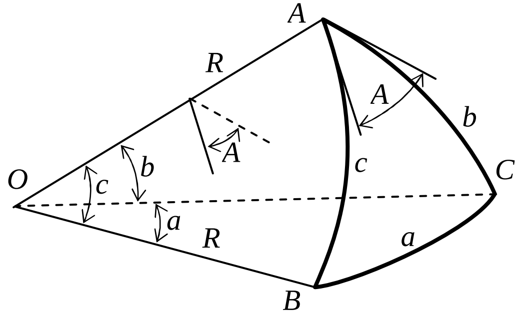
М. П. Данилевський
А. І. Колосов
А. В. Якунін

ОСНОВИ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

та



ТРИГОНОМЕТРІЇ

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

**М. П. Данилевський,
А. І. Колосов,
А. В. Якунін**

ОСНОВИ СФЕРИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ та ТРИГОНОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

***Рекомендовано
Міністерством освіти і науки,
молоді та спорту України***

**Харків
ХНАМГ
2011**

УДК [514.113+514.116]((075ю8)
ББК 22.151.05я73-1
Д18

***Рецензенти*:**

О. М. Литвин, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики (Українська інженерно-педагогічна академія);
М. В. Новожилова, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики та інформаційних технологій (Харківський державний технічний університет будівництва і архітектури);
А. Д. Тевяшев, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики (Харківський національний університет радіоелектроніки);
І. М. Патракеєв, кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри геоінформаційних систем і геодезії (Харківська національна академія міського господарства)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів геодезичних спеціальностей вищих навчальних закладів
(*лист № 1/11-3562 від 11.05.2011 р.*)

Данилевський М. П.
Д18 Основи сферичної геометрії та тригонометрії: навч. посібник / М. П. Данилевський, А. І. Колосов, А. В. Якунін; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. − Х.: ХНАМГ, 2011. − 92 с.
ISBN 978-966-695-213-7

Теоретичний матеріал подається у досить стислій формі – наводяться основні означення і факти з концентрацією уваги на розкритті суті понять, їх взаємозв’язків без надмірної строгості викладу. Для кращого розуміння використовуються відповідні графічні ілюстрації. Закріпленню знань сприяють детально розібрані типові приклади. Для самостійного опрацювання наведено контрольні запитання та вправи, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання.

Рис. 17 Бібл. 8

УДК [514.113+514.116](075ю8)
ББК 22.151.05я73-1

ISBN 978-966-695-213-7

Вступ

Сферичною геометрією називається розділ математики, в якому вивчаються геометричні фігури, що лежать на поверхні кулі.

Сферична тригонометрія розглядає методи розв'язання сферичних трикутників, що утворюються при перетині дуг великих кіл на кульовій поверхні.

Кулею називається тіло, що утворюється обертанням півкруга навколо його діаметра.

Поверхня, що утворюється при цьому, називається ***кульовою*** або ***сферичною поверхнею***, а частіше просто ***сферою***.

Сфера – геометричне місце точок у просторі, рівновіддалених від однієї точки, що називається її ***центром*** (рис. 1). Відрізок, який сполучає довільну точку сфери з її центром, називається ***радіусом***. Відрізок, який проходить через центр і сполучає дві точки сферичної поверхні, називається ***діаметром***.

1. Основи сферичної геометрії. Загальні відомості про сферичні трикутники

1.1. Точки та дуги на поверхні сфери. Сферичний двокутник. Сферичний трикутник

Найпростіші фігури на сферичній поверхні – точки і дуги великих та малих кіл.

При перетині сфери площиною, що проходить через її центр O, утворюється ***велике коло*** типу $CABD$ (рис. 1). Січна площина, що не проходить через центр сфери, утворює ***мале коло*** типу $LMNT$.

Діаметр PP_1, що проходить через центр O великого кола $CABD$ перпендикулярно до його площини, перетинає поверхню сфери у двох точках P та P_1. Ці ***дві діаметрально протилежні точки*** P та P_1 називаються ***полюсами*** даного великого кола $CABD$. Саме коло $CABD$ по відношенню до точок P та P_1 називається ***полярою***.

Кожна точка поляри $CABD$ називається ***полярно спряженою*** з кожним з її полюсів P та P_1. *Точки* A *і* P *сферичної поверхні є* *полярно спряженими, коли радіуси* OA *і* OP *перпендикулярні*.

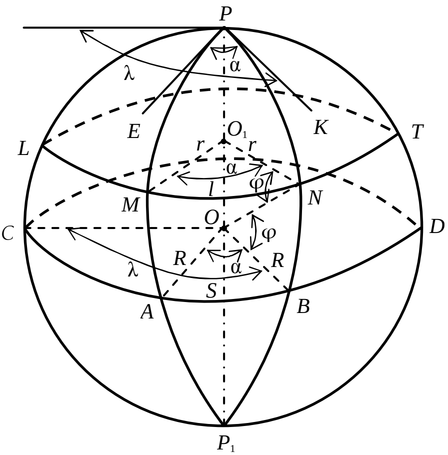


Рис. 1

Кожному великому колу взаємно однозначно відповідає пара його полюсів, а кожній парі діаметрально протилежних точок взаємно однозначно відповідає їх поляра. Якщо велике коло проходить через пару діаметрально протилежних точок, то полюси цього кола лежать на полярі даної пари. Звідси випливає

<u>принцип двоїстості</u>: *у сферичній геометрії кожному твердженню відповідає інше* ***двоїсте****, що одержується з даного взаємною заміною слів*: "*пара діаметрально протилежних точок*" і "*велике коло*", "*лежить на*" і "*проходить через*", "*сполучаються*" і "*перетинаються в*" і *т.д*.

Згідно з цим принципом, якщо одне з двох двоїстих тверджень доведене, то доведення іншого може бути одержане переходом від кожного великого кола до його полюсів, а від кожної пари діаметрально протилежних точок – до відповідної поляри.

У геометрії на сфері великі кола відіграють роль прямих на площині. Зокрема, велике коло ділить сферу на дві ***півсфери***, для яких це коло служить ***межею***.

Через довільні дві різні точки A *та* B *на сферичній поверхні, що не є діаметрально протилежними, проходить єдине велике коло* $CABD$. Це аналогічно тому, що на площині через довільні дві різні точки проходить єдина пряма. Але *через діаметрально протилежні точки* P *та* P_1 *можна провести нескінченну кількість великих кіл. Будь-які два різні великі кола перетинаються у двох діаметрально протилежних точках*. У цьому відмінність сферичної геометрії від плоскої, де дві різні прямі перетинаються не більш як в одній точці.

Величина дуги AB великого кола визначається центральним кутом $\alpha = \angle AOB$, що утворюється радіусами сфери OA та OB.

Кут α є лінійним кутом двогранного кута, який утворений півплощинами великих півкіл PAP_1 та PBP_1.

Зв'язок кутової (градусної, радіанної) та лінійної мір дуги великого кола встановлюється за формулою

$$S = \alpha R = \alpha^\circ R / \rho^\circ , \quad (1.1)$$

де S, α, α° − лінійна, радіанна та градусна міри дуги великого кола; R − радіус сфери; ρ° − число градусних одиниць в радіані, $\rho^\circ = 180^\circ / \pi = 57^\circ,2957795...$.

З рис. 1, де $\varphi = \angle BON$, видно, що радіус $r = O_1N$ малого кола $LMNT$ дорівнює

$$r = R\cos\varphi . \quad (1.2)$$

Дузі MN малого кола $LMNT$ відповідає центральний кут $\alpha = \angle MO_1N$. Довжина l цієї дуги обчислюється за формулою

$$l = \alpha\, r = \alpha\, R\cos\varphi = S\cos\varphi . \quad (1.3)$$

Для малого кола $LMNT$, площина якого перпендикулярна діаметрові PP_1, ближчий полюс P називається ***сферичним центром***, а дуга PM великого кола – ***сферичним радіусом*** малого кола $LMNT$.

Кутом між двома просторовими лініями, що перетинаються, називається кут між дотичними до цих ліній у точці їх перетину. Окремим випадком є кут APB між дугами великих півкіл PAP_1 та PBP_1, що називається ***сферичним кутом*** (рис. 1). Він визначається кутом між дотичними EP та KP до цих дуг. Неважко довести, що $\angle EPK = \alpha$, тому що $EP \perp PP_1$ та $KP \perp PP_1$.

Оскільки обидва кути APB і AP_1B, утворені двома великими півколами PAP_1 та PBP_1 при їх різних кінцях P та P_1, рівні одному й тому ж куту $\alpha = \angle AOB$, то ці кути рівні між собою. Величина кожного з них називається ***кутом між двома великими півколами***.

Два великих кола визначають чотири кута між двома півколами, попарно рівні один одному. Ті з кутів, обидві сторони яких є продовженням сторін другого, рівні між собою і називаються ***вертикальними кутами*** (рис. 2). А ті з них, що мають одну спільну сторону, в сумі складають розгорнутий кут у 180° і називаються ***суміжними кутами*** (рис. 3).

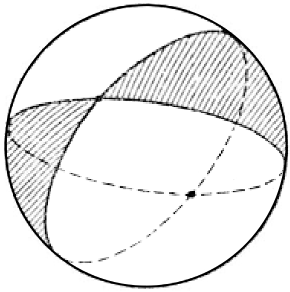


Рис. 2

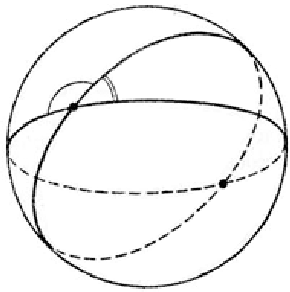


Рис. 3

На поверхні сфери звичайно розглядають фігури, що утворюються перетином дуг великих кіл.

Частина PAP_1B поверхні сфери, що обмежена двома великими півколами PAP_1 та PBP_1, які мають спільний діаметр PP_1, називається ***сферичним двокутником*** (рис. 1). Сторони двокутника завжди рівні 180°. Сферичний двокутник визначається значенням кутів при його вершинах – кутом між двома великими півколами. У разі двокутника PAP_1B цей кут − $\alpha = \angle AOB$.

Сферичним трикутником називається частина поверхні сфери, що обмежена трьома попарно сполученими дугами великих кіл.

Сферичний трикутник ABC має шість основних елементів: три кути A, B, C та три сторони a, b, c. Кути позначають тими ж великими літерами, що й вершини трикутника, а протилежні їм сторони – відповідними малими буквами.

У подальшому будемо розглядати тільки так звані ***ейлерові*** сферичні трикутники − такі, що задовольняють ***обмеженням Ейлера***: *кути та сторони можуть приймати значення лише в межах від* 0° *до* 180°.

Оскільки через дві різні точки, що не лежать на одному діаметрі, можна провести тільки одну дугу великого кола, меншу за

180°, то побудова трикутника заданої орієнтації є однозначною.

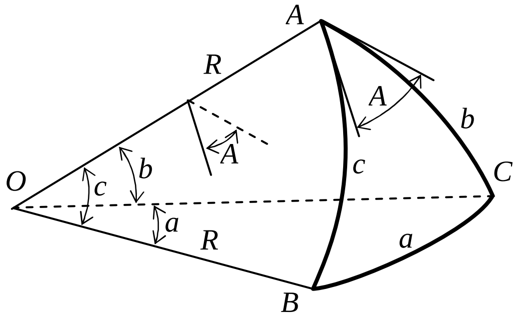


Рис. 4

Площини великих кіл, дуги яких служать сторонами сферичного трикутника ABC, перетинаються між собою у центрі сфери O та утворюють тригранник $OABC$ (рис. 4).

З рис. 4 видно, що кути сферичного трикутника рівні відповідним двогранним кутам тригранника. Сторони трикутника, визначені у кутовій мірі, дорівнюють відповідним плоским кутам тригранника. Тобто, усі шість елементів сферичного трикутника дорівнюють відповідним елементам тригранника.

Сторони сферичного трикутника a, b та c прийнято вимірювати у кутовій мірі, тому вибір радіуса сфери стає не суттєвим. На рис. 5 трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ мають різні (пропорційні) лінійні розміри, але їх елементи, що відображені в кутовій мірі, є відповідно рівними. Тому з метою спрощення доведення формул радіус R сфери приймають за одиницю: $R = 1$.

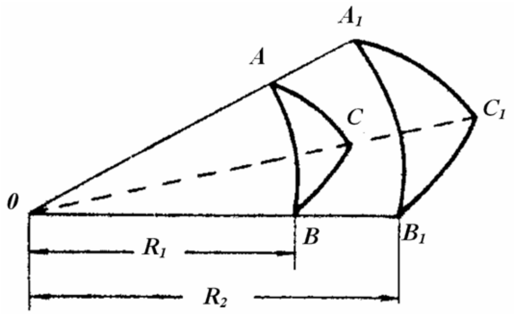


Рис. 5

За формою сферичні трикутники поділяють на:

1) ***прямокутні***, якщо хоча б один із кутів трикутника дорівнює 90°;

2) ***прямосторонні***, якщо хоча б одна зі сторін трикутника дорівнює 90°;

3) ***косокутні*** – в інших випадках.

