$$\boxed{y=\left(\int \varphi_1(x)\,dx+\tilde{C}_1\right)\, y_1(x)+\left(\int \varphi_2(x)\,dx+\tilde{C}_2\right)\, y_2(x)}\,.$$

Якщо покласти $\tilde{C}_1=0$ і $\tilde{C}_2=0$, то дістанемо частинний розв'язок ЛНДР $\boxed{y_*=y_1(x)\int \varphi_1(x)\,dx+y_2(x)\int \varphi_2(x)\,dx}$.

Тоді загальний розв'язок ЛНДР можна подати у вигляді

$$\boxed{\begin{aligned} y=\bar{y}+y_*=&\underbrace{C_1y_1(x)+C_2y_2(x)}_{\bar{y}}+\\ &+\underbrace{y_1(x)\int \varphi_1(x)\,dx+y_2(x)\int \varphi_2(x)\,dx}_{y_*}\,. \end{aligned}}$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти загальний розв'язок $y''+25y=ctg5x$.

□ Для відповідного ЛОДР $y''+25y=0$ розв'язуємо характеристичне рівняння $k^2+25=0$; $k_{1,2}=\pm 5i$ і записуємо його загальний розв'язок $\bar{y}=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$, де $y_1=\cos 5x$ і $y_2=\sin 5x$ – фундаментальна система частинних розв'язків, похідні яких $y_1'=-5\sin 5x$; $y_2'=5\cos 5x$.

Загальний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді

$$y=C_1(x)\cos 5x+C_2(x)\sin 5x\,,$$

де $C_1(x), C_2(x)$ – нові шукані функції. Для їх знаходження складаємо і розв'язуємо (методом Крамера) систему відносно похідних $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\cos 5x+C_2'(x)\cdot\sin 5x=0; \\ C_1'(x)\cdot(-5\sin 5x)+C_2'(x)\cdot 5\cos 5x=\operatorname{ctg} 5x; \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos 5x & \sin 5x \\ -5\sin 5x & 5\cos 5x \end{vmatrix}=5\cos^2 5x-(-5\sin^2 5x)=$$

$$=5(\cos^2 5x+\sin^2 5x)=5;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & \sin 5x \\ \operatorname{ctg} 5x & 5\cos 5x \end{vmatrix}=$$

$$= 0 - \mathrm{ctg}\,5x \cdot \sin 5x = -\cos 5x;\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 5x & 0 \\ -5\sin 5x & \mathrm{ctg}\,5x \end{vmatrix} =$$

$$= \cos 5x \cdot \mathrm{ctg}\,5x - 0 = \cos^2 5x / \sin 5x;$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{5}\cos 5x;\quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cos^2 5x}{5\sin 5x}.$$

Інтегруючи отримані вирази, дістанемо:

$$C_1(x) = (-1/5)\int \cos 5x\, dx = (-1/25)\sin 5x + \tilde{C}_1;$$

$$C_2(x) = \frac{1}{5}\int \frac{\cos^2 5x}{\sin 5x}\, dx = \frac{1}{5}\int \frac{1 - \sin^2 5x}{\sin 5x}\, dx = \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{\sin 5x} - \right.$$

$$\left. - \sin 5x \right) dx = (1/25)(\ln|\,\mathrm{tg}(5x/2)\,| + \cos 5x) + \tilde{C}_2.$$

Тоді загальний розв’язок ЛНДР

$$y = ((-1/25)\sin 5x + \tilde{C}_1)\cos 5x + ((1/25)(\ln|\,\mathrm{tg}(5x/2)\,| +$$

$$+ \cos 5x) + \tilde{C}_2)\sin 5x = \tilde{C}_1 \cos 5x + \tilde{C}_2 \sin 5x - (1/25)\sin 5x \times$$

$$\times \cos 5x + (1/25)\ln|\,tg(5x/2)\,|\sin 5x + (1/25)\cos 5x \sin 5x =$$

$$= \tilde{C}_1 \cos 5x + \tilde{C}_2 \sin 5x + (1/25)\ln|\,tg(5x/2)\,|\sin 5x. \ \blacksquare$$

Приклад 2. Розв’язати задачу Коші:

а) $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$; $y(1) = (1/4)e$; $y'(1) = -(3/4)e$;

б) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\sin x}$; $y(\pi/2) = 0$; $y'(\pi/2) = \dfrac{\pi}{2}e^{-\pi/2}$.

□ а) $y'' - 2y' + y = 0$; $k^2 - 2k + 1 = 0$; $k_{1,2} = k = 1$;

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x;\quad y_1 = e^x;\quad y_2 = xe^x;\quad y_1' = e^x;$$

$$y_2' = e^x + xe^x;\quad y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x;$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0; \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = e^x \ln x; \end{cases}\qquad C_1'(x) = -xC_2'(x);$$

$$-xC_2'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = e^x \ln x;$$

$$C_2'(x)(-x+1+x) = \ln x; \quad C_2'(x) = \ln x; \quad C_1'(x) = -x\ln x;$$

$$C_1(x) = -\int x\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x; du = (1/x)\,dx; \\ dv = x\,dx;\ v = x^2/2 \end{matrix} \right| = -(x^2/2)\ln x +$$

$$+(1/2)\int x\,dx = -(x^2/2)\ln x + x^2/4 + \tilde{C}_1;$$

$$C_2(x) = \int \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x; du = (1/x)\,dx; \\ dv = dx;\ v = x \end{matrix} \right| = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + \tilde{C}_2; \quad y = (-(x^2/2)\ln x + x^2/4 + \tilde{C}_1)e^x +$$

$$+(x\ln x - x + \tilde{C}_2)xe^x = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 xe^x - (x^2/2)e^x \ln x +$$

$$+x^2e^x/4 + x^2e^x\ln x - x^2e^x = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 xe^x + (1/2)x^2e^x\ln x -$$

$-(3/4)x^2e^x$ – загальний розв’язок.

Конкретні значення довільних сталих $\tilde{C}_1$ і $\tilde{C}_2$ знаходимо з початкових умов:

$$y' = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2(e^x + xe^x) + (1/2)(2xe^x\ln x + x^2e^x\ln x + xe^x) -$$

$$-(3/4)(2xe^x + x^2e^x);$$

$$\begin{matrix} y(1) = (1/4)e: \\ y'(1) = -(3/4)e: \end{matrix} \begin{cases} \tilde{C}_1 e + \tilde{C}_2 e - (3/4)e = (1/4)e; \\ \tilde{C}_1 e + 2\tilde{C}_2 e + (1/2)e - (9/4)e = -(3/4)e; \end{cases}$$

$$\tilde{C}_1 = 1 - \tilde{C}_2; \ 1 - \tilde{C}_2 + 2\tilde{C}_2 = 1; \ \tilde{C}_2 = 0; \ \tilde{C}_1 = 1.$$

Остаточно, розв’язком задачі Коші служить функція

$$y_K = e^x + (1/2)x^2e^x\ln x - (3/4)x^2e^x.$$

(Задачу б) розв’яжіть самостійно.

Відповідь: $y_K = -x\,e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x \cdot \ln|\sin x|$). ■

2.4.6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо ***ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$\boxed{y''+py'+qy=f(x)\,,\quad p=const\in R;\ q=const\in R}\,,$$

де права частина має ***спеціальний вигляд***

$$\boxed{f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx)}\,.$$

Тут $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ − многочлени відповідно степеня n і m; a і b − дійсні сталі, з яких формується ***характерне комплексне число*** $z=a+bi$.

<u>Зауваження 1</u>. m і n − довільні невід'ємні цілі числа, $m\geq 0$, $n\geq 0$; a і b − довільні дійсні числа, в тому числі $a=0,\ b=0$.

Згідно з ***методом невизначених коефіцієнтів*** *структура частинного розв'язку* y_* *ЛНДР формується за виглядом правої частини* $f(x)$ *з урахуванням того, коренем якої кратності* r $(r\geq 0)$ *служить характерне число* $z=a+bi$ *для характеристичного рівняння. Невідомі параметри (коефіцієнти) цієї структури знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь, які одержуються прирівнюванням коефіцієнтів при подібних відносно* x *членах.*

Частинний розв'язок має вигляд

$$\boxed{y_*=x^r e^{ax}(\overline{P_s}(x)\cos bx+\overline{Q}_s(x)\sin bx)}\,,$$

де $\overline{P_s}(x)$ і $\overline{Q}_s(x)$ − многочлени степеня $s=\max\{n,m\}$ з невідомими коефіцієнтами.

<u>Приклад 1</u>. Записати структуру частинного розв'язку y_*:

$$y''+4y'+20y=e^{-2x}(x^2\cos 4x-\sin 4x).$$

□ $y''+4y'+20y=0$; $k^2+4k+20=0$; $D=-64$;

$k_{1,2}=-2\pm 4i$; $z=a+bi=-2+4i$ − корінь кратності $r=1$; $s=\max\{2;0\}=2$;

$$y_* = x^1 e^{-2x}((Ax^2+Bx+C)\cos 4x + (Dx^2+Ex+F)\sin 4x),$$

де A, B, C, D, E, F – невідомі коефіцієнти. ■

<u>Приклад 2</u>. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''-y'-2y = e^x(9\cos x - 7\sin x)$.

□ $y''-y'-2y=0$; $k^2-k-2=0$; $D=9$; $k_1=2$;

$k_2=-1$; $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$; $z=a+bi=1+i$ − не є коренем

$(r=0)$; $s=\max\{0;0\}=0$; $y_* = e^x(A\cos x + B\sin x)$;

$$y_*' = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) = e^x(A\cos x +$$

$$+ B\sin x - A\sin x + B\cos x); \quad y_*'' = e^x(A\cos x + B\sin x -$$

$$- A\sin x + B\cos x) + e^x(-A\sin x + B\cos x - A\cos x - B\sin x) =$$

$$= e^x(-2A\sin x + 2B\cos x);$$

$$e^x(-2A\sin x + 2B\cos x) - e^x(A\cos x + B\sin x - A\sin x +$$

$$+ B\cos x) - 2e^x(A\cos x + B\sin x) = e^x(9\cos x - 7\sin x) \,|: e^x \neq 0;$$

$$-A\sin x + B\cos x - 3A\cos x - 3B\sin x = 9\cos x - 7\sin x;$$

$$\begin{array}{r|l} \cos x & \left\{\begin{array}{lll} B-3A=9; & B=9+3B; & A=-2; \\ -A-3B=-7; & -A-27-9A=-7; & B=3; \end{array}\right. \\ \sin x & \end{array}$$

Отже, маємо загальний розв'язок

$$y = \bar{y} + y_* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + e^x(-2\cos x + 3\sin x). \ ■$$

<u>Приклад 3</u>. Розв'язати задачу Коші:

$$y''+2y'+5y = 12e^{-x}\sin 2x; \quad y(0)=0; \ y'(0)=5.$$

□ $y''+2y'+5y=0$; $k^2+2k+5=0$; $D=4-20=-16$;

$k_{1,2}=-1\pm 2i$; $\bar{y} = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$;

$z=a+bi=-1+2i$ − корінь кратності $r=1$; $s=\max\{0;0\}=0$;

$$y_* = x^1 e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)\,; \quad y_*' = e^{-x}(A\cos 2x +$$

$$+ B\sin 2x) - xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2xe^{-x}(-A\sin 2x +$$

$$+ B\cos 2x)\,; \quad y_*'' = -2e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 4e^{-x} \times$$

$$\times(-A\sin 2x + B\cos 2x) - 3xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) -$$

$$-4xe^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x)\,;$$

$$-2e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 4e^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x) -$$

$$-3xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) - 4xe^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x) +$$

$$+2e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) - 2xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) +$$

$$+4xe^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x) + 5xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) =$$

$$= 12e^{-x}\sin 2x \ \ \big| \div e^{-x} \neq 0\,;$$

$$-2A\cos 2x - 2B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 3Ax\cos 2x -$$
$$-3Bx\sin 2x + 4Ax\sin 2x - 4Bx\cos 2x + 2A\cos 2x +$$
$$+2B\sin 2x - 2Ax\cos 2x - 2Bx\sin 2x - 4Ax\sin 2x +$$
$$+4Bx\cos 2x + 5Ax\cos 2x + 5Bx\sin 2x = 12\sin 2x\,;$$
$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = 12\sin 2x\,;$$

$$\begin{array}{c|} \cos 2x \\ \sin 2x \end{array} \ \begin{cases} 4B = 0; & B = 0; \\ -4A = 12; & A = -3; \end{cases} \quad y_* = -3xe^{-x}\cos 2x\,;$$

$$y = \bar{y} + y_* = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - 3xe^{-x}\cos 2x\,;$$

$$y' = -e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 2e^{-x}(-C_1\sin 2x + C_2\cos 2x) -$$

$$-3e^{-x}\cos 2x + 3xe^{-x}\cos 2x + 6xe^{-x}\sin 2x\,;$$

$$\begin{array}{r} y(0) = 0: \\ y'(0) = 5: \end{array} \begin{cases} C_1 = 0; & C_1 = 0; \\ -C_1 + 2C_2 - 3 = 5; & C_2 = 4; \end{cases}$$

Таким чином, маємо розв’язок задачі Коші:

$$y_K = 4e^{-x}\sin 2x - 3xe^{-x}\cos 2x\,. \quad \blacksquare$$

Розглянемо більш детально окремі випадки правої частини спеціального вигляду і відповідні форми частинного розв’язку y_* ЛНДР зі сталими коефіцієнтами.

1. Права частина – многочлен степеня n:

$$\boxed{f(x)=P_n(x),\ \ P_n(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+...+A_n}\ .$$

Можливі наступні випадки структури y_* в залежності від того, чи є характерне число $z=a+bi=0+0i=0$ коренем характеристичного многочлена:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює характерному числу $z=0$, тобто $k_1\neq 0,\ k_2\neq 0$, то y_* шукаємо у вигляді многочлена того ж степеня n з невизначеними коефіцієнтами: $\boxed{y_*=\overline{P_n}(x)=\overline{A}_0x^n+\overline{A}_1x^{n-1}+...+\overline{A}_n}$.

б) Якщо один з коренів характеристичного рівняння дорівнює числу $z=0$, наприклад, $k_1=0,\ k_2\neq 0$, то:

$$\boxed{y_*=x\overline{P_n}(x)=\overline{A}_0x^{n+1}+\overline{A}_1x^n+...+\overline{A}_nx}\ .$$

Приклад 4. Знайти загальний розв’язок:

а) $y''+3y'+2y=1-x^2$; б) $7y''-y'=12x$.

□ а) $y''+3y'+2y=0$; $k^2+3k+2=0$; $D=9-8=1$;

$$k_1=-1;\ \ k_2=-2;\ \ \overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x};$$

$z=a+bi=0+0i=0$ – не є коренем; $n=2$;

$$y_*=Ax^2+Bx+C;\ \ y_*'=2Ax+B;\ \ y_*''=2A;$$

$$2A+3(2Ax+B)+2(Ax^2+Bx+C)=1-x^2;$$

$$2Ax^2+(6A+2B)x+(2A+3B+2C)=1-x^2;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \left\{\begin{array}{ll} 2A=-1; & A=-1/2; \\ 6A+2B=0; & B=-3A=3/2; \\ 2A+3B+2C=1; & C=1/2-A-(3/2)B=-5/4; \end{array}\right. \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

$$y_* = -x^2/2 + (3/2)x - 5/4; \quad y = \bar{y} + y_*;$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - x^2/2 + (3/2)x - 5/4.$$

б) $7y'' - y' = 0; \; 7k^2 - k = 0; \; k(7k-1) = 0;$

$$k_1 = 0; \; k_2 = 1/7; \; \bar{y} = C_1 + C_2 e^{x/7};$$

$z = a + bi = 0 + 0i = 0$ − корінь кратності $r = 1$; $n = 1$;

$$y_* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx; \; y_*' = 2Ax + B; \; y_*'' = 2A;$$

$$7 \cdot 2A - (2Ax + B) = 12x; \; 14A - 2Ax - B = 12x;$$

$$-2Ax + (14A - B) = 12x; \quad \begin{array}{c|l} x^1 & \multirow{2}{*}{$\begin{cases} -2A = 12; \\ 14A - B = 0; \end{cases}$} \\ x^0 & \end{array} \quad A = -6;$$

$$B = 14A; \; B = -84; \; y_* = -6x^2 - 84x;$$

$$y = \bar{y} + y_*; \; y = C_1 + C_2 e^{x/7} - 6x^2 - 84x. \; \blacksquare$$

Зауваження 2. Підкреслимо, що у многочлені $P_n(x)$ коефіцієнти A_i, $i = \overline{1,n}$ можуть дорівнювати нулю. Але в будь-якому разі частинний розв'язок y_* шукаємо з повним многочленом $\overline{P_n}(x)$.

2. Права частина – добуток сталого множника на експоненту:

$$\boxed{f(x) = Ae^{ax}}.$$

При цьому в залежності від того, чи є характерне число $z = a + 0i = a$ коренем характеристичного многочлена та якої кратності r, можливі наступні випадки структури y_*:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює числу $z = a$, тобто $k_1 \neq a, k_2 \neq a$, то $\boxed{y_* = \bar{A}e^{ax}}$.

б) Якщо тільки один з коренів характеристичного рівняння дорівнює $z = a$, наприклад, $k_1 = a,\; k_2 \neq a$, то $\boxed{y_* = \bar{A}xe^{ax}}$.

в) Якщо обидва корені характеристичного рівняння дорівнюють числу $z = a$, тобто $k_1 = k_2 = a$, то $\boxed{y_* = \bar{A}x^2 e^{ax}}$.

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок:

а) $y''+4y'+3y=8e^{3x}$; б) $y''-5y'-6y=2e^{-x}$;

в) $3y''-6y'+3y=e^{x}$; г) $y''-4y=e^{-2x}$.

□ а) $y''+4y'+3y=0$; $k^2+4k+3=0$; $D=4$; $k_1=-1$;

$k_2=-3$; $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$; $z=a+bi=3+0i=3$

– не є коренем; $y_*=\overline{A}e^{3x}$; $y_*'=3\overline{A}e^{3x}$; $y_*''=9\overline{A}e^{3x}$;

$9\overline{A}e^{3x}+4\cdot 3\overline{A}e^{3x}+3\overline{A}e^{3x}=8e^{3x}$; $24\overline{A}e^{3x}=8e^{3x}$; $\overline{A}=1/3$;

$y_*=e^{3x}/3$; $y=\bar{y}+y_*$; $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+e^{3x}/3$.

б) $y''-5y'-6y=0$; $k^2-5k-6=0$; $D=49$; $k_1=-1$;

$k_2=6$; $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$; $z=a+bi=-1+0i=-1$

– корінь кратності $r=1$; $y_*=\overline{A}xe^{-x}$; $y_*'=\overline{A}e^{-x}-\overline{A}xe^{-x}$;

$y_*''=-\overline{A}e^{-x}-\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}=-2\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}$;

$-2\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}-5(\overline{A}e^{-x}-\overline{A}xe^{-x})-6\overline{A}xe^{-x}=2e^{-x}$;

$-2\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}-5\overline{A}e^{-x}+5\overline{A}xe^{-x}-6\overline{A}xe^{-x}=2e^{-x}$;

$-7\overline{A}e^{-x}=2e^{-x}$; $\overline{A}=-2/7$; $y_*=(-2/7)xe^{-x}$;

$y=\bar{y}+y_*$; $y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}-(2/7)xe^{-x}$.

в) $3y''-6y'+3y=0$; $y''-2y'+y=0$; $D=0$;

$k_1=k_2=k=1$; $\bar{y}=e^{x}(C_1+C_2x)$; $z=a+bi=1+0i=1$

– корінь кратності $r=2$; $y_*=\overline{A}x^2e^{x}$; $y_*'=2\overline{A}xe^{x}+\overline{A}x^2e^{x}$;

$y_*''=2\overline{A}e^{x}+2\overline{A}xe^{x}+2\overline{A}xe^{x}+\overline{A}x^2e^{x}=2\overline{A}e^{x}+4\overline{A}xe^{x}+$

$+\overline{A}x^2e^{x}$; $3(2\overline{A}e^{x}+4\overline{A}xe^{x}+\overline{A}x^2e^{x})-6(2\overline{A}xe^{x}+\overline{A}x^2e^{x})+$

$+3\overline{A}x^2e^{x}=e^{x}$; $6\overline{A}e^{x}+12\overline{A}xe^{x}+3\overline{A}x^2e^{x}-12\overline{A}xe^{x}-$

$-6\overline{A}x^2e^{x}+3\overline{A}x^2e^{x}=e^{x}$; $6\overline{A}e^{x}=e^{x}$; $\overline{A}=1/6$;

$$y_* = x^2 e^x / 6; \quad y = \bar{y} + y_*; \quad y = e^x (C_1 + C_2 x) + x^2 e^x / 6.$$

(Рівняння г) розв'язати самостійно). ■

3. <u>Права частина – лінійна комбінація косинуса і синуса одного і того ж аргументу</u>:

$$\boxed{f(x) = A\cos bx + B\sin bx}.$$

При цьому в залежності від того, чи є характерне число $z = 0 + bi = bi$ коренем характеристичного многочлена, можливі наступні випадки структури y_*:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює $z = bi$, тобто $k_{1,2} \neq \pm bi$, то $y_* = \bar{A}\cos bx + \bar{B}\sin bx$.

$$\boxed{y_* = \bar{A}\cos bx + \bar{B}\sin bx}.$$

б) Якщо один з коренів характеристичного рівняння дорівнює числу $z = bi$, тобто $k_{1,2} = \pm \beta i$ і $\beta = b$, то

$$\boxed{y_* = x(\bar{A}\cos bx + \bar{B}\sin bx)}.$$

<u>Зауваження 3</u>. A і B − довільні задані числа, одне з яких може дорівнювати нулю. У будь-якому разі частинний розв'язок y_* шукаємо у відповідному повному вигляді з $\bar{A}$ і $\bar{B}$.

<u>Приклад 6</u>. Знайти загальний розв'язок:

а) $y'' - 6y' + 5y = 26\cos x$; б) $y'' + 16y = 4\cos 4x - 24\sin 4x$.

□ а) $y'' - 6y' + 5y = 0$; $k^2 - 6k + 5 = 0$; $D = 16$; $k_1 = 1$;

$$k_2 = 5; \quad \bar{y} = C_1 e^{5x} + C_2 e^x; \quad z = a + bi = 0 + 1i = i$$

− не є коренем; $y_* = \bar{A}\cos x + \bar{B}\sin x$; $y_*' = -\bar{A}\sin x +$

$+\bar{B}\cos x$; $y_*'' = -A\cos x - B\sin x$; $-\bar{A}\cos x - \bar{B}\sin x -$

$$-6(-\bar{A}\sin x + \bar{B}\cos x) + 5(\bar{A}\cos x + \bar{B}\sin x) = 26\cos x;$$

$$-\bar{A}\cos x - \bar{B}\sin x + 6\bar{A}\sin x - 6\bar{B}\cos x + 5\bar{A}\cos x + 5\bar{B}\sin x =$$

$$= 26\cos x; \quad (-\bar{A} - 6\bar{B} + 5\bar{A})\cos x + (-\bar{B} + 6\bar{A} + 5\bar{B})\sin x =$$

$$= 26\cos x;\quad (4\overline{A} - 6\overline{B})\cos x + (6\overline{A} + 4\overline{B})\sin x = 26\cos x;$$

$$\begin{array}{l|} \cos x \\ \sin x \end{array} \begin{cases} 4\overline{A} - 6\overline{B} = 26; \\ 6\overline{A} + 4\overline{B} = 0; \end{cases} \begin{cases} \overline{B} = (-3/2)\overline{A}; \\ 4\overline{A} + 9\overline{A} = 26;\ \overline{A} = 2;\ \overline{B} = -3; \end{cases}$$

$$y_* = 2\cos x - 3\sin x;\quad y = C_1 e^{5x} + C_2 e^x + 2\cos x - 3\sin x.$$

б) $y'' + 16y = 0$; $k^2 + 16 = 0$; $k^2 = -16$; $k_{1,2} = \pm 4i$;

$$\overline{y} = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x;\quad z = a + bi = 0 + 4i = 4i$$

− корінь кратності $r = 1$; $y_* = x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x)$;

$$y_*' = \overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x + x(-4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x);$$

$$y_*'' = -4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x - 4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x +$$

$$+ x(-16\overline{A}\cos 4x - 16\overline{B}\sin 4x) = -16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x) -$$

$$-8A\sin 4x + 8B\cos 4x;\quad -16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x)x -$$

$$-8\overline{A}\sin 4x + 8\overline{B}\cos 4x + 16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x) = 4\cos 4x -$$

$$-24\sin 4x;\quad -8\overline{A}\sin 4x + 8\overline{B}\cos 4x = 4\cos 4x - 24\sin 4x;$$

$$\begin{array}{l|} \cos 4x \\ \sin 4x \end{array} \begin{cases} 8\overline{B} = 4; & \overline{B} = 1/2; \\ -8\overline{A} = -24; & \overline{A} = 3; \end{cases}$$

$$y_* = x(3\cos 4x + (1/2)\sin 4x);\quad y = \overline{y} + y_*;$$

$$y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + x(3\cos 4x + (1/2)\sin 4x).\ ■$$

Зауваження 4. Якщо права частина $f(x)$ не має спеціального вигляду, то часто її можна подати як скінченну суму

$$\boxed{f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)},$$

де кожний доданок $f_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ уже має спеціальний вигляд. Тоді за принципом суперпозиції $\boxed{y_* = y_{*1} + y_{*2} + ... + y_{*n}}$, де y_{*i} – частинний розв’язок рівняння $\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)}$ з тією ж самою лівою і відповідною правою частиною, $i = \overline{1,n}$.

