdot 3^2}{n^n} = 9 \cdot (3/n)^n$. Таким

чином, a_n містить у вигляді множника n -й степінь дробу $3/n$, тому можемо застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9 \cdot (3/n)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 9^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 3/n = 1 \cdot 0 = 0 < 1.$$

Ряд збігається.

є) Загальний член ряду є степенем з показником $2n^2 - 3$ виразу $(3n-1)/(3n+2)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n^2-3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{\frac{2n^2-3}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3n+2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{3n+2} \cdot \frac{2n^2-3}{n}\right) = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2-9}{3n^2+2n}} = \end{aligned}$$

$$= e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6-9/n^2}{3+2/n}} = e^{-2} < 1. \text{ Ряд збігається.}$$

ж) Показник степеня $3n^2 + 1$ у загальному члені даного ряду залежить від n , тому можемо застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 4}\right)^{3n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 4}\right)^{(3n^2 + 1)/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + (2n - 4)/(n^2 + 4)\right)^{\frac{n^2 + 4}{2n - 4} \cdot \left(\frac{2n - 4}{n^2 + 4} \cdot \frac{3n^2 + 1}{n}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 4}{n} \cdot \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 4}\right)} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - 4/n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 1/n^2}{1 + 4/n^2}} = e^{2 \cdot 3} = e^6 > 1. \text{ Ряд розбігається.} \end{aligned}$$

з) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\ln \frac{n^2}{n+1}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln^n \frac{n^2}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{1/n + 1/n^2} = \\ &= \left| \ln \frac{1}{0} = \ln \infty \right| = \infty > 1. \text{ Ряд розбігається.} \end{aligned}$$

и) Загальний член ряду $a_n = 4^n : \arctg^{n-3}(n/(n+2))$ містить степені з показниками n та $3-n$, що залежать від n , тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n : \arctg^{n-3}(n/(n+2))} = \\ &= 4 : \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg^{(n-3)/n}(n/(n+2)) = 4 : \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg^{1-3/n} \frac{1}{1 + 2/n} = \\ &= 4 : \arctg 1 = 16/\pi > 1. \text{ Ряд розбігається.} \end{aligned}$$

і) У загальному члені ряду є степінь з показником $n+1$ виразу $tg((n+3)/n^2)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{tg^{n+1} \frac{n+3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} tg^{\frac{n+1}{n}} \frac{n+3}{n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} tg^{1+1/n} \left(1/n + 3/n^2\right) = tg 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.} \end{aligned}$$

і) Загальний член ряду має показник степеня $3n-1$, що залежить від n , тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\arcsin \frac{n+1}{2n+5}\right)^{3n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arcsin \frac{n+1}{2n+5}\right)^{(3n-1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arcsin \frac{1+1/n}{2+5/n}\right)^{3-1/n} = \\ &= \left(\arcsin(1/2)\right)^3 = (\pi/6)^3 < 1. \quad \text{Ряд збігається.} \end{aligned}$$

й) Загальний член ряду є n -м степенем дробу $\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1}$,

тому можна застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+4}{2n^2+n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+4}{2n^2+n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+4/n^2}{2+1/n} = \frac{5}{2} > 1. \quad \text{Ряд розбігається.} \end{aligned}$$

к) У загальному члені ряду показники степенів n та $3n^2+1$ залежать від n , тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{3n^2+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{(3n^2+1)/n} = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + (-6)/(2n+3)\right)^{\frac{2n+3}{-6} \cdot \left(\frac{-6}{2n+3} \cdot \frac{3n^2+1}{n}\right)} = \\ &= \frac{1}{3} e^{-6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+1}{2n^2+3n}} = \frac{1}{3} e^{-6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+1/n^2}{2+3/n}} = \frac{1}{3} e^{-6 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{3} e^{-9} < 1. \end{aligned}$$

Ряд збігається.

л) У загальному члені ряду показники степенів n та $n+2$, тому можна застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\sin^n 1/n}{5^{n+2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 1/n}{5^{(n+2)/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 1/n}{5^{1+2/n}} = \frac{\sin 0}{5} = \\ &= 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.} \end{aligned}$$

1.4.12. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на збіжність дані числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+5}{5n-3} \right)^n$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{n+1} \frac{n^3}{n^2+3}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \frac{n^2}{n^3+3}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n+2} / \sin^n \frac{n}{n+1}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+3}{n^2+2} \right)^{n+3}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^{n-2} \frac{n^2+1}{n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n^2+5}{n^2-3} \right)^{3n}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{n+1}{n+2} \right)^{2n+3}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{2n}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \frac{1/n^2}{7^{n-1}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{5n+6} \right)^{n+4}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^4+1}{2n^4+n^2+3} \right)^{n+1}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{n^2+4}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n^2+1}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^{n^2-3}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{n^2} \frac{n^4}{n^4+4}$

1.5. Знакопочергові ряди

Знакопочерговий ряд (ряд Лейбниція) має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots, (*)$$

де $|u_n| = a_n \geq 0$.

Якщо збігається ряд, складений із модулів членів даного ряду, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, то сам ряд (*) теж збігається і називається **абсолютно збіжним**.

Якщо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, а сам знакопочерговий ряд (*) збігається, тоді він називається **умовно збіжним**.

Достатня ознака Лейбниція: Якщо для знакопочергового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ виконуються дві умови:}$$

$$1) a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним.

Друга умова ознаки Лейбниція, як розглянуто раніше, є необхідною для збіжності. Тому спочатку перевіряють саме її.

Підкреслимо, що виконання ознаки Лейбниція гарантує не абсолютну, а лише умовну збіжність ряду.

1.5.1. Приклади розв'язання задач

Приклад. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність дані знакопочергові числові ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 + 3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n-1};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^{n-1}}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n-1}}; \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n^2};$$

$$\text{є) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n+1}; \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}; \quad \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)};$$

$$\begin{aligned} \text{и)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin^n \frac{\pi n}{3^n}; & \quad \text{і)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n+2}; \\ \text{ї)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sin \frac{n}{n^3+1}; & \quad \text{й)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2-3}{n^2+1} \right)^{n^2+2}; \\ \text{к)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \cdot 3^{n-1}}{(n+1)!}; & \quad \text{л)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n-2)}. \end{aligned}$$

Розв'язання. а) Складемо ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+3}$. Порівняємо його з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, що збігається:

$$a_n = \frac{1}{4n^2+3} < \frac{1}{n^2+3} < \frac{1}{n^2} = b_n.$$

За основною ознакою порівняння ряд з модулів збігається. Таким чином, даний знакопечерговий ряд збігається абсолютно.