Сферичні трикутники (за означенням) одночасно можуть бути прямокутними та прямосторонніми. Таким, наприклад, є трикутник

PAB на рис. 1, який має кути при вершинах A та B, а також сторони PA та PB, що дорівнюють 90°. Можна побудувати сферичний трикутник, який має всі сторони та всі кути, що дорівнюють 90°. Такий трикутник є восьмою частиною поверхні сфери й утворюється перетином трьох великих кіл, які лежать на взаємно перпендикулярних площинах.

У сферичній геометрії (за аналогією з плоскою) прийняті також поняття про ***різносторонні***, ***рівнобедрені*** та ***рівносторонні*** трикутники.

Сферичні трикутники мають ***висоти***, ***медіани*** та ***бісектриси***, означення яких аналогічні означенням цих елементів у плоскій геометрії. Наприклад, бісектрисою кута A сферичного трикутника ABC називається дуга AL великого кола, що ділить цей кут пополам.

Бісектриси трьох кутів сферичного трикутника перетинаються у сферичному центрі малого кола, вписаного в трикутник.

Серединні перпендикуляри до трьох сторін сферичного трикутника перетинаються у сферичному центрі малого кола, описаного навколо трикутника.

Розв'язання сферичних трикутників складає предмет сферичної тригонометрії та знаходить застосування в астрономії, картографії, навігації, вищій геодезії, кристалографії, фотограмметрії та при розгляді геометричних задач у ряді інших дисциплін.

1.2. Сферична відстань. Географічна сферична система координат

Менша дуга AB великого кола $CABD$ визначає ***сферичну відстань*** (***метрику***) між точками A та B на сферичній поверхні (рис. 1) і називається ***ортодромією***. Ортодромія AB є найкоротшою геодезичною лінією на сфері, що з'єднує A та B. Звичайно її визначають у кутовій мірі.

Для введеної таким чином метрики справджується ***нерівність трикутника***:

Сума двох сторін сферичного трикутника завжди більша за третю сторону:

$$a + b > c; \quad b + c > a; \quad a + c > b. \tag{1.4}$$

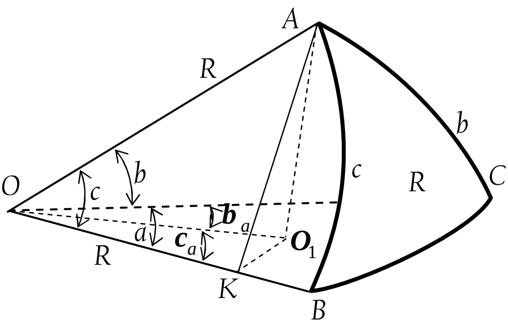


Рис. 6

Нерівності (1.4) випливають зі співвідношень між плоскими кутами відповідного тригранника (рис. 6).

Доведемо, наприклад, другу нерівність $b+c>a$. Нехай

$$AO_1 \perp (OBC)$$

і $OB \perp O_1K$.

Тоді $OO_1 \perp AO_1$ і $OB \perp AK$. З прямокутних трикутників AOK і O_1OK маємо: $OK = OA\cos c$; $OK = OO_1\cos c_a$. Звідси $OA\cos c = OO_1\cos c_a$. Оскільки $OO_1 < OA$ (як катет і гіпотенуза прямокутного ΔAOO_1), то $\cos c < \cos c_a$. Звідки $c > c_a$. Аналогічно можна показати, що $b > b_a$. Тоді $b+c > b_a + c_a = a$.

Для суми плоских кутів тригранника $OABC$ виконується нерівність

$$0^\circ < a+b+c < 360^\circ, \tag{1.5}$$

яку можна перефразувати так:

Сума сторін сферичного трикутника завжди більша за 0° *і менша за* 360°.

Безпосередньо з нерівностей (1.4) випливає, що:

а) *кожна зі сторін сферичного трикутника більша за різницю двох інших*:

$$a > c-b;\quad c > a-b\ ;\quad b > a-c\ ; \tag{1.6}$$

б) *півпериметр* $p = (a+b+c)/2$ *сферичного трикутника більший за кожну з його сторін*:

$$p > a;\quad p > b;\quad p > c. \tag{1.7}$$

Положення довільної точки N на сферичній поверхні може бути визначене введенням деякої системи координат.

Географічна сферична система координат (рис. 1) задається двома взаємно перпендикулярними великими колами $CABD$ та $PLCP_1DT$. Коло $CABD$ називається ***екватором***, а півколо $PLCP_1$ − ***початковим меридіаном***. Координатна сітка цієї системи утворюється ***паралелями*** – колами малих кіл, що паралельні екватору, та ***меридіанами*** – півколами великих кіл, що перпендикулярні до екватора. Кожний меридіан з'єднує ***північний*** P та ***південний*** P_1 ***полюси***.

Місцезнаходження довільної точки N на сфері визначається двома координатами (φ, λ), де φ − ***широта*** та λ − ***довгота***. Широта φ вимірюється кутом $\varphi = \angle BON$ або сферичною відстанню $\varphi = BN$ уздовж меридіана від екватора до відповідної паралелі $LMNT$ (на північ або південь від 0° до 90°). Довгота λ вимірюється кутом $\lambda = \angle CPB$ між початковим меридіаном $PLCP_1$ та відповідним меридіаном $PNBP_1$ або відстанню $\lambda = CB$ уздовж екватора від початкового меридіану до відповідного меридіану $PNBP_1$ (на схід чи захід від 0° до 180°).

Для двох довільних точок M_1 та M_2 на поверхні сфери ***азимутом*** точки M_2 по відношенню до точки M_1 називається сферичний кут μ_{21}, який утворюється ортодромією M_1M_2 та меншою дугою меридіана PM_1P_1, що проходить через точку M_1 (рис. 7).

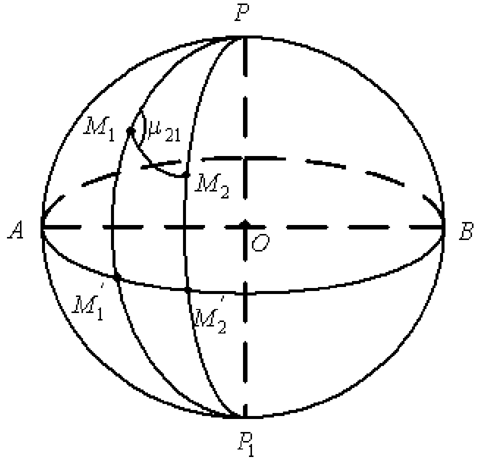


Рис. 7

Зауваження. У навігації при виборі траєкторії часто відмовляються від ортодромії, оскільки остання (крім випадків, коли нею служить дуга екватора чи меридіана) перетинає меридіани під різними кутами, що вимагає постійної зміни курсу судна. Зручніше рухатися по ***локсодромії*** – лінії, що утворює з кожним меридіаном сталий кут K. На сфері при $K = 0^\circ$ і $K = 180^\circ$ локсодромія співпадає з меридіаном, а при $K = 90^\circ$ і $K = 270^\circ$ – з паралеллю чи екватором. В інших випадках вона має вигляд спіралі з нескінченним числом витків, що необмежено наближається до полюсів (рис. 8). При переміщенні на великі відстані, коли різниця довжин локсодромії та ортодромії стає суттєвою, спочатку розраховують ортодромію, потім відмічають на ній проміжні точки і наближено замінюють кожну ділянку між сусідніми точками відповідною локсодромією.

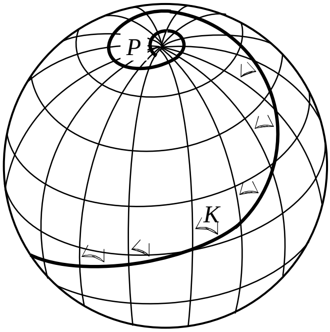


Рис. 8

Довжина S та кут K локсодромії між точками $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$ та $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$ визначаються зі співвідношень:

а) при $\varphi_1 = \varphi_2$: $K = 90^\circ$; $S = R\cos\varphi_1^\circ \cdot |\Delta\lambda^\circ| / \rho^\circ$;

б) при $\varphi_1 \neq \varphi_2$:

$$tg\,K = \frac{\Delta\lambda^\circ / \rho^\circ}{\ln tg\,(45^\circ + \varphi_2^\circ/2) - \ln tg\,(45^\circ + \varphi_1^\circ/2)};\quad S = \frac{R\Delta\varphi^\circ}{\rho^\circ \cos K}.$$

Тут широта φ° і довгота λ° подаються в градусах; $\Delta\lambda^\circ = \lambda_2^\circ - \lambda_1^\circ$; $\Delta\varphi^\circ = \varphi_2^\circ - \varphi_1^\circ$. (Через складність доведення формул опускаємо).

1.3. Полярні сферичні трикутники

Розглянемо сферичний трикутник ABC і відповідний тригранник $OABC$ (рис. 4). Проведемо через центр O три промені OA_1, OB_1 і OC_1, що перпендикулярні відповідно до граней OBC, OAC і OAB та направлені всередину тригранника. Точки перетину A_1, B_1 і C_1 цих променів зі сферою служать полюсами відповідно поляр BC, AC і AB − сторін ΔABC. Сферичний трикутник

$A_1B_1C_1$ називають ***полярним*** до даного трикутника ABC.

Виявляється, що трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ ***взаємополярні***: якщо вершини трикутника ABC є полюсами сторін трикутника $A_1B_1C_1$, то і, навпаки, вершини трикутника $A_1B_1C_1$ є полюсами сторін трикутника ABC (рис. 9).

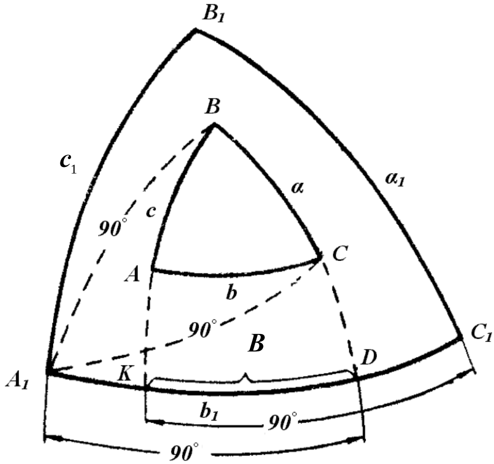


Рис. 9

Сферичний трикутник, що співпадає зі своїм полярним, називають ***автополярним***. Такий трикутник є восьмою частиною поверхні сфери.

Користуючись рис. 9, знайдемо співвідношення між елементами B і b_1 взаємополярних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$:

$$A_1K = A_1D - KD = 90^\circ - B;\ \ b_1 = A_1C_1 = A_1K + KC_1 =$$

$$= 90^\circ - B + 90^\circ = 180^\circ - B. \text{ Звідси } b_1 + B = 180^\circ.$$

Аналогічні вирази можна знайти для пар A і a_1, C і c_1.

Ці співвідношення

$$a_1 + A = 180^\circ;\ \ b_1 + B = 180^\circ;\ \ c_1 + C = 180^\circ \qquad (1.8)$$

виражають основну властивість полярних трикутників: *сума довільного кута даного трикутника ABC та відповідної йому сторони полярного трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює* 180°:

З того, що трикутники ABC та $A_1B_1C_1$ − взаємополярні, випливає

$$a + A_1 = 180^\circ;\ \ b + B_1 = 180^\circ;\ \ c\ + C_1 = 180^\circ. \qquad (1.9)$$

Таким чином, *кожне твердження про <u>сторони та кути</u> сферичного трикутника може бути перетворене у відповідне твердження про <u>кути та сторони</u> полярного трикутника*.

Розглянемо два взаємополярні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 9). Застосовуючи співвідношення (1.5) до полярного трикутника $A_1B_1C_1$, дістанемо

$$0^\circ < a_1 + b_1 + c_1 < 360^\circ. \qquad (1.10)$$

На підставі властивостей полярних трикутників (1.8), можна написати:

$$a_1 = 180^\circ - A,\quad b_1 = 180^\circ - B,\quad c_1 = 180^\circ - C. \qquad (1.11)$$

Підставимо значення сторін a_1, b_1 та c_1 (1.11) у нерівність (1.10) та знайдемо: $0^\circ < 540^\circ - \left(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}\right) < 360^\circ$.