<u>Приклад 7</u>. Знайти загальний розв'язок

$$\text{а)}\ y''-2y'+6y=18e^{2x}-29\sin x;$$

$$\text{б)}\ y''+4y=12e^{-2x}+8x.$$

□ а) Для відповідного ЛОДР $y''-2y'+6y=0$ розв'язуємо характеристичне рівняння

$$k^2-2k+6=0;\ \ D=-20;\ k_{1,2}=1\pm\sqrt{5}i$$

і записуємо його загальний розв'язок

$$\bar{y}=e^{x}(C_1\cos\sqrt{5}x+C_2\sin\sqrt{5}x).$$

Права частина $f(x)=18e^{2x}-29\sin x$ не має спеціального вигляду, але її можна подати як суму двох доданків спеціального вигляду

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),\ \text{де}\ f_1(x)=18e^{2x},\ f_2(x)=-29\sin x.$$

Тоді $y_*=y_{*1}+y_{*2}$. Знайдемо окремо y_{*1} і y_{*2}:

$$z_1=a_1+b_1i=2+0i=2\ -\text{не є коренем};\ \ y_{*1}=\overline{A}e^{2x};$$

$$y'_{*1}=2\overline{A}e^{2x};\ \ y''_{*1}=4\overline{A}e^{2x};\ \ 4\overline{A}e^{2x}-2\cdot 2\overline{A}e^{2x}+6\overline{A}e^{2x}=$$

$$=18e^{2x};\ \ 6\overline{A}e^{2x}=18e^{2x};\ \ \overline{A}=3;\ \ \ y_{*1}=3e^{2x};$$

$$z_2=a_2+b_2i=0+1i=i\ -\text{не є коренем};\ y_{*2}=\overline{A}\cos x+\overline{B}\sin x;$$

$$y'_{*2}=-\overline{A}\sin x+\overline{B}\cos x;\ \ y''_{*2}=-\overline{A}\cos x-\overline{B}\sin x;$$

$$-\overline{A}\cos x-\overline{B}\sin x-2(-\overline{A}\sin x+\overline{B}\cos x)+6(\overline{A}\cos x+$$

$$+\overline{B}\sin x)=-29\sin x;$$

$$-(5\overline{A}-2\overline{B})\cos x+(2\overline{A}+5\overline{B})\sin x=-29\sin x;$$

$$\begin{array}{c|}\cos x\\ \sin x\end{array}\begin{cases}5\overline{A}-2\overline{B}=0;\\ 2\overline{A}+5\overline{B}=-29;\end{cases}\ \begin{cases}\overline{B}=(5/2)\overline{A};\\ 2\overline{A}+5\cdot(5/2)\overline{A}=-29;\end{cases}$$

$$\overline{A}=-2;\ \ \overline{B}=-5;\ \ \ y_{*2}=-2\cos x-5\sin x;$$

$$y_*=y_{*1}+y_{*2}=3e^{2x}-2\cos x-5\sin x.$$

Отже, загальний розв’язок ЛНДР

$$y = \bar{y} + y_* = e^x (C_1 \cos\sqrt{5}x + C_2 \sin\sqrt{5}x) +$$

$$+ 3e^{2x} - 2\cos x - 5\sin x .$$

(Рівняння б) розв’язати самостійно). ■

<u>Приклад 8</u>. Розв’язати задачу Коші:

а) $y''+4y'=-16x+8+40\sin 2x$; $y(0)=3$; $y'(0)=7$;

б) $y''+4y'+5y=2e^{-x}+6\cos x$; $y(0)=-1$; $y'(0)=0$.

□ а) $y''+4y'=0$; $k^2+4k=0$; $k(k+4)=0$; $k_1=0$;

$$k_2=-4; \quad \bar{y}=C_1+C_2e^{-4x}; \quad f(x)=f_1(x)+f_2(x);$$

$$f_1(x)=-16x+5; \quad f_2(x)=40\sin 2x; \quad y_*=y_{*1}+y_{*2};$$

$z_1=a_1+b_1i=0+0i=0$ − корінь кратності $r=1$; $n=1$;

$$y_{*1}=(\overline{A}x+\overline{B})x=\overline{A}x^2+\overline{B}x; \quad y'_{*1}=2\overline{A}x+\overline{B}; \quad y''_{*1}=2\overline{A};$$

$$2\overline{A}+4(2\overline{A}x+\overline{B})=-16x+8; \quad 8\overline{A}x+2\overline{A}+4\overline{B}=-16x+8;$$

$$\begin{array}{l|l} x^1 & \begin{cases} 8\overline{A}=-16; \quad \overline{A}=-2; \\ 2\overline{A}+4\overline{B}=8; \; 2\cdot(-2)+4\overline{B}=8; \; \overline{B}=3; \end{cases} \\ x^0 & \end{array} \quad y_{*1}=-2x^2+3x;$$

$z_2=a_2+b_2i=0+2i=2i$ − не є коренем;

$$y_{*2}=\overline{A}\cos 2x+\overline{B}\sin 2x; \quad y'_{*2}=-2\overline{A}\sin 2x+2\overline{B}\cos 2x;$$

$$y''_{*2}=-4\overline{A}\cos 2x-4\overline{B}\sin 2x; \quad -4\overline{A}\cos 2x-4\overline{B}\sin 2x+$$

$$+4(-2\overline{A}\sin 2x+2\overline{B}\cos 2x)=40\sin 2x;$$

$$(-4\overline{A}+8\overline{B})\cos 2x+(-8\overline{A}-4\overline{B})\sin 2x=40\sin 2x;$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & \begin{cases} -4\overline{A}+8\overline{B}=0; \qquad \overline{A}=2\overline{B}; \\ -8\overline{A}-4\overline{B}=40; \; -8\cdot 2\overline{B}-4\overline{B}=40; \; \overline{B}=-2; \; \overline{A}=-4; \end{cases} \\ \sin 2x & \end{array}$$

$$y_{*2}=-4\cos 2x-2\sin 2x; \quad y_*=y_{*1}+y_{*2}=-2x^2+3x-$$

$$-4\cos 2x-2\sin 2x; \quad y=\bar{y}+y_*=C_1+C_2e^{-4x}-2x^2+3x-$$

$$-4\cos 2x - 2\sin 2x\,;\quad y' = -4C_2 e^{-4x} - 4x + 3 + 8\sin 2x -$$

$$-4\cos 2x\,;\quad \begin{matrix} y(0)=3: \\ y'(0)=7: \end{matrix} \begin{cases} C_1 + C_2 - 4 = 3; & C_2 = -2; \\ -4C_2 + 3 - 4 = 7; & C_1 = 7 - C_2 = 9; \end{cases}$$

$$y_K = 9 - 2e^{-4x} - 2x^2 + 3x - 4\cos 2x - 2\sin 2x\,.$$

(Задачу б) розв’язати самостійно). ■

Приклад 9. Розв’язати крайову задачу

$$y'' - 4y' + 4y = 10e^{2x} + 28\,;\quad y(0) = 7\,;\ y(1) = 7 + 3e^2\,.$$

□ $y'' - 4y' + 4y = 0$; $k^2 - 4k + 4 = 0$; $D = 0$; $k_1 = k_2 = k = 2$;

$\bar{y} = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$; $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$; $f_1(x) = 10e^{2x}$;

$f_2(x) = 28$; $y_* = y_{*1} + y_{*2}$; $z_1 = a_1 + b_1 i = 2 + 0i = 2$ – корінь кратності $r = 2$; $y_{*1} = \overline{A}x^2 e^{2x}$; $y'_{*1} = 2\overline{A}xe^{2x} + 2\overline{A}x^2 e^{2x}$;

$$y''_{*1} = 2\overline{A}e^{2x} + 4\overline{A}xe^{2x} + 4\overline{A}xe^{2x} + 4\overline{A}x^2 e^{2x} = 2\overline{A}e^{2x} +$$

$$+ 8\overline{A}xe^{2x} + 4\overline{A}x^2 e^{2x}\,;\qquad 2\overline{A}e^{2x} + 8\overline{A}xe^{2x} + 4\overline{A}x^2 e^{2x} -$$

$$-4(2\overline{A}xe^{2x} + 2\overline{A}x^2 e^{2x}) + 4\overline{A}x^2 e^{2x} = 10e^{2x}\,;\ \ 2\overline{A}e^{2x} = 10e^{2x}\,;$$

$\overline{A} = 5$; $y_{*1} = 5x^2 e^{2x}$; $z_2 = a_2 + b_2 i = 0 + 0i = 0$ – не є коренем;

$n = 0$; $y_{*2} = \overline{A}$; $y'_{*2} = 0$; $y''_{*2} = 0$; $4\overline{A} = 28$; $\overline{A} = 7$;

$$y_{*2} = 7\,;\qquad y_* = y_{*1} + y_{*2} = 5x^2 e^{2x} + 7\,;$$

$$y = \bar{y} + y_* = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + 5x^2 e^{2x} + 7\,;$$

$$\begin{matrix} y(0)=7: \\ y(1)=7+3e^2: \end{matrix} \begin{cases} C_1 e^2 + 7 = 7; & C_1 = 0; \\ (C_1 + C_2)e^2 + 7 = 7 + 3e^2; & C_2 = 3; \end{cases}$$

$$y_b = 3xe^{2x} + 5x^2 e^{2x} + 7\,.\ \ ■$$

Зауваження 5. Для ЛНДР довільного n-го порядку $(n \geq 2)$ зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x),\ \ a_i = const \in R\,,\ i = \overline{1,n}\,,$$

де права частина $f(x)$ має вказаний вище спеціальний вигляд, загальний розв'язок ЛНДР також шукаємо у вигляді $y=\overline{y}+y_*$, де $\overline{y}$ − загальний розв'язок відповідного ЛОДР, y_* − деякий частинний розв'язок ЛНДР. Правила знаходження частинного розв'язку y_* аналогічні розглянутим для випадку ЛНДР другого порядку.

<u>Приклад 10</u>. Знайти загальний розв'язок

а) $y^{IV}-18y''+81y=216e^{-3x}$; б) $y'''-2y''+y'=300\cos 3x$;

в) $y^{IV}-y=15\cos 2x$.

□ а) $y^{IV}-18y''+81y=0$; $k^4-18k^2+81=0$;

$(k^2-9)^2=0$; $k_1=-3$ − корінь кратності $r_1=2$; $k_2=3$ − корінь кратності $r_2=2$; $\overline{y}=e^{-3x}(C_1+C_2x)+e^{3x}(C_3+C_4x)$;

$z=a+bi=-3+0i=-3$ − корінь кратності $r_1=2$;

$y_*=\overline{A}x^2e^{-3x}$; $y'_*=2\overline{A}xe^{-3x}-3\overline{A}x^2e^{-3x}$; $y''_*=2\overline{A}e^{-3x}-$
$-6\overline{A}xe^{-3x}-6\overline{A}xe^{-3x}+9\overline{A}x^2e^{-3x}=2\overline{A}e^{-3x}-12\overline{A}xe^{-3x}+$
$+9\overline{A}x^2e^{-3x}$; $y'''_*=-6\overline{A}e^{-3x}-12\overline{A}e^{-3x}+36\overline{A}xe^{-3x}+$
$+18\overline{A}xe^{-3x}-27\overline{A}x^2e^{-3x}=-18\overline{A}e^{-3x}+54\overline{A}xe^{-3x}-$
$-27\overline{A}x^2e^{-3x}$; $y^{IV}=54\overline{A}e^{-3x}+54\overline{A}e^{-3x}-162\overline{A}xe^{-3x}-$
$-54\overline{A}xe^{-3x}+81\overline{A}x^2e^{-3x}=108\overline{A}e^{-3x}-216\overline{A}xe^{-3x}+81\overline{A}x^2e^{-3x}$;
$108\overline{A}e^{-3x}-216\overline{A}xe^{-3x}+81\overline{A}x^2e^{-3x}-18(2\overline{A}e^{-3x}-12\overline{A}xe^{-3x}+$
$+9\overline{A}x^2e^{-3x})+81\overline{A}x^2e^{-3x}=216e^{-3x}$; $108\overline{A}e^{-3x}=216e^{-3x}$;

$\overline{A}=2$; $y_*=2x^2e^{-3x}$;

$$y=\overline{y}+y_*=e^{-3x}(C_1+C_2x)+e^{3x}(C_3+C_4x)+2x^2e^{-3x}.$$

б) $y'''-2y''+y'=0$; $k^3-2k^2+k=0$; $k(k-1)^2=0$;

$k_1=0$; $k_2=1$ − корінь кратності $r_2=2$; $\overline{y}=C_1+e^x(C_2+C_3x)$;

$z = a + bi = 0 + 3i = 3i$ − не є коренем; $y_* = \overline{A}\cos 3x + \overline{B}\sin 3x$;

$y'_* = -3\overline{A}\sin 3x + 3\overline{B}\cos 3x$; $y''_* = -9\overline{A}\cos 3x - 9\overline{B}\sin 3x$;

$y'''_* = 27\overline{A}\sin 3x - 27\overline{B}\cos 3x$; $27\overline{A}\sin 3x - 27\overline{B}\cos 3x - 2\times$

$\times(-9\overline{A}\cos 3x - 9\overline{B}\sin 3x) - 3\overline{A}\sin 3x + 3\overline{B}\cos 3x = 300\cos 3x$;

$24\overline{A}\sin 3x - 24\overline{B}\cos 3x + 18\overline{A}\cos 3x + 18\overline{B}\sin 3x = 300\cos 3x$;

$$\begin{array}{c|l} \cos 3x & \\ \sin 3x & \end{array}\left\{\begin{array}{ll} 18\overline{A} - 24\overline{B} = 300; & \overline{B} = -(4/3)\overline{A}; \\ 24\overline{A} + 18\overline{B} = 0; & 18\overline{A} + 32\overline{A} = 300; \end{array}\right. \quad \overline{A} = 6;$$

$\overline{B} = -8$; $y_* = 6\cos 3x - 8\sin 3x$; $y = \overline{y} + y_* =$

$= C_1 + e^x(C_2 + C_3 x) + 6\cos 3x - 8\sin 3x$.

в) $y^{IV} - y = 0$; $k^4 - 1 = 0$; $(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0$;

$k^2 - 1 = 0$; $k_{1,2} = \pm 1$; $k^2 + 1 = 0$; $k_{3,4} = \pm i$;

$\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3\cos x + C_4\sin x$; $z = a + bi =$

$= 0 + 2i = 2i$ − не є коренем; $y_* = \overline{A}\cos 2x + \overline{B}\sin 2x$;

$y'_* = -2\overline{A}\sin 2x + 2\overline{B}\cos 2x$; $y''_* = -4\overline{A}\cos 2x - 4\overline{B}\sin 2x$;

$y'''_* = 8\overline{A}\sin 2x - 8\overline{B}\cos 2x$; $y^{IV} = 16\overline{A}\cos 2x + 16\overline{B}\sin 2x$;

$16\overline{A}\cos 2x + 16\overline{B}\sin 2x - \overline{A}\cos 2x - \overline{B}\sin 2x = 15\cos 2x$;

$15\overline{A}\cos 2x + 15\overline{B}\sin 2x = 15\cos 2x$;

$$\begin{array}{c|l} \cos 2x & \\ \sin 2x & \end{array}\left\{\begin{array}{ll} 15\overline{A} = 15; & \overline{A} = 1; \\ 15\overline{B} = 0; & \overline{B} = 0; \end{array}\right. \quad y_* = \cos 2x;$$

$y = \overline{y} + y_* = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3\cos x + C_4\sin x + \cos 2x$. ■

Приклад 11. Розв’язати задачу Коші:

$y''' + 4y' = 32x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 6$; $y''(0) = -8$.

□ $y''' + 4y' = 0$; $k^3 + 4k = 0$; $k(k^2 + 4) = 0$; $k_1 = 0$;

$$k_{2,3} = \pm 2i\,; \quad \bar{y} = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x\,;$$

$z = a + bi = 0 + 0i = 0$ − корінь кратності $r = 1$; $n = 1$;

$$y_* = (\overline{A}x + \overline{B})x = \overline{A}x^2 + \overline{B}x\,; \quad y'_* = 2\overline{A}x + \overline{B}\,; \quad y''_* = 2\overline{A}\,;$$

$$y'''_* = 0\,; \quad 4(2\overline{A}x + \overline{B}) = 32x\,; \quad 8\overline{A}x + 4\overline{B} = 32x\,;$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \left\{\begin{array}{ll} 8\overline{A} = 32; & \overline{A} = 4; \\ 4\overline{B} = 0; & \overline{B} = 0; \end{array}\right. \\ x^0 & \end{array} \quad y_* = 4x^2; \quad y = \bar{y} + y_* = C_1 +$$

$$+ C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + 4x^2\,; \quad y' = -2C_2 \sin 2x +$$

$$+ 2C_3 \cos x + 8x\,; \quad y'' = -4C_2 \cos 2x - 2C_3 \sin 2x + 8\,;$$

$$\begin{array}{r} y(0) = 0: \\ y'(0) = 6: \\ y''(0) = -8: \end{array} \begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ 2C_3 = 6; \\ -4C_2 = -8; \end{cases} \begin{cases} C_3 = 3; \\ C_2 = 2; \\ C_1 + 2 = 0; \quad C_1 = -2; \end{cases}$$

$$y_K = -2 + 2\cos 2x + 3\sin 2x + 4x^2\,. \quad \blacksquare$$

2.4.7. Застосування лінійних диференціальних рівнянь для дослідження електричних коливань

До ЛНДР другого порядку приводить вивчення проходження струму в електричному колі.

Розглянемо електричний контур, що складається з послідовно сполучених активного опору R, індуктивності L і ємності C, які підключенні до джерела електрорушійної сили (ЕРС) E, що змінюється з бігом часу t за відомим законом $E = E(t)$ (рис. 56). Дослідимо, як змінюється сила струму в контурі $I = I(t)$ з часом t.

Для елементів R, L і C виконуються відомі з фізики співвідношення, що зв'язують падіння напруги на кінцях елемента $U(t)$ та силу струму в ньому $I(t)$:

$$U_R(t) = R\,I_R(t)\,; \quad U_L(t) = L\,\frac{dI_L(t)}{dt}\,;$$

$$U_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t I_C(t)\,dt+U_C(0),$$

де $U_C(0)$ – падіння напруги на ємності в початковий момент часу $t=0$.

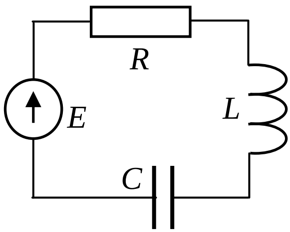

Рис. 56

При послідовному сполученні сила струму у всіх елементах однакова:

$$I_R(t)=I_L(t)=I_C(t)=I(t).$$

За другим законом Кірхгофа алгебраїчна сума падінь напруги на всіх елементах замкнутого контура дорівнює ЕРС:

$$U_R(t)+U_L(t)+U_C(t)=E(t).$$

Тому

$$R\,I(t)+L\,\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t I(t)\,dt+U_C(0)=E(t).$$

Диференціюючи по t отриману рівність, дістанемо для сили струму $I=I(t)$ ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$R\,\frac{dI(t)}{dt}+L\,\frac{d^2I(t)}{dt^2}+\frac{1}{C}I(t)=\frac{dE(t)}{dt};$$

$$I''+2\alpha I'+\omega_0^2\,I=(1/L)\,E',$$

де $\alpha=R/(2L)$; $\omega_0^2=1/(LC)$ і для скорочення запису опущено аргумент t.

Загальний розв'язок ЛНДР можна подати у вигляді $I=\bar{I}+I_*$, де $\bar{I}$ − загальний розв'язок відповідного ЛОДР, I_* − деякий частинний розв'язок ЛНДР.

Розглянемо відповідне однорідне ДР $I''+2\alpha I'+\omega_0^2\,I=0$, характеристичне рівняння якого $k^2+2\alpha k+\omega_0^2=0$.

1. Нехай активний опір відсутній $R=0$, тоді $\alpha=0$ і ЛОДР набуває вигляду $I''+\omega_0^2\,I=0$. Спрощене характеристичне рівняння $k^2+\omega_0^2=0$ має уявні спряжені корені $k_{1,2}=\pm\omega_0 i$. Загальний

розв'язок $\bar{I} = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$ відповідає вільним незатухаючим коливанням і його можна записати як $\bar{I} = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$, де A і φ – нові довільні сталі, що зв'язані з C_1 і C_2 рівностями $C_1 = A\sin\varphi$ і $C_2 = A\cos\varphi$. Використовується наступна термінологія: ω_0 – власна кругова частота; A – амплітуда; φ – початкова фаза.

2. Нехай активний опір такий великий, що $\alpha > \omega_0$. Тоді для ЛОДР характеристичне рівняння має різні дійсні корені $k_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0$ і $k_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0$. Загальний розв'язок $\bar{I} = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$ не містить періодичних складових (коливання відсутні) і прямує до нуля при $t \to \infty$.

3. Нехай активний опір задовольняє умову $\alpha = \omega_0$. Тоді для ЛОДР характеристичне рівняння $k^2 + 2\alpha k + \omega_0^2 = 0$ має один дійсний корінь $k = -\alpha < 0$ кратності $r = 2$. Загальний розв'язок $\bar{I} = (C_1 + C_2 t)e^{-\alpha t}$, як і в попередньому випадку, не містить періодичних складових (коливання відсутні) і прямує до нуля при $t \to \infty$.

4. Нехай активний опір такий малий, що $\alpha < \omega_0$. Тоді для ЛОДР характеристичне рівняння має пару комплексно спряжених коренів $k_{1,2} = -\alpha \pm \omega i$, де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} > 0$. Загальний розв'язок $\bar{I} = (C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)e^{-\alpha t}$ відповідає затухаючим коливанням з круговою частотою ω. Його можна записати у формі $I = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t + \varphi)$, де A і φ – нові довільні сталі, що зв'язані з C_1 і C_2 рівностями $C_1 = A\sin\varphi$ і $C_2 = A\cos\varphi$. Амплітуда коливань $Ae^{-\alpha t}$ прямує до нуля при $t \to \infty$.