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+3)(n+5)}$ з абсолютних величин членів

даного знакопечергового ряду можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)n}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2+3n+2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{1+3/n+2/n^2} = \frac{2}{1} = 2 \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отже, ряд з модулів розбігається. Застосуємо ознаку Лейбница, щоб перевірити, чи збігається знакопечерговий ряд умовно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2/n}{(1+1/n)(1+2/n)} = 0.$$

Отже, виконується друга умова ознаки Лейбница.

$$a_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{5}{12}; \quad a_3 = \frac{7}{20} \quad a_4 = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}; \quad \dots \quad \text{маємо}$$

$\frac{1}{2} > \frac{5}{12} > \frac{7}{20} > \frac{3}{10} > \dots$ Отже, виконується перша умова ознаки

Лейбница: $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$.

Таким чином, даний ряд збігається. Оскільки ряд з його абсолютних величин розбігається, то ця збіжність умовна.

в) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{n}}{2-1/n} = \frac{0}{2} = 0; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{3}}{5}; \quad \dots \quad 1 > \frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{\sqrt{3}}{5} > \dots. \quad \text{Отже, } a_1 > a_2 > a_3 > \dots.$$

Обидві умови ознаки Лейбница виконуються, отже, даний ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Розглянемо ряд, складений з його абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$. Цей ряд можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, що розбігається:

$$a_n = \sqrt{n}/(2n-1); \quad b_n = 1/\sqrt{n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2-1/n} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

За граничною ознакою порівняння цей ряд розбігається. Отже, початковий знакопчерговий ряд збігається умовно.

г) Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2/2^{n-1})$, складений з абсолютних величин даного знакопчергового ряду. Дослідимо його збіжність, застосовуючи ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2}{2^{n-1}}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n-1}}{2^n \cdot n^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Ряд з абсолютних величин збігається, отже, даний знакопчерговий ряд збігається абсолютно.

д) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}$, складений з абсолютних величин даного знакопечергового ряду, можна порівняти з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1/3}$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}; \quad b_n = \frac{1}{n^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{3n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n}{3n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{3-1/n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq \infty \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отже, ряд з модулів розбігається.

Дослідимо початковий ряд на умовну збіжність, тобто перевіряємо виконання умов ознаки Лейбниці:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}} = 0; \quad a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}; \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt[3]{5}}; \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{11}} \dots \text{Маємо } a_1 > a_2 > a_3 > \dots \end{aligned}$$

Умови ознаки Лейбниці виконуються. Даний ряд збігається умовно.

е) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниці для цього знакопечергового ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right|.$$

Щоб розкрити цю невизначеність, розглянемо функцію $2^x/x^2$, яка співпадає з даною $2^n/n^2$ на множині цілих додатних чисел. За правилом Лопіталю:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \ln 2}{2x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \ln^2 2}{2} = +\infty.$$

Отже, і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty \neq 0$, а значить друга умова ознаки

Лейбниці не виконується, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n^2}$ розбігається.

е) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n+1} = |\sin 0| = 0;$$

$$a_n = \sin \frac{\pi}{n+1}, \quad a_1 = \sin \frac{\pi}{2} = 1; \quad a_2 = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a_3 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots. \text{ Маємо } a_1 > a_2 > a_3 > \dots.$$

Отже, ознака Лейбниця виконується, тому даний знакоперерговий ряд збігається. Дослідимо, збігається він абсолютно чи умовно.

Ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n+1}$ можна порівняти з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$a_n = \sin \frac{\pi}{n+1}; \quad b_n = \frac{1}{n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi/n+1}{1/n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \cdot n}{n+1} = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = \pi \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq \infty \end{pmatrix}.$$

Отже, ряд з модулів розбігається. Таким чином, початковий ряд збігається умовно.

ж) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \left| \frac{1}{\infty} \right| = 0. \text{ Друга умова ознаки Лейб-}$$

ниця виконується.

$$a_n = \left| (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)} \right| = \frac{1}{\ln(n+1)}; \quad a_1 = 1/\ln 2; \quad a_2 = 1/\ln 3;$$

$a_3 = 1/\ln 4, \dots$. Функція $\ln x$ є зростаючою, тому перша умова ознаки Лейбниця виконується $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$.

Отже, даний ряд збігається.

Перевіримо, чи збігається він абсолютно. Ряд з абсолютних

величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ розбігається, тому що $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ (за основною ознакою порівняння з меншим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n+1)$, що розбігається). Таким чином, даний ряд збігається умовно.

з) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} = \left| \frac{1}{\infty} \right| = 0; \quad a_n = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)};$$

$$a_1 = 1/(2 \ln 2); \quad a_2 = 1/(3 \ln 3); \quad a_3 = 1/(4 \ln 4), \dots \quad a_1 > a_2 > a_3 \dots$$

Ознака Лейбниця виконується, тому даний ряд збігається. Маємо дослідити його на абсолютну збіжність.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші до ряду з модулів

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}.$$

Розглянемо відповідну функцію

$$f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln(x+1)},$$

що на інтервалі $[1, \infty)$ приймає додатні

значення, неперервна і монотонно спадає, причому $f(n) = |u_n|$.

Дослідимо невластний інтеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{d(\ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln(\ln(x+1)) \Big|_1^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \ln(\ln(A+1)) - \ln \ln 2 = \infty.$$

Інтеграл розбігається.

Отже, ряд з абсолютних величин теж розбігається. Таким чином, знакочерговий ряд збігається умовно.

и) Дослідимо на абсолютну збіжність даний ряд, застосовуючи радикальну ознаку Коші до ряду з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n(\pi n / 3^n):$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\arcsin^n(\pi n / 3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin(\pi n / 3^n) = \\ &= \arcsin\left(\pi \lim_{n \rightarrow \infty} (n / 3^n)\right) = \arcsin 0 = 0 < 1,\end{aligned}$$

де для розкриття невизначеності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right|$ скористалися відпо-відною границею для допоміжної функції $f(x) = x/3^x$, що співпадає з послідовністю $n/3^n$ при x цілих і додатних. За правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3^x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^x \ln 3} = 0. \quad \text{Отже і } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0.$$

За радикальною ознакою Коші ряд з абсолютних величин збігається, тому даний знакопечерговий ряд збігається абсолютно.

і) Перевіримо збіжність ряду з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n+2} \quad \text{за радикальною ознакою Коші:}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{(n+2)/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3-1/n} \right)^{1+2/n} = \frac{1}{3} < 1.\end{aligned}$$

Ряд з абсолютних величин збігається, а тому знакопечерговий ряд збігається абсолютно.

і) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{n}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \frac{n}{n^3+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n^3} = 1 \neq 0.\end{aligned}$$

(Скористались тим, що $\sin \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$. $\alpha = n/(n^3+1)$),

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^2}{1 + 1/n^3} = 0$. Тому $\sin \frac{n}{n^3 + 1} \sim \frac{n}{n^3 + 1}$ при $n \rightarrow \infty$).

Ознака Лейбниці не виконується, тому даний знакочерговий ряд розбігається.

й) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниці:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3}{n^2 + 1} \right)^{n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1 - 4}{n^2 + 1} \right)^{n^2 + 2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - 4/(n^2 + 1) \right)^{\frac{n^2 + 1}{4} \cdot \frac{4(n^2 + 2)}{n^2 + 1}} = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - 4/(n^2 + 1) \right)^{-(n^2 + 1)/4} \right)^{-4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1}} = e^{-4} \neq 0. \end{aligned}$$

Вона не виконується, тому даний ряд розбігається.

к) Дослідимо збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n-1}}{(n+1)!}$ з абсолютних величин даного знакочергового ряду. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| &= \frac{(n+1) \cdot 3^n}{(n+2)!}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 3^n \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot n \cdot 3^{n-1}} = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2 + 2n} = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n + 1/n^2}{1 + 2/n} = 3 \cdot \frac{0}{1} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Ряд з модулів збігається, а тому знакочерговий ряд збігається абсолютно.

л) Дослідимо збіжність ряду з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n-2)}$. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2(n+1)-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3(n+1)-2)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)};$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1) \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{3+1/n} = \frac{2}{3} < 1.\end{aligned}$$

Ряд з модулів збігається, а тому даний знакопочерговий ряд збігається абсолютно.

1.5.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність дані знакопочергові числові ряди:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{(n+1)(n+6)}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+3}{5n-2} \right)^{n+4}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^{n+2}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+3}}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1}}{n^3}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{2\pi}{n+3}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln^2(n+2)}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+3) \ln^2(n+3)}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}^n \frac{\pi n}{5^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot \sin \frac{n}{n^2+5}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{3n+1}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+4} \right)^{n^2+1}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3) \cdot 5^n}{(n+3)!}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{7 \cdot 12 \cdot \dots \cdot (5n+2)}$	16	$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$

1.6. Степеневі ряди

Функціональний ряд має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

де $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ... – деякі функції аргументу x .

Областю збіжності функціонального ряду є множина всіх значень x , при яких збігається числовий ряд з відповідних значень функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ...

Важливим випадком функціонального ряду є **степеневий ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, (**)$$

де a_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) – коефіцієнти ряду.

Інтервалом збіжності степеневого ряду називається інтервал $(-R, R)$ такий, що всередині нього ($|x| < R$) ряд збігається, причому абсолютно, а зовні ($|x| > R$) – ряд розбігається. Число R називається **радіусом збіжності** і може приймати значення від нуля до нескінченності. (У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку ($R = 0$), або ж ряд збігається при всіх значеннях x ($R = \infty$)).

На кінцях інтервалу $x = \pm R$ одержані числові ряди досліджуються окремо.

Областю збіжності степеневого ряду є об'єднання інтервалу збіжності $(-R, R)$ і тих його кінців $x = \pm R$, де ряд збігається хоча б умовно.

Інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ можна визначити:

а) за ознакою Даламбера для ряду з модулів:

$$\text{якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1}/u_n| < 1, \text{ то ряд збігається.}$$

б) за радикальною ознакою Коші для ряду з модулів:

якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$, то ряд збігається.

Для степеневих рядів стандартного вигляду (**), застосовуючи ці ознаки, відповідно одержуємо:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/a_{n+1}| \quad \text{або} \quad R = 1/\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Аналогічно за цими ознаками можна знайти внутрішні точки області абсолютної збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. У межових точках відповідні числові ряди досліджуються окремо.

Зауважимо, що степеневий ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots,$$

де x_0 – центр розвинення, можна привести до стандартного подання (**), якщо позначити $x_1 = x - x_0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n.$$

Такий ряд збігається при $|x-x_0| < R$ і розбігається при $|x-x_0| > R$. Отже, маємо інтервал збіжності $x_0 - R < x < x_0 + R$. На кінцях інтервалу збіжності при $x = x_0 + R$ і при $x = x_0 - R$ одержані числові ряди досліджуються окремо.

1.6.1. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайти області збіжності даних функціональних рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \frac{x^2}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2} x^n};$$

$$\text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln^{2n}(x+1/n); \quad \text{д) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n}}{x^{2n} \ln n}.$$

Розв'язання. а) Застосуємо ознаку Даламбера до ряду з абсолютних величин:

$$\begin{aligned}
 u_n &= \sqrt{n} \sin \frac{x^2}{3^n}; \quad u_{n+1} = \sqrt{n+1} \sin \frac{x^2}{3^{n+1}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sqrt{n+1} \sin(x^2/3^{n+1})}{\sqrt{n} \sin(x^2/3^n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2/3^{n+1})}{\sin(x^2/3^n)} = \\
 &= \left| \frac{\sin \alpha \sim \alpha \text{ при } \alpha \rightarrow 0; \quad \sin(x^2/3^{n+1}) \sim x^2/3^{n+1};}{\sin(x^2/3^n) \sim x^2/3^n \text{ при } n \rightarrow \infty} \right| = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+1/n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2/3^{n+1}}{x^2/3^n} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+1/n} = \frac{1}{3} < 1.
 \end{aligned}$$

Отже, даний функціональний ряд збігається абсолютно при $x \in (-\infty, \infty)$, тобто його областю збіжності є вся числова пряма.

б) Застосуємо ознаку Даламбера до ряду з модулів:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \operatorname{tg}(x/(n+1)^2)}{x^n \operatorname{tg}(x/n^2)} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\operatorname{tg}(x/(n+1)^2)}{\operatorname{tg}(x/n^2)} \right| = \\
 &= \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha \text{ при } \alpha \rightarrow 0; \quad \operatorname{tg}(x/(n+1)^2) \sim x/(n+1)^2;}{\operatorname{tg}(x/n^2) \sim x/n^2 \text{ при } n \rightarrow \infty} \right| = \\
 &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x/(n+1)^2}{x/n^2} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} = |x|.
 \end{aligned}$$

Отже, при $|x| < 1$, тобто при $-1 < x < 1$ ряд збігається абсолютно. Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(1/n^2)$. Цей ряд збігається за граничною ознакою порівняння зі збіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg}(1/n^2)}{(1/n^2)} = 1. \text{ Ряди поведуть себе однаково.}$$

2) При $x = -1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg}(1/n^2)$. Цей знакопо-

черговий ряд збігається абсолютно, бо розглянутий вище ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}(1/n^2)$ є рядом з його модулів.