Віднімемо з усіх частин останньої нерівності 540°, змінимо знак на протилежний та одержимо вираз

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ. \qquad (1.12)$$

Тобто,

сума кутів сферичного трикутника завжди більша за 180° *і менша за* 540°.

Для полярного трикутника $A_1B_1C_1$ у відповідності з формулами (1.4) маємо: $a_1 + b_1 > c_1$. Підставимо в цю нерівність значення сторін a_1, b_1 та c_1 з формул (1.11) і дістанемо:

$$360^\circ - A - B > 180^\circ - C \quad \text{або} \quad A + B - C < 180^\circ.$$

Отже,

сума двох кутів сферичного трикутника без третього менша за 180°:

$$A + B - C < 180^\circ,\ A + C - B < 180^\circ,\ B + C - A < 180^\circ. \qquad (1.13)$$

1.4. Рівність сферичних трикутників. Спряжені трикутники

Рухом (***переміщенням***) на сфері називається таке її перетворення, що зберігає відстані між точками. Відомо [1], що:

*будь-який рух на сфері є композицією **повороту навколо осі** та **дзеркальної симетрії відносно площини***;

будь-який рух на сфері переводить пару діаметрально протилежних точок знову в таку ж пару.

Два сферичні трикутники називаються ***рівними***, якщо їх можна сумістити один з одним переміщенням на сфері.

Рівність трикутників на сфері, як і на площині, визначається рівніс*тю їх трьох елементів*.

Два сферичних трикутники, що розміщені на одній і тій же сфері, рівні між собою, якщо вони мають відповідно рівні:

1) *дві сторони та кут між ними*; 2) *одну сторону та два прилеглих до неї кути*; 3) *три сторони*; 4) *три кути*.

Перші три випадки аналогічні відповідним у геометрії на площині та можуть бути доведені суміщенням трикутників один з одним рухом на сфері. Справедливість рівності трикутників у четвертому випадку випливає з наступних міркувань. Відомо, що три двогранні кути повністю визначають тригранник. Але два тригранники, що мають відповідно рівні двогранні кути, будуть рівними, отже їх можна сумістити один з одним усіма їхніми точками. Такі тригранники будуть утворювати на поверхні однієї і тієї ж сфери трикутники, що мають усі відповідно рівні елементи.

<u>Зауваження 1</u>. Порівнюючи попарно перший випадок з другим, а третій з четвертим, зазначимо, що коли для двох сферичних трикутників виконується перша ознака кожної пари, то для полярних по відношенню до них трикутників справедлива друга ознака тієї ж пари.

<u>Зауваження 2</u>. На поверхні сфери, як і на площині, можливий випадок, коли два рівних трикутники мають протилежну орієнтацію. Якщо розглядати ці трикутники як тверде тіло, то їх не можна сумістити один з одним, не виходячи зі сферичної поверхні, тобто використовуючи тільки обертання навколо осі. Для цього потрібно застосувати також дзеркальну симетрію. Такі трикутники називають ***дзеркальними***, а в геодезії для них більш вживаним є термін "***симетричні***".

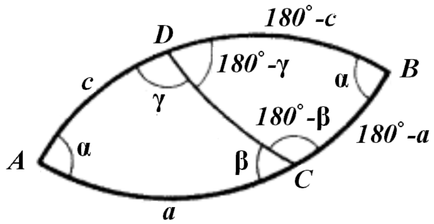


Рис. 10

На рис. 10 зображений двокутник з кутом α та проведена дуга великого кола CD. Ця дуга ділить даний двокутник на два сферичних трикутники ACD та BCD, що називаються ***спряженими*** за стороною CD.

Для будь-якого сферичного трикутника існує три спряжених (за кожною зі сторін).

У спряжених трикутників завжди є одна спільна сторона. Протилежні цій стороні кути рівні між собою (на рис. 10 сторона CD та кути α). Кути при двох інших вершинах C та D, а також прилеглі до них сторони, доповнюють один одного до 180°.

1.5. Площа сферичного трикутника

Спочатку одержимо формулу для площі сферичного двокутника. Якщо площу поверхні кулі поділити на 360 рівних частин, то кожна із них дорівнюватиме площі F_{1° двокутника з кутом при вершині в 1°: $F_{1^\circ} = 4\pi R^2/360 = 2\pi R^2/180$.

Тоді площа двокутника з кутом α° буде

$$F_\alpha = F_{1^\circ}\,\alpha^\circ = (2\pi/180)\,R^2\alpha^\circ = 2\alpha^\circ R^2/\rho^\circ\,, \qquad (1.14)$$

де $\rho^\circ = 180^\circ/\pi = 57^\circ{,}2957795...$ та α° подано у градусах.

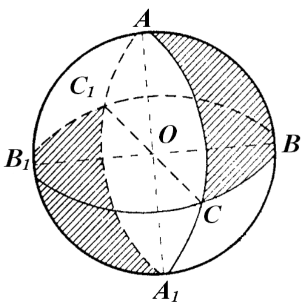


Рис. 11

Виразимо α у радіанній мірі і дістанемо:

$$F_\alpha = 2\alpha R^2\,. \qquad (1.15)$$

На рис. 11 подано два рівних (точніше, дзеркальних) трикутники ABC та $A_1B_1C_1$. Трикутник $A_1B_1C_1$ утворюється дугами великих кіл, що є продовженням сторін ΔABC. Відповідні вершини обох трикутників лежать у діаметрально протилежних точках.

Площа сферичного трикутника ABC, згідно з рис. 11, може бути виражена такими трьома співвідношеннями:

$$\left.\begin{aligned} F_{ABC} &= F_A - F_{A_1BC} \\ F_{ABC} &= F_B - F_{AB_1C} \\ F_{ABC} &= F_C - F_{ABC_1} \end{aligned}\right\}, \qquad (1.16)$$

де F_A, F_B, F_C – площі двокутників ABA_1C, BAB_1C та CAC_1B; F_{A_1BC}, F_{AB_1C}, F_{ABC_1} – площі трикутників A_1BC, AB_1C та ABC_1.

Складемо окремо ліві та праві частини рівнянь (1.16) і врахуємо формулу (1.15). Тоді

$$3F_{ABC} = 2R^2(A+B+C) - (F_{A_1BC} + F_{AB_1C} + F_{ABC_1}).$$

Оскільки трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ – рівні, то їх площі однакові. Тоді

$$3F_{ABC} = 2R^2(A+B+C) - (F_{A_1BC} + F_{AB_1C} + F_{A_1B_1C}). \qquad (1.17)$$

Другий доданок правої частини рівняння (1.17), що видно з рис. 11, дорівнює площі $2\pi R^2$ півсфери без площі ΔABC:

$$F_{A_1BC} + F_{AB_1C} + F_{A_1B_1C} = 2\pi R^2 - F_{ABC}.$$

Тоді зі співвідношення (1.17) випливає

$$2F_{ABC} = 2R^2(A+B+C-\pi) \quad \text{або} \quad F_{ABC} = R^2(A+B+C-\pi).$$

Різниця між сумою всіх внутрішніх кутів сферичного трикутника і сумою всіх таких же кутів плоского трикутника називається ***сферичним надлишком*** (***ексцесом***) ε даного трикутника:

$$\varepsilon^\circ = A+B+C-180^\circ \quad \text{або} \quad \varepsilon = A+B+C-\pi. \qquad (1.18)$$

Застосовуючи це поняття, для площі сферичного трикутника остаточно одержуємо

$$F_{ABC} = R^2\varepsilon, \qquad (1.19)$$

де сферичний надлишок ΔABC взято у радіанній мірі.

Площа сферичного трикутника дорівнює добутку квадрата радіуса великого кола на сферичний надлишок.

1.6. Поняття про сферичний многокутник

Сферичним многокутником називається замкнена частина поверхні сфери, що обмежена послідовно сполученими дугами великих кіл, які менші півкола.

Сферичний многокутник називається ***опуклим***, якщо він розміщений по один бік від кожного з великих кіл, частиною яких служать його сторони.

Кожному сферичному многокутнику відповідає многогранний кут, вершиною якого служить центр сфери, а ребрами – відрізки, що сполучають центр з вершинами многокутника. Навпаки, будь-який многогранний кут з вершиною в центрі сфери перетинає її по сферичному многокутнику.

Кути сферичного многокутника рівні відповідним двогранним кутам многогранника. Можна довести, що

периметр опуклого сферичного многокутника менше великого кола.

Сполучимо одну з вершин опуклого сферичного n-кутника дугами великих кіл зі всіма іншими його вершинами. Одержимо $n-2$ сферичних трикутника. Площа n-кутника дорівнює сумі площ отриманих трикутників. Тому площу F_n n-кутника обчислюють за формулою $F_n = R^2\left(\Sigma_n-(n-2)\pi\right)$, де Σ_n – сума всіх його внутрішніх кутів.

2. Основи сферичної тригонометрії. Основні формули

Основні формули (***формули першого порядку***) зв’язують чотири чи п’ять елементів сферичного трикутника. Вони дають можливість за відомими трьома чи чотирма елементами знайти четвертий чи п’ятий.

2.1. Формули косинусів сторін сферичного трикутника

Розглянемо рис. 12, на якому зображено трикутник ABC на сфері з радіусом, що дорівнює одиниці, та центром у точці O. У вершині A проведені дотичні AE та AD до сторін b та c. Ці дотичні перетинаються у точках D і E з продовженням радіусів сфери, що проходять через вершини C і B.

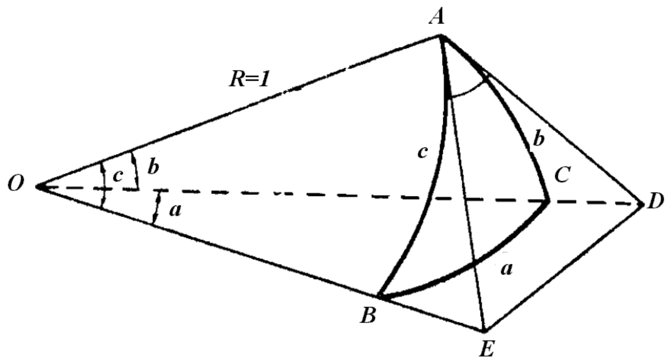


Рис. 12

Застосуємо теорему косинусів тригонометрії на площині до трикутників AED та OED і запишемо її для сторони DE :

$$\left.\begin{aligned} DE^2 &= AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cos A \\ DE^2 &= OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos \alpha \end{aligned}\right\} . \qquad (2.1)$$

Прирівняємо між собою праві частини рівнянь (2.1) і знайдемо:

$$(OE^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2) - 2OD \cdot OE \cos \alpha +$$
$$+ 2AE \cdot AD \cos A = 0.$$

Зважаючи, що радіус сфери $R = 1$ маємо:

$$(OE^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2) = OA^2 + OA^2 = 2 ;$$

$$AD = tg\, b ; \quad AE = tg\, c ; \quad OE = 1/\cos c ; \quad OD = 1/\cos b .$$

Далі одержуємо: $1 - \dfrac{\cos a}{\cos b \cos c} + tg\, b\ tg\, c\ \cos A = 0$.

Помножимо всі доданки останнього рівняння на $\cos b\ \cos c$ і остаточно дістанемо:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c\ \cos A . \qquad (2.2)$$

Побудова на рис. 12 можлива, якщо кожна зі сторін b і c менша 90°. Тому вираз (2.2) потрібно узагальнити на той випадок, коли трикутник має сторони більші за 90°. Для цього звернемося до рис. 13. На ньому зображено ΔABC, що має сторони $b > 90^\circ$ і $c > 90^\circ$. Якщо продовжимо сторони b і c до їх перетину в точці D, то одержимо спряжений трикутник BCD, в якому кожна зі сторін $180° - b$ і $180° - c$ буде менша за 90°. Застосовуючи на цій основі вираз (2.2) до трикутника BCD, можемо записати:

$$\cos a = \cos(180^\circ - b)\cos(180^\circ - c) +$$

$$+\sin(180^\circ - b)\sin(180^\circ - c)\cos A$$

або $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

що співпадає з формулою (2.2).

Зауваження. При написанні формул сферичної тригонометрії часто використовують ***метод перестановки елементів по колу***: *кожну зі сторін та кожний з кутів трикутника замінюють у формулі, яку розглядають, наступними за ходом сторонами та кутами* (*у довільному напрямі*), *при цьому останній елемент завжди замінюють на перший* (схема на рис. 14).

Застосуємо цей метод до співвідношення (2.2) і запишемо ***формули косинусів сторін сферичного трикутника***:

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B\\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\end{aligned}\right\}. \qquad (2.3)$$

Косинус сторони сферичного трикутника дорівнює добутку косинусів двох інших сторін, складеному з добутком синусів цих же сторін на косинус кута між ними.