При розгляді неоднорідного ДР обмежимося лише найважливішим випадком малого опору R, коли $\alpha < \omega_0$, і періодичної ЕРС $E = E_0 \sin\tilde{\omega}t$, де E_0 – амплітуда; $\tilde{\omega}$ – кругова частота. Тоді права частина ЛНДР $f(t) = (1/L)E' = (\tilde{\omega}E_0 / L)\cos\tilde{\omega}t$ має спеціальний вигляд. Частинний розв'язок I_* шукаємо у відповідній формі $I_* = \overline{A}\cos\tilde{\omega}t + \overline{B}\sin\tilde{\omega}t$, оскільки характерне число $z = a + bi = 0 + \tilde{\omega}i = \tilde{\omega}i$ не є коренем характеристичного рівняння. Знайдемо коефіцієнти $\overline{A}$ і $\overline{B}$:

$$I_*' = -\overline{A}\tilde{\omega}\sin\tilde{\omega}t + \overline{B}\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega}t\,;\;\; I_*'' = -\overline{A}\tilde{\omega}^2\cos\tilde{\omega}t - \overline{B}\tilde{\omega}^2\sin\tilde{\omega}t\,;$$

$$-\overline{A}\tilde{\omega}^2\cos\tilde{\omega}t - \overline{B}\tilde{\omega}^2\sin\tilde{\omega}t + 2\alpha(-\overline{A}\tilde{\omega}\sin\tilde{\omega}t + \overline{B}\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega}t) +$$

$$+\omega_0^2(\overline{A}\cos\tilde{\omega}t + \overline{B}\sin\tilde{\omega}t) = (\tilde{\omega}E_0/L)\cos\tilde{\omega}t\,;\;\; (-\tilde{\omega}^2\overline{A} + 2\alpha\tilde{\omega}\overline{B} +$$

$$+\omega_0^2\overline{A})\cos\tilde{\omega}t - (\tilde{\omega}^2\overline{B} + 2\alpha\tilde{\omega}\overline{A} - \omega_0^2\overline{B})\sin\tilde{\omega}t = (\tilde{\omega}E_0/L)\cos\tilde{\omega}t\,;$$

$$\begin{array}{c|l} \cos\tilde{\omega}t & \left\{\begin{array}{l} -\tilde{\omega}^2\overline{A} + 2\alpha\tilde{\omega}\overline{B} + \omega_0^2\overline{A} = \tilde{\omega}E_0/L; \\ -(\tilde{\omega}^2\overline{B} + 2\alpha\tilde{\omega}\overline{A} - \omega_0^2\overline{B}) = 0; \end{array}\right. \\ \sin\tilde{\omega}t & \end{array}$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)\overline{A} + 2\alpha\tilde{\omega}\overline{B} = \tilde{\omega}E_0/L; \\ 2\alpha\tilde{\omega}\overline{A} - (\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)\overline{B} = 0; \end{cases} \quad \overline{B} = (2\alpha\tilde{\omega}\overline{A})\big/(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)\,;$$

$$(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)\overline{A} + 2\alpha\tilde{\omega}(2\alpha\tilde{\omega}\overline{A})\big/(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2) = \tilde{\omega}E_0/L\,;$$

$$\overline{A} = \frac{\tilde{\omega}E_0(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}{L((\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\alpha^2\tilde{\omega}^2)}\,;\;\; \overline{B} = \frac{2\alpha\tilde{\omega}^2E_0}{L((\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\alpha^2\tilde{\omega}^2)}\,.$$

Частинний розв'язок I_* відповідає вимушеним коливанням. Його можна подати у вигляді $I_* = \overline{N}\sin(\tilde{\omega}t + \overline{\varphi})$, де амплітуда $\overline{N}$ знаходиться за формулою:

$$\overline{N} = \sqrt{\overline{A}^2 + \overline{B}^2} = \left(\tilde{\omega}E_0/L\right)\Big/\sqrt{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4\alpha^2\tilde{\omega}^2}\,.$$

Амплітуда $\overline{N}$ вимушених коливань, як функція від $\tilde{\omega}$, досягає максимуму при $\tilde{\omega} = \omega_0$ (дослідження на екстремум за допомогою похідної проробіть самостійно) і

$$\overline{N}_{max} = E_0\big/(2L\alpha) = E_0\big/(2L\cdot R/(2L)) = E_0\big/R\,.$$

Таким чином, якщо частота $\tilde{\omega}$ зовнішнього збудження (електрорушійної сили) співпадає з частотою ω_0 вільних коливань

$\widetilde{\omega} = \omega_0$, то амплітуда вимушених коливань при досить малому активному опорі R досягає дуже великого значення $\overline{N}_{max} = E_0 / R$. Це явище називається ***резонансом***.

Можна показати (зробіть це самостійно), що у випадку відсутності активного опору R (вільні коливання) при резонансі, коли $E = E_0 \sin \omega_0 t$, частинний розв'язок I_* має вигляд $I_* = (E_0 /(2L)) t \sin \omega_0 t$, тобто амплітуда вимушених коливань необмежено зростає (лінійно з бігом часу t).

2.5. Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами

2.5.1. Загальні поняття

У багатьох задачах потрібно знайти не одну, а декілька невідомих функцій, які характеризують взаємодіючі об'єкти. що описуються системою диференціальних рівнянь.

При розгляді специфічних підходів до розв'язування диференціальних систем обмежимося лише найпростішою ***нормальною системою лінійних ДР першого порядку*** (***СЛДР***) ***зі сталими коефіцієнтами***, що має вигляд:

$$\begin{cases} dx_1 / dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1(t); \\ dx_2 / dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2(t); \\ \text{...} \\ dx_n / dt = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n(t), \end{cases}$$

де t − аргумент; $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), ..., x_n = x_n(t)$ − шукані функції; $a_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$ − сталі коефіцієнти (відомі дійсні числа); $b_1(t), b_2(t), \ ..., b_n(t)$ − вільні члени (відомі неперервні функції). Число n називається ***порядком*** системи.

Якщо всі вільні члени $b_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ тотожно рівні нулю $b_i(t) \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$, то система називається ***однорідною***, в протилежному випадку – ***неоднорідною***. У матричній формі однорідну та неоднорідну системи можна записати відповідно так:

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = AX}\ ; \qquad \boxed{\frac{dX}{dt} = AX + B}\ ,$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix};\ \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \dots \\ dx_2/dt \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язком системи називається матриця-стовпець функцій $X = (x_1(t)\ x_2(t)\ \dots\ x_n(t))^T$, підстановка яких у рівняння системи перетворює їх у вірні тотожності. У $(n+1)$-вимірному просторі $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ йому відповідає ***інтегральна крива***.

За аналогією з диференціальними рівняннями визначаються ***загальний*** і ***частинний розв'язки***.

Загальний розв'язок неоднорідної СЛДР $dX/dt = AX + B$ можна зобразити у вигляді суми загального розв'язку $\overline{X}$ відповідної однорідної системи $dX/dt = AX$ і будь-якого частинного розв'язку X_* неоднорідної системи: $X = \overline{X} + X_*$.

Загальний розв'язок однорідної СЛДР має вигляд лінійної комбінації

$$\boxed{\overline{X} = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n = M(t)C}\ ,$$

де $M(t) = (X_1\ X_2\ \dots\ X_n)$ − ***фундаментальна матриця розв'язків***, складена з n лінійно незалежних частинних розв'язків $X_i = (x_{1i}\ x_{2i}\ \dots\ x_{ni})^T$, $i = \overline{1, n}$, що утворюють ***фундаментальну систему***; $C = (C_1\ C_2\ \dots\ C_n)^T$ − матриця-стовпець довільних сталих.

Фундаментальна матриця є квадратною n-го порядку і невиродженою (її визначник відмінний від нуля $|M(t)| \neq 0$).

Якщо нормальну систему доповнити ***початковими умовами*** $X(t_0) = X_0$, де $X_0 = (x_{10}\ x_{20}\ \dots\ x_{n0})^T$ − матриця-стовпець; x_{i0},

$i = \overline{1, n}$ − задані дійсні числа, то одержимо для неї ***задачу Коші***. У цьому випадку справедлива відповідна теорема існування і єдиності розв'язку.

Зауваження. У більшості практично важливих випадків система, що складається з ДР довільного порядку, введенням додаткових шуканих функцій може бути зведена до системи, що включає ДР тільки першого порядку.

2.5.2. Матричний метод розв'язування однорідних систем

Матричний метод є видозміненим методом Ейлера розв'язування однорідних лінійних диференціальних рівнянь.

Подаючи нормальну однорідну СЛДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами як єдине матричне ДР $\boxed{dX/dt = AX}$, ненульовий розв'язок $X \neq 0$ шукаємо у вигляді добутку сталого матричного множника на змінний скаляр: $\boxed{X = Pe^{kt}}$, де $P = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n)^T$ − матриця-стовпець невідомих сталих, $P \neq 0$; k − невідомий сталий коефіцієнт.

Підставляючи функцію $X = Pe^{kt}$ у рівняння, ліворуч при диференціюванні можна винести сталий матричний множник:

$$dX/dt = (Pe^{kt})' = P(e^{kt})' = Pe^{kt}k = kPe^{kt},$$

а праворуч у матричному добутку можна винести сталий скаляр:

$$AX = A(Pe^{kt}) = e^{kt}AP.$$

Поділивши обидві частини ДР на відмінну від нуля експоненту e^{kt}, дістанемо рівняння

$$kP = AP \quad \text{або} \quad (A - kE)P = 0,$$

що є матричним записом квадратної однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Відомо, що така система має ненульовий розв'язок $P \neq 0$, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\boxed{\det(A-kE)=0} \text{ або } \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix}=0 \ .$$

Це алгебраїчне рівняння називається ***характеристичним***, його порядок n співпадає з порядком системи.

Шукані значення параметра k служать його коренями. Характеристичне рівняння степеня n має n коренів (із врахуванням їх кратності). Вони можуть бути дійсні чи комплексні, прості чи кратні. Можливі такі випадки: а) усі корені k_i, $i=\overline{1,n}$ − дійсні й різні: $k_i \neq k_j$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{i+1,n}$; $k_i \in R$, $i=\overline{1,n}$; б) усі корені k_i різні, але серед них є комплексні попарно спряжені; в) серед дійсних і комплексно спряжених коренів k_i є кратні.

Для простоти обмежимося розглядом лише випадку а). При цьому кожному кореню k_i відповідає частинний розв'язок $X_i = P_i e^{k_i t}$, де матриця-стовпець $P_i = (p_{1i}\ p_{2i}\ \dots\ p_{ni})^T$ визначається з однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$(A-k_iE)P_i=0 \text{ або } \begin{cases} (a_{11}-k_i)p_{1i}+a_{12}p_{2i}+\dots+a_{1n}p_{ni}=0; \\ a_{21}p_{1i}+(a_{22}-k_i)p_{2i}+\dots+a_{2n}p_{ni}=0; \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}p_{1i}+a_{n2}p_{2i}+\dots+(a_{nn}-k_i)p_{ni}=0. \end{cases}$$

Ця система невизначена і має безліч розв'язків, що залежать від однієї довільної сталої. Шукаючи один її частинний розв'язок, можна в матриці-стовпці P_i один з елементів вибрати довільно, наприклад, покласти рівним одиниці перший з них $p_{1i}=1$, а решту знайти з даної системи, заздалегідь відкидаючи з неї будь-яке одне рівняння, наприклад, останнє.

Частинні розв'язки $X_i = P_i e^{k_i t}$, $i=\overline{1,n}$, − лінійно незалежні й утворюють фундаментальну систему. Таким чином, загальний розв'язок $\overline{X}$ однорідної СЛДР має вигляд їх лінійної комбінації:

$$\overline{X} = M(t)C = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n \quad \text{або}$$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \ldots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1x_{11} + C_2x_{12} + \ldots + C_nx_{1n} \\ C_1x_{21} + C_2x_{22} + \ldots + C_nx_{2n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ C_1x_{n1} + C_2x_{n2} + \ldots + C_nx_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^{k_1t} \\ C_2e^{k_2t} \\ \ldots \\ C_ne^{k_nt} \end{pmatrix}.$$

<u>Приклад 1</u>. Записати однорідну СЛДР в матричній формі та знайти її загальний розв’язок матричним методом (за допомогою характеристичного рівняння) і подати його в матричній формі та звичайній скалярній формі:

$$\begin{cases} dx_1/dt = 6x_1 - x_2; \\ dx_2/dt = 3x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

□ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $\dfrac{dX}{dt} = AX$ − матричний запис однорідної СЛДР.

Складаємо і розв’язуємо характеристичне рівняння:

$$\det(A - kE) = 0; \quad \begin{vmatrix} 6-k & -1 \\ 3 & 2-k \end{vmatrix} = 0; \quad (6-k)(2-k) + 3 = 0;$$

$$k^2 - 8k + 15 = 0; \quad k_1 = 5; \quad k_2 = 3.$$

Кореню $k_1 = 5$ відповідає частинний розв’язок $X_1 = P_1e^{k_1t}$, де матриця-стовпець $P_1 = (p_{11}\ p_{21})^T$ визначається з однорідної лінійної алгебраїчної системи:

$$(A-k_1E)P_1=0\,;\quad \begin{cases}(6-5)\,p_{11}-p_{21}=0;\\ 3p_{11}+(2-5)\,p_{21}=0;\end{cases}\quad \begin{cases}p_{11}-p_{21}=0;\\ 3p_{11}-3p_{21}=0.\end{cases}$$

$$p_{11}-p_{21}=0\,;\; p_{21}=p_{11}\,.$$

Покладаючи $p_{11}=1$ і вилучаючи з системи друге рівняння, знаходимо значення p_{21}:

$$p_{11}-p_{21}=0\,;\;\; p_{21}=p_{11}\,;\;\; p_{21}=1\,.$$

Аналогічно, кореню $k_2=3$ відповідає частинний розв'язок $X_2=P_2e^{k_2t}$, де матриця-стовпець $P_2=(\,p_{12}\;p_{22})^T$ визначається з однорідної лінійної алгебраїчної системи:

$$(A-k_2E)P_2=0\,;\quad \begin{cases}(6-3)\,p_{12}-p_{22}=0;\\ 3p_{12}+(2-3)\,p_{22}=0;\end{cases}\quad \begin{cases}3p_{12}-p_{22}=0;\\ 3p_{12}-p_{22}=0.\end{cases}$$

Покладаючи $p_{12}=1$ і видаляючи з системи останнє рівняння, дістаємо значення p_{22}:

$$3p_{12}-p_{22}=0\,;\;\; p_{22}=3p_{12}\,;\;\; p_{22}=3\,.$$

Далі знаходимо загальний розв'язок в матричній формі:

$$\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^{k_1t}\\ C_2e^{k_2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^{5t}\\ C_2e^{3t}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1e^{5t}+C_2e^{3t}\\ C_1e^{5t}+3C_2e^{3t}\end{pmatrix}.$$

Звідси маємо загальний розв'язок в скалярній формі:

$$\overline{x}_1=C_1e^{5t}+C_2e^{3t}\,;\;\; \overline{x}_2=C_1e^{5t}+3C_2e^{3t}\,.\quad ■$$

<u>Приклад 2</u>. Розв'язати задачу Коші:

$$\begin{cases}dx_1/dt=6x_1-3x_2;\\ dx_2/dt=8x_1-4x_2\,;\end{cases}\quad x_1(0)=-1;\;\; x_2(0)=7\,.$$

□ Спочатку матричним методом знаходимо загальний розв'язок:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix};\quad A=\begin{pmatrix}6&-3\\8&-4\end{pmatrix};\quad \frac{dX}{dt}=AX\,;\quad \det(A-kE)=0\,;$$

$$\begin{vmatrix}6-k&-3\\8&-4-k\end{vmatrix}=0\,;\quad (6-k)(-4-k)+24=0\,;$$

$$k^2-2k=0\,;\quad k_1=0\,;\quad k_2=2\,;\quad X_1=P_1e^{k_1t}=P_1e^{0t}=P_1\,;$$

$$P_1=(p_{11}\ p_{21})^T\,;\quad (A-k_1E)P_1=0\,;\quad \begin{cases}(6-0)\,p_{11}-3p_{21}=0;\\8p_{11}+(-4-0)\,p_{21}=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}2p_{11}-p_{21}=0;\\8p_{11}-4p_{21}=0.\end{cases}\quad p_{11}=1\,;\quad 2p_{11}-p_{21}=0\,;\quad p_{21}=2p_{11}=2\,;$$

$$X_2=P_2e^{k_2t}=P_2e^{2t}\,;\quad P_2=(p_{12}\ p_{22})^T\,;\quad (A-k_2E)P_2=0\,;$$

$$\begin{cases}(6-2)\,p_{12}-3p_{22}=0;\\8p_{12}+(-4-2)\,p_{22}=0;\end{cases}\quad \begin{cases}4p_{12}-3p_{22}=0;\\8p_{12}-6p_{22}=0.\end{cases}\quad p_{12}=1\,;$$

$$4p_{12}-3p_{22}=0\,;\quad p_{22}=(4/3)\,p_{12}=4/3\,;$$

$$\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^{k_1t}\\C_2e^{k_2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^{0t}\\C_2e^{2t}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1+2C_2e^{2t}\\C_1+(4/3)C_2e^{2t}\end{pmatrix};\quad \begin{cases}\overline{x}_1=C_1+2C_2e^{2t};\\\overline{x}_2=C_1+(4/3)C_2e^{2t}.\end{cases}$$

Далі з початкових умов визначаємо конкретні значення довільних сталих:

$$\begin{matrix}x_1(0)=-1:\\x_2(0)=7:\end{matrix}\ \begin{cases}C_1+2C_2=-1;\\C_1+(4/3)C_2=7;\end{cases}\ \begin{matrix}2C_2-(4/3)C_2=-1-7;\\C_2=-12;\ C_1=-1-2C_2=23.\end{matrix}$$

Отже, розв’язок задачі Коші:

$$\begin{cases}x_{1K}=23+2\cdot(-12)e^{2t}=23-24e^{2t}\,;\\x_{2K}=23+(4/3)\cdot(-12)e^{2t}=23-16e^{2t}.\end{cases}\qquad\blacksquare$$

Зауваження. Загальний розв’язок однорідної СЛДР $dX/dt = AX$ можна записати у вигляді $\boxed{\overline{X} = M(t)C = e^{At}C}$, де фундаментальна матриця розв'язків $M(t)$ подана у формі ***матричної експоненти*** $\boxed{M(t) = e^{At}}$, яку можна знайти як функцію від матриці.

2.5.3. Розв’язування однорідних систем методом вилучення

Нормальну однорідну СЛДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n; \\ dx_2/dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n; \\ .... \\ dx_n/dt = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases}$$

можна звести до одного лінійного однорідного рівняння того ж порядку зі сталими коефіцієнтами, вилучивши всі невідомі функції $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, крім довільно вибраної однієї, наприклад, $x_1(t)$. Розв’язавши його, отримаємо відповідну шукану функцію $x_1(t)$. Потім знайдемо всі інші функції з набору $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ за допомогою операції диференціювання.

Застосовуючи ***метод вилучення***, спочатку перше рівняння системи продиференціюємо по t і в одержане співвідношення замість похідних dx_i/dt, $i = \overline{1,n}$ підставимо їх вирази з нормальної системи. Дістанемо лінійне ДР другого порядку

$$d^2x_1/dt^2 = a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n .$$

Продовжуємо аналогічно процес, доки не отримаємо лінійне ДР n-го порядку

$$d^nx_1/dt^n = a_{11}^{(n)}x_1 + a_{12}^{(n)}x_2 + ... + a_{1n}^{(n)}x_n .$$

Потім з одержаних на попередніх $n-1$ етапах рівнянь треба виразити $x_i(t)$, $i = \overline{2,n}$ і підставити в останнє рівняння. У результаті дістанемо ЛОДР n-го порядку відносно функції $x_1(t)$. Знайшовши його загальний розв'язок $\overline{x}_1(t)$, інші функції $\overline{x}_i(t)$, $i=\overline{2,n}$ визначимо з попередніх проміжних співвідношень для $x_i(t)$, $i=\overline{2,n}$, в які треба підставити загальний розв'язок $\overline{x}_1(t)$ та його похідні $d^m\overline{x}_1/dt^m$, $m=\overline{1,n-1}$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти загальний розв'язок однорідної СЛДР методом вилучення (за допомогою зведення до одного диференціального рівняння вищого порядку):

$$\begin{cases} dx_1/dt = 3x_1+3x_2; \\ dx_2/dt = 2x_1+4x_2. \end{cases}$$

□ Обидві частини першого рівняння системи диференціюємо по t і отримуємо ДР другого порядку:

$$d^2x_1/dt^2 = 3\,dx_1/dt + 3\,dx_2/dt\,.$$

Замість похідної dx_2/dt підставимо вираз з другого рівняння системи:

$$d^2x_1/dt^2 = 3\,dx_1/dt + 3(2x_1+4x_2)\,;$$

$$d^2x_1/dt^2 = 3\,dx_1/dt + 6x_1 + 12x_2\,.$$

З першого рівняння системи виразимо функцію x_2:

$$x_2 = (1/3)\,dx_1/dt - x_1$$

і підставимо цей вираз замість x_2 у останнє рівняння:

$$d^2x_1/dt^2 = 3\,dx_1/dt + 6x_1 + 12\cdot((1/3)\,dx_1/dt - x_1)\,;$$

$$d^2x_1/dt^2 = 7\,dx_1/dt - 6x_1\,;\;\; d^2x_1/dt^2 - 7\,dx_1/dt + 6x_1 = 0\,.$$

Одержане ЛОДР другого порядку розв'язуємо за допомогою характеристичного рівняння:

$$k^2 - 7k + 6 = 0\,;\;\; k_1 = 1\,;\; k_2 = 6\,;\; \overline{x}_1 = C_1e^t + C_2e^{6t}\,.$$

Знайдемо похідну отриманого загального розв'язку

$$d\overline{x}_1/dt = C_1e^t + 6C_2e^{6t}$$

і підставимо вирази для $\overline{x}_1(t)$, $d\overline{x}_1/dt$ у співвідношення для x_2:

$$\overline{x}_2 = (1/3)(C_1 e^t + 6C_2 e^{6t}) - (C_1 e^t + C_2 e^{6t}) = -(2/3)C_1 e^t + C_2 e^{6t}.$$

Отже, загальний розв'язок СЛДР:

$$\overline{x}_1 = C_1 e^t + C_2 e^{6t};\ \overline{x}_2 = -(2/3)C_1 e^t + C_2 e^{6t}. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Розв'язати задачу Коші:

$$\begin{cases} dx_1/dt = 4x_1 - 5x_2; \\ dx_2/dt = x_1 + 6x_2; \end{cases} \quad x_1(0) = 0;\ \ x_2(0) = -4.$$

□ Методом вилучення знаходимо загальний розв'язок:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - 5\,dx_2/dt;\ \ d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt -$$

$$-5(x_1 + 6x_2);\ \ d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - 5x_1 - 30x_2;$$

$$x_2 = (1/5)(4x_1 - dx_1/dt);\ \ d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - 5x_1 -$$

$$-30\cdot(1/5)(4x_1 - dx_1/dt);\ \ d^2x_1/dt^2 - 10\,dx_1/dt + 29x_1 = 0;$$

$$k^2 - 10k + 29 = 0;\ D = (-10)^2 - 4\cdot 29 = -16 < 0;\ k_{1,2} = 5 \pm 2i;$$

$$\alpha = 5;\ \ \beta = 2;\ \ \overline{x}_1 = e^{5t}(C_1\cos 2t + C_2 \sin 2t);\ \ d\overline{x}_1/dt = 5e^{5t}\times$$

$$\times(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t) + 2e^{5t}(-C_1\sin 2t + C_2\cos 2t);$$

$$\overline{x}_2 = (1/5)\Big(4e^{5t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t) - 5e^{5t}(C_1\cos 2t +$$

$$+C_2\sin 2t) - 2e^{5t}(-C_1\sin 2t + C_2\cos 2t)\Big) =$$

$$= (1/5)e^{5t}\big(-(C_1 + 2C_2)\cos 2t + (2C_1 - C_2)\sin 2t\big).$$

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = e^{5t}(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t); \\ \overline{x}_2 = (1/5)e^{5t}\big(-(C_1 + 2C_2)\cos 2t + (2C_1 - C_2)\sin 2t\big). \end{cases}$$

Конкретні значення довільних сталих дістаємо, враховуючи початкові умови:

$$\begin{matrix} x_1(0) = 0: \\ x_2(0) = -4: \end{matrix} \begin{cases} C_1 = 0; \\ -(1/5)(C_1 + 2C_2) = -4;\ \ C_2 = 10. \end{cases}$$

Отже, розв'язок задачі Коші:

$$x_{1K} = 10e^{5t}\sin 2t;\; x_{2K} = -2e^{5t}(2\cos 2t + \sin 2t). \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти загальний розв'язок однорідної СЛДР двома способами: а) зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку; б) за допомогою характеристичного рівняння. Записати дану систему та її загальний розв'язок у матричній формі:

$$\begin{cases} dx/dt = x + y; \\ dy/dt = -2x + 4y. \end{cases}$$

□ а) $x'' = x' + y'$; $y' = -2x + 4y$; $x'' = x' - 2x + 4y$; $y = x' - x$;

$$x'' = x' - 2x + 4x' - 4x;\quad x'' - 5x' + 6x = 0;\quad k^2 - 5k + 6 = 0;$$

$$k_1 = 2;\; k_2 = 3;\; \bar{x} = C_1e^{2t} + C_2e^{3t};\; \bar{x}' = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{3t};$$

$$\bar{y} = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{3t} - C_1e^{2t} - C_2e^{3t} = C_1e^{2t} + 2C_2e^{3t}.$$

Отже, загальний розв'язок:

$$\bar{x} = C_1e^{2t} + C_2e^{3t};\; \bar{y} = C_1e^{2t} + 2C_2e^{3t}.$$

б) $\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ -2 & 4-k \end{vmatrix} = 0$; $(1-k)(4-k) + 2 = 0$; $k^2 - 5k + 6 = 0$;

$$k_1 = 2;\; k_2 = 3;\; k = k_1 = 2: \begin{cases} (1-2)p_{11} + p_{21} = 0; \\ -2p_{11} + (4-2)p_{21} = 0; \end{cases} p_{21} = p_{11};$$

$$p_{11} = 1;\; p_{21} = 1;\; x_1 = e^{2t};\; y_1 = e^{2t};$$

$$k = k_2 = 3: \begin{cases} (1-3)p_{12} + p_{22} = 0; \\ -2p_{12} + (4-3)p_{22} = 0; \end{cases} p_{22} = 2p_{12};$$

$$p_{12} = 1;\; p_{22} = 2;\; x_2 = e^{3t};\; y_2 = 2e^{3t};$$

Отже, загальний розв'язок:

$$\bar{x} = C_1e^{2t} + C_2e^{3t};\; \bar{y} = C_1e^{2t} + 2C_2e^{3t}.$$

Запишемо систему та її загальний розв'язок у матричній формі запису система та її загальний розв'язок мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};\; \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

2.5.4. Розв’язування неоднорідних систем методом варіації довільних сталих

Для розв’язування неоднорідної СЛДР можна застосувати ***метод варіації довільних сталих*** (***метод Лагранжа***), який уже розглядався стосовно неоднорідних лінійних ДР.