Отже, даний функціональний ряд збігається абсолютно при $-1 \leq x \leq 1$, тобто його областю збіжності є відрізок $[-1; 1]$.

в) Введемо нову змінну $z = 1/x$. Тоді $x = 1/z$ і ми маємо степенеий ряд за степенями z стандартного вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2}} z^n$.

Знайдемо радіус збіжності цього ряду за радикальною ознакою Коші $R = 1 / \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$:

$$\begin{aligned} R &= 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^{n-1}/4^{n+2}} = 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{(n-1)/n}}{4^{(n+2)/n}} = \\ &= 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{1-1/n}}{4^{1+2/n}} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Отже, утворений ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (5^{n-1} z^n / 4^{n+2})$ абсолютно збігається

при $|z| < 4/5$, тобто $1/|x| < 4/5$, або $|x| > 5/4$. Таким чином, початковий ряд збігається абсолютно, якщо $x > 5/4$ або $x < -5/4$, тобто при $x \in (-\infty, -5/4) \cup (5/4, \infty)$. Дослідимо його збіжність на кінцях проміжків при $x = \pm 5/4$:

1) При $x = 5/4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2} (5/4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{80}$ що розбігається за необхідною ознакою:

$$u_n = 1/80; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1/80 \neq 0.$$

2) При $x = -5/4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2} (-5/4)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{80}$. Цей знакочерговий ряд розбігається, бо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n \cdot 1/80| = 1/80 \neq 0.$$

Отже, даний функціональний ряд має область збіжності

$(-\infty; -5/4) \cup (5/4; +\infty)$, де збігається абсолютно.

г) Застосуємо радикальну ознаку Коші до ряду з модулів:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\ln^{2n}(x+1/n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln^2(x+1/n) = \ln^2 x.$$

При $\ln^2 x < 1$ ряд збігається абсолютно. Звідси

$$|\ln x| < 1; \quad -1 < \ln x < 1; \quad e^{-1} < x < e.$$

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = e$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{2n}(e+1/n)$. Оскільки:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln^{2n}(e+1/n) = \left| 1^\infty \right| = \\ &= \left| \ln q = \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \ln^{2t}(e+1/t) = \left| s = 1/t; s \rightarrow 0 \text{ нпу } t \rightarrow \infty \right| = \right. \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln \ln(e+s)}{s} = \left| \frac{0}{0} \right| = 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\ln \ln(e+s))'}{s'} = \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(e+s) \ln(e+s)} = \frac{2}{e}; \quad q = e^{2/e} = e^{2/e} \neq 0, \end{aligned}$$

то цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака.

2) При $x = e^{-1}$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^{2n}(e^{-1}+1/n)$. Оскільки:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln^{2n}(e^{-1}+1/n) = \left| 1^\infty \right| = \\ &= \left| \ln q = \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \ln^{2t}(e^{-1}+1/t) = \left| s = 1/t; s \rightarrow 0 \text{ нпу } t \rightarrow \infty \right| = \right. \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln \ln(e^{-1}+s)}{s} = \left| \frac{0}{0} \right| = 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\ln \ln(e^{-1}+s))'}{s'} = \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(e^{-1}+s) \ln(e^{-1}+s)} = -2e; \quad q = e^{-2e} = e^{-2e} \neq 0, \end{aligned}$$

то цей ряд також розбігається.

Отже, даний функціональний ряд збігається абсолютно при $e^{-1} < x < e$, тобто його областю збіжності є інтервал $(e^{-1}; e)$.

д) Введемо нову змінну $z = 1/x^2$. Тоді $x^2 = 1/z$ і ми маємо степеневий ряд за степенями z стандартного вигляду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n} z^n}{\ln n}$. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою

Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/a_{n+1}|$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n 4^{3n}}{\ln n}; \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} 4^{3(n+1)}}{\ln(n+1)}; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/a_{n+1}| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 4^{3(n+1)}}{\ln(n+1)} : \frac{(-1)^n 4^{3n}}{\ln n} \right| = 4^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 64 \times \\ &\times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(\ln(x+1))'} = 64 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1/(x+1)} = 64 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)'}{x'} = 64. \end{aligned}$$

Отже, утворений ряд абсолютно збігається при $|z| < 64$, тобто $1/x^2 < 64$, або $|x| > 8$. Таким чином, початковий ряд збігається абсолютно, якщо $x > 8$ або $x < -8$, тобто при $x \in (-\infty, -8) \cup (8, \infty)$. Дослідимо його збіжність на кінцях проміжків при $x = \pm 8$:

1) При $x = 8$ маємо ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n}}{8^{2n} \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$. Ряд з його

модулів $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ розбігається за основною ознакою порівняння з

розбіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, тому що $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$.

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0 \quad \text{і} \quad |u_n| = \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)} = |u_{n+1}|,$$

то за ознакою Лейбница знакопочерговий ряд збігається умовно.

2) При $x = -8$ маємо ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{3n}}{(-8)^{2n} \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, що співпадає з одержаним при $x = 8$. Він збігається умовно.

Отже, область збіжності даного функціонального ряду слугить об'єднання двох закритих променів $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.

Приклад 2. Знайти області збіжності даних степеневих рядів:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^{n-1} x^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+2)2^{n-1}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{3^n (n+2)}; \\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n(n+3)}; \quad \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(x+2)^n}{5^n}; \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}; \\ \text{є) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n-1} (x-3)^n}{n!}; \quad \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^{n+2}}; \quad \text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln n}{n^2}; \\ \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n+1}}{3n^2+2}; \quad \text{і) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{3n+2}}{5^{n-3}}; \\ \text{ї) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}}; \quad \text{к) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x-4)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Розв'язання. а) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}|$:

$$\begin{aligned} a_n = n \cdot 3^{n-1}; \quad a_{n+1} = (n+1) \cdot 3^n; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n / a_{n+1}| = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n \cdot 3^{n-1}}{(n+1) \cdot 3^n} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ряд збігається абсолютно при $|x| < 1/3$, тобто $-1/3 < x < 1/3$.
Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x = 1/3$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^{n-1} (1/3)^n = (1/3) \sum_{n=1}^{\infty} n$. Цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (1/3) \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq 0.$$

2) При $x = -1/3$ маємо знакопечерговий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^{n-1} (-1/3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$. Цей ряд теж розбігається, тому що

не виконується необхідна ознака: $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = (1/3) \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq 0$.

Отже, область збіжності ряду – інтервал $x \in (-1/3; 1/3)$.

б) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n / a_{n+1} \right| :$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n}{(n+2)2^{n-1}}; \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)2^n}; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n / a_{n+1} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n (n+3) \cdot 2^n}{(n+2) \cdot 2^{n-1} \cdot (-1)^{n+1}} \right| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+2} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3/n}{1+2/n} = 2. \end{aligned}$$

Ряд збігається абсолютно при $|x| < 2$, тобто $-2 < x < 2$. Перевіримо його збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = -2$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{(n+2)2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} 2^n}{(n+2)2^{n-1}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}.$$

Цей ряд розбігається за граничною ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, що розбігається:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2/n} = 1.$$

2) При $x = 2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n+2)2^{n-1}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$. Щойно

показано, що ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ розбігається. Знакопочерговий

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ збігається умовно, бо для нього виконуються умови ознаки Лейбниці:

$$a_n = 1/(n+2); a_1 = 1/3, a_2 = 1/4, a_3 = 1/5, \dots$$

$$1/3 > 1/4 > 1/5 > \dots > 1/(n+2) > \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n+2) = 0.$$

Отже, даний степеневий ряд має область збіжності $(-2, 2]$, причому на правому кінці $x = 2$ він збігається умовно.

в) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|:$$

$$a_n = \frac{n!}{3^n (n+2)}; a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1} (n+3)}; R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! 3^{n+1} (n+3)}{3^n (n+2) (n+1)!} =$$

$$= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+2} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3/n}{1+2/n} = 3 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Отже, радіус збіжності даного ряду $R = 0$, тобто даний ряд збігається тільки при $x = 0$.

г) Маємо степеневий ряд за степенями $x-1$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|:$

$$a_n = \frac{1}{n(n+3)}; a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+4)}; R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+4)}{n(n+3)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4/n}{1+3/n} = 1.$$

Отже, ряд збігається абсолютно при $|x-1| < 1$, тобто $-1 < x-1 < 1$, або $0 < x < 2$. Перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу:

1) При $x = 2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ Цей ряд збігається за

основною ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, що збігається:

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 3n} < \frac{1}{n^2} = b_n.$$

Таким чином, при $x = 2$ степеневий ряд збігається абсолютно.

2) При $x = 0$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$. Це знакочерговий ряд.

Вище показано, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$, складений з його

абсолютних величин, збігається. Отже, цей знакочерговий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+3)}$ збігається абсолютно.

Таким чином, даний степеневий ряд має область збіжності $[0, 2]$, де скрізь збігається абсолютно.

д) Маємо степеневий ряд за степенями $x + 2$ стандартного вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x + 2)^n$, де $a_n = (2n - 1)/5^n$. Знайдемо радіус

збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/a_{n+1}|$:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)/5^n}{(2n+1)/5^{n+1}} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-1/n}{2+1/n} = 5.$$

Отже, даний ряд збігається при $|x + 2| < 5$, тобто $-5 < x + 2 < 5$, або $-7 < x < 3$. Розглянемо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x = 3$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)5^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$. Цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1) = \infty \neq 0.$$

2) При $x = -7$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1)$. Цей знакочерговий ряд теж розбігається, бо

не виконується необхідна ознака: $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1) = \infty \neq 0$.

Таким чином, даний степеневий ряд має область збіжності $(-7,3)$.

е) Даний степеневий ряд за степенями $x+1$ має нестандартний вигляд. Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Даламбера:

$$u_n(x) = 4^n(x+1)^{2n}/n; \quad u_{n+1}(x) = 4^{n+1}(x+1)^{2n+2}/(n+1);$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^{n+1}(x+1)^{2n+2} \cdot n}{(n+1) \cdot 4^n(x+1)^{2n}} \right| = \\ &= 4(x+1)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 4(x+1)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n} = 4(x+1)^2. \end{aligned}$$

Даний ряд збігається абсолютно, якщо $4(x+1)^2 < 1$ або $(x+1)^2 < 1/4$, $-1/2 < x+1 < 1/2$, $-3/2 < x < -1/2$.

Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x = -1/2$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(1/2)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{2^{2n}n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Це гармонічний ряд, що розбігається.

2) При $x = -3/2$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(-1/2)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(-2)^{2n}n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \text{ що розбігається.}$$

Отже, область збіжності даного степеневого ряду – інтервал $(-3/2; -1/2)$.

є) Маємо степеневий ряд за степенями $x-3$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/a_{n+1}|$:

$$\begin{aligned} a_n &= 6^{n-1}/n!; \quad a_{n+1} = 6^n/(n+1)!; \\ R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{6^{n-1}(n+1)!}{n! 6^n} \right| = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty. \end{aligned}$$

Отже, ряд збігається при $-\infty < x-3 < \infty$, або $-\infty < x < \infty$,

тобто область збіжності цього ряду $x \in (-\infty, \infty)$.

ж) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|:$$

$$a_n = \frac{3^n}{5^{n+2}}; \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{5^{n+3}}; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n \cdot 5^{n+3}}{5^{n+2} \cdot 3^{n+1}} \right| = \frac{5}{3}.$$

Таким чином, даний степеневий ряд збігається абсолютно при $-5/3 < x < 5/3$. Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу:

1) При $x = 5/3$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (5/3)^n}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot 5^n}{5^{n+2} \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25},$$

що розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$u_n = 1/25; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1/25 \neq 0.$$

2) При $x = -5/3$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot (-5/3)^n}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (-1)^n \cdot 5^n / 3^n}{5^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{25}.$$

Цей знакопochерговий ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака: $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(-1)^n \cdot 1/25| = 1/25 \neq 0$.

Отже, областю збіжності даного степеневого ряду служить інтервал $(-5/3, 5/3)$.

з) Маємо степеневий ряд за степенями x стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|:$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\ln n}{n^2}; \quad a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} : \frac{\ln n}{n^2} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x+1))'}{(\ln x)'} = \end{aligned}$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/(x+1)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{(x+1)'} = 1,$$

де друга границя як невизначеність типу ∞/∞ розкрита за правилом Лопітала.

Таким чином, даний степеневий ряд збігається абсолютно при $-1 < x < 1$. Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях інтервалу:

1) При $x = -1$ маємо знакопечерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2}$. До

ряду з його модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ застосуємо інтегральну ознаку:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du; \right. \\ u &= \ln x; \quad du = \frac{dx}{x}; \quad dv = \frac{dx}{x^2}; \quad v = -\frac{1}{x} \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln x \cdot (-1/x)) \Big|_1^A - \\ &- \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A (-1/x) \frac{dx}{x} = - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\ln A}{A} - \lim_{A \rightarrow \infty} (1/x) \Big|_1^A = - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{(\ln A)'}{A'} - \\ &- \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} + 1 = - \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} - 0 + 1 = 1 \neq \infty. \end{aligned}$$

Оскільки невластний інтеграл збігається, то знакопечерговий ряд збігається абсолютно.