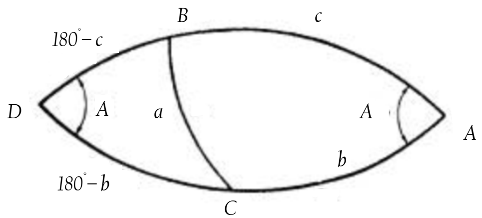


Рис. 13

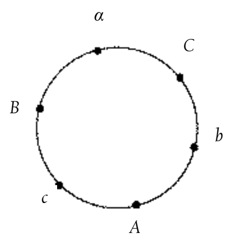


Рис. 14

2.2. Формули косинусів кутів сферичного трикутника

Запишемо формули (2.3) для сторін полярного трикутника $A_1B_1C_1$ по відношенню до трикутника ABC:

$$\left.\begin{aligned}\cos a_1 &= \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1\\ \cos b_1 &= \cos a_1 \cos c_1 + \sin a_1 \sin c_1 \cos B_1\\ \cos c_1 &= \cos a_1 \cos b_1 + \sin a_1 \sin b_1 \cos c_1\end{aligned}\right\}. \qquad (2.4')$$

Згідно з основною властивістю взаємополярних трикутників $A_1B_1C_1$ і ABC:

$$\left.\begin{aligned}a_1 &= 180^\circ - A; \quad b_1 = 180^\circ - B; \quad c_1 = 180^\circ - C;\\ A_1 &= 180^\circ - a; \quad B_1 = 180^\circ - b; \quad C_1 = 180^\circ - c\end{aligned}\right\}. \qquad (2.4'')$$

Підставимо (2.4″) у (2.4′) і дістанемо:

$$\left.\begin{aligned}&\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B)\cos(180^\circ - C) +\\ &+ \sin(180^\circ - B)\sin(180^\circ - C)\ \cos(180^\circ - a)\\ &\cos(180^\circ - B) = \cos(180^\circ - A)\cos(180^\circ - C) +\\ &+ \sin(180^\circ - A)\sin(180^\circ - C)\cos(180^\circ - b)\\ &\cos(180^\circ - C) = \cos(180^\circ - A)\cos(180^\circ - B) +\\ &+ \sin(180^\circ - A)\sin(180^\circ - B)\ \cos(180^\circ - c)\end{aligned}\right\}. \qquad (2.4''')$$

Скористаємося формулами зведення тригонометричних функцій і помножимо на від’ємну одиницю ліву та праву частини кожного співвідношення (2.4‴). У результаті одержимо ***формули косинусів кутів сферичного трикутника***:

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= -\cos B\ \cos C + \sin B\ \sin C\ \cos a\\ \cos B &= -\cos A\ \cos C + \sin A\ \sin C\ \cos b\\ \cos C &= -\cos A\ \cos B + \sin A\ \sin B\ \cos c\end{aligned}\right\}. \qquad (2.4)$$

Косинус кута сферичного трикутника дорівнює добутку синусів двох інших кутів на косинус сторони між ними без добутку косинусів цих же кутів.

2.3. Сферична теорема синусів

Сферична теорема синусів. *Відношення синуса кута сферичного трикутника до синуса протилежної сторони є величина стала для даного трикутника*:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = K\,, \quad \text{де} \quad K = const\,. \tag{2.5}$$

Іншими словами, *синуси кутів сферичного трикутника відносяться як синуси протилежних сторін*.

Доведення. З першої формули (2.3) знайдемо:

$$\cos A = (\cos a - \cos b\cos c)\big/(\sin b\sin c)\ .$$

Тоді $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - (\cos a - \cos b\cos c)^2\big/(\sin b\sin c)^2 =$

$$= \frac{\sin^2 b\sin^2 c - \cos^2 a + 2\cos a\cos b\cos c - \cos^2 b\cos^2 c}{\sin^2 b\sin^2 c} =$$

$$= \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - \cos^2 a + 2\cos a\cos b\cos c - \cos^2 b\cos^2 c}{\sin^2 b\sin^2 c} =$$

$$= (1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c)\big/(\sin^2 b\sin^2 c)\ .$$

Поділимо обидві частини одержаного виразу на $\sin^2 a$:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\ \sin^2 b\ \ \sin^2 c} = K^2\,. \tag{2.6}$$

Звідси $\sin A/\sin a = K$. До величини K кожна зі сторін сферичного трикутника входить однаково. Тому заміна сторін по колу не змінить значення величини K. Тобто, значення K є сталим для даного трикутника. Отже, $\sin B/\sin b = K$ і $\sin C/\sin c = K$.

Наслідок. Теорема синусів установлює зв'язок між сторонами та протилежними їм кутами сферичного трикутника:

а) *Напроти рівних сторін сферичного трикутника лежать рівні кути і навпаки*: $a = b \Leftrightarrow A = B$. (2.5′)

б) *Напроти більшого кута сферичного трикутника лежить більша сторона і, навпаки, проти більшої сторони сферичного трикутника лежить більший кут*: $A > B \Leftrightarrow a > b$. (2.5″)

2.4. Формули п’яти елементів сферичного трикутника

Формули п’яти елементів установлюють зв'язок: а) між трьома сторонами та двома кутами сферичного трикутника (***основні формули п’яти елементів***); б) між трьома кутами та двома сторонами сферичного трикутника (***змінені формули п’яти елементів***).

Скористаємося формулами косинусів сторін сферичного трикутника. Розглянемо пару з другого та третього співвідношень (2.3):

$$\left.\begin{aligned}\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B\\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\end{aligned}\right\}. \qquad (2.6')$$

Виключимо $\cos c$ з першої формули (2.6′), застосовуючи другу:

$$\cos b = \cos a(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin a \sin c \cos B;$$

$$\cos b = (1 - \sin^2 a)\cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B;$$

$$\cos b = \cos b - \sin^2 a \cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B.$$

Зведемо подібні члени, а потім розділимо обидві частини рівності на $\sin a$. Дістанемо:

$$\sin c \cos B = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C. \qquad (2.6'')$$

Якщо у формулах (2.6′) виключити $\cos b$, то одержимо:

$$\sin b \cos C = \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B. \qquad (2.6''')$$

Зробимо аналогічні перетворення для двох інших пар формул (2.3). Отримаємо ***основні формули п’яти елементів***:

$$\left.\begin{aligned}\sin c \cos B = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C\\ \sin b \cos C = \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B\\ \sin c \cos A = \sin b \cos a - \cos b \sin a \cos C\\ \sin a \cos C = \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A\\ \sin a \cos B = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A\\ \sin b \cos A = \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B\end{aligned}\right\}. \qquad (2.7)$$

Добуток синуса сторони на косинус прилеглого кута дорівнює добутку синуса третьої сторони на косинус протилежної цьому куту сторони без добутку косинуса третьої сторони на синус тієї *ж протилежної сторони і на косинус кута між ними.*

Формули (2.7) однорідні відносно синусів сторін сферичного трикутника. Згідно зі сферичною теоремою синусів (2.5) зробимо таку заміну в цих співвідношеннях:

$$\sin a = \frac{1}{K}\sin A; \quad \sin b = \frac{1}{K}\sin B; \quad \sin c = \frac{1}{K}\sin C .$$

Після простих перетворень одержимо так звані ***змінені формули п'яти елементів***, що встановлюють зв'язок між трьома кутами і двома сторонами сферичного трикутника:

$$\left.\begin{aligned}
\sin A\cos b &= \sin C\cos B + \cos C\sin B\cos a\\
\sin A\cos c &= \sin B\cos C + \cos B\sin C\cos a\\
\sin B\cos a &= \sin C\cos A + \cos C\sin A\cos b\\
\sin B\cos c &= \sin A\cos C + \cos A\sin C\cos b\\
\sin C\cos b &= \sin A\cos B + \cos A\sin B\cos c\\
\sin C\cos a &= \sin B\cos A + \cos B\sin A\cos c
\end{aligned}\right\}. \qquad (2.8)$$

Добуток синуса кута на косинус прилеглої сторони дорівнює добутку косинуса кута, що протилежний цій стороні, на синус третього кута плюс добуток синуса протилежного кута на косинус третього кута і на косинус сторони між ними.

2.5. Формули чотирьох елементів сферичного трикутника

Якщо у лівій частині кожного співвідношення (2.7) зробити відповідну заміну синусів сторін за наступними парами формул, що випливають з теореми синусів:

$$\text{а)}\ \sin c = \frac{\sin b}{\sin B}\sin C; \quad \sin b = \frac{\sin c}{\sin C}\sin B; \quad \text{б)}\ \sin c = \frac{\sin a}{\sin A}\sin C;$$

$$\sin a = \frac{\sin c}{\sin C}\sin A; \quad \text{в)}\ \sin a = \frac{\sin b}{\sin B}\sin A; \quad \sin b = \frac{\sin a}{\sin A}\sin B,$$

то після простих перетворень одержимо ***формули чотирьох елементів*** (***формули котангенсів***):

$$\left.\begin{aligned}
&\cos a\cos C = ctg\, b\sin a - ctg\, B\sin C\\
&\cos a\cos B = ctg\, c\sin a - ctg\, C\sin B\\
&\cos b\cos C = ctg\, a\sin b - ctg\, A\sin C\\
&\cos b\cos A = ctg\, c\sin b - ctg\, C\sin A\\
&\cos c\cos A = ctg\, b\sin c - ctg\, B\sin A\\
&\cos c\cos B = ctg\, a\sin c - ctg\, A\sin B
\end{aligned}\right\}. \qquad (2.9)$$

Якщо у сферичному трикутнику ABC згідно зі схемою на рис. 14 узяти ряд із чотирьох поруч розташованих елементів, наприклад, b, C, a, B, то елементи C, a є середніми, а елементи b, B − крайніми. Тоді *добуток косинусів середніх елементів дорівнює добутку котангенса крайньої сторони на синус середньої без добутку котангенса крайнього кута на синус середнього кута*.

Одержані вище шість груп (2.3), (2.4), (2.5), (2.8) та (2.9) основних формул надають можливість розв’язати довільний сферичний трикутник за відомими трьома його елементами. Для практичних розрахунків у типових задачах звичайно використовують більш прості співвідношення, що знаходяться перетворенням основних формул. Вони будуть наведені нижче.

3. Розв’язання прямокутних і прямосторонніх сферичних трикутників

3.1. Формули для розв’язання прямокутних трикутників

$$\left.\begin{aligned}
&\cos a = \cos b\ \cos c + \sin b\ \sin c\ \cos A\\
&\cos A = -\cos B\ \cos C + \sin B\ \sin C\ \cos a\\
&\cos B = -\cos A\ \cos C + \sin A\ \sin C\ \cos b\\
&\cos C = -\cos A\ \cos B + \sin A\ \sin B\ \cos c\\
&\sin A\sin b = \sin a\sin B;\ \sin A\sin c = \sin a\sin C\\
&\cos b\cos C = ctg\, a\sin b - ctg\, A\sin C\\
&\cos b\cos A = ctg\, c\sin b - ctg\, C\sin A\\
&\cos c\cos B = ctg\, a\sin c - ctg\, A\sin B\\
&\cos c\cos A = ctg\, b\sin c - ctg\, B\sin A
\end{aligned}\right\}. \qquad (3.1)$$

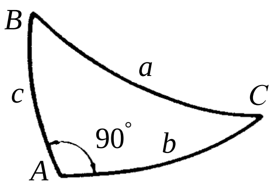


Рис. 15

У наведених десяти співвідношеннях (3.1), виділених із шести груп основних формул, використані позначення: A − прямий кут, a − ***гіпотенуза***, b і c − ***катети*** (рис. 15).

Враховуючи, що $A = 90^\circ$ і

$$(\cos 90^\circ = 0;\ \sin 90^\circ = 1;\ ctg\, 90^\circ = 0),$$

дістанемо десять робочих формул для розв'язання прямокутних сферичних трикутників:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos a = \cos b \cos c\\
&\cos a = ctg\, B\, ctg\, C\\
&\cos B = \sin C \cos b\\
&\cos C = \sin B \cos c\\
&\sin b = \sin a \sin B\\
&\sin c = \sin a \sin C\\
&\cos C = ctg\, a\, tg\, b\\
&\sin b = ctg\, C\, tg\, c\\
&\cos B = ctg\, a\, tg\, c\\
&\sin c = ctg\, B\, tg\, b
\end{aligned}\right\}. \tag{3.2}$$

Непер замінив у формулах (3.2) катети b і c їх доповненнями до 90° і запропонував зручне мнемонічне правило для написання формул (3.2) та поділив їх на дві групи:

Перша група формул

$$\left.\begin{aligned}
&\cos a = \sin(90^\circ - b)\sin(90^\circ - c)\\
&\cos B = \sin C \sin(90^\circ - b)\\
&\cos C = \sin B \sin(90^\circ - c)\\
&\cos(90^\circ - b) = \sin a \sin B\\
&\cos(90^\circ - c) = \sin a \sin C
\end{aligned}\right\}. \tag{3.3'}$$

Друга група формул

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= ctg\, B\, ctg\, C \\ \cos B &= ctg\, a\, ctg\, (90^\circ - c) \\ \cos C &= ctg\, a\, ctg\, (90^\circ - b) \\ \cos (90^\circ - c) &= ctg\, B\, ctg\, (90^\circ - b) \\ \cos (90^\circ - b) &= ctg\, C\, ctg\, (90^\circ - c) \end{aligned}\right\} . \qquad (3.3'')$$

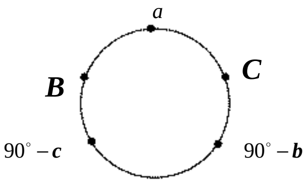


Рис. 16

Формули (3.3') та (3.3'') називають ***правилом Непера***.