Розв’язуючи нормальну неоднорідну СЛДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами $\boxed{dX/dt = AX + B}$ цим методом, спочатку знаходимо загальний розв'язок $\overline{X}$ відповідної однорідної СЛДР $dX/dt = AX$ у вигляді лінійної комбінації:

$$\boxed{\overline{X} = M(t)C} = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$$

$$\text{або} \quad \overline{x}_i = \sum_{j=1}^{n} C_j x_{ij} = C_1 x_{i1} + C_2 x_{i2} + \ldots + C_n x_{in}, \quad i = \overline{1,n},$$

де $M(t) = (X_1\, X_2\, \ldots\, X_n)$ − квадратна фундаментальна матриця розв'язків, складена з n лінійно незалежних частинних розв'язків $X_i = (x_{1i}\, x_{2i}\, \ldots\, x_{ni})^T$, $i = \overline{1,n}$; $C = (C_1 C_2 \ldots C_n)^T$ − матриця-стовпець довільних сталих.

Далі шукаємо загальний розв’язок неоднорідної СЛДР у такому ж вигляді, тільки замінюючи довільні сталі C_i, $i = \overline{1,n}$ на невідомі поки що функції $C_i(t)$, $i = \overline{1,n}$:

$$\boxed{X = M(t)C(t)} = \sum_{j=1}^{n} C_j(t) X_j = C_1(t) X_1 + C_2(t) X_2 + \ldots +$$

$$+ C_n(t) X_n \quad \text{або} \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} C_j(t) x_{ij} = C_1(t) x_{i1} +$$

$$+ C_2(t) x_{i2} + \ldots + C_n(t) x_{in}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Підставимо сформовану вектор-функцію $X = M(t)C(t)$ та її похідну

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}\big(M(t)C(t)\big) = M'(t)C(t) + M(t)C'(t)$$

у неоднорідну систему й отримаємо (для скорочення запису далі аргумент t опускаємо):

$$M'C + M\,C' = AM\,C + B; \quad M\,C' = (AM - M')C + B;$$

$$M\,C' = \sum\nolimits_{i=1}^{n} C_i \underbrace{(AX_i - X_i')}_{=0} + B; \quad M\,C' = B,$$

де враховано, що $AX_i - X_i' = 0$, оскільки X_i – розв'язок відповідної однорідної системи.

Одержана квадратна система

$$\boxed{M\,C' = B} \quad \text{або} \quad \begin{cases} C_1' x_{11} + C_2' x_{12} + \ldots + C_n' x_{1n} = b_1; \\ C_1' x_{21} + C_2' x_{22} + \ldots + C_n' x_{2n} = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' x_{n1} + C_2' x_{n2} + \ldots + C_n' x_{nn} = b_n \end{cases}$$

є лінійною відносно похідної C' з відмінним від нуля визначником $|M| \neq 0$. Тому вона має єдиний розв'язок, який можна подати у вигляді:

$$C_i' = \varphi_i(t), \; i = \overline{1,n},$$

де $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ − відомі функції.

Інтегруючи останні рівності, знаходимо:

$$C_i = \int \varphi_i(t)\,dt + \tilde{C}_i, \; i = \overline{1,n},$$

де $\tilde{C}_i$, $i = \overline{1,n}$ − нові довільні сталі.

Отже, маємо загальний розв’язок неоднорідної СЛДР:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\int \varphi_j(t)\,dt + \tilde{C}_j \right) x_{ij} = \left(\int \varphi_1(t)\,dt + \tilde{C}_1 \right) x_{i1} +$$

$$+ \left(\int \varphi_2(t)\,dt + \tilde{C}_2 \right) x_{i2} + \ldots + \left(\int \varphi_n(t)\,dt + \tilde{C}_n \right) x_{in}, \; i = \overline{1,n}.$$

Якщо покласти $\tilde{C}_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, то дістанемо частинний розв’язок X_* неоднорідної системи:

$$x_{i*} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \int \varphi_j(t)\,dt = x_{i1} \int \varphi_1(t)\,dt + x_{i2} \int \varphi_2(t)\,dt + \ldots +$$

$$+ x_{in} \int \varphi_n(t)\,dt, \; i = \overline{1,n}.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідної СЛДР можна подати у вигляді суми $X = \overline{X} + X_*$.

<u>Приклад</u>. Розв'язати задачу Коші для неоднорідної СЛДР, будуючи загальний розв'язок відповідної однорідної системи матричним методом і знаходячи загальний розв'язок неоднорідної системи методом варіації довільних сталих:

$$\begin{cases} dx_1/dt = -2x_1 + x_2 - e^{2t}; \\ dx_2/dt = -3x_1 + 2x_2 + 6e^{2t}; \end{cases} \quad x_1(0) = 0;\ x_2(0) = 5.$$

$$\Box \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 6e^{2t} \end{pmatrix};\ \frac{dX}{dt} = AX + B$$

− матричний запис неоднорідної СЛДР.

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$\det(A - kE) = 0;\ \begin{vmatrix} -2-k & 1 \\ -3 & 2-k \end{vmatrix} = 0;\ (-2-k)(2-k) + 3 = 0;$$

$$k^2 - 4 + 3 = 0;\ k^2 = 1;\ k_{1,2} = \pm 1.$$

Знаходимо фундаментальну систему частинних розв'язків:

$$k_1 = 1:\ X_1 = P_1 e^{k_1 t};\ P_1 = (p_{11}\ p_{21})^T;$$

$$\begin{cases} (-2-1)p_{11} + p_{21} = 0; & -3p_{11} + p_{21} = 0; & p_{11} = 1; \\ -3p_{11} + (2-1)p_{21} = 0; & p_{21} = 3p_{11}; & p_{21} = 3; \end{cases}$$

$$k_2 = -1:\ X_2 = P_2 e^{k_2 t};\ P_2 = (p_{12}\ p_{22})^T;$$

$$\begin{cases} (-2+1)p_{12} + p_{22} = 0; & -p_{12} + p_{22} = 0; & p_{12} = 1; \\ -3p_{12} + (2+1)p_{22} = 0; & p_{22} = p_{12}; & p_{22} = 1; \end{cases}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t; \qquad X_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t};$$

$$x_{11} = e^t;\ x_{21} = 3e^t; \qquad x_{12} = e^{-t};\ x_{22} = e^{-t}.$$

Формуємо загальний розв'язок відповідної однорідної системи:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{-t} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} \overline{x}_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}; \\ \overline{x}_2 = 3C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \end{matrix}$$

За методом варіації довільних сталих загальний розв'язок неоднорідної системи шукаємо в аналогічному вигляді, розглядаючи C_1 і C_2 як нові невідомі функції від t:

$$x_1 = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t}; \;\; x_2 = 3C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-t}.$$

Складаємо і розв'язуємо, застосовуючи метод вилучення, лінійну алгебраїчну систему відносно похідних C_1' і C_2':

$$\begin{cases} C_1' x_{11} + C_2' x_{12} = b_1; \\ C_1' x_{21} + C_2' x_{22} = b_2; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1' e^t + C_2' e^{-t} = -e^{2t}; \\ 3C_1' e^t + C_2' e^{-t} = 6e^{2t}; \end{cases}$$

$$C_1' = -e^t - C_2' e^{-2t}; \;\; 3(-e^t - C_2' e^{-2t})e^t + C_2' e^{-t} = 6e^{2t};$$

$$-3e^{2t} - 3C_2' e^{-t} + C_2' e^{-t} = 6e^{2t}; \;\; C_2' = -(9/2)e^{3t};$$

$$C_1' = -e^t + (9/2)e^{3t}e^{-2t} = (7/2)e^t.$$

Інтегруючи одержані співвідношення для похідних, знаходимо самі шукані функції $C_1(t)$ і $C_2(t)$:

$$C_1 = (7/2)\int e^t dt = (7/2)e^t + \tilde{C}_1;$$

$$C_2 = -(9/2)\int e^{3t} dt = -(3/2)e^{3t} + \tilde{C}_2.$$

Отже, маємо загальний розв'язок неоднорідної СЛДР:

$$x_1 = (7e^t/2 + \tilde{C}_1)e^t + (-3e^{3t}/2 + \tilde{C}_2)e^{-t} =$$

$$= 7e^{2t}/2 + \tilde{C}_1 e^t - 3e^{2t}/2 + \tilde{C}_2 e^{-t} = \tilde{C}_1 e^t + \tilde{C}_2 e^{-t} + 2e^{2t};$$

$$x_2 = 3(7e^t/2 + \tilde{C}_1)e^t + (-3e^{3t}/2 + \tilde{C}_2)e^{-t} = 21e^{2t}/2 +$$

$$+ 3\tilde{C}_1 e^t - 3e^{2t}/2 + \tilde{C}_2 e^{-t} = 3\tilde{C}_1 e^t + \tilde{C}_2 e^{-t} + 9e^{2t}.$$

Використаємо початкові умови і обчислимо конкретні значення довільних сталих $\tilde{C}_1$ і $\tilde{C}_2$:

$$x_1(0)=0: \begin{cases}\tilde{C}_1+\tilde{C}_2+2=0; \\ 3\tilde{C}_1+\tilde{C}_2+9=5;\end{cases} \quad \begin{cases}\tilde{C}_2=-2-\tilde{C}_1; \\ 3\tilde{C}_1-2-\tilde{C}_1+9=5;\end{cases}$$
$$x_2(0)=5:$$

$$2\tilde{C}_1=-2;\ \ \tilde{C}_1=-1;\ \ \tilde{C}_2=-2-(-1)=-1.$$

Таким чином, маємо розв’язок задачі Коші:

$$x_{1K}=-e^t-e^{-t}+2e^{2t};\ \ x_{2K}=-3e^t-e^{-t}+9e^{2t}.\ \ \blacksquare$$

Зауваження. Коли вільні члени $b_1(t), b_2(t), \ \ ..., b_n(t)$ мають спеціальний вигляд сум і добутку функцій − многочлена $P_n(t)$, експоненти e^{at}, косинуса $\cos bt$ або синуса $\sin bt$, то частинний розв'язок X_* неоднорідної системи можна шукати, застосовуючи принцип суперпозиції та метод невизначених коефіцієнтів. Правила побудови такого розв'язку аналогічні випадку одного ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду.

2.5.5. Розв’язування неоднорідних систем методом вилучення

Нормальну неоднорідну СЛДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами завжди можна звести до одного лінійного неоднорідного рівняння того ж порядку зі сталими коефіцієнтами, використовуючи ті самі прийоми, що у випадку однорідної системи.

Тому розгляд ***методу вилучення*** обмежимо конкретними прикладами застосування.

Приклад 1. Розв’язати задачу Коші для неоднорідної СЛДР методом вилучення (зведенням до одного ДР вищого порядку). Обчислити значення $\tilde{x}_1=x_{1K}(\tilde{t});\ \ \tilde{x}_2=x_{2K}(\tilde{t})$ отриманого розв’язку в заданій точці $\tilde{t}$:

а) $\begin{cases}dx_1/dt=4x_1-x_2-5t+1; \\ dx_2/dt=x_1+2x_2+t-1;\end{cases}$ $\quad x_1(0)=3;\ x_2(0)=2;\ \tilde{t}=-1;$

б) $\begin{cases}dx_1/dt=-x_1+2x_2+\sin 2t; \\ dx_2/dt=-4x_1+3x_2;\end{cases}$ $\quad x_1(0)=2;\ x_2(0)=0;\ \tilde{t}=\pi.$

□ а) Обидві частини першого рівняння системи диференціюємо по t і отримуємо ДР ІІ порядку:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - dx_2/dt - 5.$$

Замість похідної dx_2/dt підставимо вираз з другого рівняння системи:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - (x_1 + 2x_2 + t - 1) - 5;$$

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - x_1 - 2x_2 - t - 4.$$

З першого рівняння системи виразимо функцію x_2:

$$x_2 = -dx_1/dt + 4x_1 - 5t + 1$$

і підставимо цей вираз замість x_2 у останнє рівняння:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - x_1 - 2(-dx_1/dt + 4x_1 - 5t + 1) - t - 4;$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 6\frac{dx_1}{dt} - 9x_1 + 9t - 6;\quad \frac{d^2x_1}{dt^2} - 6\frac{dx_1}{dt} + 9x_1 = 9t - 6.$$

Для одержаного ЛНДР другого порядку спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного ДР за допомогою характеристичного рівняння:

$$d^2x_1/dt^2 - 6\,dx_1/dt + 9x_1 = 0;\quad k^2 - 6k + 9 = 0;\quad k_1 = k_2 = 3;$$

$$\bar{x}_1 = (C_1 + C_2 t)e^{3t}.$$

Оскільки права частина ЛНДР має спеціальний вигляд − многочлен першого степеня, то його частинний розв'язок x_{1*} будуємо методом невизначених коефіцієнтів:

$$z = a + bi = 0 + 0i = 0 \text{ − не є коренем;}\quad x_{1*} = At + B;$$

$$x'_{1*} = A;\quad x''_{1*} = 0;\quad -6A + 9At + 9B = 9t - 6;$$

$$\begin{array}{c|l} t^1 & \\ t^0 & \end{array}\left\{\begin{array}{ll} 9A = 9; & A = 1; \\ -6A + 9B = -6; & -6\cdot 1 + 9B = -6;\ B = 0; \end{array}\right. \quad x_{1*} = t.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного ДР можна подати у вигляді суми:

$$x_1 = \bar{x}_1 + x_{1*} = (C_1 + C_2 t)e^{3t} + t\,.$$

Знайдемо похідну отриманого загального розв’язку

$$dx_1 / dt = C_2 e^{3t} + 3(C_1 + C_2 t)e^{3t} + 1$$

і підставимо вирази для $x_1(t)$, dx_1/dt у співвідношення для x_2:

$$x_2 = -C_2 e^{3t} - 3(C_1 + C_2 t)e^{3t} - 3 + 4(C_1 + C_2 t)e^{3t} + 4t - 5t + 1 =$$

$$= (-C_2 - 3C_1 - 3C_2 t + 4C_1 + 4C_2 t)e^{3t} - t - 2 =$$

$$= (C_1 - C_2 + C_2 t)e^{3t} - t - 2\,.$$

Для знаходження конкретних значень довільних сталих C_1 і C_2 використаємо початкові умови:

$$\begin{matrix} x_1(0) = 3: \\ x_2(0) = 2: \end{matrix} \begin{cases} C_1 = 3; \\ C_1 - C_2 - 2 = 2; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_1 = 3; \\ -C_2 = 4 - 3;\ C_2 = -1. \end{matrix}$$

Отже, маємо розв’язок задачі Коші:

$$x_{1K} = (3 - t)e^{3t} + t;\ x_{2K} = (4 - t)e^{3t} - t - 2\,.$$

Обчислимо значення отриманого розв’язку в заданій точці:

$$\tilde{x}_1 = x_{1K}(-1) = (3 + 1)e^{-3} - 1 = 4e^{-3} - 1\,;$$

$$\tilde{x}_2 = x_{2K}(-1) = (4 + 1)e^{-3} + 1 - 2 = 5e^{-3} - 1.$$

(Задачу б) розв’язати самостійно). ■

Приклад 2. Два однакових контури, кожний з яких складається з послідовно сполучених активного опору $R = 3$ та індуктивності $L = 2$, зв’язані взаємною індукцією M, де $M = L/2 = 1$ (рис. 57). Знайти закон зміни сили струму в першому $I_1(t)$ та другому $I_2(t)$ контурі при умові, що другий контур закорочений, а перший контур у початковий момент часу $t = 0$ підключається до джерела зі змінною електрорушійною силою $E = E_0 \sin \tilde{\omega} t$, де $E_0 = 6$ – амплітуда; $\tilde{\omega} = 2$ – кругова частота (перемикач K переводиться при $t = 0$ з положення B в положення A).

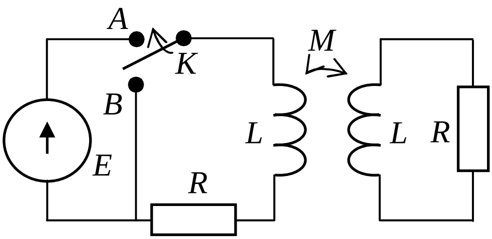

Рис. 57

□ У початковий момент $t = 0$ обидва контури закорочені, тому початкова сила струму дорівнює нулю:

$$I_1(0) = 0\,;\ \ I_2(0) = 0\,.$$

Застосовуючи другий закон Кірхгофа до кожного з контурів, одержимо лінійну диференціальну систему:

$$\begin{cases} RI_1 + L\dfrac{dI_1}{dt} + M\dfrac{dI_2}{dt} = E; \\ RI_2 + L\dfrac{dI_2}{dt} + M\dfrac{dI_1}{dt} = 0. \end{cases}$$

Підставляючи конкретні дані з умови задачі, маємо

$$\begin{cases} 2I_1' + I_2' = -3I_1 + 6\sin 2t; \\ I_1' + 2I_2' = -3I_2\,. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему відносно похідних I_1', I_2' (пробобіть це самостійно методом Крамера) і запишемо її в нормальній формі:

$$\begin{cases} I_1' = -2I_1 + I_2 + 4\sin 2t; \\ I_2' = I_1 - 2I_2 - 2\sin 2t. \end{cases}$$

Одержану нормальну СЛДР методом вилучення зведемо до одного ЛНДР другого порядку:

$$I_1'' = -2I_1' + I_2' + 8\cos 2t\,;\ \ I_1'' = -2I_1' + I_1 - 2I_2 - 2\sin 2t +$$

$$+ 8\cos 2t\,;\ \ I_2 = I_1' + 2I_1 - 4\sin 2t\,;\ \ I_1'' = -2I_1' + I_1 - 2(I_1' +$$

$$+ 2I_1 - 4\sin 2t) - 2\sin 2t + 8\cos 2t\,;\ \ I_1'' + 4I_1' + 3I_1 =$$

$$= 8\cos 2t + 6\sin 2t\,.$$

Загальний розв'язок $\bar{I}_1$ відповідного ЛОДР знайдемо за допомогою характеристичного рівняння:

$$I_1''+4I_1'+3I_1=0;\quad k^2+4k+3=0;\quad k_1=-3;\quad k_2=-1;$$

$$\bar{I}_1=C_1e^{-3t}+C_2e^{-t}.$$

Оскільки число $z=a+bi=0+2i=2i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок I_{1*} ЛНДР, що відповідає правій частині, шукаємо у вигляді

$$I_{1*}=A\cos 2t+B\sin 2t.$$

Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів (проробіть це самостійно), дістанемо значення A і B:

$$A=-56/65;\quad B=14/13.$$

Тоді $\qquad I_{1*}=-(56/65)\cos 2t+(14/13)\sin 2t.$

Загальний розв'язок I_1 ЛНДР знайдемо як суму отриманих розв'язків:

$$I_1=\bar{I}_1+I_{1*}=C_1e^{-3t}+C_2e^{-t}-(56/65)\cos 2t+(14/13)\sin 2t.$$

Продиференціюємо одержану функцію $I_1=I_1(t)$, а потім підставимо вирази для I_1 і I_1' у співвідношення для I_2:

$$I_1'=-3C_1e^{-3t}-C_2e^{-t}+(112/65)\sin 2t+(28/13)\cos 2t;$$

$$I_2=-3C_1e^{-3t}-C_2e^{-t}+(112/65)\sin 2t+(28/13)\cos 2t+$$
$$+2(C_1e^{-3t}+C_2e^{-t}-(56/65)\cos 2t+(14/13)\sin 2t)-4\sin 2t=$$
$$=-C_1e^{-3t}+C_2e^{-t}+(28/65)\cos 2t-(8/65)\sin 2t.$$

Враховуючи початкові умови, визначимо конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2:

$$\begin{matrix} I_1(0)=0: \\ I_2(0)=0: \end{matrix}\ \begin{cases} C_1+C_2-56/65=0; & 2C_1-84/65=0; \\ -C_1+C_2+28/65=0; & 2C_2-28/65=0; \end{cases}$$

$$C_1=42/65;\quad C_2=14/65.$$

Отже, шукані закони зміни сили струму (розв'язок задачі Коші для диференціальної системи):

$$I_1=(42/65)e^{-3t}+(14/65)e^{-t}-(56/65)\cos 2t+(14/13)\sin 2t;$$

$$I_2 = -(42/65)e^{-3t} + (14/65)e^{-t} + (28/65)\cos 2t - (8/65)\sin 2t .$$

■

<u>Приклад 3</u>. Розв'язати крайову задачу для неоднорідної СЛДР зведенням до одного ДР вищого порядку:

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_2 - \cos t; \\ dx_2/dt = -x_1 + \sin t; \end{cases} \quad x_1(-\pi) = -\pi ; \; x_2(\pi) = 3 .$$

Записати систему та знайдений розв'язок у матричній формі.