2) При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$, що співпадає з вище дослідженим. Він збігається.

Отже, областю збіжності даного степеневого ряду служить відрізок $[-1; 1]$.

и) Маємо степеневий ряд за степенями $x + 3$ нестандартного вигляду. Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Даламбера:

$$\cdot u_n = \frac{(x+3)^{2n+1}}{3n^2+2}; \quad u_{n+1} = \frac{(x+3)^{2(n+1)+1}}{3(n+1)^2+2} = \frac{(x+3)^{2n+3}}{3(n+1)^2+2};$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+3)^{2n+3} \cdot (3n^2+2)}{(3(n+1)^2+2)(x+3)^{2n+1}} \right| = (x+3)^2 \times \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2}{3(n+1)^2+2} = (x+3)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+2/n^2}{3(1+1/n)^2+2/n^2} = \\ &= (x+3)^2 \cdot (3/3) = (x+3)^2. \end{aligned}$$

Отже, при $(x+3)^2 < 1$ ряд збігається абсолютно, тобто ряд збігається абсолютно при $-1 < x+3 < 1$, або $-4 < x < -2$. Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу:

1) При $x = -2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2+3)^{2n+1}}{3n^2+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+2}$. Цей ряд збігається за ознакою порівняння з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, що збігається:

$$a_n = 1/(3n^2+2), b_n = 1/n^2; a_n = 1/(3n^2+2) < 1/3n^2 < 1/n^2 = b_n.$$

Отже $a_n < b_n$, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+2}$ теж збігається.

2) При $x = -4$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4+3)^{2n+1}}{3n^2+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{3n^2+2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2+2}.$$

Цей ряд відрізняється від попереднього лише сталим множником -1 . Отже, він також збігається.

Таким чином, даний степеневий ряд має область збіжності $[-4, -2]$.

і) Маємо степеневий ряд за степенями $x+4$ нестандартного вигляду. Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за радикальною ознакою Коші:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x+4)^{3n+2}}{5^{n-3}} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+4|^{(3n+2)/n}}{5^{(n-3)/n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+4|^{3+2/n}}{5^{1-3/n}} = \frac{|x+4|^3}{5}. \end{aligned}$$

Ряд збігається абсолютно, якщо $|x + 4|^3/5 < 1$. Звідси $|x + 4| < \sqrt[3]{5}$; $-\sqrt[3]{5} < x + 4 < \sqrt[3]{5}$, $-\sqrt[3]{5} - 4 < x < \sqrt[3]{5} - 4$.

Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього проміжку:

1) При $x = \sqrt[3]{5} - 4$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt[3]{5})^{3n+2}}{5^{n-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{(3n+2)/3}}{5^{n-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} 5^{2/3+3} = \sum_{n=1}^{\infty} 5^{11/3}.$$

Цей ряд розбігається, бо не виконується необхідна ознака:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{11/3} = 5^{11/3} \neq 0.$$

2) при $x = -\sqrt[3]{5} - 4$ маємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\sqrt[3]{5})^{3n+2}}{5^{n-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+2} 5^{(3n+2)/3}}{5^{n-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 5^{11/3}.$$

Цей ряд теж розбігається, бо $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 5^{11/3} \neq 0$.

Таким чином, для даного степеневому ряду маємо область збіжності $(-\sqrt[3]{5} - 4, \sqrt[3]{5} - 4)$, де ряд збігається абсолютно.

і) Маємо степеневий ряд нестандартного вигляду (за непарними степенями x). Знайдемо його інтервал збіжності безпосередньо за ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}}; \quad u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2} x^{2(n+1)-1}}{\sqrt[3]{n+1}} = \frac{(-1)^{n+2} x^{2n+1}}{\sqrt[3]{n+1}};$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} x^{2n+1} \cdot \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1} \cdot (-1)^{n+1} x^{2n-1}} \right| = |x|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} = \\ &= |x|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{1+1/n}} = |x|^2 = x^2. \end{aligned}$$

Цей ряд збігається при $x^2 < 1$. Звідси $-1 < x < 1$.

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = 1$ маємо знакопчерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$. За ознакою Лейбница він збігається, бо

$$a_1 = 1 > a_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > a_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \dots \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Складемо ряд з його абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$.

Це розбіжний узагальнений гармонічний ряд. Отже, при $x=1$ маємо ряд, що збігається умовно.

2) При $x = -1$ маємо знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-1)^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}},$$

що відрізняється від попереднього тільки знаком. Отже, він також збігається умовно.

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{\sqrt[3]{n}}$ збігається абсолютно на

інтервалі $(-1,1)$. На кінцях інтервалу він збігається умовно. Область збіжності – відрізок $[-1;1]$.

к) Маємо степеневий ряд за степенями $x-4$ стандартного вигляду. Знайдемо радіус збіжності цього ряду за ознакою Даламбера $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n / a_{n+1} \right|$:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n!(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n!};$$

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^n n!}{n!(n+1)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1} \right)^{n+1} \cdot \frac{-n}{n+1} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+1/n}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Таким чином, даний ряд збігається абсолютно при $|x-4| < e^{-1}$. Звідси $4 - 1/e < x < 4 + 1/e$.

Дослідимо збіжність на кінцях інтервалу:

1) При $x = 4 + 1/e$ одержуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (1/e)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$. За

формулою Стирлінга при $n \rightarrow \infty$ маємо $n! \approx (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$. Отже, при $n \rightarrow \infty$ дістаємо

$$a_n = \frac{n^n}{e^n \cdot n!} \approx \frac{n^n}{e^n \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n.$$

Тому порівняємо наш ряд з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$, що розбігається. За граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} \neq 0 \\ \neq 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ці ряди поведуть себе однаконо, тобто розбігаються. Отже, при $x = 4 + 1/e$ ряд розбігається.

2) При $x = 4 - 1/e$ маємо знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (-1/e)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Знайдемо границю модулів його членів:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{e^n n!} = \left| n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ при } n \rightarrow \infty \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{e^n \cdot (n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0. \end{aligned}$$

Крім того, при $n \rightarrow \infty$ маємо:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} > a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}}.$$

Отже, за ознакою Лейбница знакопечерговий ряд збігається.

Оскільки вище доведено, що ряд з його модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}$ розбігається, то цей ряд збігається умовно.

Таким чином, область збіжності даного степеневого ряду – півінтервал $[4 - 1/e, 4 + 1/e)$. На лівому кінці збіжність умовна.