Якщо прийняти, що катети b та c лежать поруч, тобто не рахувати прямого кута A, і замінити катети їх доповненнями до 90° (схема на рис. 16), тоді *косинус довільного елемента прямокутного трикутника дорівнює добутку котангенсів прилеглих до нього елементів або добутку синусів елементів, що лежать окремо*.

Це мнемонічне <u>правило</u> можна подати для запам'ятовування у віршованій формі:

“*Помнить нужно нам о том,*
Элементов нужно три.
Там, где косинус внутри, (косинус середнього елемента)
Там котангенсы кругом.
Дальний косинус где нужен, (косинус окремого елемента)
Синус с синусом там дружен”.

3.2. Зв'язок між величинами сторін і кутів прямокутного сферичного трикутника

Зв'язок гіпотенузи з катетами виражає <u>сферична теорема Піфагора</u> (перша з формул (3.2)):

$$\cos a = \cos b \cos c \,.$$

Косинус гіпотенузи дорівнює добутку косинусів катетів.

Нехай кожний з катетів менше 90°, тоді $\cos b$ та $\cos c$ – додатні, але тоді $\cos a$ також додатний, тому $a < 90^\circ$.

Якщо кожний з катетів більше 90°, тоді $\cos b$ і $\cos c$ обидва від'ємні, а тому $\cos a$ додатний і $a < 90^\circ$.

Якщо один з катетів більше 90°, а другий менше 90°, то косинус одного катета додатний, а другого – від'ємний. Тому $\cos a$ буде від'ємний і $a > 90^\circ$.

Два елементи трикутника називають ***однорідними***, якщо обидва вони більші або менші за 90°, і ***різнорідними***, коли один з них більший, а другий менший за 90°.

Користуючись цими поняттями, залежність між величинами катетів і гіпотенузи можна сформулювати так:
якщо катети однорідні, то гіпотенуза менша за 90°; *якщо ж катети різнорідні, то гіпотенуза більша за* 90°.

Для зв'язку гіпотенузи з прилеглими до неї кутами маємо співвідношення (друга з формул (3.2)):

$$\cos a = ctg\ B\, ctg\ C\ .$$

Проаналізувавши цей вираз аналогічно проведеному аналізу формули Піфагора, встановимо наступну залежність між гіпотенузою та прилеглими до неї кутами:

якщо прилеглі до гіпотенузи кути однорідні, то гіпотенуза менша за 90°; *якщо ж ці кути різнорідні, то гіпотенуза більша за* 90°.

Для зв'язку одного катета та двох кутів, що прилягають до гіпотенузи, маємо співвідношення (третя з формул (3.2)):

$$\cos B = \sin C \cos b\ .$$

Оскільки $\sin C$ завжди додатний незалежно від того, гострий чи тупий кут C, то знаки $\cos B$ і $\cos b$ завжди співпадають:

довільний катет і протилежний йому кут завжди однорідні.

Одержані співвідношення між величинами сторін і кутів прямокутного сферичного трикутника допомагають, при знаходженні елементів такого трикутника за їх синусами, вибирати, яке з двох можливих значень елемента є допустимим.

Наприклад, якщо в прямокутному ΔABC катет $b > 90^\circ$ і в задачі для протилежного кута B одержано, що $\sin B = 1/2$, то за його значення приймається $B = 150^\circ$.

3.3. Основні випадки розв’язання прямокутних і прямосторонніх сферичних трикутників

Можливі шість різних випадків розв’язання прямокутних трикутників за даними:

1) гіпотенузою та катетом; 2) двома катетами; 3) гіпотенузою та прилеглим до неї кутом; 4) катетом та прилеглим до нього кутом; 5) двома кутами; 6) катетом та протилежним йому кутом.

При розв’язуванні необхідно стежити, щоб значення елементів відповідали ***умови існування сферичного трикутника***, що виражаються співвідношеннями (1.4) – (1.7), (1.12), (1.13), (2.5′), (2.5″).

Якщо розв’язок трикутника за даними значеннями елементів існує, то у перших п’яти випадках він однозначний, а у шостому – двозначний. У шостому випадку перший з трьох шуканих елементів обчислюють за його синусом, що має додатне значення у першій та другій чвертях. Тому для першого елемента одержуємо два значення, що доповнюють один одного до 180°. Геометрично це означає, що дістаємо два спряжених прямокутних сферичних трикутники. Вони мають задані спільну сторону і протилежний їй кут при вершині двокутника.

При розв’язанні прямосторонніх сферичних трикутників сторону, що дорівнює 90°, позначають через a. Трикутник, полярний по відношенню до прямостороннього, є прямокутним. Це дозволяє звести розв’язання прямосторонніх трикутників до розв’язання прямокутних трикутників.

Розв’язування прямосторонніх трикутників здійснюють так:

1) за відомими елементами прямостороннього трикутника ABC за допомогою формул (1.8) та (1.9) знаходять відповідні елементи полярного прямокутного трикутника $A_1B_1C_1$;

2) розв’язують прямокутний $\Delta\ A_1B_1C_1$ за формулами (3.2);

3) за знайденими елементами трикутника $A_1B_1C_1$, користуючись формулами (1.8) і (1.9), знаходять елементи прямостороннього трикутника ABC.

Можливі шість різних випадків розв’язання прямосторонніх сферичних трикутників. Переходом до полярних трикутників вони зводяться до шести наведених вище випадків стосовно прямокутних трикутників.

4. Розв'язання косокутних сферичних трикутників

4.1. Формули синусів, косинусів і тангенсів половини кутів сферичного трикутника

Розглянемо довільний косокутний сферичний ΔABC. Враховуючи, що внутрішні кути лежать у межах від 0° до 180°, скористаємося тригонометричними формулами зниження степеня

$$\sin^2(\alpha/2) = (1-\cos\alpha)/2, \qquad \cos^2(\alpha/2) = (1+\cos\alpha)/2,$$

а також співвідношенням для кута $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}$,

що випливає з (2.2), і поняттям півпериметра $p = (a+b+c)/2$. За допомогою тотожних перетворень одержимо вказані групи формул.

1) Формули синусів половини кутів.

$$\sin^2(A/2) = (1/2)\left(1-(\cos a - \cos b\cos c)/(\sin b\sin c)\right) =$$

$$= \frac{\sin b\sin c - \cos a + \cos b\cos c}{2\sin b\sin c} = \frac{(\cos b\cos c + \sin b\sin c) - \cos a}{2\sin b\sin c} =$$

$$= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{2\sin b\sin c} = 2\sin\frac{b-c+a}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}\Big/(2\sin b\sin c) =$$

$$= \sin\frac{a+b+c-2c}{2}\sin\frac{a+b+c-2b}{2}\Big/(\sin b\sin c) =$$

$$= \frac{\sin(p-c)\sin(p-b)}{\sin b\sin c}; \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}.$$

Виконавши аналогічні перетворення для $\sin(B/2)$ і $\sin(C/2)$, остаточно дістанемо ***формули синусів половини кутів***:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\sin(p-b)\sin(p-c)/(\sin b\sin c)}\\
\sin\frac{B}{2} &= \sqrt{\sin(p-a)\sin(p-c)/(\sin a\sin c)}\\
\sin\frac{C}{2} &= \sqrt{\sin(p-a)\sin(p-b)/(\sin a\sin b)}
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.1)$$

2) Формули косинусів половини кутів.

$$\cos^2(A/2) = (1/2)\,\big(1 + (\cos a - \cos b\cos c)/(\sin b\sin c)\big) =$$

$$= \frac{\sin b\sin c + \cos a - \cos b\cos c}{2\sin b\sin c} = \frac{\cos a - (\cos b\cos c - \sin b\sin c)}{2\sin b\sin c} =$$

$$= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{2\sin b\sin c} = 2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}\Big/(2\sin b\sin c) =$$

$$= \sin p\sin\frac{a+b+c-2a}{2}\Big/(\sin b\sin c) = \frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c};$$

$$\cos(A/2) = \sqrt{\sin p\sin(p-a)/(\sin b\sin c)}\,.$$

Виконавши аналогічні перетворення для $\cos(B/2)$ і $\cos(C/2)$, у підсумку отримаємо ***формули косинусів половини кутів***:

$$\left.\begin{aligned}\cos(A/2) &= \sqrt{\sin p\sin(p-a)/(\sin b\sin c)}\\ \cos(B/2) &= \sqrt{\sin p\sin(p-b)/(\sin a\sin c)}\\ \cos(C/2) &= \sqrt{\sin p\sin(p-c)/(\sin a\sin b)}\end{aligned}\right\}. \qquad (4.2)$$

Зауваження 1. Формули (4.1) рекомендують застосовувати, коли шуканий кут значно відрізняється від 180°. Якщо його величина близька до 180°, то краще користуватися формулами (4.2).

3) Формули тангенсів половини кутів.

Розділивши ліві та праві частини формул (4.1) на відповідні ліві та праві частини співвідношень (4.2), одержимо

$$\left.\begin{aligned}tg\,\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}\\ tg\,\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}}\\ tg\,\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}\end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

– формули тангенсів половини кутів.

Введемо допоміжну величину

$$M = \sqrt{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)/\sin p} \qquad (4.4)$$

і дістанемо формули тангенсів половини кутів у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} tg\frac{A}{2} &= \frac{M}{\sin(p-a)}. \\ tg\frac{B}{2} &= \frac{M}{\sin(p-b)} \\ tg\frac{C}{2} &= \frac{M}{\sin(p-c)} \end{aligned}\right\}. \qquad (4.5)$$

Тангенс половини кута сферичного трикутника дорівнює допоміжній величині M *, поділеній на синус різниці півпериметра і протилежної куту сторони.*

Перемножимо окремо ліві та праві частини формул (4.5) і, враховуючи (4.4), отримаємо:

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} = \frac{M}{\sin p}. \qquad (4.6)$$

Зауваження 2. Величина M дорівнює тангенсу сферичного радіуса r_m малого кола, вписаного у даний трикутник: $M = tg\, r_m$.

4.2. Формули синусів, косинусів і тангенсів половини сторін сферичного трикутника

Щоб одержати зазначені формули, необхідно співвідношення (4.1) та (4.2) написати для кутів трикутника $A_1B_1C_1$, полярного до даного ΔABC .

Нехай $p_1 = (a_1 + b_1 + c_1)/2$ – півпериметр полярного трикутника $A_1B_1C_1$.

Для елементів взаємополярних трикутників виконуються відомі співвідношення:

$$a_1 = 180^\circ - A;\ b_1 = 180^\circ - B;\ c_1 = 180^\circ - C;\ A_1 = 180^\circ - a. \qquad (4.7)$$

Тоді

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = (540^\circ - A - B - C)/2 = 180^\circ - \varepsilon/2;\; p_1 - a_1 = A - \varepsilon/2\,; \\ p_1 - b_1 = B - \varepsilon/2;\;\; p_1 - c_1 = C - \varepsilon/2\,;\quad A_1/2 = 90^\circ - a/2\,, \end{array}\right\}, \quad (4.8)$$

де $\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$ − сферичний надлишок трикутника ABC.

Скористаємося формулами (4.1) і (4.2), записаними для трикутника $A_1B_1C_1$ та підставимо у них значення величин із формул (4.7) та (4.8) і одержимо:

1) Формули синусів половини сторін.