□ $d^2x_1/dt^2 = dx_2/dt + \sin t$; $d^2x_1/dt^2 = -x_1 + \sin t + \sin t$;

$$d^2x_1/dt^2 + x_1 = 2\sin t; \quad d^2x_1/dt^2 + x_1 = 0; \quad k^2 + 1 = 0;$$

$$k_{1,2} = \pm i; \quad \bar{x}_1 = C_1\cos t + C_2\sin t; \quad z = a + bi = 0 + 1i = i$$

– корінь кратності $r = 1$; $x_{1*} = t(A\cos t + B\sin t)$;

$$x'_{1*} = A\cos t + B\sin t + t(-A\sin t + B\cos t);$$

$$x''_{1*} = -A\sin t + B\cos t - A\sin t + B\cos t +$$

$$+ t(-A\cos t - B\sin t) = -2A\sin t + 2B\cos t - t(A\cos t + B\sin t);$$

$$-2A\sin t + 2B\cos t - t(A\cos t + B\sin t) + t(A\cos t + B\sin t) =$$

$$= 2\sin t; \; -2A\sin t + 2B\cos t = 2\sin t;$$

$$\begin{array}{c|l} \cos x & \begin{cases} -2A = 2; & A = -1; \\ 2B = 0; & B = 0; \end{cases} \\ \sin x & \end{array} \quad x_{1*} = -t\cos t;$$

$$x_1 = \bar{x}_1 + x_{1*} = C_1\cos t + C_2\sin t - t\cos t;$$

$$x_2 = dx_1/dt + \cos t; \quad dx_1/dt = -C_1\sin t + C_2\cos t - \cos t + t\sin t;$$

$$x_2 = -C_1\sin t + C_2\cos t - \cos t + t\sin t + \cos t =$$

$$= C_2\cos t - C_1\sin t + t\sin t .$$

Використавши крайові умови, отримаємо конкретні значення довільних сталих:

$$\begin{array}{r} x_1(-\pi) = -\pi : \\ x_2(\pi) = 3 : \end{array} \begin{cases} C_1 - \pi = -\pi; \\ C_2 = 3; \end{cases} \quad C_1 = 0 .$$

Отже, маємо розв’язок крайової задачі:

$$x_{1b} = 3\sin t - t\cos t\,;\quad x_{2b} = 3\cos t + t\sin t.$$

Запишемо СЛДР та її розв’язок у матричній формі:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix};\quad \frac{dX}{dt} = AX + B\,;$$

$$\begin{pmatrix} x_{1b} \\ x_{2b} \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Метод вилучення може застосовуватися до системи, що складається з ДР довільного порядку. При цьому немає потреби спочатку зводити її до системи, що включає ДР тільки першого порядку. Раціональніше безпосередньо переходити до одного ДР вищого порядку.

<u>Приклад 4</u>. Розв’язати задачу Коші для системи, що включає ДР другого порядку, зведенням до одного ДР вищого порядку:

$$\begin{cases} x'' = 2x + y + 4t; & x(0) = 0; \quad y(0) = -4; \\ y'' = 2x' + y' - 24t; & x'(0) = 2; \quad y'(0) = 16. \end{cases}$$

□ Двічі продиференціюємо перше рівняння системи:

$$x''' = 2x' + y' + 4\,;\ x^{IV} = 2x'' + y''.$$

Замість другої похідної y'' підставимо вираз з другого рівняння системи:

$$x^{IV} = 2x'' + 2x' + y' - 24t\,.$$

З першого рівняння системи виразимо функцію y і продиференціюємо одержану рівність:

$$y = x'' - 2x - 4t\,;\quad y' = x''' - 2x' - 4\,.$$

Підставимо цей вираз замість y' у останнє рівняння:

$$x^{IV} = 2x'' + 2x' + x''' - 2x' - 4 - 24t\,;\ \ x^{IV} - x''' - 2x'' = -24t - 4\,.$$

Для отриманого ЛНДР четвертого порядку спочатку знайдемо загальний розв’язок відповідного однорідного ДР за допомогою характеристичного рівняння:

$$x^{IV}-x'''-2x''=0;\ \ k^4-k^3-2k^2=0;\ \ k^2(k^2-k-2)=0;$$

$$k^2=0;\ \ k_1=k_2=k=0;\ \ k^2-k-2=0;\ \ k_3=-1;\ \ k_4=2;$$

$$\overline{x}=C_1+C_2t+C_3e^{-t}+C_4e^{2t}.$$

Правою частиною цього ЛНДР служить многочлен першого степеня $f(t)=-24t-4$. Частинний розв'язок x_* будуємо методом невизначених коефіцієнтів:

$$z=a+bi=0+0i=0\ \text{− корінь кратності}\ r=2;$$

$$x_*=(At+B)t^2=At^3+Bt^2;\ x_*'=3At^2+2Bt;\ x_*''=6At+2B;$$

$$x_*'''=6A;\ x_*^{IV}=0;\ \ 0-6A-2(6At+2B)=-24t-4;$$

$$-6A-12At-4B=-24t-4;$$

$$\begin{array}{c|l} t^1 & \left\{\begin{array}{ll} -12A=-24; & A=2; \\ -6A-4B=-4; & -6\cdot 2-4B=-4;\ B=-2; \end{array}\right. \\ t^0 & \end{array}\qquad x_*=2t^3-2t^2.$$

Тоді загальний розв’язок неоднорідного ДР можна подати у вигляді суми:

$$x=\overline{x}+x_*=C_1+C_2t+C_3e^{-t}+C_4e^{2t}+2t^3-2t^2.$$

Знайдемо другу похідну отриманого загального розв’язку і підставимо вирази для $x(t)$, $x''(t)$ у співвідношення для y:

$$x'=C_2-C_3e^{-t}+2C_4e^{2t}+6t^2-4t;\ x''=C_3e^{-t}+4C_4e^{2t}+$$

$$+12t-4;\ \ y=C_3e^{-t}+4C_4e^{2t}+12t-4-2(C_1+C_2t+C_3e^{-t}+$$

$$+C_4e^{2t}+2t^3-2t^2)-4t=-2C_1-2C_2t-C_3e^{-t}+2C_4e^{2t}-$$

$$-4t^3+4t^2+8t-4.$$

Для знаходження конкретних значень довільних сталих C_1, C_2, C_3 і C_4 використаємо початкові умови:

$$y'=-2C_2+C_3e^{-t}+4C_4e^{2t}-12t^2+8t+8;$$

$$\begin{array}{r} x(0)=0: \\ y(0)=-4: \\ x'(0)=2: \\ y'(0)=16: \end{array} \begin{cases} C_1+C_3+C_4=0; \\ -2C_1-C_3+2C_4-4=-4; \\ C_2-C_3+2C_4=2; \\ -2C_2+C_3+4C_4+8=16; \end{cases} \begin{cases} C_1+C_3+C_4=0; \\ -2C_1-C_3+2C_4=0; \\ C_2-C_3+2C_4=2; \\ -2C_2+C_3+4C_4=8. \end{cases}$$

Одержану лінійну алгебраїчну систему $AC=B$ розв’яжемо методом Гаусса:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} C_1+C_3+C_4=0; \\ C_2-C_3+2C_4=2; \\ C_3+4C_4=0; \\ C_4=1; \end{cases} \qquad \begin{array}{c} C_4=1; \\ C_3=-4C_4=-4; \\ C_2=2+C_3-2C_4=-4; \\ C_1=-C_3-C_4=3. \end{array}$$

Отже, маємо розв’язок задачі Коші:

$$x_K=3-4t-4e^{-t}+e^{2t}+2t^3-2t^2=-4e^{-t}+e^{2t}+2t^3-$$

$$-2t^2-4t+3; \quad y_K=-6+8t+4e^{-t}+2e^{2t}-4t^3+4t^2+$$

$$+8t-4=4e^{-t}+2e^{2t}-4t^3+4t^2+16t-10. \ \blacksquare$$

2.6. Контрольні запитання

1. Що таке диференціальне рівняння? Як визначається його порядок?
2. Який загальний вигляд ДР n–го порядку? Його канонічний (нормальний) вигляд?
3. Що називається розв'язком ДР?
4. Що таке інтегральна крива ДР?
5. Що називається загальним розв'язком ДР? Частинним розв'язком? Який їх геометричний зміст?
6. Що таке початкові та крайові умови? Як ставиться початкова задача (задача Коші)? Крайова задача?
7. Що таке особливий розв'язок ДР?
8. Як для ДР першого порядку формулюється теорема Коші (існування та єдиності розв'язку)? У чому її геометричний зміст?
9. Що називається ізоклиною? У чому полягає метод ізоклин наближеного розв'язування ДР першого порядку ?
10. Як методом Ейлера наближено будується розв'язок задачі Коші для ДР першого порядку?
11. У чому полягає метод ітерацій (метод Пікара) наближеного розв'язування задачі Коші для ДР першого порядку?
12. Що таке ДР з відокремлюваними змінними?
13. Яка функція називається однорідною k-го порядку однорідності?
14. Що таке ДР з однорідною правою частиною (однорідне рівняння)?
15. За допомогою якої підстановки однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?
16. Яке ДР першого порядку називається лінійним однорідним? Лінійним неоднорідним?
17. Як будується розв'язок ЛНДР першого порядку методом варіації довільної сталої?
18. Як розв'язується ЛНДР першого порядку методом Бернуллі?
19. Яке ДР першого порядку називається рівнянням Бернуллі? Як воно розв'язується?
20. Які основні типи ДР другого порядку допускають зниження порядку? Наведіть відповідні заміни шуканої функції.
21. Яке ДР n-го порядку називається лінійним однорідним? Лінійним неоднорідним?

22. Яка система функцій $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$ $(n \geq 2)$ називається лінійно залежною? Лінійно незалежною?
23. Сформулюйте ознаку лінійної залежності чи незалежності системи n частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ одного ЛОДР n-го порядку.
24. Що таке фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР n-го порядку?
25. Яка структура загального розв'язку ЛОДР другого порядку?
26. Що таке характеристичне рівняння для ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
27. За якими формулами будується загальний розв'язок ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від виду коренів характеристичного рівняння?
28. Яка структура загального розв'язку ЛНДР другого порядку?
29. У чому полягає принцип суперпозиції розв'язків ЛНДР?
30. Як будується розв'язок ЛНДР другого порядку методом варіації довільних сталих?
31. Для ЛНДР що таке права частина спеціального вигляду?
32. Як методом невизначених коефіцієнтів будується частинний розв'язок ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає правій частині спеціального вигляду?
33. Який вигляд має ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, яке описує процеси в електричному контурі, що складається з послідовно сполучених активного опору, індуктивності і ємності? У чому полягає явище резонансу в такому електричному колі?
34. Який вигляд має нормальна система лінійних ДР першого порядку зі сталими коефіцієнтами? Наведіть матричний запис однорідної та неоднорідної систем.
35. Який вигляд має загальний розв'язок однорідної СЛДР?
36. У чому полягає матричний метод розв'язування однорідних систем?
37. У чому полягає метод вилучення розв'язування однорідної СЛДР?
38. Як розв'язується неоднорідна СЛДР методом варіації довільних сталих?
39. Як розв'язується неоднорідна СЛДР методом вилучення?

2.7. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

№ в-та	Завдання
1	$4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$
2	$\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$
3	$6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx$
4	$(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0$
5	$6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$
6	$y(4+e^x)dy-e^xdx=0$
7	$2xdx-2ydy=x^2ydy-xy^2dx$
8	$(e^x+8)dy-ye^xdx=0$
9	$(3+e^x)yy'=e^x$
10	$\sqrt{5+y^2}+yy'\sqrt{1-x^2}=0$
11	$6xdx-2ydy=2x^2ydy-3xy^2dx$
12	$6xdx-ydy=x^2ydy-3xy^2dx$
13	$xdx-ydy=x^2ydy-xy^2dx$
14	$(1+e^x)yy'=e^x$
15	$2xdx-ydy=x^2ydy-xy^2dx$
16	$x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$
17	$\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy$
18	$x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$
19	$y'y\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=0$
20	$x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$

21	$\sqrt{4-x^2}\,y'+xy^2+x=0$
22	$x\sqrt{4+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0$
23	$(1+e^x)y'=ye^x$
24	$y\ln y+2xy'=0$
25	$\sqrt{1-x^2}\,y'+xy^2+x=0$
26	$4(x^2y+y)dy+\sqrt{5+y^2}\,dx=0$
27	$(1+y^2)^{3/2}+yy'\sqrt{1-x^2}=0$
28	$\sqrt{4+y^2}\,dx+4(x^2y+y)dy=0$
29	$y(1+\ln y)+3x^2y'=0$
30	$2xy^2+2x+\sqrt{2-x^2}\,y'=0$

Завдання 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку з однорідною правою частиною.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y'=\frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+2$	16	$xy'=\frac{3y^3+8yx^2}{2y^2+4x^2}$
2	$xy'=3\sqrt{2x^2+y^2}+y$	17	$xy'=4\sqrt{x^2+y^2}+y$
3	$x^2y'=y^2-xy+x^2$	18	$xy'=3\sqrt{x^2+y^2}+y$
4	$y'=\frac{x+2y}{2x-y}$	19	$xy'=\frac{3y^3+10yx^2}{2y^2+5x^2}$
5	$3y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+4$	20	$y'=\frac{x+y}{x-y}$

6	$y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$	21	$y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$
7	$xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$	22	$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$
8	$xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$	23	$xy' = \sqrt{4x^2 - y^2} + y$
9	$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$	24	$y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$
10	$y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$	25	$3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$
11	$xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$	26	$xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$
2	$4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$	27	$y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$
13	$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$	28	$xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$
14	$y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$	29	$y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$
15	$xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$	30	$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку. (Знайти частинний розв'язок $y_K = y_K(x)$ диференціального рівняння, що задовольняє вказаній початковій умові). Задачу розв'язати двома способами:
а) методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа);
б) за допомогою підстановки Бернуллі.
Обчислити значення $\tilde{y} = y_K(\tilde{x})$ отриманого розв'язку в заданій точці $\tilde{x}$.

№ в-та	Завдання
1	$y'-4y/x=x^5e^{-x}$; $y(1)=0$; $\tilde{x}=2$
2	$y'+y\sin x=3\sin 2x$; $y(0)=0$; $\tilde{x}=\pi/2$
3	$(x^2-1)y'-2xy=x(x^2-1)^2$; $y(0)=3$; $\tilde{x}=2$
4	$xy'-y=x^2\sin x$; $y(\pi/2)=1$; $\tilde{x}=\pi$
5	$y'+y/(2x)=x^2$; $y(1)=1$; $\tilde{x}=2$
6	$x^2y'-(2x-5)y=5x^2$; $y(2)=4$; $\tilde{x}=1$
7	$y'+y/x=-2\ln x/x$; $y(1)=1$; $\tilde{x}=e$
8	$y'+2y/x=x^3$; $y(1)=-5/6$; $\tilde{x}=2$
9	$y'-2xy/(1+x^2)=1+x^2$; $y(1)=2$; $\tilde{x}=2$
10	$y'+y/(3x)=2/x$; $y(1)=1$; $\tilde{x}=2$
11	$y'+2xy=xe^{-x^2}$; $y(0)=1$; $\tilde{x}=1$
12	$(1+x)y'-2y=e^x(1+x)^3$; $y(0)=1$; $\tilde{x}=1$
13	$xy'-3y=x^4e^{-2x}$; $y(1)=-e^{-2}/2$; $\tilde{x}=-1$
14	$y'-4xy=-4x^3$; $y(0)=-1/2$; $\tilde{x}=1$
15	$y'-3x^2y=x^2(1+x^3)$; $y(0)=0$; $\tilde{x}=1$
16	$y'-3y/x=-2/x^2$; $y(1)=1$; $\tilde{x}=2$
17	$y'-y\,ctg\,x=2x\sin x$; $y(\pi/2)=0$; $\tilde{x}=\pi/4$
18	$y'+y\,ctg\,x=\cos^2 x$; $y(\pi/2)=2$; $\tilde{x}=\pi/4$
19	$(x+1)y'-y=e^x(x+1)^2$; $y(0)=1$; $\tilde{x}=1$
20	$y'+y/(2x)=\sqrt{x}\sin 2x$; $y(\pi)=0$; $\tilde{x}=\pi/2$
21	$y'+y/x=e^x(x+1)/x$; $y(1)=e$; $\tilde{x}=2$
22	$y'-y/x=-12/x^3$; $y(1)=4$; $\tilde{x}=2$
23	$y'+y/(2x)=3x$; $y(1)=0$; $\tilde{x}=2$

24	$y'+(1-2x)y/x^2=1;\ \ y(1)=1;\ \tilde{x}=2$
25	$y'+2xy=-2x^3;\ y(1)=1/e;\ \tilde{x}=-1$
26	$y'-2xy=-x^3;\ y(0)=3;\ \tilde{x}=1$
27	$(1-x^2)y'-xy=x(1-x^2);\ y(0)=-1/3;\ \tilde{x}=1/2$
28	$y'-2y\cos x=6\cos x;\ y(0)=3;\ \tilde{x}=\pi$
29	$y'-y/x=-\ln x/x;\ y(1)=1;\ \tilde{x}=e$
30	$y'+y\cos x=6\sin 2x;\ y(0)=-1;\ \tilde{x}=\pi$

Завдання 4. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння, що допускає зниження порядку заміною змінної $y'=p$, де $p=p(x)$ – нова шукана функція. (Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє вказаним початковим умовам).

№ в-та	Завдання
1	$x\,y''+y'=\ln x;\ y(1)=-1/4;\ y'(2)=-1/4$
2	$y''-y'ctg\,x=\sin x;\ y(\pi/2)=0;\ y'(\pi/2)=\pi/2$
3	$x\,y''=(2x^2+1)\,y';\ y(1)=0;\ y'(1)=e$
4	$y''-2\,y'ctg\,x=\sin^3 x;\ y(\pi/2)=1;\ y'(\pi/2)=0$
5	$x\,y''=y'\ln y';\ y(1)=0;\ y'(1)=e$
6	$y''+xy'=2x(1-x^2);\ y(0)=3;\ y'(0)=-2$
7	$xy''-y'=x^2e^x;\ y(1)=0;\ y'(1)=e$
8	$y''+(1-x)(y')^2=0;\ y(1)=1;\ y'(1)=-1/2$
9	$x^2y''+2\sqrt{y'}=0;\ y(1)=0;\ y'(1)=4$
10	$y''=y'/x+2\sqrt{y'/x};\ y(e)=0;\ y'(e)=1$
11	$(x^2+1)\,y''-2x\ y'=2x;\ y(0)=3;\ y'(0)=0$

12	$(x^2-1)\,y''+2xy'=3x^2$; $y(0)=-1$; $y'(0)=0$
13	$xy''\ln x=y'$; $y(e)=0$; $y'(e)=1$
14	$2\,x\,y'\,y''=(y')^2+1$; $y(1)=1$; $y'(1)=0$
15	$y''-y'tg\,x=\cos^2 x$; $y(0)=-1$; $y'(0)=0$
16	$3\,x\,(y')^2\,y''=(y')^3-1$; $y(1)=12$; $y'(1)=2$
17	$(x^2+1)y''+(y')^2+1=0$; $y(0)=-2$; $y'(0)=0$
18	$y''+y'tg\,x=2\cos^2 x$; $y(0)=2$; $y'(0)=-1$
19	$x\,y''e^{y'}=e^{y'}+1$; $y(1)=-1$; $y'(1)=0$
20	$y''(e^x+1)+e^x y'=0$; $y(0)=3$; $y'(0)=1/2$
21	$x\,y''-y'=2x^2\cos 2x$; $y(\pi)=1$; $y'(\pi)=0$
22	$y''=y'/x+(y'/x)\,\ln(y'/x)$; $y(1)=0$; $y'(1)=e$
23	$y''+y'\mathrm{tg}\,x=\sin 2x$; $y(0)=3$; $y'(0)=-2$
24	$(x^2+1)\,y'\,y''=x\left(1+(y')^2\right)$; $y(0)=-1$; $y'(0)=0$
25	$y''-y'ctg\,x=ctg\,x$; $y(\pi/2)=0$; $y'(\pi/2)=-1$
26	$y''=y'/x+tg\,(y'/x)$; $y(1)=0$; $y'(1)=\pi/2$
27	$y''+y'ctg\,x=\sin^2 x$; $y(\pi/2)=1$; $y'(\pi/2)=0$
28	$x\,y''-y'=x\sin(y'/x)$; $y(1)=2$; $y'(1)=\pi/2$
29	$x\,y''\ln x-y'=x\ln^2 x$; $y(e)=0$; $y'(e)=e$
30	$(x^2+1)\,y''+2\,x\,y'=1/x^2$; $y(1)=-1$; $y'(1)=0$

Завдання 5. Розв’язати задачу Коші для диференціального рівняння, що допускає зниження порядку заміною змінної $y'=p$, де $p=p(y)=p\big(y(x)\big)$ – нова шукана функція. (Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, що задовольняє вказаним початковим умовам).

№ в-та	Завдання
1	$(y')^2 = yy''+y^2y'$; $y(1)=1$; $y'(1)=-1$
2	$(y^2+1)y''=(y')^3+y'$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
3	$2y\,y''=2y(y')^2-e^{2y}$; $y(0)=0$; $y'(0)=e$
4	$2yy''=4+(y')^2$; $y(0)=4$; $y'(0)=0$
5	$y''=2yy'$; $y(1)=2$; $y'(1)=4$
6	$yy''=(y')^2\ln y'$; $y(0)=1$; $y'(0)=e$
7	$4y''\sqrt{y}=1$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
8	$2\sqrt{y}y''+(y')^3=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
9	$yy''+(y')^2=(y')^3y$; $y(0)=1$; $y'(0)=-1$
10	$yy''=(y')^2+y^4$; $y(0)=2$; $y'(0)=4$
11	$yy''-(y')^2=y'$; $y(0)=2$; $y'(0)=1$
12	$yy''=(y')^3-y'$; $y(0)=1$; $y'(0)=\sqrt{2}$
13	$y''=2\sqrt{y'}e^y$; $y(0)=0$; $y'(0)=1$
14	$yy''-(y')^2=2y^3y'$; $y(0)=2$; $y'(0)=8$
15	$y''=2(y')^2 ctg\, y$; $y(0)=\pi/2$; $y'(0)=1$
16	$(y')^2+yy''=yy'$; $y(0)=2$; $y'(0)=1$
17	$yy''-(y')^2=y^2\ln y$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
18	$3y\,y'\,y''=(y')^3+1$; $y(0)=1$; $y'(0)=0$
19	$y''=(y')^3\sin y$; $y(0)=\pi$; $y'(0)=-1$
20	$y^2y''=(2y^2+1)(y')^3$; $y(0)=1$; $y'(0)=-1$
21	$yy''-2(y')^2=0$; $y(0)=2$; $y'(0)=4$
22	$y^2y''+4(y')^{3/2}=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=4$
23	$4y^2+(y')^2-2yy''=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=2$
24	$3(y')^2=y''(y-1)$; $y(0)=2$; $y'(0)=1$

25	$yy''-(y')^2=3y^4y'$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
26	$yy''-(y')^2=2yy'\ln y$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
27	$y^2y''+y(y')^2=1$; $y(0)=2$; $y'(0)=1$
28	$y''(y')^2=8y$; $y(1)=1$; $y'(1)=2$
29	$y''=2y^2\sqrt{y'}$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$
30	$y''+3y^2(y')^3=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$

Завдання 6. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Задачу розв'язати двома способами:
а) методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа);
б) методом невизначених коефіцієнтів за виглядом правої частини.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y''+3y'+2y=-6x^2$	16	$y''-4y'+8y=8x^2$
2	$y''-3y'=9x^2+4x$	17	$y''-8y'+16y=32x^2$
3	$y''+4y=8x^2-5x$	18	$y''-2y'=4x^2-3x+2$
4	$y''+2y'+5y=5x^2+6$	19	$y''+2y'-15y=12x^2$
5	$y''+9y=9x^2-4$	20	$y''+8y'+16y=16x^2$
6	$y''+4y=8x^2-12$	21	$y''+6y'+9y=24x^2$
7	$y''-4y=12x^2+5x$	22	$y''+y=6x^2-5$
8	$y''-4y'=24x^2+2x$	23	$y''-5y'+6y=18x^2$
9	$y''-3y'-18y=36x$	24	$y''+13y'+12y=24x$
10	$y''-4y'+4y=-4x^2$	25	$y''+2y'-8y=-8x^2$
11	$y''-2y'=6x^2+3x-2$	26	$y''-2y'-3y=3x^2+x$

12	$y''+3y'-10y=20x^2$	27	$y''+2y'+y=6x^2+2$
13	$y''-4y'=2x^2+3x$	28	$y''+3y'+4y=8x^2$
14	$y''+4y=8x^2+3x$	29	$y''-6y'+9y=9x^2$
15	$y''+4y'+4y=4x^2$	30	$y''+16y=32x^2+6x$

Завдання 7. Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y''-y'-2y=6e^{-x}$	16	$y''+3y'-10y=-12e^{2x}$
2	$y''+4y'+4y=9e^{-2x}$	17	$y''+9y=36e^{-3x}$
3	$y''+2y'-3y=8e^{x}$	18	$y''-4y'+3y=-4e^{x}$
4	$y''+y'-6y=2e^{-2x}$	19	$y''-6y'+9y=4e^{3x}$
5	$y''-2y'=8e^{2x}$	20	$y''-2y'-8y=8e^{-2x}$
6	$y''-4y'-12y=12e^{-2x}$	21	$y''+4y'=12e^{-4x}$
7	$y''-3y'+2y=12e^{2x}$	22	$y''-4y'-32y=8e^{4x}$
8	$y''-4y'+4y=6e^{2x}$	23	$y''+6y'+9y=16e^{x}$
9	$y''+2y'+y=18e^{-x}$	24	$y''-4y'+5y=18e^{2x}$
10	$y''+y'-2y=6e^{-2x}$	25	$y''+4y'+20y=8e^{-2x}$
11	$y''+3y'+2y=-2e^{-2x}$	26	$y''-9y=8e^{-3x}$
12	$y''+2y'-15y=12e^{3x}$	27	$y''-4y'=8e^{4x}$
13	$y''+3y'-28y=-2e^{4x}$	28	$y''-2y'=18e^{2x}$
14	$y''-2y'-24y=18e^{-4x}$	29	$y''-2y'-48y=35e^{-6x}$
15	$y''-5y'-6y=8e^{-x}$	30	$y''+4y'+8y=-6e^{-2x}$

Завдання 8. Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y''-2y'=4\sin 2x$	16	$y''-4y'+4y=10\cos 4x$
2	$y''-2y'+10y=3\cos 3x$	17	$y''+4y'+5y=10\cos 2x$
3	$y''-2y'+5y=6\sin 2x$	18	$y''+6y'+25y=6\sin 3x$
4	$y''+2y'=8\cos 2x$	19	$y''+2y'+17y=65\cos x$
5	$y''-6y'+13y=12\cos 2x$	20	$y''+2y'+5y=17\cos 2x$
6	$y''+4y'+8y=-2\sin 2x$	21	$y''-4y'+8y=20\cos 2x$
7	$y''+2y'+10y=4\sin 3x$	22	$y''-4y'+20y=8\sin 4x$
8	$y''+y=2\cos x-3\sin x$	23	$y''-2y'+17y=-\sin 4x$
9	$y''-8y'+17y=8\cos x$	24	$y''+8y'+16y=3\cos x$
10	$y''+6y'+18y=6\cos 2x$	25	$y''-6y'+9y=2\sin 3x$
11	$y''-2y'+y=4\sin 6x$	26	$y''+4y=2\cos x-\sin x$
12	$y''+9y=3\cos 3x$	27	$y''-4y'+40y=2\sin x$
13	$y''-6y'+18y=3\sin x$	28	$y''+3y'=4\sin 3x-\cos 3x$
14	$y''-10y'+25y=4\sin x$	29	$y''+6y'+13y=51\cos 2x$
15	$y''+y=2\cos 3x+\sin 3x$	30	$y''+16y=2\cos 4x$

Завдання 9. Розв’язати задачу Коші. (Знайти частинний розв’язок $y_K = y_K(x)$ диференціального рівняння, який задовольняє вказаним початковим умовам). Обчислити значення $\tilde{y} = y_K(\tilde{x})$ отриманого розв’язку в заданій точці $\tilde{x}$.