1.6.2. Задачі для самостійної роботи

Завдання. Знайти області збіжності даних степеневих рядів:

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot 5^{n+2} x^n$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \cdot 3^{n+1}}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)! x^n}{2^n \cdot n}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)(n+2)}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (x+2)^n}{(n+1)!}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^{2n}}{n+2}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2} (x-1)^n}{(2n-1)!}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{n+1} (x+4)^n}{4^{n-3}}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+4}}{4n^2 - 3}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+5} (x-2)^n}{2^{3n-1}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} x^3}{3^{2n}}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+3}}{4^{n+1}}$
7	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \sqrt{\ln n}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{\sqrt[3]{n+2}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)(x-1)^n}{4^{n+2}}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{5^{2n} \sqrt{4n^2 - 1}}$

Розділ 2. РЯДИ ТЕЙЛОРА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

2.1. Розкладання функцій у степеневі ряди

Рядом Тейлора функції $f(x)$ називається ряд вигляду:

$$\begin{aligned} f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут a – центр розвинення; $f^{(n)}(a)$ – значення n -ї похідної в точці $x = a$;
 $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ – n -й коефіцієнт Тейлора, $n = 0, 1, 2, \dots$

Якщо $a = 0$, то ряд Тейлора приймає вигляд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

і називається **рядом Маклорена**.

Теорема 1. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(a-R; a+R)$ можна розкласти в степеневий ряд, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції.

Наведемо умови, за яких сума ряду (1) збігається до функції $f(x)$, тобто умови розкладання функції в ряд Тейлора.

Теорема 2. Для того, щоб ряд Тейлора (1) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(a-R; a+R)$, необхідно і достатньо, щоб ця функція мала похідні всіх порядків на цьому інтервалі і залишковий член її формули

Тейлора $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ ($0 < \theta < 1$) прямував до нуля при

$n \rightarrow \infty$ для всіх x з цього інтервалу, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$.

При виконанні вказаних умов маємо:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \text{ і, зокрема, при } a=0 \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Прості достатні умови розвинення функції в ряд Тейлора. дає наступна

теорема 3. Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(a-R; a+R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$ таке, що $|f^{(n)}(x)| \leq M$,

$x \in (a-R; a+R)$, $n=0,1,2,\dots$, то функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд Тейлора.

Розвинення основних елементарних функцій в ряд Маклорена:

$$1. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$2. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$4. \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots, \quad x \in R, x \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in Z.$$

$$5. (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad |x| < 1.$$

$$6. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

$$7. \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1.$$

$$8. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1.$$

$$9. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$-1 \leq x \leq 1.$$

$$10. \operatorname{arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots =$$

$$= x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x \leq 1, \text{ де } (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1),$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n).$$

2.1.1. Приклади розв'язання задач

Розкладання функцій в степеневі ряди в загальному випадку базується на використанні рядів Тейлора або Маклорена.

За **першим способом** знаходять похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,\dots$ та їх значення $f^{(n)}(0)$, $n=0,1,2,\dots$, які безпосередньо підставляють у відповідну формулу і одержують шукане розвинення.

На практиці частіше застосовують **другий спосіб** – без знаходження

виразів для похідних довільного n -го порядку, а на основі формальних перетворень з використанням наведених стандартних розкладів елементарних функцій в ряди Маклорена. Зокрема, корисно використовувати почленне диференціювання чи інтегрування відомих рядів. В інтервалах збіжності одержані ряди збігаються до відповідних функцій.

Приклад 1. Розкласти в ряд Маклорена функції:

$$\text{а) } f(x) = \sin^2 x; \quad \text{б) } f(x) = \sin^3 x$$

та знайти області, в яких ряд збігається до відповідної функції.

Розв'язання. а) **Спосіб I.** Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ та їх значення $f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, що входять у ряд Маклорена

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots,$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x) = \sin^2 x,$$

$$f(0) = 0,$$

$$f^I(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x,$$

$$f^I(0) = 0,$$

$$f^{II}(x) = 2 \cos 2x = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{II}(0) = 2,$$

$$f^{III}(x) = -2^2 \sin 2x = 2^2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right),$$

$$f^{III}(0) = 0,$$

$$f^{IV}(x) = -2^3 \cos 2x = 2^3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right),$$

$$f^{IV}(0) = -2^3,$$

$$f^V(x) = +2^4 \sin 2x = 2^4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right),$$

$$f^V(0) = 0,$$

$$f^{VI}(x) = 2^5 \cos 2x = 2^5 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} \cdot 5\right),$$

$$f^{VI}(0) = 2^5,$$

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \sin\left[2x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right],$$

$$f^{(n)}(0) = 2^{n-1} \sin\left[\frac{\pi}{2}(n-1)\right].$$

Отже,

$$\sin^2 x = \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \dots + \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{2n+1} x^{2(n+1)} (2n)!}{(n+2)! 2^{2n-1} x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0 \text{ для всіх } x,$$

тобто інтервал збіжності ряду $(-\infty, +\infty)$.

Спосіб II. Скористаємося відомими тотожностями для перетворення заданої функції та основними властивостями збіжних степеневих рядів.

Подано функцію $f(x) = \sin^2 x$ у вигляді:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

і використаємо відомий розклад

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty,$$

заміняючи x на $2x$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \\ & - \frac{1}{2} \left(-\frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) = \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} + \dots + \\ & + \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty \end{aligned}$$

Як бачимо, обидві відповіді збігаються.

б) З тригонометричної тотожності $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ одержимо

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3 \sin x - \sin 3x).$$

Застосуємо розвинення

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots; \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Заміняючи x на $3x$, маємо:

$$\sin 3x = (3x) - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots; \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Отже,

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3 - 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(+ \frac{24}{3!} x^3 - \frac{240}{5!} x^5 + \frac{2184}{7!} x^7 - \dots + \frac{(-1)^n (3 - 3^{2n+1})}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \right),$$

$-\infty < x < +\infty$.

Приклад 2. Розкласти задані функції в ряд Маклорена

а) $f(x) = chx$; б) $f(x) = shx$; в) $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

Розв'язання. Оскільки

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in R,$$

то

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots, \quad x \in R.$$

Враховуючи, що обидва ряди збігаються при $-\infty < x < +\infty$, то в інтервалі збіжності $(-\infty, +\infty)$ їх можна почленно додавати та почленно віднімати. Після простих перетворень отримуємо:

а) $chx = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(2 + 2 \frac{x^2}{2!} + 2 \frac{x^4}{4!} + \dots \right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad -\infty < x < +\infty.$$

б) $shx = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots \right) \right] =$

$$= \frac{1}{2} \left(2x + 2 \frac{x^3}{3!} + \dots + 2 \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \right) =$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad -\infty < x < +\infty.$$

в) $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]$.