Запишемо першу з формул (4.2) для полярного $\Delta A_1B_1C_1$:

$$\cos(A_1/2) = \sqrt{\sin p_1 \sin(p_1 - a_1)/(\sin b_1 \sin c_1)}$$

і підставимо в неї замість елементів полярного трикутника $A_1B_1C_1$ відповідні вирази через елементи трикутника ABC з формул (4.7) та (4.8). Отримаємо:

$$\cos\frac{180^\circ - a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(180^\circ - \varepsilon/2)\sin(A - \varepsilon/2)}{\sin(180^\circ - B)\sin(180^\circ - C)}}\;.$$

За тригонометричними формулами зведення дістанемо:

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)\sin(A - \varepsilon/2)}{\sin B \sin C}}\;.$$

Виконавши аналогічні тотожні перетворення з другим і третім співвідношеннями з (4.2), остаточно одержимо

$$\left.\begin{array}{l} \sin\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(\varepsilon/2)\sin(A - \varepsilon/2)}{\sin B \sin C}} \\ \sin\dfrac{b}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(\varepsilon/2)\sin(B - \varepsilon/2)}{\sin A \sin C}} \\ \sin\dfrac{c}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(\varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}{\sin A \sin B}} \end{array}\right\} \quad (4.9)$$

– формули синусів половини сторін.

2) Формули косинусів половини сторін.

Запишемо першу з формул (4.1) для полярного $\Delta A_1B_1C_1$:

$$\sin(A_1/2)=\sqrt{\sin(p_1-b_1)\sin(p_1-c_1)/(\sin b_1\sin c_1)}\,.$$

Підставимо в це співвідношення замість елементів полярного $\Delta A_1B_1C_1$ відповідні значення з формул (4.7) та (4.8). Дістанемо:

$$\sin\frac{180^\circ-a}{2}=\sqrt{\frac{\sin(B-\varepsilon/2)\sin(C-\varepsilon/2)}{\sin(180^\circ-B)\sin(180^\circ-C)}}\;.$$

Застосуємо до цього виразу формули зведення й отримаємо:

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin(B-\varepsilon/2)\sin(C-\varepsilon/2)}{\sin B\sin C}}\;.$$

Співвідношення для $\cos(b/2)$ і $\cos(c/2)$ дістаємо аналогічно. У підсумку маємо ***формули косинусів половини сторін***:

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(B-\varepsilon/2)\sin(C-\varepsilon/2)}{\sin B\sin C}}\\ \cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(A-\varepsilon/2)\sin(C-\varepsilon/2)}{\sin A\sin C}}\\ \cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(A-\varepsilon/2)\sin(B-\varepsilon/2)}{\sin A\sin B}}\end{aligned}\right\}. \qquad (4.10)$$

3) Формули тангенсів половини сторін.

Діленням окремо лівих і правих частин формул (4.9) і (4.10) одержимо ***формули тангенсів половини сторін***:

$$\left.\begin{aligned}tg\,\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)\sin(A-\varepsilon/2)}{\sin(B-\varepsilon/2)\sin(C-\varepsilon/2)}}\\ tg\,\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)\sin(B-\varepsilon/2)}{\sin(A-\varepsilon/2)\sin(C-\varepsilon/2)}}\\ tg\,\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)\sin(C-\varepsilon/2)}{\sin(A-\varepsilon/2)\sin(B-\varepsilon/2)}}\end{aligned}\right\}. \qquad (4.11)$$

Введемо допоміжну величину

$$N=\sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin(A-\varepsilon/2)\sin(B-\varepsilon/2)\sin(C-\varepsilon/2)}} \tag{4.12}$$

і запишемо формули тангенсів половини сторін у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} tg\frac{a}{2}&=N\sin(A-\varepsilon/2)\\ tg\frac{b}{2}&=N\sin(B-\varepsilon/2)\\ tg\frac{c}{2}&=N\sin(C-\varepsilon/2)\end{aligned}\right\}. \tag{4.13}$$

Тангенс половини сторони сферичного трикутника дорівнює добутку допоміжної величини N *на синус різниці протилежного кута та половини сферичного надлишку*.

Перемножимо окремо ліві та праві частини (4.13), скористаємося співвідношенням (4.12) і дістанемо:

$$tg\frac{a}{2}\,tg\frac{b}{2}\,tg\frac{c}{2}=N\sin\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.14}$$

Зауваження. Величина N дорівнює тангенсу сферичного радіуса R_m малого кола, описаного навколо даного трикутника:

$$N=tg\,R_m.$$

4.3. Формули Даламбера – Гаусса й аналогії Непера

Якщо у тригонометричні тотожності:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{A\pm B}{2}&=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\pm\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\\ \cos\frac{A\pm B}{2}&=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\mp\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

підставити відповідні значення з (4.1), (4.2), (4.9) та (4.10), зробити необхідні тотожні перетворення, то дістанемо чотири ***формули Даламбера – Гаусса***:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{a-b}{2}\ \cos\frac{C}{2}\Big/\cos\frac{c}{2}\\
&2)\ \sin\frac{A-B}{2}=\sin\frac{a-b}{2}\ \cos\frac{C}{2}\Big/\sin\frac{c}{2}\\
&3)\ \cos\frac{A+B}{2}=\cos\frac{a+b}{2}\ \sin\frac{C}{2}\Big/\cos\frac{c}{2}\\
&4)\ \cos\frac{A-B}{2}=\sin\frac{a+b}{2}\ \sin\frac{C}{2}\Big/\sin\frac{c}{2}
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.16)$$

Для прикладу виведемо першу формулу з (4.16). Для цього підставимо у першу тотожність (4.15) (з вибором знаку “+”) значення синусів і косинусів половини кутів зі співвідношень (4.1) і (4.2), а потім виконаємо тотожні перетворення:

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}}+$$

$$+\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}}=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}+\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\cdot\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}\cdot\left(\frac{\sin(p-b)}{\sin c}+\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\right)=\cos\frac{C}{2}\times$$

$$\times\frac{2\sin(p-a/2-b/2)\cos\big((a-b)/2\big)}{2\sin(c/2)\cos(c/2)}=\cos\frac{a-b}{2}\ \cos\frac{C}{2}\Big/\cos\frac{c}{2}.$$

Аналогічно виводяться інші формули Даламбера – Гаусса.

Поділимо першу формулу із (4.16) почастинно на третю, а другу на четверту. У результаті одержимо ***першу та другу аналогії Непера***:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ tg\frac{A+B}{2}=\cos\frac{a-b}{2}\ ctg\frac{C}{2}\Big/\cos\frac{a+b}{2}\\
&2)\ tg\frac{A-B}{2}=\sin\frac{a-b}{2}\ ctg\frac{C}{2}\Big/\sin\frac{a+b}{2}
\end{aligned}\right\}. \qquad (4.17)$$

Тангенс півсуми двох кутів сферичного трикутника так відноситься до котангенса половини третього кута, як косинус піврізниці протилежних їм сторін до косинуса півсуми тих же сторін.

Тангенс піврізниці двох кутів сферичного трикутника так відноситься до котангенса половини третього кута, як синус піврізниці протилежних їм сторін до синуса півсуми тих же сторін.

Поділивши четверту формулу Даламбера – Гаусса на третю, а другу на першу, дістанемо ***третю і четверту аналогії Непера***:

$$\left.\begin{aligned} &3)\ \ tg\frac{a+b}{2}=\cos\frac{A-B}{2}\ tg\frac{c}{2}\Big/\cos\frac{A+B}{2} \\ &4)\ \ tg\frac{a-b}{2}=\sin\frac{A-B}{2}\ tg\frac{c}{2}\Big/\sin\frac{A+B}{2} \end{aligned}\right\}. \qquad (4.18)$$

Тангенс півсуми двох сторін сферичного трикутника так відноситься до тангенса половини третьої сторони, як косинус піврізниці протилежних їм кутів до косинуса півсуми цих же кутів.

Тангенс піврізниці двох сторін сферичного трикутника так відноситься до тангенса половини третьої сторони, як синус піврізниці протилежних їм кутів до синуса півсуми цих же кутів.

Зауваження. Загальне число аналогій Непера дорівнює дванадцяти. Інші вісім аналогій можна одержати, застосовуючи метод перестановки елементів по колу.

Поділивши почастинно першу і другу, або третю і четверту аналогії Непера, отримаємо ***контрольну формулу Гаусса***:

$$tg\frac{A+B}{2}\Big/tg\frac{A-B}{2}=tg\frac{a+b}{2}\Big/tg\frac{a-b}{2}. \qquad (4.19)$$

4.4. Формули для обчислення сферичного надлишку

Перемножимо почленно перші дві формули з (4.9) і скористаємося третім співвідношенням з (4.10). Дістанемо:

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)\sin(A-\varepsilon/2)}{\sin B\sin C}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(\varepsilon/2)\sin(B-\varepsilon/2)}{\sin A\sin C}}=$$

$$=\frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin C}\cdot\sqrt{\frac{\sin(A-\varepsilon/2)\ \sin(B-\varepsilon/2)}{\sin A\ \sin B}}=\frac{\sin(\varepsilon/2)}{\sin C}\cdot\cos\frac{c}{2}.$$

Знайдемо звідси $\sin(\varepsilon/2)$: $\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin\frac{a}{2}\,\sin\frac{b}{2}\,\sin C \Big/ \cos\frac{c}{2}$.

Аналогічні вирази для $\sin(\varepsilon/2)$ можна отримати, перетворивши ще два добутки $\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$ і $\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}$ за формулами (4.9) та застосовуючи співвідношення (4.10). У результаті маємо ***першу формулу Каньйолі***, що задається одним з виразів:

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{\varepsilon}{2} &= \sin\frac{a}{2}\,\sin\frac{b}{2}\,\sin C \Big/ \cos\frac{c}{2} \\ \sin\frac{\varepsilon}{2} &= \sin\frac{b}{2}\,\sin\frac{c}{2}\,\sin A \Big/ \cos\frac{a}{2} \\ \sin\frac{\varepsilon}{2} &= \sin\frac{a}{2}\,\sin\frac{c}{2}\,\sin B \Big/ \cos\frac{b}{2} \end{aligned}\right\}. \qquad (4.20)$$

Співвідношення (4.20) виражають сферичний надлишок як функцію трьох сторін і одного кута сферичного трикутника.

Синус половини сферичного надлишку трикутника дорівнює добутку синусів половини двох сторін на синус кута між ними, поділеному на косинус половини третьої сторони.

Зауваження 1. Формули (4.20) можна одержати одну з одної методом перестановки елементів по колу.

Друга формула Каньйолі:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{\sin p\,\sin(p-a)\,\sin(p-b)\,\sin(p-c)}}{2\cos(a/2)\,\cos(b/2)\,\cos(c/2)} \qquad (4.21)$$

подає сферичний надлишок як функцію трьох сторін трикутника. Її одержують заміною у першій формулі з (4.20) $\sin C$ виразом:

$$\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\,\cos\frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{\sin p\,\sin(p-a)\,\sin(p-b)\,\sin(p-c)}}{\sin a\,\sin b},$$

що випливає зі співвідношень (4.1) та (4.2).

Сферичний надлишок можна обчислити ще за ***формулою Люільє***:

$$tg\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{tg\frac{p}{2}tg\frac{p-a}{2}tg\frac{p-b}{2}tg\frac{p-c}{2}}\,, \qquad (4.22)$$

що також дає сферичний надлишок як функцію трьох сторін сферичного трикутника. Вона є аналогом формули Герона в планіметрії. Її одержують на основі першої і третьої формул Даламбера – Гаусса (4.16) з використанням співвідношень:

$$A+B=180^\circ+\varepsilon-C\,;\;\; a+b+c=2p\,;\;\; a+b-c=2(p-c)\,;$$

$$a-b+c=2(p-b)\,;\qquad b+c-a=2(p-a)\,.$$

Зауваження 2. Наведені співвідношення (4.20) – (4.22) не рекомендується безпосередньо застосовувати для знаходження сферичного надлишку трикутників зі сторонами малої кутової величини, оскільки при цьому спостерігається значний вплив похибок обчислень.

4.5. Основні випадки розв'язання косокутних сферичних трикутників

Сферичний трикутник повністю визначений, якщо з шести його елементів задані три. Можливі шість геометрично різних випадків розв'язання косокутних трикутників за даними: 1) трьома сторонами; 2) трьома кутами; 3) двома сторонами та кутом між ними; 4) стороною та двома прилеглими до неї кутами; 5) двома сторонами і кутом, що лежить проти однієї з них; 6) двома кутами та стороною, що лежить проти одного з них.

При розв'язуванні необхідно стежити, щоб значення елементів задовольняли ***умови існування сферичного трикутника***, що виражаються співвідношеннями (1.4) – (1.7), (1.12), (1.13), (2.5′), (2.5″).

При визначенні усіх трьох невідомих елементів розв'язання трикутника у першому і другому випадках виконують за формулами (4.5) та (4.13), у третьому та четвертому випадках – за аналогіями Непера (4.17) та (4.18). У п'ятому та шостому випадках розв'язання трикутника виконують за теоремою синусів та аналогіями Непера.

Якщо розв'язок сферичного трикутника за даними значеннями елементів існує, то в перших чотирьох випадках він однозначний, а в п'ятому та шостому – двозначний. Пояснення цього аналогічне відповідним випадкам розв'язання прямокутних трикутників.