№ в-та	Завдання
1	$y''-2y'+10y=50x^2+6$; $y(0)=3$, $y'(0)=-2$; $\tilde{x}=\pi$
2	$y''+4y'-12y=8\sin 2x$; $y(0)=0$, $y'(0)=2$; $\tilde{x}=\pi/2$
3	$y''-y'=2x^2-4x-6$; $y(0)=4$, $y'(0)=-3$; $\tilde{x}=1$
4	$y''-6y'+9y=-9x^2-6x$; $y(0)=-1$, $y'(0)=2$; $\tilde{x}=1/3$

5	$y''-7y'+6y=12\sin x$; $y(0)=-3,\ y'(0)=0$; $\tilde{x}=\pi/2$
6	$y''-y'-2y=2e^{-x}$; $y(0)=4,\ \ y'(0)=-1$; $\tilde{x}=1$
7	$y''-2y'+2y=2x^2+6$; $y(0)=-5,\ y'(0)=0$; $\tilde{x}=\pi/2$
8	$y''-3y'+2y=10e^{-x}$; $y(0)=2,\ \ y'(0)=-4$; $\tilde{x}=1$
9	$y''+5y'=-25\cos 5x$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=0$; $\tilde{x}=\pi/5$
10	$y''-5y'=10x^2-3x+2$; $y(0)=0,\ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=2/5$
11	$y''+9y=12\sin 3x$; $y(0)=0,\ \ y'(0)=2$; $\tilde{x}=\pi/3$
12	$y''+6y'+25y=26e^{3x}$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=-6$; $\tilde{x}=\pi/4$
13	$y''+10y'+25y=12e^{-5x}$; $y(0)=1,\ \ y'(0)=2$; $\tilde{x}=2/5$
14	$y''+3y'=6e^{-3x}$; $y(0)=-1,\ \ y'(0)=4$; $\tilde{x}=1/3$
15	$y''+3y'-4y=68\cos 4x$; $y(0)=-3,\ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=\pi$
16	$y''+10y'+25y=25x$; $y(0)=0,\ y'(0)=2$; $\tilde{x}=2/5$
17	$y''+3y'+2y=6\sin x$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=-4$; $\tilde{x}=\pi/2$
18	$y''+9y=12\cos 3x$; $y(0)=-3,\ \ y'(0)=2$; $\tilde{x}=\pi/3$
19	$y''-9y'+18y=18\sin 3x$; $y(0)=3,\ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=\pi$
20	$y''+2y'=6x^2-4x-1$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=1$
21	$y''+4y=12\cos 2x$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=-4$; $\tilde{x}=\pi/2$
22	$y''-4y'-5y=12e^{-x}$; $y(0)=-4,\ \ y'(0)=0$; $\tilde{x}=1$
23	$y''+6y'+13y=169x$; $y(0)=2,\ \ y'(0)=-3$; $\tilde{x}=\pi/2$
24	$y''+2y'=8e^{-2x}$; $y(0)=0,\ \ y'(0)=3$; $\tilde{x}=1$
25	$y''+5y'+6y=26\sin 2x$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=\pi$
26	$y''-8y'+16y=6e^{4x}$; $y(0)=3,\ \ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=1/4$
27	$y''+y=2\sin x-6\cos x$; $y(0)=-3,\ \ y'(0)=2$; $\tilde{x}=\pi$
28	$y''-9y=12e^{-3x}$; $y(0)=6,\ y'(0)=-2$; $\tilde{x}=1/3$
29	$y''-4y'=6e^{4x}$; $y(0)=4,\ \ y'(0)=6$; $\tilde{x}=1/4$
30	$y''-4y'+3y=4\sin 3x$; $y(0)=-4,\ \ y'(0)=0$; $\tilde{x}=\pi$

Завдання 10. Розв‘язати задачу Коші для неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь методом вилучення (зведенням до одного диференціального рівняння вищого порядку). (Знайти частинний розв'язок диференціальної системи, який задовольняє вказаним початковим умовам). Обчислити значення $\tilde{x}_1 = x_{1K}(\tilde{t})$; $\tilde{x}_2 = x_{2K}(\tilde{t})$ отриманого розв'язку в заданій точці $\tilde{t}$.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 - 2x_2 - 3e^{2t}; \\ dx_2/dt = 8x_1 + x_2 + e^{2t}; \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = -4;\ \tilde{t} = 1$	16	$\begin{cases} dx_1/dt = 4x_1 + 2x_2 + 3; \\ dx_2/dt = 2x_1 + 4x_2 - 2t; \end{cases}$ $x(0) = -3;\ y(0) = 1;\ \tilde{t} = 1$
2	$\begin{cases} dx_1/dt = -8x_1 + 3x_2; \\ dx_2/dt = -3x_1 + 2x_2 + 6t; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 2;\ \tilde{t} = 1$	17	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 + 3x_2 - e^{-2t}; \\ dx_2/dt = x_1 + 4x_2 + e^{-2t}; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = -3;\ \tilde{t} = 1$
3	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 - 9x_2; \\ dx_2/dt = x_1 + 8x_2 - \sin t; \end{cases}$ $x(0) = -3;\ y(0) = 2;\ \tilde{t} = \pi$	18	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 + 4x_2 - 2t; \\ dx_2/dt = 4x_1 + 2x_2 - 3; \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 1;\ \tilde{t} = 1$
4	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 - x_2 - 2e^{3t}; \\ dx_2/dt = 4x_1 - 3x_2; \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 5;\ \tilde{t} = 1$	19	$\begin{cases} dx_1/dt = 10x_1 + 4x_2 + 3t; \\ dx_2/dt = -5x_1 + 2x_2 - 4; \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 2;\ \tilde{t} = 1$
5	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 - 3x_2 + 4; \\ dx_2/dt = 3x_1 + 2x_2 - 6t; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1;\ \tilde{t} = 1$	20	$\begin{cases} dx_1/dt = 5x_1 - 4x_2 - 3e^{-t}; \\ dx_2/dt = -4x_1 + 5x_2; \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 3;\ \tilde{t} = 1$
6	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 + x_2 + 6t; \\ dx_2/dt = -6x_1 - 3x_2; \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 2;\ \tilde{t} = 1$	21	$\begin{cases} dx_1/dt = -3x_1 + x_2; \\ dx_2/dt = x_1 - 3x_2 - e^{4t}; \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 6;\ \tilde{t} = 1$

7	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 - x_2 - 6e^{-t}; \\ dx_2/dt = -4x_1 + 4x_2; \end{cases}$ $x(0)=5;\ y(0)=-1;\ \tilde{t}=1$	22	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 + 5x_2 - e^{-3t}; \\ dx_2/dt = 5x_1 + 2x_2; \end{cases}$ $x(0)=2;\ y(0)=-2;\ \tilde{t}=1$
8	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 - 2x_2; \\ dx_2/dt = x_1 - x_2 - \cos 3t; \end{cases}$ $x(0)=4;\ y(0)=-1;\ \tilde{t}=\pi$	23	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 - 2x_2 + 6t; \\ dx_2/dt = -2x_1 + x_2 - 4; \end{cases}$ $x(0)=3;\ y(0)=4;\ \tilde{t}=1$
9	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 - x_2 + 3t; \\ dx_2/dt = 4x_1 - 2x_2 - 1; \end{cases}$ $x(0)=-3;\ y(0)=4;\ \tilde{t}=1$	24	$\begin{cases} dx_1/dt = 5x_1 - 8x_2 - \cos t; \\ dx_2/dt = 9x_1 - 13x_2; \end{cases}$ $x(0)=0;\ y(0)=2;\ \tilde{t}=\pi$
10	$\begin{cases} dx_1/dt = 9x_1 - 5x_2 + \sin t; \\ dx_2/dt = 7x_1 - 3x_2 - \cos t; \end{cases}$ $x(0)=3;\ \ y(0)=6;\ \tilde{t}=\pi$	25	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 + 3x_2 - e^{3t}; \\ dx_2/dt = 3x_1 + x_2 + 2e^{3t}; \end{cases}$ $x(0)=3;\ \ y(0)=-1;\ \tilde{t}=1$
11	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 - x_2 + 3t; \\ dx_2/dt = x_1 + 2x_2 - 2t; \end{cases}$ $x(0)=1;\ y(0)=-4;\ \tilde{t}=1$	26	$\begin{cases} dx_1/dt = 2x_1 - x_2 + 4t; \\ dx_2/dt = -x_1 + 2x_2 - 6; \end{cases}$ $x(0)=-1;\ y(0)=4;\ \tilde{t}=1$
12	$\begin{cases} dx_1/dt = x_1 + x_2 - 6e^{-3t}; \\ dx_2/dt = -5x_1 - 3x_2; \end{cases}$ $x(0)=2;\ y(0)=6;\ \tilde{t}=1$	27	$\begin{cases} dx_1/dt = 4x_1 - 12x_2 - 3t; \\ dx_2/dt = 4x_1 - 10x_2 + 4; \end{cases}$ $x(0)=4;\ y(0)=-1;\ \tilde{t}=1$
13	$\begin{cases} dx_1/dt = 3x_1 + 2x_2; \\ dx_2/dt = x_1 + 2x_2 - \cos t; \end{cases}$ $x(0)=6;\ \ y(0)=1;\ \tilde{t}=\pi$	28	$\begin{cases} dx_1/dt = 3x_1 + x_2 - 4e^{-2t}; \\ dx_2/dt = 7x_1 - 3x_2 + e^{-2t}; \end{cases}$ $x(0)=-2;\ y(0)=4;\ \tilde{t}=1$
14	$\begin{cases} dx_1/dt = -x_1 - 2x_2 + 4t; \\ dx_2/dt = 3x_1 + 4x_2 - 6t; \end{cases}$ $x(0)=2;\ y(0)=6;\ \tilde{t}=1$	29	$\begin{cases} dx_1/dt = -2x_1 + 8x_2 - 3; \\ dx_2/dt = -2x_1 + 6x_2 + 2t; \end{cases}$ $x(0)=-4;\ y(0)=2;\ \tilde{t}=1$
15	$\begin{cases} dx_1/dt = -2x_1 + 5x_2 + e^{2t}; \\ dx_2/dt = -7x_1 + 10x_2; \end{cases}$ $x(0)=y(0)=-3;\ \tilde{t}=1$	30	$\begin{cases} dx_1/dt = -2x_1 + 7x_2 + 2; \\ dx_2/dt = x_1 + 4x_2 - \cos t; \end{cases}$ $x(0)=3;\ y(0)=-4;\ \tilde{t}=\pi$

Змістовий модуль 3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ. ЕЛЕМЕНТИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Операційне числення, розроблене на основі перетворення Лапласа, широко використовується для розв'язування диференціальних та інших споріднених з ними рівнянь, що описують процеси функціонування різноманітних об'єктів. Зокрема, для розрахунків перехідних режимів електричних ланцюгів. Однак треба застерегти, що операційний метод безпосередньо незастосовний для ланцюгів, параметри та структура яких змінюються з бігом часу, а також таких, що містять нелінійні елементи.

Методи варіаційного числення знаходять широке застосування в різних галузях науки та виробництва при постановці та розв'язуванні задач моделювання, оптимізації та керування.

3.1. Перетворення Лапласа та його основні властивості

3.1.1. Оператор Лапласа. Оригінал і зображення. Таблиці операційного числення

Оригіналом називається довільна функція $f(t)$, що розглядається на півінтервалі $[0;+\infty)$ і має такі властивості:

1) $f(t)$ кусково-неперервна на півінтервалі $[0;+\infty)$, тобто на будь-якому скінченному інтервалі має скінченне число точок розриву першого роду (скінченних стрибків);

2) існують додатні сталі $a>0$, $M>0$ такі, що $|f(t)|<M\,e^{at}$ при довільному значенні t із півінтервалу $[0;+\infty)$.

Для таких функцій $f(t)$ вводиться ***оператор Лапласа*** (***перетворення Лапласа***) наступним чином:

$$\boxed{L(f(t))=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt},\quad \text{де } p - \textbf{\textit{параметр}}.$$

<u>Зауваження 1</u>. Параметр p – це комплексна змінна $p=\alpha+i\beta$ з додатною дійсною частиною $\alpha>0$, що забезпечує

збіжність невласного інтеграла.

Оператор – це відображення, що переводить функцію у функцію.

Інтегральний оператор Лапласа кожному оригіналу $f(t)$ ставить у відповідність єдину функцію

$$\boxed{F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt},$$

яка називається ***зображенням***. Позначається

$$\boxed{L(f(t))=F(p)} \quad \text{або} \quad \boxed{f(t)\doteqdot F(p)}, \quad \text{або} \quad \boxed{f(t)\leftarrow\!\!\!\!\!\!\!\cdot\;\; F(p)}.$$

Спеціальний розділ вищої математики, в якому вивчається перетворення Лапласа та його застосування, називається ***операційним численням***. Властивості перетворення Лапласа відображені в таблиці 1. У таблиці 2 наведено перелік найбільш вживаних функцій та їх зображень. Основні співвідношення більш докладно розглядаються нижче.

Таблиця 1 – **Правила операційного числення**

№ п/п	Операція, властивість	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	Лінійність	$C_1 f_1(t)\pm$ $\pm C_2 f_2(t)$	$C_1F_1(p)\pm$ $\pm C_2F_2(p)$
2	Зміщення аргументу зображення (затухання оригіналу)	$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
3*	Зміна масштабу (подібність)	$f(at)$, $a>0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
4	Зміщення аргументу оригіналу (запізнювання оригіналу)	$f(t-b)\times$ $\times\eta(t-b)$, $b>0$	$e^{-bp}F(p)$

5	Диференціювання зображення	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
5а	Перша похідна зображення	$t\, f(t)$	$-F'(p)$
6	Зображення похідних оригіналу	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - - p^{n-2} f'(0) - \ldots - - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
6а	Зображення першої похідної оригіналу	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
6б	Зображення другої похідної оригіналу	$f''(t)$	$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$
7	Зображення інтеграла від оригіналу	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{p} F(p)$

Таблиця 2 – **Основні оригінали та їх зображення**

№ п/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-b) = \begin{cases} 1, & t > b \\ 0, & t < b \end{cases}$	$e^{-bp} \cdot \frac{1}{p}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
4	$\sin bt$	$\frac{b}{p^2+b^2}$
5	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2+b^2}$
6	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
7	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$

8	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
8а	t	$\dfrac{1}{p^2}$
8б	t^2	$\dfrac{2}{p^3}$
9	$t\,\eta(t-b)$	$e^{-bp}\left(b\cdot\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}\right)$
10	$t^n e^{-at}$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
10а	te^{-at}	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
11	$t\sin bt$	$\dfrac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
12	$t\cos bt$	$\dfrac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
13	$\dfrac{1}{2b^3}(\sin bt-bt\ \cos bt)$	$\dfrac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
14	$\delta(t)$	1
15	$\delta(t-b)$	e^{-bp}
16	$\delta'(t)$	p

Зауваження 2. Будь-який оригінал $f(t)$ розглядається на півінтервалі $[0;+\infty)$. Його зручно продовжити рівним нулю на всю числову пряму, поклавши $f(t)=0,\quad t<0$.

Зауваження 3. З означення випливає, що оригінал $f(t)$ може прямувати до нескінченності при $t \to +\infty$, але не надто швидко. Наприклад, функція $f(t) = e^{t^2}$ не є оригіналом.

Функції, що відповідають умові 2) з означення оригіналу, називаються ***функціями експоненціального росту***.

Функція $f(t) = e^{t^2}$ до таких не належить.

Теорема 1 (***про поведінку зображень на нескінченності***). Нехай $f(t)$ – довільний оригінал, $F(p)$ – його зображення. Тоді $\boxed{\lim_{p \to +\infty} F(p) = 0}$, тобто *будь-яке зображення прямує до нуля, коли параметр* p *прямує до нескінченності.*

□ $|f(t)| < Me^{at}$; $a > 0$, $M > 0$; $p > a$;

$$|F(p)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \le \int_0^{+\infty} \left| e^{-pt} f(t) \right| dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} |f(t)| dt <$$

$$< \int_0^{+\infty} e^{-at} M e^{dt} \, dt = M \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t} \, dt = M \lim_{N \to +\infty} \int_0^{N} e^{-(p-a)t} \, dt =$$

$$M \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)} \right) \Bigg|_0^N = M/(p-a),$$

бо $e^{-(p-a)N} \to 0$ при $N \to +\infty$ $(p > a)$.

Якщо $p \to +\infty$, то $M/(p-a) \to 0$. Отже, $F(p) \to 0$ при $p \to +\infty$. ■

Теорема 2 (***єдиності***). *Якщо дві неперервні функції* $f_1(t)$ *і* $f_2(t)$ *мають одне і те ж зображення* $F(p)$, *то ці функції тотожно рівні*, тобто

$$\text{якщо } f_1(t) \doteqdot F_1(p); \; f_2(t) \doteqdot F_2(p); \; F_1(p) = F_2(p), \text{ то}$$

$$f_1(t) = f_2(t).$$ (Без доведення).

3.1.2. Одинична ступінчаста функція Хевісайда $\eta(t)$ та її зображення

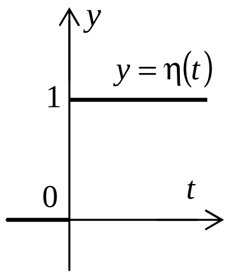

Рис. 58

Функція $\eta(t)$, яка задається формулою

$$\boxed{\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0;\\ 0, & t<0,\end{cases}}$$

називається ***одиничною ступінчастою функцією Хевісайда*** (рис. 58). (За оригінал приймаємо $f(t)=1$).

$$L(\eta(t))=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\eta(t)dt=\lim_{N\to+\infty}\int_0^N e^{-pt}\times$$

$$\times 1dt=\lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right)\Bigg|_0^N=\lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{e^{-pN}}{p}+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p},$$

бо $\lim\limits_{N\to+\infty}e^{-pN}=0 \quad (p>0)$. Отже, $\boxed{\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}}$ або $\boxed{1\risingdotseq\frac{1}{p}}$.

Зауваження. Основи операційного числення розробив Хевісайд як інструмент для вивчення характеру проходження електричних сигналів. За допомогою одиничної функції $\eta(t)$ він описав стандартні сигнали азбуки Морзе (крапка і тире).

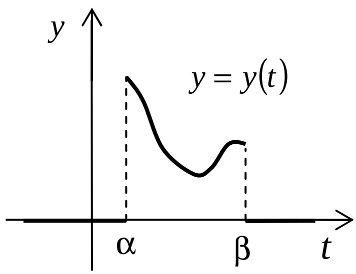

Рис. 59

Довільну імпульсну функцію $y=y(t)$, яка скрізь дорівнює нулю, за винятком скінченного інтервалу $(\alpha;\beta)$ (рис. 59)

$$y=y(t)=\begin{cases}0, & t<\alpha;\\ f(t), & t\in(\alpha;\beta);\\ 0, & t>\beta,\end{cases}$$

можна подати однією формулою

$$y=f(t)(\eta(t-\alpha)-\eta(t-\beta)),$$

де $\eta(t-b)$ – одинична функція Хевісайда з запізнюванням

$$\eta(t-b)=\begin{cases}1, & t>b;\\ 0, & t<b\ .\end{cases}$$

3.1.3. Зображення функцій $\sin bt$, $\cos bt$

На основі формули інтегрування

$$\int e^{at}\sin bt\,dt = \frac{-be^{at}\cos bt + ae^{at}\sin bt}{a^2+b^2}+C$$

маємо $L(\sin bt)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\sin bt\,dt=\lim\limits_{N\to+\infty}\int\limits_0^{N} e^{-pt}\sin bt\,dt=$

$$=\frac{1}{p^2+b^2}\lim_{N\to+\infty}\left(-be^{pt}\cos bt+(-p)e^{-pt}\sin bt\right)\Big|_0^N=$$

$$=\frac{1}{p^2+b^2}\lim_{N\to+\infty}\left(-be^{-pN}\cos bN-pe^{-pN}\sin bN+b\right)=\frac{b}{p^2+b^2},$$

бо $e^{-pN}\to 0$; $\cos bN$ і $\sin bN$ - обмежені функції.

Отже, $\boxed{\sin bt \doteqdot \frac{b}{p^2+b^2}}$.

Аналогічно, на основі формули інтегрування

$$\int e^{at}\cos bt\,dt = \frac{ae^{at}\cos bt + be^{at}\sin bt}{a^2+b^2}+C$$

маємо $L(\cos bt)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\cos bt\,dt=$

$$=\frac{1}{p^2+b^2}\lim_{N\to+\infty}\left(-pe^{-pt}\cos bt+be^{-pt}\sin bt\right)\Big|_0^N=\frac{p}{p^2+b^2}.$$

Отже, $\boxed{\cos bt \doteqdot \frac{p}{p^2+b^2}}$.