Скористаємося розкладом

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1.$$

Замінюючи x на $(-x)$, маємо:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, \quad -1 \leq x < 1.$$

Обидва ряди збігаються при $|x| < 1$, тобто в інтервалі $(-1, 1)$ їх можна

почленно віднімати. Одержуємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} x^n + \dots \right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^7}{7} + \dots + 2\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right) = \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad -1 < x < 1. \end{aligned}$$

Примітка. Відзначимо цікаві аналогії між рядами Маклорена, здавалось би, зовсім різних функцій:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, & \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, & x \in (-\infty, +\infty) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, & \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, & x \in (-\infty, +\infty) \\ \operatorname{arctg} x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, & \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots, & |x| < 1 \end{aligned}$$

Приклад 3. Розкласти задані функції в ряд Маклорена

$$\text{а) } f(x) = \frac{6}{1+x-2x^2}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{2}{x^2-3x+2}$$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

Розв'язання. а) Розкладемо раціональну функцію $f(x) = \frac{6}{1+x-2x^2}$ на суму найпростіших дробів:

$$1+x-2x^2 = -2(x-1) \left(x + \frac{1}{2} \right) = (1-x)(2x+1);$$

$$\frac{6}{(1-x)(1+2x)} = \frac{6}{(1-x)(1+2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+2x}, \quad A=2; \quad B=4.$$

$$\text{Тобто } f(x) = \frac{6}{(1-x)(1+2x)} = \frac{2}{1-x} + \frac{4}{1+2x}.$$

$$\text{Маємо } \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1. \quad (1)$$

Замінімо x на $-2x$ і отримаємо:

$$\frac{1}{1+2x} = 1 - (2x) + (2x)^2 - (2x)^3 + (2x)^4 + \dots + (-1)^n (2x)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2x)^n. \quad (2)$$

Знайдемо інтервал збіжності ряду (2): $|2x| < 1$ або $|x| < \frac{1}{2}$.

Отримані ряди (1) і (2) множимо на сталі множники і додаємо. У результаті маємо

$$\frac{6}{(1-x)(1+2x)} = \frac{2}{1-x} + \frac{4}{1+2x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2 + 4 \cdot (-1)^n \cdot 2^n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n \cdot 2^{n+2}) x^n, |x| < \frac{1}{2}.$$

Інтервал збіжності останнього ряду $|x| < \frac{1}{2}$, бо інтервал збіжності ряду

(1) $|x| < 1$, а ряду (2) $|x| < \frac{1}{2}$, тобто для $|x| < \frac{1}{2}$ збігаються обидва ряди.

б) Подамо раціональну функцію $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x/2}$$

Застосуємо розклад $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$, (3)

де замінимо x на $x/2$ і отримаємо

$$\frac{1}{1-x/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x/2)^n, \left| \frac{x}{2} \right| < 1 \quad \text{або} \quad |x| < 2. \quad (4)$$

Враховуючи, що ряд (3) збігається для $|x| < 1$, а ряд (4) – для $|x| < 2$, маємо, що обидва ряди збігаються для $|x| < 1$, тобто в інтервалі $|x| < 1$ їх можна почленно додавати зі сталими множниками:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} x^n, |x| < 1.$$

Приклад 4. Розкласти задані функції в ряд Маклорена:

а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}$; в) $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

Розв'язання. Для розвинення заданих функцій в ряд Маклорена скористаємося біноміальним рядом:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot [m-(n-1)]}{n!} x^n + \dots, |x| < 1.$$

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = [1+(-x^2)]^{-\frac{1}{2}}$$

Покладемо $m = -\frac{1}{2}$ і замість x підставимо $-x^2$;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2!}x^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{3!}x^6 + \dots + \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{1}{n!}x^{2n} + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}x^{2n} + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad -1 < x < 1. \end{aligned}$$

б) Перетворимо задану функцію до такого вигляду, що дозволяє застосувати біноміальний ряд:

$$\sqrt[3]{8-x^3} = \sqrt[3]{8\left(1-\frac{x^3}{8}\right)} = 2\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} = 2\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}} = \frac{1}{2}\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}}.$$

Покладемо $m = -\frac{1}{3}$ і замість x запишемо $\left(-\frac{x}{2}\right)^3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{x^3}{8}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^3}{8}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{x^3}{8}\right)^3 \frac{1}{3!} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)\dots\left(-\frac{1}{3}-n+1\right) \cdot \frac{1}{n!}\left(-\frac{x^3}{8}\right)^n + \dots\right] = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{8} + \frac{4}{3^2} \frac{1}{2!}\left(\frac{x^3}{8}\right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3^3} \frac{1}{3!}\left(\frac{x^3}{8}\right)^3 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3^n n!}\left(\frac{x^3}{8}\right)^n + \dots\right), \text{ де } \left|\frac{x}{2}\right| < 1, \text{ тобто } |x| < 2. \end{aligned}$$

в) Запишемо функцію як $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2} = (1+x) \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$. Розкладемо

дріб $\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$ у біноміальний ряд, покладаючи $m = -2$ та замість x підставляючи $(-x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + (-2)(-x) + (-2)(-3) \cdot \frac{1}{2!}(-x)^2 + (-2)(-3)(-4) \cdot \frac{1}{3!}(-x)^3 + \dots + \\ &+ (-2)(-3)(-4) \cdot \dots \cdot (-2-n+1) \cdot \frac{1}{n!}(-x)^n + \dots = \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + \dots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Цей ряд помножимо на $(1+x)$ і отримаємо шуканий розклад:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)(1+2x+3x^2+4x^3+\dots+(n+1)x^n+\dots) = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots+ \\ &+ (n+1)x^n+\dots+x+2x^2+3x^3+4x^4+\dots+(n+1)x^{n+1}+\dots = \\ &= 1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\dots+(2n+1)x^n+\dots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Приклад 5. Розкласти в ряд Маклорена функції:

а) $f(x) = a^x (a > 0)$; б) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right)$; в) $f(x) = \ell^2 \sin 2x$

та знайти інтервали, в яких ряд абсолютно збігається до відповідної функції.

Розв'язання. а) Запишемо задану функцію так:

$$f(x) = a^x = e^{x \ln a}.$$

У розкладі

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty$$

замість x запишемо $x \ln a$ і одержимо:

$$a^x = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

б) Спочатку розкладемо в ряд Маклорена функцію $\frac{1}{1-x^2} - 1 = (1-x^2)^{-1} - 1$. Для цього скористаємося біноміальним рядом, поклавши $m = -1$ і замість x підставивши $-x^2$. Дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^2} - 1 &= 1 + (-1)(-x^2) + (-1)(-2) \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} (-x^2)^3 + \dots - 1 = \\ &= x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$