Зауваження. Хід розв'язування завжди необхідно контролювати, виконуючи додаткові обчислення за формулами, що не використовувались при знаходженні невідомих величин, або визначаючи значення однієї й тієї ж невідомої величини за різними формулами.

5. Розв'язання малих сферичних трикутників за теоремою Лежандра

У геодезичних вимірюваннях Землю часто ототожнюють з кулею, радіус якої $R \approx 6370$ км. Тоді трикутники, що утворюються геодезичними пунктами на поверхні Землі, можна розглядати як сферичні. Сторони цих трикутників порядку $40 \div 60$ км і, в порівнянні з радіусом Землі, малі. Такі трикутники називають ***сферичними трикутниками малого вигину*** (***малими сферичними трикутниками***).

Застосовувати загальні формули сферичної тригонометрії до розв'язання малих трикутників недоцільно за наступних причин. У геодезії оперують з лінійними величинами, а у сферичній тригонометрії обчислення проводять у кутовій мірі. При використанні загальних співвідношень знадобиться оперувати з тригонометричними функціями малих кутів ($\sim 20'$), що може призвести до великих обчислювальних похибок.

Ці незручності усуваються використанням для розв'язання малих сферичних трикутників теореми Лежандра:

кути сферичного трикутника приблизно на третину сферичного надлишку більші відповідних кутів плоского трикутника, що має сторони відповідно рівні сторонам сферичного трикутника.

Нехай сферичний трикутник ABC та плоский трикутник $A_1B_1C_1$ мають однакові по довжині сторони a, b і c. Тоді за теоремою Лежандра відповідні кути цих трикутників пов'язані між собою співвідношеннями:

$$A - A_1 \approx \frac{1}{3}\varepsilon; \quad B - B_1 \approx \frac{1}{3}\varepsilon; \quad C - C_1 \approx \frac{1}{3}\varepsilon, \qquad (5.1)$$

де ε − сферичний надлишок трикутника ABC.

Зауваження 1. У співвідношеннях (5.1) нехтують величинами четвертого та вищих порядків мализни, розуміючи під величинами першого порядку відношення довжин сторін трикутника до довжини радіуса сфери.

Зауваження 2. Хоча на практиці в малому трикутнику вимірюють всі три кути, знаходити ε безпосередньо за означенням (1.18) не рекомендується, оскільки похибки у вимірюванні кутів часто перевищують сам ексцес. Обчислення його за загальними формулами (4.20) - (4.22), як зазначено вище, також недоцільне.

Кутова величина ε° сферичного надлишку малого трикутника наближено може бути обчислена за однією зі спрощених формул:

$$\varepsilon^\circ \approx \frac{\rho^\circ}{2R^2} bc\, sinA_1;\ \ \varepsilon^\circ \approx \frac{\rho^\circ}{2R^2} ac\, sinB_1;\ \ \varepsilon^\circ \approx \frac{\rho^\circ}{2R^2} ab\, sinC_1. \quad (5.2)$$

Формули (5.2) одержані зі співвідношення (1.19) з використанням наступних виразів для площі плоского трикутника $A_1B_1C_1$:

$$F = \frac{1}{2}\, bc\, sin\, A_1;\ \ F = \frac{1}{2}\, ac\, sin\, B_1;\ \ F = \frac{1}{2}\, ab\, sin\, C_1,$$

де $\rho^\circ = 57^\circ{,}2957795...$; R − радіус Землі; A_1, B_1 і C_1 − кути плоского трикутника; a, b і c − довжини сторін (величини R, a, b і c вимірюються у лінійних одиницях). При цьому припускається, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ приблизно рівновеликі $F_{ABC} \approx F_{A_1B_1C_1}$.

Зауваження 3. У співвідношеннях (5.2) нехтують величинами четвертого та вищих порядків мализни порівняно з відношенням довжин сторін трикутника до довжини радіуса сфери.

Значення теореми Лежандра полягає в тому, що вона дозволяє застосовувати при розв'язанні малих сферичних трикутників формули плоскої тригонометрії.

Для цього обчислюють сферичний надлишок за якою-небудь з формул (5.2) і переходять на основі співвідношень (5.1) від кутів сферичного трикутника ABC до кутів плоского трикутника $A_1B_1C_1$, який має ті ж самі довжини відповідних сторін, що і трикутник ABC, після чого розв'язують плоский трикутник $A_1B_1C_1$.

Приклади розв'язання типових задач*

- **Різні задачі**

Приклад 1. Визначити довжину дуги l паралелі земної кулі ($R = 6370$ км) на широті $\varphi = 42^\circ 31' 25''$, якщо різниця довгот $\Delta\lambda = 8^\circ 12' 11''$.

□ Довжина дуги паралелі визначається за формулою:

$$l = r\,\Delta\lambda,$$

де r − радіус малого кола, частиною якого є дуга l;

$\Delta\lambda$ − різниця довгот (у радіанах) кінців дуги;

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda^\circ / \rho^\circ\ ;\ \rho^\circ = 57^\circ{,}2957795 .$$

Радіус малого кола (1.2): $r = R\cos\varphi$, де R − радіус сфери (у даному випадку – земної кулі); φ − широта паралелі.

Тоді $l = R\ \Delta\lambda\ \cos\varphi$.

Обчислення:

Оскільки величина $R = 6370$ має чотири значущі цифри, то інші величини для розрахунку візьмемо з п'ятьма значущими цифрами, а потім результат округлимо до чотирьох, тобто:

$$l = 6370 \cdot 0{,}1431703 \cdot 0{,}7369989 = 672{,}1 \text{ (км)}.$$

Але величина R задана в км, отже:

Відповідь: 672 км. ■

Приклад 2. Довжина дуги AB паралелі земної кулі на широті $\varphi = 42^\circ 31' 25''$ дорівнює $l = 672$ км. Визначити довжину дуги екватора S між меридіанами, що проходять через точки A та B.

□ Довжина дуги екватора S, що розташована між двома меридіанами, визначається за формулою: $S = R\Delta\lambda$, де R − радіус земної кулі; $\Delta\lambda$ − різниця довгот (у радіанах).

---

* Усі розрахунки мають наближений характер: перехід від величини кута, поданого у градусах, мінутах і секундах, до величини кута, вираженого тільки в градусах; визначення за даними кутами (або сторонами у кутовій мірі) тригонометричних функцій і т.д. При обчисленнях застосовуються правила підрахунку цифр. Замість знаку "$\approx$" для зручності використовується знак "$=$". Похибки усіх розрахунків становлять $\sim 0{,}5$ одиниці розряду останньої значущої цифри результату.

Різниця довгот $\Delta\lambda = l/(R\cos\varphi)$, де l – довжина дуги паралелі; φ – широта паралелі. Тоді $S = l/R\cos\varphi$.

Обчислення:

$$\varphi = 42^\circ{,}5236111;\; cos\,\varphi = 0{,}7369989;\; S = \frac{672}{0{,}737} = 912.$$

Відповідь: 912 км ■

Приклад 3. Визначити радіус сфери R, якщо площа сферичного трикутника $F = 687200$ км^2, а його кути:

$$A = 123^\circ{,}251744;\; B = 50^\circ{,}00671 \text{ і } C = 84^\circ{,}12262.$$

□ Площа сферичного трикутника визначається за формулою (1.19): $F = R^2\varepsilon$, де R – радіус сфери (в кілометрах); ε – сферичний надлишок (у радіанах).

Обчислення:

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ = 123^\circ{,}251744 + 50^\circ{,}00671 + 84^\circ{,}12262 -$$

$$-180^\circ = 77^\circ{,}381074;\quad \varepsilon = 1{,}35055 \text{ (у радіанах)};$$

$$R = \sqrt{\frac{F}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{687200}{1{,}35055}} \cong 713.$$

Відповідь: 713 км. ■

Приклад 4. Визначити найкоротшу відстань (ортодромію) між двома точками M_1 ($52^\circ 11'$; $49^\circ 30'$) та M_2 ($58^\circ 17'$; $55^\circ 36'$), що лежать у північній частині земної кулі ($R = 6370$ км). Знайти азимут μ_{21} точки M_2 по відношенню до точки M_1.

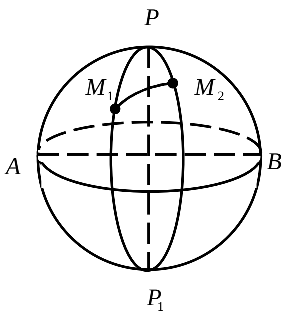


Рис. 17

□ Розглянемо сферичний трикутник M_1PM_2 (рис. 17). Тут P – полюс; AB – екватор; PM_1P_1 та PM_2P_1 – меридіани, що проходять відповідно через точки M_1 та M_2; M_1M_2 – дуга великого кола, що проходить через точки M_1 та M_2. Дуга M_1M_2 визначає найкоротшу відстань між точками M_1 та M_2.

У цьому трикутнику кути:

$\angle M_1PM_2 = \Delta\lambda$; $\angle PM_1M_2 = \mu_{21}$ і $\angle PM_2M_1 = \mu_{12}$, а сторони $M_1P = 90^\circ - \varphi_1$ та $M_2P = 90^\circ - \varphi_2$.

Різниця довгот:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 55^\circ 36' - 49^\circ 30'; \quad \Delta\lambda = 6^\circ 06'.$$

Для визначення ортодромії M_1M_2 скористаємося формулою косинуса сторони сферичного трикутника (2.2.):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

У даному випадку формула набуває вигляду:

$$cos\, M_1M_2 = cos\,(90^\circ - \varphi_1)\, cos(90^\circ - \varphi_2) +$$

$$+ sin(90^\circ - \varphi_1) sin(90^\circ - \varphi_2)\, cos\, \Delta\lambda;$$

$$cos\, M_1M_2 = sin\varphi_1\, sin\varphi_2 + cos\varphi_1\, cos\varphi_2\, cos\Delta\lambda.$$

Обчислення:

$$\Delta\lambda = 6^\circ,100000; \quad \cos\Delta\lambda = 0{,}9943379;$$

$$\varphi_1 = 52^\circ,183333; \quad \sin\varphi_1 = 0{,}789977; \quad \cos\varphi_1 = 0{,}613137;$$

$$\varphi_2 = 58^\circ,283333; \quad \sin\varphi_2 = 0{,}850658; \quad \cos\varphi_2 = 0{,}525719;$$

$$\cos \mathrm{M_1M_2} = 0{,}992513, \quad \mathrm{M_1M_2} = 7^\circ,015608;$$

$$\mathrm{M_1M_2} = 0{,}122445 \text{ (рад)};$$

$$\mathrm{M_1M_2} = \mathrm{R} \cdot 0{,}122445 = 6370 \cdot 0{,}122445 = 780 \text{ (км)}.$$

Азимут $\mu_{21} = \angle PM_1M_2$ − сферичний кут трикутника M_1PM_2.

Для обчислення азимуту μ_{21} точки M_2 по відношенню до точки M_1, що задані своїми координатами, необхідно розв'язати косокутний трикутник за двома сторонами та кутом між ними.

Обчислення азимуту μ_{21} проведемо двома способами.