3.1.4. Теорема зміщення (затухання)

<u>Теорема</u> (***зміщення*** (***затухання***)). *Якщо функція* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $F(p+a)$ *служить зображенням функції* $e^{-at} f(t)$:

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{-at} f(t) \doteqdot F(p+a)}\,.$$

$$\square \; L\left(e^{-at} f(t)\right) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{-at} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} f(t)\,dt = F(p+a)\,. \;\blacksquare$$

3.1.5. Зображення функцій e^{-at}, $e^{-at}\sin bt$, $e^{-at}\cos bt$

$$1 \doteqdot \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad e^{-at} = e^{-at} \times 1 \doteqdot \frac{1}{p+a}\,; \quad \boxed{e^{-at} \doteqdot \frac{1}{p+a}}\,;$$

$$\sin bt \doteqdot \frac{b}{p^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{-at} \sin bt \doteqdot \frac{b}{(p+a)^2+b^2}}\,;$$

$$\cos bt \doteqdot \frac{p}{p^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e^{-at} \cos bt \doteqdot \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}}\,.$$

3.1.6. Теорема про лінійність оператора Лапласа

<u>Теорема</u> (**про лінійність оператора Лапласа**). *Зображення алгебраїчної суми двох функцій, помножених на сталі величини, дорівнює відповідній сумі зображень цих функцій, помножених на відповідні сталі*

$$\boxed{L\left(C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)\right) = C_1 L\left(f_1(t)\right) \pm C_2 L\left(f_2(t)\right)}\,,$$

тобто якщо $f(t) = C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)$ і $f(t) \doteqdot F(p)$,

$$f_1(t) \doteqdot F_1(p)\,, \quad f_2(t) \doteqdot F_2(p), \text{ то } \quad F(p) = C_1 F_1(p) \pm C_2 F_2(p)\,.$$

□ $$F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(C_1 f_1(t)\pm C_2 f_2(t)\right)dt=C_1\int_0^{+\infty} e^{-pt} f_1(t)dt\pm$$

$$\pm C_2\int_0^{+\infty} e^{-pt} f_2(t)dt=C_1F_1(p)\pm C_2F_2(p).\quad\blacksquare$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти зображення функції

а) $f(t)=2+6\cos 3t-5\sin 3t$; б) $f(t)=3e^t\cos 4t+2e^t\sin 4t$.

□ а) $F(p)=2\,L(1)+6L(\cos 3t)-5L(\sin 3t)=$

$$=2\cdot\frac{1}{p}+6\cdot\frac{p}{p^2+3^2}-5\cdot\frac{3}{p^2+3^2}=\frac{8p^2-15p+18}{p(p^2+9)};$$

б) $$f(t)=3e^t\cos 4t+2e^t\sin 4t \risingdotseq 3\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+4^2}+$$

$$+2\cdot\frac{4}{(p-1)^2+4^2}=\frac{3p+5}{p^2-2p+17}\ .\quad\blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти оригінал функції $F(p)=\dfrac{5p+7}{p^2-6p+25}$.

□ $$F(p)=\frac{5p+7}{p^2-6p+25}=\frac{5p+7}{(p-3)^2+4^2}=$$

$$=\left|\frac{p-3}{(p-3)^2+4^2}\risingdotseq e^{3t}\cos 4t\ ;\quad \frac{4}{(p-3)^2+4^2}\risingdotseq e^{3t}\sin 4t\right|=$$

$$=5\cdot\frac{p-3+7/5+3}{(p-3)^2+4^2}=5\cdot\frac{p-3}{(p-3)^2+4^2}+\frac{11}{2}\times$$

$$\times\frac{4}{(p-3)^2+4^2}\risingdotseq 5e^{3t}\cos 4t-\frac{11}{2}e^{3t}\sin 4t=f(t).\quad\blacksquare$$

3.1.7. Теорема подібності (зміни масштабу)

<u>Теорема</u> (***подібності*** (***зміни масштабу***)). *Якщо функція* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $(1/a)F(p/a)$ *служить зображенням функції* $f(at)$, *де* $a>0$:

$$f(t)\doteqdot F(p)\quad\Rightarrow\quad \boxed{f(at)\doteqdot\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),\quad a>0}\,.$$

$$\square\quad L(f(at))=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(at)dt=\left|u=at;\ t=u/a\ ;\ dt=du/a\ ;\right.$$

$$\left.u_н=0;\ u_в=+\infty\right|=\int_0^{+\infty}e^{-pu/a}f(u)\frac{du}{a}=$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}e^{-pu/a}f(u)du=\frac{1}{a}F(p/a).\ \blacksquare$$

3.1.8. Теорема запізнювання (зсув аргументу в оригіналі)

<u>Теорема</u> (***запізнювання*** (***зсув аргументу в оригіналі***)). *Нехай функція* $f(t)$ *тотожно дорівнює нулю при* $t<0$. *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *то функція* $e^{-bp}F(p)$ *служить зображенням функції* $f(t-b)$, *де* $b>0$ (рис. 60), тобто

$$\text{якщо}\ f(t)\doteqdot F(p),\ \text{то}\ \boxed{f(t-b)\doteqdot e^{-bp}F(p),\quad b>0}\,.$$

$$\square\quad L(f(t-b))=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t-b)dt=\int_0^{b}e^{-pt}f(t-b)dt+$$

$$+\int_b^{+\infty}e^{-pt}f(t-b)dt=\left|\begin{matrix}f(t-b)=0\\ при\ \ t<b\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int_0^{b}e^{-pt}f(t-b)dt=0\Bigg|=$$

$$=\int_b^{+\infty}e^{-pt}f(t-b)dt=\left|\begin{matrix}u=t-b; & t=u+b;\\ du=dt; & u_н=0;\ \ u_в=+\infty\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-p(u+b)} f(u)du = e^{-bp}\int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du = e^{-bp}F(p). \quad \blacksquare$$

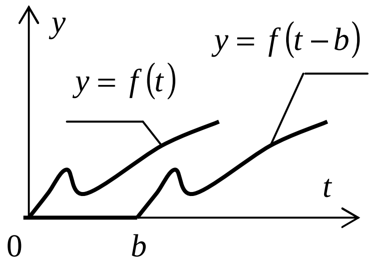

Рис. 60

Зауваження 1. Для явного врахування умови

$$f(t-b)=0 \quad \text{при} \quad t<b$$

формулу теореми запізнювання можна подати так

$$f(t-b)\eta(t-b) \doteqdot e^{-bp}F(p),$$

$$b>0,$$

де $\eta(t-b)$ – одинична функція Хевісайда з запізнюванням, при цьому

$$\boxed{\eta(t) \doteqdot \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \eta(t-b) \doteqdot e^{-bp}\cdot\frac{1}{p}}.$$

Зауваження 2. Зображенням імпульсної функції (рис. 59) $y(t)= f(t)(\eta(t-\alpha)-\eta(t-\beta))$ служить $Y(p)=\int_\alpha^\beta e^{-pt} f(t)dt$.

Якщо у виразі для оригіналу $y(t)$ розкрити дужки і сформувати відповідні зсуви аргументу в кожному доданку

$$\boxed{y(t)=g(t-\alpha)\eta(t-\alpha)-h(t-\beta)\eta(t-\beta)},$$

то за теоремою запізнювання $Y(p)$ можна подати у вигляді

$$\boxed{Y(p)=e^{-\alpha p}G(p)-e^{-\beta p}H(p)}, \text{ де } g(t)\doteqdot G(p); \ h(t)\doteqdot H(p).$$

Приклад 1. За відомим зображенням знайти відповідний оригінал:

а) $F(p)=\dfrac{2pe^{-\pi p/3}+2pe^{-2\pi p/3}}{p^2+9}$; б) $F(p)=\dfrac{3e^{-p}-3e^{-2p}}{p+1}$.

□ а) $F(p)=2e^{-\pi p/3}\cdot\dfrac{p}{p^2+9}+2e^{-2\pi p/3}\cdot\dfrac{p}{p^2+9}\doteqdot 2\cos 3(t-$

$$-\pi/3)\cdot\eta(t-\pi/3)+2\cos 3(t-2\pi/3)\cdot\eta(t-2\pi/3)=-2\cos 3t\times$$

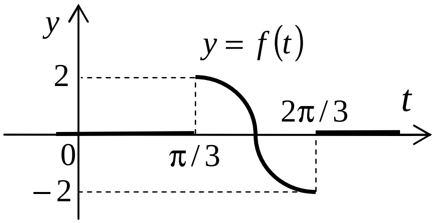

Рис. 61

$$\times\eta(t-\pi/3)+2\cos 3t\times$$
$$\times\eta(t-2\pi/3)=-2\cos 3t\times$$
$$\times(\eta(t-\pi/3)-$$
$$-\eta(t-2\pi/3))=f(t).$$

Графік одержаного оригіналу подано на рис. 61.

б) $F(p)=3e^{-p}\dfrac{1}{p+1}-3e^{-2p}\dfrac{1}{p+1}\doteqdot 3e^{-(t-1)}\eta(t-1)-$

$$-3e^{-(t-2)}\eta(t-2)=3e^{-(t-1)}\left(\eta(t-1)-e\eta(t-2)\right)=f(t).$$

(Графік отриманого оригіналу побудуйте самостійно). ■

3.1.9. Диференціювання зображення

<u>Теорема</u> (***про диференціювання зображення***). *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $(-1)^n\dfrac{d^n}{dp^n}F(p)$ *служить зображенням функції* $t^n f(t)$*:*

$$f(t)\doteqdot F(p)\quad\Rightarrow\quad \boxed{t^n f(t)\doteqdot(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)}.$$

□ Диференціюючи ліву і праву частини формули

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt$$

по параметру p, дістанемо

$$F'(p)=\frac{d}{dp}\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt=\int_0^{+\infty}\left(\frac{d}{dp}e^{-pt}\right)f(t)dt=$$

$$=\int_0^{+\infty}(-t)e^{-pt}f(t)dt=-\int_0^{+\infty}e^{-pt}tf(t)dt\ .$$

Отже, $F'(p) \doteqdot -t\, f(t)$ або $t\, f(t) \doteqdot -F'(p)$.

Аналогічно знаходимо другу похідну зображення

$$F''(p) = \frac{d}{dp}\left(-\int_0^{+\infty} e^{-pt} t f(t) dt \right) = -\int_0^{+\infty} \left(\frac{d}{dp} e^{-pt} \right) t f(t) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^2 f(t) dt \; .$$

Отже, $$t^2 f(t) \doteqdot F''(p) \; .$$

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільної n-ої похідної зображення маємо співвідношення

$$t^n f(t) \doteqdot (-1)^n F^{(n)}(p) \; . \quad \blacksquare$$

3.1.10. Зображення функцій t, t^n, $t\,\eta(t-b)$, te^{-at}, $t^n e^{-at}$, $t\sin bt$, $t\cos bt$

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда і похідної зображення, одержимо

$$1 \doteqdot 1/p \;\Rightarrow\; t = t \times 1 \doteqdot -(1/p)' = -\left(-1/p^2\right) = 1/p^2 \; .$$

Отже, $$\boxed{t \doteqdot \frac{1}{p^2}} \, .$$

Тоді $$t^2 = t \times t \doteqdot -\left(1/p^2\right)' = \frac{2}{p^3} = \frac{1\cdot 2}{p^3} ;$$

$$t^3 = t \times t^2 \doteqdot -\left(2/p^3\right)' = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{p^4} \, .$$

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільного n маємо співвідношення

$$\boxed{t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}},$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ – факторіал числа n.

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда з запізнюванням $\eta(t-b)$ і похідної зображення, одержимо

$$\eta(t-b) \risingdotseq \frac{1}{p}e^{-bp} \quad \Rightarrow \quad t\,\eta(t-b) \risingdotseq -\left(e^{-bp}/p\right)' =$$

$$= -\frac{e^{-bp}(-b)p - e^{-bp}}{p^2} = e^{-bp}\left(b \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right).$$

Отже, $\boxed{t\,\eta(t-b) \risingdotseq e^{-bp}\left(b \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right)}$.

Використовуючи зображення функцій t, t^n і теорему зміщення (затухання), одержимо зображення функцій te^{-at} і $t^n e^{-at}$:

$$\boxed{te^{-at} \risingdotseq \frac{1}{(p+a)^2}}; \qquad \boxed{t^n e^{-at} \risingdotseq \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}}.$$

Використовуючи формули для зображення функцій $\sin bt$, $\cos bt$ і похідної зображення, дістанемо:

$$\sin bt \risingdotseq \frac{b}{p^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad t\sin bt \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{b}{p^2+b^2}\right) =$$

$$= -b \cdot \frac{-2p}{\left(p^2+b^2\right)^2} = \frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}; \quad \cos bt \risingdotseq \frac{p}{p^2+b^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t\cos bt \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+b^2}\right) = -\frac{p^2+b^2-2p \cdot p}{\left(p^2+b^2\right)^2} = \frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}.$$

Отже, $\boxed{t\sin bt \risingdotseq \frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}}$; $\boxed{t\cos bt \risingdotseq \frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}}$.

Приклад 1. Знайти оригінал функції

$$F(p)=\frac{5p}{\left(p^2+16\right)^2}.$$

$$\square\ F(p)=\frac{5p}{\left(p^2+16\right)^2}=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2p\cdot 4}{\left(p^2+16\right)^2}\ \risingdotseq\ \frac{5}{8}\cdot t\sin 4t.\ \blacksquare$$

3.1.11. Зображення похідних оригіналу

Теорема (***про зображення похідної оригіналу***). *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $pF(p)-f(0)$ *служить зображенням похідної* $f'(t)$:

$$f(t)\risingdotseq F(p)\ \Rightarrow\ \boxed{f'(t)\risingdotseq pF(p)-f(0)}.$$

□ Використовуючи означення перетворення Лапласа і формулу інтегрування частинами, одержимо

$$L(f'(t))=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f'(t)dt=\left|u=e^{-pt};\ du=-pe^{-pt}dt;\ dv=f'(t)dt;\right.$$

$$\left.v=\int f'(t)dt=f(t)\right|=e^{-pt}f(t)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}f(t)\times\left(-pe^{-pt}\right)dt=$$

$$=\left|\lim_{t\to+\infty}e^{-pt}f(t)=0\right|=-f(0)+p\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t)dt=pF(p)-f(0).$$

Отже, $$f'(t)\risingdotseq pF(p)-f(0).\ \blacksquare$$

Застосовуючи цю формулу повторно, одержимо

$$L(f''(t))=L\left(\left(f'(t)\right)'\right)=pL(f'(t))-f'(0)=$$

$$=p(pF(p)-f(0))-f'(0)=p^2F(p)-p\,f(0)-f'(0).$$

Отже, $\boxed{f''(t) \doteqdot p^2F(p) - p\,f(0) - f'(0)}$.

На основі методу математичної індукції для довільної n-ої похідної оригіналу маємо співвідношення

$$\boxed{\begin{aligned} f^{(n)}(t) \doteqdot p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - \\ - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}}$$

Зауваження. Формули для зображення похідних спрощуються, якщо всі початкові умови нульові: $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$, ... Тоді

$$f(t) \doteqdot F(p); \quad f'(t) \doteqdot pF(p); \quad f^{(n)}(t) \doteqdot p^nF(p).$$

3.1.12. Зображення інтеграла від оригіналу

Теорема (***про зображення інтеграла від оригіналу***). *Якщо* $F(p)$ *є зображення функції* $f(t)$, *тоді функція* $(1/p)F(p)$ *служить зображенням інтеграла* $\int_0^t f(u)du$:

$$f(t) \doteqdot F(p) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_0^t f(u)du \doteqdot \frac{1}{p}F(p)}.$$

□ Нехай $f(t) \doteqdot F(p)$; $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(u)du \doteqdot \Phi(p)$. Знайдемо похідну інтеграла зі змінною верхньою межею

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(u)du = f(t).$$

Використаємо формулу для зображення похідної оригіналу

$$\varphi'(t) \doteqdot p\Phi(p) - \varphi(0).$$

Але $\varphi(0)=\int\limits_0^0 f(u)du=0$, тому $\varphi'(t)\doteqdot p\Phi(p)$.

Таким чином, $\left.\begin{array}{r} f(t)=\varphi'(t)\doteqdot p\Phi(p) \\ f(t)\doteqdot F(p) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad F(p)=p\Phi(p).$

Отже, $\Phi(p)=(1/p)F(p)$. ■

<u>Приклад 1</u>. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу і формулою $\sin t\doteqdot\dfrac{1}{p^2+1}$, знайти зображення функції $\cos t$.

$$\square \quad \cos t=1-\int\limits_0^t \sin u\,du \doteqdot \frac{1}{p}-\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+1}-=\frac{p}{p^2+1}\ . \quad ■$$

<u>Приклад 2</u>. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням:

$$F(p)=1/(p^3-6p^2+13p).$$

$$\square \quad F(p)=\frac{1}{p(p^3-6p^2+13p)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2-6p+13}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{(p-3)^2+2^2}=\left|\frac{2}{(p-3)^2+2^2}\doteqdot e^{3t}\sin 2t\right|\doteqdot$$

$$\doteqdot\frac{1}{2}\int\limits_0^t e^{3u}\sin 2u\,du=\left|\int e^{at}\sin bt\,dt=(-be^{at}\cos bt+ae^{at}\sin bt):\right.$$

$$\left.:(a^2+b^2)+C\right|=\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{-2e^{3u}\cos 2u+3e^{3u}\sin 2u}{3^2+2^2}\right|_0^t=$$

$$=(1/26)\cdot(-2e^{3t}\cos 2t+3e^{3t}\sin 2t+2)=f(t)\ . \quad ■$$

3.1.13. Одинична імпульсна дельта-функція Дірака $\delta(t)$ та її зображення

Розглянемо імпульсну функцію $\delta_h(t)$, яка задається рівністю

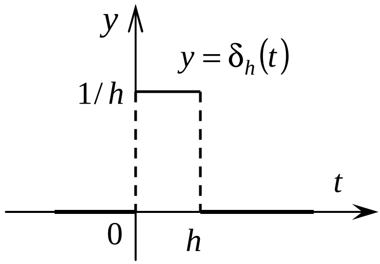

Рис. 62

$$\delta_h(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1/h\,, & 0<t<h;\\ 0, & t>h,\end{cases}$$

де $h>0$ – ширина імпульсу (рис. 62).

Співвідношення для $\delta_h(t)$ можна подати однією формулою за допомогою одиничної функції Хевісайда

$$\delta_h(t)=\frac{1}{h}\big(\eta(t)-\eta(t-h)\big)\ .$$

Знайдемо зображення цієї імпульсної функції $\delta_h(t)$:

$$\delta_h(t)\risingdotseq\frac{1}{h}\left(\frac{1}{p}-e^{-hp}\frac{1}{p}\right)=\frac{1-e^{-hp}}{ph}.$$

Одиничною імпульсною дельта-функцією Дірака $\delta(t)$ називається ***узагальнена функція***, яка визначається умовами:

$$1)\ \boxed{\delta(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ +\infty, & t=0;\\ 0, & t>0;\end{cases}}\qquad 2)\ \boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1}\,.$$

Дельта-функцію $\delta(t)$ можна розглядати як границю імпульсної функції $\delta_h(t)$ при $h\to 0$: $\delta(t)=\lim\limits_{h\to 0}\delta_h(t)$.

За зображення дельта-функції $\delta(t)$ природно взяти границю зображення імпульсної функції $\delta_h(t)$ при $h\to 0$

$$\delta(t) \doteqdot \lim_{h\to 0} L(\delta_h(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-hp}}{ph} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\left(1-e^{-hp}\right)' \big/ (ph)'\right) = \lim_{h\to 0}\frac{-e^{-hp}(-p)}{p} = 1.$$

Отже, $$\boxed{\delta(t) \doteqdot 1}.$$

<u>Зауваження 1</u>. (Фізичний зміст дельта-функції). З точки зору механіки дельта-функцію $\delta(t)$ можна трактувати як нескінченну силу, що діє миттєво і має одиничний імпульс.

<u>Зауваження 2</u>. Використовуючи означення $\delta(t)$ і формулу для зображення інтеграла від оригіналу, можна встановити зв'язок між одиничними функціями Дірака і Хевісайда:

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(u)\,du = \eta(t); \qquad \delta(t) = \frac{d\eta(t)}{dt}.$$

3.2. Обернення перетворення Лапласа. Відшукання оригіналу зображення, що має вигляд раціонального дробу

У загальному випадку, знаходження оригіналу $f(t)$ за його зображенням $F(p)$ – досить складна задача: ***загальна формула обернення*** передбачає обчислення комплексного інтеграла

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt}F(p)\,dp,$$

де інтегрування здійснюється вздовж вертикальної прямої в області збіжності оператора Лапласа.

Обмежимося лише розв'язуванням цієї задачі за допомогою таблиці 2 відповідності оригіналів та їх зображень. Розглянемо найбільш поширений випадок, коли зображення має вигляд раціонального дробу.

Правило. *Нехай необхідно знайти оригінал* $f(t)$ *для зображення* $F(p)$ *у вигляді раціонального дробу* $F(p)=P_m(p)/Q_n(p)$, *де* $P_m(p)$ *і* $Q_n(p)$ *– многочлени відповідно степеня* m *і* n.

Тоді:

1) *Якщо дріб неправильний* $(m \geq n)$, *то з нього треба виділити цілу частину*.

2) *Правильний дріб* $(m < n)$ *треба розкласти на суму елементарних дробів виду*

$$\frac{A}{(p-a)^k}\ ;\quad \frac{Bp+C}{(p^2+a_1p+a_2)^k}\ ;\quad k \geq 1\ ;\quad D=a_1^2-4a_2<0\ .$$

3) *Знайти оригінали для цілої частини і кожного елементарного дробу, скористатися властивістю лінійності перетворення Лапласа і знайти оригінал початкового дробу*.

4) *Спростити одержаний вираз*.

Приклад 1. Знайти оригінал за його зображенням:

$$F(p)=\frac{7p-1}{(p^2-4)(p^2+2p+5)}\ .$$

□ $$F(p)=\frac{7p-1}{(p-2)(p+2)(p^2+2p+5)}=\frac{A}{p-2}+\frac{B}{p+2}+$$

$$+\frac{Cp+D}{p^2+2p+5}=\Big|\ A(p+2)(p^2+2p+5)+B(p-2)\times$$

$$\times(p^2+2p+5)+(Cp+D)(p-2)(p+2)=7p-1\,;$$

$$\begin{array}{ll} p=2: & \\ p=-2: & \\ p^3: & \\ p^0: & \end{array}\left\{\begin{array}{l} 4\cdot 13A=13; \\ -4\cdot 5B=-15; \\ A+B+C=0; \\ 10A-10B-4D=-1; \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} A=1/4\,; \quad B=3/4\,; \\ 1/4+3/4+C=0; \quad C=-1; \\ 5/2-15/2-4D=-1; \; D=-1 \end{array}\right| = \frac{1/4}{p-2}+\frac{3/4}{p+2}+$$

$$+\frac{-1p-1}{p^2+2p+5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}-$$

$$-\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} \risingdotseq \frac{1}{4}e^{2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}-e^{-t}\cos 2t = f(t). \quad \blacksquare$$

Зауваження. В елементарному дробі з квадратним тричленом у знаменнику для спрощення наступного переходу до оригіналу можна спочатку виділити повний квадрат двочлена, а потім подати цей дріб у вигляді

$$\frac{A(p+a)+B}{\left((p+a)^2+b^2\right)^k}\,.$$

Приклад 2. Знайти оригінал за його зображенням:

$$F(p)=\frac{3p^2-8}{p^3-4p^2+8p}\,.$$

$$\square \quad F(p)=\frac{3p^2-8}{p(p^2-4p+8)}=\frac{3p^2-8}{p\left((p-2)^2+4\right)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B(p-2)+C}{(p-2)^2+4}=$$

$$=\Big| \; A\left((p-2)^2+4\right)+\left(B(p-2)+C\right)\right)p=3p^2-8\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} p=0: \\ p=2: \\ p^2: \end{array} \begin{cases} 8A=-8; & A=-1; \\ 4A+2C=4; & C=2-2A=4; \\ A+B=3; & B=3-A=4 \end{cases}\right| =$$

$$=\frac{-1}{p}+\frac{4(p-2)+4}{(p-2)^2+4}=-\frac{1}{p}+4\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+4}+$$

$$+2\cdot\frac{2}{(p-2)^2+4}\mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}}-1+4e^{2t}\cos 2t+2e^{2t}\sin 2t=f(t).\ \blacksquare$$

3.3. Операційний метод розв‘язування диференціальних рівнянь та їх систем

Загальна <u>схема методу</u> показана на рис.63. Застосування цієї схеми докладно розберемо на прикладах.