1) Скористаємося першою та другою аналогіями Непера (4.17):

$$tg\,\frac{A+B}{2} = \cos\frac{a-b}{2}\, ctg\,\frac{C}{2} \Big/ \cos\frac{a+b}{2};$$

$$tg\frac{A-B}{2}=\sin\frac{a-b}{2}\,ctg\frac{C}{2}\Big/\sin\frac{a+b}{2}.$$

У даному випадку аналогії набувають вигляду:

$$tg\frac{\mu_{12}+\mu_{21}}{2}=\cos\frac{(90^\circ-\varphi_1)-(90^\circ-\varphi_2)}{2}\,ctg\frac{\Delta\lambda}{2}:$$

$$:\cos\frac{(90^\circ-\varphi_1)+(90^\circ-\varphi_2)}{2}\;;$$

$$tg\frac{\mu_{12}-\mu_{21}}{2}=\sin\frac{(90^\circ-\varphi_1)-(90^\circ-\varphi_2)}{2}\,ctg\frac{\Delta\lambda}{2}:$$

$$:\sin\frac{(90^\circ-\varphi_1)+(90^\circ-\varphi_2)}{2}\;.$$

Тоді:

$$tg\frac{\mu_{12}+\mu_{21}}{2}=\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\,ctg\frac{\Delta\lambda}{2}:\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\;;$$

$$tg\frac{\mu_{12}-\mu_{21}}{2}=\sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\,ctg\frac{\Delta\lambda}{2}:\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\;.$$

Для контролю обчислень використаємо формулу Гаусса (4.19):

$$tg\frac{A+B}{2}\Big/tg\frac{A-B}{2}=tg\frac{a+b}{2}\Big/tg\frac{a-b}{2}\;,$$

яка у даному випадку набуває вигляду:

$$tg\frac{\mu_{12}+\mu_{21}}{2}:\,tg\frac{\mu_{12}-\mu_{21}}{2}=ctg\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\,ctg\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\;.$$

Обчислення

$$\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=55^\circ{,}2333333;\qquad \cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=0{,}5702357\,;$$

$$\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=0{,}8214811;\qquad \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=3^\circ{,}050000\,;$$

$$\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=0{,}9985835\,;\qquad \sin\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=0{,}0532074\,;$$

$$\frac{\Delta\lambda}{2}=3^\circ{,}0500000\,;\qquad ctg\frac{\Delta\lambda}{2}=18{,}7677543\,;$$

$$tg\,\frac{\mu_{12}+\mu_{21}}{2} = 0{,}9985835\cdot 18{,}7677543 : 0{,}8214811 =$$

$$= 22{,}8138782\ ; \quad \frac{\mu_{12}+\mu_{21}}{2} = 87^\circ{,}4901625\,;$$

$$tg\,\frac{\mu_{12}-\mu_{21}}{2} = 0{,}0532074\cdot 18{,}7677543 : 0{,}5702357 =$$

$$= 1{,}7511766\,; \quad \frac{\mu_{12}-\mu_{21}}{2} = 60^\circ{,}2717046\,;$$

$$\mu_{21} = 87^\circ{,}4901625 - 60^\circ{,}2717046 = 27^\circ{,}2184579 =$$

$$= 27^\circ 13' 06''\ .$$

Проведемо контроль:

$$tg\,\frac{\mu_{12}+\mu_{21}}{2} : tg\,\frac{\mu_{12}-\mu_{21}}{2} = 13{,}0277427\,;$$

$$ctg\,\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\; ctg\,\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2} = 13{,}0277369\,.$$

Контроль зійшовся.

Відповідь: $M_1M_2 = 780$ км ; $\mu_{21} = 27^\circ 13' 06''$.

2) У даному випадку знайти азимут μ_{21} можна за формулою:

$$cos\,PM_2 = cos\,M_1P\,cos\,M_1M_2 + sin\,M_1P\,sin\,M_1M_2\,cos\,PM_1M_2\,,$$

де $PM_2 = 90^\circ - \varphi_2$; $M_1P = 90^\circ - \varphi_1$; $M_1M_2 = 7^\circ{,}0156078$ (знайдено у першій частині); $\angle \mathrm{PM_1M_2} = \mu_{21}$.

Обчислення:

$$cos\,\mu_{21} = \frac{cos\left(90^\circ - \varphi_2\right) - cos\left(90^\circ - \varphi_1\right)cos\,M_1M_2}{sin\left(90^\circ - \varphi_1\right)sin\,M_1M_2} =$$

$$= \frac{sin\,\varphi_2 - sin\,\varphi_1\,cos\,M_1M_2}{cos\,\varphi_1\,sin\,M_1M_2} = \frac{0{,}850658 - 0{,}789977\cdot 0{,}992513}{0{,}613137\cdot 0{,}122140} =$$

$$= 0{,}889262$$

$$\mu_{21} = 27^\circ{,}219322 = 27^\circ 13' 09''\ .$$

У даному прикладі відносна похибка між знайденими величинами азимуту становить $\sim 0{,}024\,\%$, але другий спосіб набагато коротший та простіший. ■

Приклад 5. Визначити довжину S та кут K локсодромії між заданими двома точками, що лежать у північній частині земної кулі ($R = 6370$ км):

а) $M_1(47^\circ 29'; 36^\circ 43')$; $M_2(47^\circ 29'; 53^\circ 12')$;

б) $M_1(52^\circ 11'; 49^\circ 30')$; $M_2(58^\circ 17'; 55^\circ 36')$.

□ Скористаємося співвідношеннями, наведеними в п.1.1.

а) Оскільки $\varphi_1 = \varphi_2 = 47^\circ 29'$, то

$$K = 90^\circ; \quad S = R\cos\varphi_1^\circ \cdot |\Delta\lambda^\circ| / \rho^\circ .$$

Обчислення: $\varphi_1^\circ = 47^\circ{,}4833333$; $\cos\varphi_1^\circ = 0{,}6758046$;

$$\lambda_1^\circ = 36^\circ{,}7166667; \; \lambda_2^\circ = 53^\circ{,}2000000;$$

$$\Delta\lambda^\circ = \lambda_2^\circ - \lambda_1^\circ = 16^\circ{,}4833333;$$

$$S = 6370 \cdot 0{,}6758046 \cdot 16^\circ{,}4833333 / 57^\circ{,}2957795 = 1238 \text{ (км).}$$

Відповідь: $S = 1238$ км; $K = 90^\circ$.

б) Оскільки $\varphi_1 = 52^\circ 11' \neq \varphi_2 = 58^\circ 17'$, то

$$tg\,K = \frac{\Delta\lambda^\circ / \rho^\circ}{\ln tg\,(45^\circ + \varphi_2^\circ/2) - \ln tg\,(45^\circ + \varphi_1^\circ/2)}; \quad S = \frac{R\Delta\varphi^\circ}{\rho^\circ \cos K}.$$

Обчислення: $\varphi_1^\circ = 52^\circ{,}1833333$; $\varphi_2^\circ = 58^\circ{,}2833333$;

$$\Delta\varphi^\circ = 6^\circ{,}1000000; \; \lambda_1^\circ = 49^\circ{,}5000000; \; \lambda_2^\circ = 55^\circ{,}6000000;$$

$$\Delta\lambda^\circ = \lambda_2^\circ - \lambda_1^\circ = 6^\circ{,}1000000; \; tg\,(45^\circ + \varphi_1^\circ/2) = tg\,71^\circ{,}0916667 =$$

$$= 2{,}9193754; \; tg\,(45^\circ + \varphi_2^\circ/2) = tg\,74^\circ{,}1416667 = 3{,}5202414;$$

$$\ln tg\,(45^\circ + \varphi_1^\circ/2) = 1{,}0713697; \; \ln tg\,(45^\circ + \varphi_2^\circ/2) = 1{,}2585296;$$

$$tg\,K = \frac{6^\circ{,}1000000 / 57^\circ{,}2957795}{1{,}2585296 - 1{,}0713697} = 0{,}5688456;$$

$$K = arctg\ 0{,}5688456 = 29^\circ{,}6331929 = 29^\circ 37'59'';$$

$$\cos K = \cos 29^\circ{,}6331929 = 0{,}8692086;$$

$$S = \frac{6370 \cdot 6^\circ{,}1000000}{57^\circ{,}2957795 \cdot 0{,}8692086} = 780 \text{ (км).}$$

Відповідь: $S = 780$ км; $K = 29^\circ 37'59''$. ■

Порівнюючи знайдену в прикладі 5б довжину локсодромії $S = 780$ км між даними точками M_1 і M_2 з довжиною відповідної ортодромії $M_1M_2 = 780$ км, яка визначена в прикладі 4, переконуємося в їх близькості (з точністю до 1 км результати співпали).

Зауважимо, що розв'язування будь-якої задачі необхідно виконувати безпосередньо за її вхідними даними (якщо це можливо) і уникати використання величин, значення яких визначаються в процесі розв'язування.

• Розв'язання прямокутних сферичних трикутників

Приклад 6а. Дано гіпотенузу $a = 80^\circ 00'25''$ і катет $b = 47^\circ 38'36''$. Знайти: 1) катет c, кути B і C; 2) ε, p, r_m і R_m; 3) F сферичного трикутника в км^2, якщо $R = 6370$ км.

□ 1) Спираючись на правило Непера (3.3$'$) і (3.3$''$), для визначення c маємо:

$$cos\, a = sin\left(90^\circ - b\right) sin\left(90^\circ - c\right); \quad cos\, a = cos\, b\, cos\, c.$$

Для визначення кута B маємо:

$$cos\left(90^\circ - b\right) = sin\, a\, sin\, B.$$

Для визначення кута C маємо:

$$cos\, C = ctga\, ctg\left(90^\circ - b\right) = ctga\, tgb.$$

Звідси невідомі елементи можна визначити за наступними формулами:

$$1.\ cos\, c = \frac{cos\, a}{cos\, b}; \quad 2.\ sin\, B = \frac{sin\, b}{sin\, a}; \quad 3.\ cos\, C = \frac{tgb}{tga}.$$

Для катета c з формули (1) одержимо один розв'язок. Для кута B із формули (2) одержимо два значення: $<90^\circ$ і $>90^\circ$. Із двох розв'язків згідно (3.2) виберемо таке значення кута B, щоб кут B та сторона b були однорідні, тобто $B<90^\circ$. Для кута C за формулою (3) одержимо одне значення.

Для того, щоб трикутник був можливий, необхідно, щоб $cos\,c$, $sin\,B$ і $cos\,C$ у формулах (1) − (3) були менші одиниці. Для цього необхідно і достатньо, щоб гіпотенуза знаходилась за величиною між катетом та доповненням його до 180°.

Дійсно, з $sin\,B = \dfrac{sin\,b}{sin\,a}$ бачимо, що умова $sin\,B<1$ призводить до нерівностей $sin\,b < sin\,a$ і $sin\left(180^\circ - b\right) < sin\,a$. Обидві частини цих нерівностей – додатні, тому що b і a менші за 180°. Для того, щоб ці нерівності справджувалися, необхідно, щоб виконувались нерівності: при $a<90^\circ$, $b<a<180^\circ-b$, а при $a>90^\circ$, $b>a>180^\circ-b$.

При цих же умовах $cos\,c$ і $cos\,C$ завжди будуть менші за одиницю.

Формулою для контролю обчислень має бути співвідношення, що пов'язує усі три знайдені елементи c, B та C. Такою є третя формула першої групи формул (3.3$'$):

$$cos\,C = sin\,B\,sin\left(90^\circ - c\right);\; cos\,C = sin\,B \cdot cos\,c\,.$$

Дано:

$$a = 80^\circ 00'25'' = 80^\circ,0069444;\quad b = 47^\circ 38'36'' = 47^\circ,6433333.$$

Проміжні обчислення:

$sin\,a = 0{,}9848288$; $\qquad sin\,b = 0{,}7389665$;
$cos\,a = 0{,}1735288$; $\qquad cos\,b = 0{,}6737434$;
$tga = 5{,}6753041$; $\qquad tgb = 1{,}0968045$.

Обчислення невідомих:

$$cos\,c = \frac{0{,}1735288}{0{,}6737434} = 0{,}2575592;\quad c = 75^\circ,0747181 = 75^\circ 04'29'';$$

$$sin\,B = \frac{0{,}7389665}{0{,}9848288} = 0{,}7503502\ ;\quad B_1 = 48^\circ{,}620724 = 48^\circ 37'15''\ ;$$

$$B_2 = 180^\circ - B_1 = 131^\circ{,}3792756 = 131^\circ 22'45''\ .$$

Згідно зі сказаним вище вибираємо кут B_1.

$$cosC = \frac{1{,}0968045}{5{,}6753041} = 0{,}1931253;\ C = 78^\circ{,}8647684 = 78^\circ 51'53''\ .$$

Контроль обчислень:

$$0{,}1931253 = 0{,}7503502 \cdot 0{,}2575592\ ;\quad 0{,}1931253 = 0{,}1932596\ .$$

Відповідь: $c = 75^\circ 04'29''$; $B = 48^\circ 37'15''$; $C = 78^\circ 51'53''$.

2) Знаходимо ε , p , r_m і R_m :

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ = 90^\circ + 48^\circ 37'15'' + 78^\circ 51'53'' - 180^\circ =$$

$$= 37^\circ 29'08''$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{80^\circ 00'25'' + 47^\circ 38'36'' + 75^\circ 04'29''}{2} = 101^\circ 21'45''\ ;$$

$$tgr_m = M\ ;\ M = \sqrt{\frac{sin(p-a)\,sin(p-b)\,sin(p-c)}{sin\,p}}\ ;$$

$$p - a = 101^\circ{,}3625 - 80^\circ{,}0069444 = 21{,}3555556\ ;$$

$$sin(p-a) = 0{,}36415445\ ;$$

$$p - b = 53^\circ{,}719167\ ;\quad sin(p-b) = 0{,}8061263\ ;$$

$$p - c = 26^\circ{,}2877819\ ;\quad sin(p-c) = 0{,}4428800\ ;$$

$$sin\,p = 0{,}9804003\ ;\quad M = 0{,}3641545\ ;$$

$$r_m = 20^\circ{,}0093217 = 20^\circ 00'33''\ ;$$

$$tgR_m = N\ ;\ N = \sqrt{\frac{sin(\varepsilon/2)}{sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}}\ ;$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = 18^\circ{,}7427778\ ;\quad sin\frac{\varepsilon}{2} = 0{,}3213201;$$