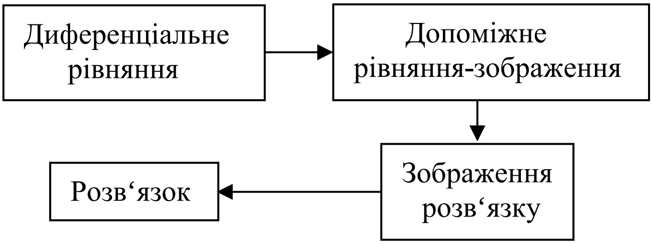

Рис. 63

<u>Приклад 1</u>. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку:

$$y'-4y=12t;\quad y(0)=0.$$

□ Нехай $y(t)\mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}}Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t)\mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}}pY(p)-y(0)=pY(p)\ ;\quad t\mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}}\frac{1}{p^2}\ .$$

Одержимо ***операторну форму*** диференціального рівняння

$$pY(p)-4Y(p)=12\cdot 1/p^2$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо його:

$$Y(p)(p-4)=\frac{12}{p^2}\ ;\quad Y(p)=\frac{12}{p^2(p-4)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p)=\frac{12}{p^2(p-4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p-4}=$$

$$=\Big|12=Ap(p-4)+B(p-4)+Cp^2\,;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=0: & \left\{\begin{array}{ll} -4B=12; & \qquad B=-3; \\ 16C=12; & \qquad C=3/4; \\ A+C=0; & \qquad A=-C=-3/4 \end{array}\right. \\ p=4: & \\ p^2: & \end{array}\right|=$$

$$=\frac{-3/4}{p}+\frac{-3}{p^2}+\frac{3/4}{p-4}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p}-3\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p-4}\doteqdot$$

$$\doteqdot-\frac{3}{4}\cdot 1-3t+\frac{3}{4}e^{4t}=\frac{3}{4}e^{4t}-3t-\frac{3}{4}=y(t)$$

– шуканий розв‘язок. ■

<u>Приклад 2</u>. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y''-4y'+4y=10e^t\sin 3t\,;\quad y(0)=1;\ \ y'(0)=0\,.$$

□ Нехай $y(t)\doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t)\doteqdot pY(p)-y(0)=pY(p)-1;\quad y''(t)\doteqdot p^2Y(p)-py(0)-$$

$$-y'(0)=p^2Y(p)-p\,;\quad e^t\sin 3t\doteqdot\frac{3}{(p-1)^2+3^2}=\frac{3}{p^2-2p+10}\,.$$

Одержимо

$$p^2Y(p)-p-4\big(pY(p)-1\big)+4Y(p)=10\cdot 3/(p^2-2p+10)$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння:

$$Y(p)\cdot\left(p^2-4p+4\right)=p-4+\frac{30}{p^2-2p+10}\,;$$

$$Y(p)\cdot(p-2)^2=\frac{p^3-2p^2+10p-4p^2+8p-40+30}{p^2-2p+10};$$

$$Y(p)=\frac{p^3-6p^2+18p-10}{(p-2)^2(p^2-2p+10)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p)=\frac{p^3-6p^2+18p-10}{(p-2)^2(p^2-2p+10)}=\frac{A}{(p-2)^2}+\frac{B}{p-2}+$$

$$+\frac{Cp+D}{p^2-2p+10}=\Big|\,A(p^2-2p+10)+B(p-2)(p^2-2p+10)+$$

$$+(Cp+D)(p-2)^2=p^3-6p^2+18p-10;$$

$$\begin{matrix} p=2: \\ p=0: \\ p=1: \\ p^3: \end{matrix}\begin{cases} 10A=10; \\ 10A-20B+4D=-10; \\ 9A-9B+C+D=3; \\ B+C=1; \end{cases}\qquad \begin{matrix} A=1; \\ \begin{cases} -20B+4D=-20; \\ -9B+C+D=-6; \\ C=1-B; \end{cases} \end{matrix}$$

$$-\begin{cases} -5B+D=-5; \\ -9B+1-B+D=-6; \end{cases}\qquad \begin{matrix} B=2/5; \\ D=5B-5=-3; \\ C=1-B=3/5 \end{matrix}\Bigg| =$$

$$5B-1=1\ ;$$

$$=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2/5}{p-2}+\frac{(3/5)p-3}{p^2-2p+10}=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+$$

$$+\frac{3}{5}\cdot\frac{p-5}{(p-1)^2+9}=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{p-1-4}{(p-1)^2+9}=$$

$$=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+9}-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{(p-1)^2+9}\ \dot{=}$$

$$\dot{=}\ te^{2t}+\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{3}{5}e^{t}\cos 3t-\frac{4}{5}e^{t}\sin 3t=y(t)$$

– шуканий розв‘язок. ■

Приклад 3. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y''+9y = 2\sin 3t \\ y(0) = 2;\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

□ Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p + 1 ;$$

$$\sin 3t \doteqdot \frac{3}{p^2+3^2} = \frac{3}{p^2+9} .$$

Одержимо $p^2Y(p) - 2p + 1 + 9Y(p) = 2\cdot 3/(p^2+9)$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо його:

$$Y(p)\cdot(p^2+9) = 2p - 1 + \frac{6}{p^2+9};$$

$$Y(p) = \frac{2p^3+18p-p^2-9+6}{(p^2+9)^2} = \frac{2p^3-p^2+18p-3}{(p^2+9)^2}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p) = \frac{Ap+B}{(p^2+9)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+9} = \Big|\, Ap+B+(Cp+D)(p^2+9) =$$

$$= 2p^3 - p^2 + 18p - 3;$$

$$Ap + B + Cp^3 + 9Cp + Dp^2 + 9D = 2p^3 - p^2 + 18p - 3;$$

$$\left.\begin{array}{l} p^3: \\ p^2: \\ p^1: \\ p^0: \end{array}\begin{cases} C = 2; \\ D = -1; \\ A + 9C = 18; \qquad A = 18 - 9C = 0; \\ B + 9D = -3; \qquad B = -3 - 9D = 6 \end{cases}\right| =$$

$$=\frac{0\cdot p+6}{(p^2+9)^2}+\frac{2p-1}{p^2+9}=6\cdot\frac{1}{(p^2+9)^2}+2\cdot\frac{p}{p^2+9}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}\doteqdot$$

$$\doteqdot 6\cdot\frac{1}{2\cdot 3^3}\cdot(\sin 3t-3t\cos 3t)+2\cos 3t-\frac{1}{3}\cdot\sin 3t=$$

$$=-\frac{2}{9}\sin 3t-\frac{1}{3}t\cos 3t+2\cos 3t=y(t)$$ – шуканий розв‘язок. ■

Приклад 4. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y''+2y'=4\sin 2t-3\delta(t);\quad y(0)=1;\ y'(0)=0\ .$$

□ Нехай $y(t)\doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t)\doteqdot pY(p)-y(0)=pY(p)-1;\quad y''(t)\doteqdot p^2Y(p)-py(0)-$$

$$-y'(0)=p^2Y(p)-p;\quad \sin 2t\doteqdot\frac{2}{p^2+4};\quad \delta(t)\doteqdot 1.$$

Одержимо $p^2Y(p)-p+2\left(pY(p)-1\right)=4\cdot\dfrac{2}{p^2+4}-3\cdot 1$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння:

$$Y(p)\cdot(p^2+2p)=p+2+\frac{8}{p^2+4}-3;\quad Y(p)=\frac{p^3-p^2+4p+4}{(p^2+2p)(p^2+4)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p)=\frac{p^3-p^2+4p+4}{p(p+2)(p^2+4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+2}+\frac{Cp+D}{p^2+4}=$$

$$=\Big|\ A(p+2)(p^2+4)+Bp(p^2+4)+(Cp+D)\,p(p+2)=$$

$$=p^3-p^2+4p+4;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=0: & \left\{\begin{array}{ll} 8A=4; & A=1/2; \\ -16B=-16; & B=1; \\ A+B+C=1; & C=-1/2; \\ 5A-5B+C-D=-2; & D=-1 \end{array}\right. \\ p=-2: & \\ p^3: & \\ p=-1: & \end{array}\right| =$$

$$=\frac{1/2}{p}+\frac{1}{p+2}+\frac{(-1/2)p-1}{p^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2} \risingdotseq \frac{1}{2}+e^{-2t}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t=y(t)$$

– шуканий розв‘язок. ■

Приклад 5. Розв‘язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

а) $\begin{cases} x'=x+4y-2e^t; \\ y'=y-x+5; \end{cases}$ $\quad x(0)=0$; $\quad y(0)=-2$;

б) $\begin{cases} x'=2x+3y; \\ y'=2x+y-50\sin 2t; \end{cases}$ $\quad x(0)=0$; $\quad y(0)=0$.

□ а) Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$; $y(t)\risingdotseq Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв’язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень:

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p);$$

$$y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)+2;\quad e^t\risingdotseq\frac{1}{p-1};\quad 1\risingdotseq\frac{1}{p}.$$

Дістанемо операторну форму диференціальної системи

$$\begin{cases} pX(p)=X(p)+4Y(p)-2/(p-1) \\ pY(p)+2=Y(p)-X(p)+5/p \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв’яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, за формулами Крамера:

$$\begin{cases}(p-1)\cdot X(p)-4Y(p)=-2/(p-1)\\ X(p)+(p-1)\cdot Y(p)=(-2p+5)/p\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}p-1 & -4\\ 1 & p-1\end{vmatrix}=(p-1)^2+4\,;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}-2/(p-1) & -4\\ (-2p+5)/p & p-1\end{vmatrix}=$$

$$=-2+\frac{-8p+20}{p}=\frac{-10p+20}{p}\,;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}p-1 & -2/(p-1)\\ 1 & (-2p+5)/p\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{(p-1)(-2p+5)}{p}+\frac{2}{p-1}=\frac{-2p^3+9p^2-12p+5}{p(p-1)}\,;$$

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-10p+20}{p\left((p-1)^2+4\right)}\,;$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-2p^3+9p^2-12p+5}{p(p-1)\left((p-1)^2+4\right)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$X(p)=\frac{-10p+20}{p\left((p-1)^2+4\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B(p-1)+C}{(p-1)^2+4}=$$

$$=\Big|\ A\left((p-1)^2+4\right)+(B(p-1)+C)\,p=-10p+20\,;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=0: & \begin{cases}5A=20; & A=4;\\ 4A+C=10; & C=10-4A=-6;\\ A+B=0; & B=-A=-4\end{cases}\\ p=1: & \\ p^2: & \end{array}\right|=$$

$$=\frac{4}{p}+\frac{-4(p-1)-6}{(p-1)^2+4}=4\cdot\frac{1}{p}-4\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+4}-$$

$$-3\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4}\ \risingdotseq\ 4\cdot 1-4e^t\cos 2t-3e^t\sin 2t=x(t)\,;$$

$$Y(p)=\frac{-2p^3+9p^2-12p+5}{p(p-1)\left((p-1)^2+4\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C(p-1)+D}{(p-1)^2+4}=$$

$$= \Big| \, A(p-1)\left((p-1)^2+4\right)+Bp\left((p-1)^2+4\right)+$$

$$+(C(p-1)+D)\,p\,(p-1)=-2p^3+9p^2-12p+5 \;;$$

$$\begin{array}{l} p=0: \\ p=1: \\ p^3: \\ p=2: \end{array} \begin{cases} -5A=5; & A=-1;\ B=0; \\ 4B=0; & C=-2-A-B=-1; \\ A+B+C=-2; & -5-2+2D=-17; \\ 5A+10B+2C+2D=-17; & D=-5 \end{cases} \Bigg| =$$

$$=\frac{-1}{p}+\frac{0}{p-1}+\frac{-(p-1)-5}{(p-1)^2+4}=-\frac{1}{p}-\frac{p-1}{(p-1)^2+4}-$$

$$-\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4} \doteqdot -1-e^t\cos 2t-\frac{5}{2}\,e^t\sin 2t=y(t)\,.$$

Отже, $\begin{cases} x(t)=4-4e^t\cos 2t-3e^t\sin 2t\;; \\ y(t)=-1-e^t\cos 2t-(5/2)\,e^t\sin 2t \end{cases}$

– шуканий розв‘язок.

(Задачу б) розв’язати самостійно. Відповідь:

$$\begin{cases} x(t)=-9\cos 2t+12\sin 2t+12e^{-t}-3e^{4t}; \\ y(t)=14\cos 2t-2\sin 2t-12e^{-t}-2e^{4t} \end{cases}$$

– шуканий розв‘язок.) ■

<u>Зауваження</u>. Крім диференціальних рівнянь, що включають похідні невідомої функції, для математичного моделювання різних явищ використовуються також інші споріднені з ними рівняння. Зокрема, ***інтегральні рівняння***, що містять інтеграли від невідомої функції, а також ***інтегро-диференціальні рівняння***, в яких невідома функція входить як під знак похідної, так і під знак інтеграла.

<u>Приклад 6</u>. Знайти частинний розв‘язок інтегро-диференціального рівняння $y'+2y-3\int_0^t y(u)\,du=4e^{-3t}$, який задовольняє початковій умові $y(0)=1$.

□ Нехай $y(t) \doteqdot Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегро-диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p) - 1;$$

$$\int_0^t y(u)\,du \doteqdot \frac{1}{p}Y(p); \qquad e^{-3t} \doteqdot \frac{1}{p+3}.$$

Одержимо $pY(p) - 1 + 2Y(p) - 3\cdot\frac{1}{p}Y(p) = 4\cdot\frac{1}{p+3}$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо його:

$$(p^2+2p-3)\cdot Y(p) = p + \frac{4p}{p+3}; \;\; Y(p) = \frac{p^2+7p}{(p+3)(p^2+2p-3)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p) = \frac{p^2+7p}{(p+3)(p^2+2p-3)} = \Big|\, p^2+2p-3=0; \;\; p_1 = 1;$$

$$p_2 = -3; \; p^2+2p-3 = (p-1)(p+3)\,\Big| = \frac{p^2+7p}{(p-1)(p+3)^2} =$$

$$= \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p+3)^2} + \frac{C}{p+3} = \Big|\, A(p+3)^2 + B(p-1) +$$

$$+ C(p-1)(p+3) = p^2 + 7p;$$

$$\begin{array}{l} p=1: \\ p=-3: \\ p^2: \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} 16A = 8; & A = 1/2; \\ -4B = -12; & B = 3; \\ A + C = 1; & C = 1 - A = 1/2 \end{array} \right. \Bigg| = \frac{1/2}{p-1} +$$

$$+ \frac{3}{(p+3)^2} + \frac{1/2}{p+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1} + 3\cdot\frac{1}{(p+3)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3} \doteqdot$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2}\,e^{t} + 3t\,e^{-3t} + \frac{1}{2}\,e^{-3t} = y(t)$$ – шуканий розв‘язок. ■

3.4. Застосування операційного числення для розв'язування задач електротехнічного змісту

Математичними моделями перехідних процесів у електричних ланцюгах служать диференціальні та споріднені з ними (інтегральні, інтегро-диференціальні, скінченно-різницеві і т. п.) рівняння. При складанні таких рівнянь звичайно користуються першим та другим законами Кірхгофа.

Перший закон Кірхгофа: *алгебраїчна сума всіх струмів, що протікають в довільній точці ланцюга, дорівнює нулю.*

Другий закон Кірхгофа: *для кожного замкнутого контуру алгебраїчна сума падінь напруги в окремих гілках дорівнює нулю.*

У довільний момент часу t перехідного процесу для активного опору R, індуктивності L, ємності C справедливі наступні співвідношення, що зв’язують падіння напруги на кінцях елемента $u(t)$ та силу струму в ньому $i(t)$:

$$u_R(t) = R\,i_R(t);\;\; u_L(t) = L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt};\;\; u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt + u_C(0),$$

де $u_C(0)$ – падіння напруги на ємності в початковий момент часу $t = 0$.

Приклад 1. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R та індуктивності L (рис. 64). Знайти закон зміни сили струму $i(t)$ в контурі при його відключенні від джерела зі сталою електрорушійною силою E і закороченні ланцюга в початковий момент часу $t = 0$ (перемикач K переводиться при $t = 0$ із положення A в положення B).

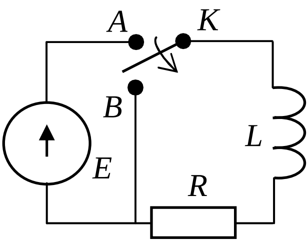

Рис. 64

□ Нехай $i(t) \risingdotseq I(p)$ – шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. У момент перемикання $t = 0$ за законом Ома сила струму $i(0) = E/R$.

Після перемикання за другим законом Кірхгофа

$$L\,di/dt + Ri = 0.$$

Перейдемо в одержаному ДР до зображень:

$$\frac{di}{dt} \doteqdot p\,I(p) - i(0) = p\,I(p) - E/R; \quad L(p\,I(p) - E/R) + RI(p) = 0$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо його:

$$(Lp + R)I(p) = \frac{LE}{R}; \qquad I(p) = \frac{LE/R}{Lp + R}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$I(p) = \frac{LE/R}{Lp + R} = \frac{E}{R} \times \frac{1}{p + R/L} \doteqdot \frac{E}{R} e^{-(R/L)t} = i(t)$$

– шуканий закон зміни сили струму в контурі. ■

<u>Приклад 2</u>. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R, індуктивності L і ємності C (рис. 65). Знайти закон зміни сили струму в контурі при його підключенні в початковий момент часу $t = 0$ до джерела зі сталою електрорушійною силою E (перемикач K переводиться при $t = 0$ з положення B у положення A).

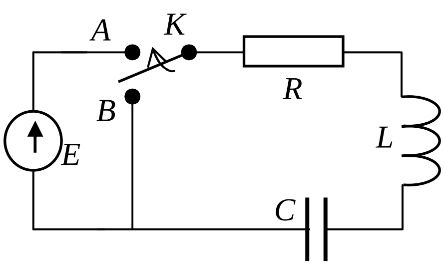

Рис. 65

□ Нехай $i(t) \doteqdot I(p)$ – шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. У початковий момент $t = 0$ сила струму і початкова напруга на обкладинках конденсатора дорівнюють нулю

$$i(0) = 0; \quad u_C(0) = 0.$$

Тоді згідно з другим законом Кірхгофа

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(z)\,dz = E\ .$$

Перейдемо в обох частинах одержаного інтегро-диференціального рівняння до зображень:

$$\frac{di}{dt} \risingdotseq pI(p) - i(0) = pI(p);\ \int_0^t i(z)\,dz \risingdotseq \frac{1}{p}I(p);\ 1 \risingdotseq \frac{1}{p};$$

$$RI(p) + LpI(p) + (1/C)\cdot(1/p)I(p) = E\cdot(1/p)$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння:

$$CRpI(p) + CLp^2 I(p) + I(p) = CE\ ;$$

$$I(p) = \frac{CE}{CLp^2 + CRp + 1} = \frac{E/L}{p^2 + (R/L)p + 1/(CL)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал.

Обмежимося найважливішим для практики випадком малого опору R і введемо позначення:

$\alpha = R/(2L)$ – коефіцієнт затухання; $\omega_0 = \sqrt{1/(LC)}$ – власна кругова частота, яку мав би контур при відсутності активного опору $(R = 0)$; $\omega = \sqrt{1/(LC) - (R/(2L))^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ – кругова частота контура. Припускаємо, що $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 > 0$ (опір R малий).

Тоді

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL} = p^2 + \frac{R}{2L}p + \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} =$$

$$= p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + {\omega_0}^2 - \alpha^2 = (p + \alpha)^2 + \omega^2;$$

$$I(p) = \frac{E}{L\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2} \risingdotseq \frac{E}{L\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t = i(t)$$

– шуканий закон зміни сили струму в контурі. ■

Приклад 3. Два однакових контури, кожний з яких складається з послідовно сполучених активного опору R, індуктивності L і ємності C, зв’язані взаємною індукцією M (рис. 66). Знайти закон зміни сили струму в першому $i_1(t)$ та другому $i_2(t)$ контурі при умові, що другий контур закорочений, а перший контур у початковий момент часу $t=0$ підключається до джерела зі сталою електрорушійною силою E (перемикач K переводиться при $t=0$ з положення B в положення A). Вважати індукційний зв'язок ідеальним, при якому $M=L$.

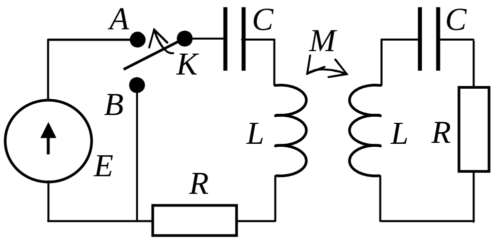

Рис. 66

□ Нехай

$$i_1(t) \risingdotseq I_1(p),$$

$$i_2(t) \risingdotseq I_2(p)$$

– шукані закони зміни сили струму (оригінали) і відповідні зображення. У початковий момент $t=0$ обидва контури закорочені, тому початкова сила струму і початкова напруга на обкладинках конденсаторів дорівнюють нулю:

$$i_1(0)=0;\ \ u_{C1}(0)=0;\ \ i_2(0)=0;\ \ u_{C2}(0)=0.$$

Застосовуючи другий закон Кірхгофа до кожного з контурів, одержимо інтегро-диференціальну систему

$$\begin{cases} Ri_1 + L\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1(z)\,dz + M\,\dfrac{di_2}{dt} = E; \\ Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_2(z)\,dz + M\,\dfrac{di_1}{dt} = 0. \end{cases}$$

Враховуючи умову $M=L$, маємо

$$\begin{cases} Ri_1 + L\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1(z)\,dz + L\dfrac{di_2}{dt} = E; \\ Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_2(z)\,dz + L\dfrac{di_1}{dt} = 0. \end{cases}$$

Перейдемо в обох частинах одержаної інтегро-диференціальної системи до зображень:

$$\frac{di_1}{dt} \risingdotseq p\,I_1(p) - i_1(0) = p\,I_1(p); \;\; \int_0^t i_1(z)\,dz \risingdotseq \frac{1}{p} I_1(p);$$

$$\frac{di_2}{dt} \risingdotseq p\,I_2(p) - i_2(0) = p\,I_2(p); \;\; \int_0^t i_2(z)\,dz \risingdotseq \frac{1}{p} I_2(p); \;\; 1 \risingdotseq \frac{1}{p};$$

$$\begin{cases} R\,I_1(p) + Lp\,I_1(p) + \dfrac{1}{Cp}\,I_1(p) + Lp\,I_2(p) = E \cdot \dfrac{1}{p}; \\ R\,I_2(p) + Lp\,I_2(p) + \dfrac{1}{Cp}\,I_2(p) + Lp\,I_1(p) = 0 \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв’яжемо цю лінійну алгебраїчну систему за формулами Крамера:

$$\begin{cases} \left(LCp^2 + RCp + 1\right) I_1(p) + LCp^2\, I_2(p) = EC; \\ LCp^2\, I_1(p) + \left(LCp^2 + RCp + 1\right) I_2(p) = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} LCp^2 + RCp + 1 & LCp^2 \\ LCp^2 & LCp^2 + RCp + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (RCp + 1)\left(2LCp^2 + RCp + 1\right) =$$

$$= 2RC^2L\,\left(p + 1/(RC)\right)\left(p^2 + (R/(2L))\,p + 1/(2LC)\right);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} EC & LCp^2 \\ 0 & LCp^2 + RCp + 1 \end{vmatrix} = 2RC^2L\,\left(\frac{E}{2R}\,p^2 + \frac{E}{2L}\,p + \right.$$

$$\left. + \frac{E}{2RCL}\right); \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} LCp^2 + RCp + 1 & EC \\ LCp^2 & 0 \end{vmatrix} = -EC^2Lp^2;$$

$$I_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(E/(2R))\,p^2 + (E/(2L))\,p + E/(2RCL)}{\left(p + 1/(RC)\right)\left(p^2 + (R/(2L))\,p + 1/(2LC)\right)};$$

$$I_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{(E/(2R))\,p^2}{\left(p + 1/(RC)\right)\left(p^2 + (R/(2L))\,p + 1/(2LC)\right)}$$

– зображення шуканих сил струму. Знайдемо відповідні оригінали.

Введемо позначення:

$$\frac{1}{RC}=\alpha\,; \quad \frac{R}{4L}=\beta\,; \quad \frac{1}{2LC}-\frac{R^2}{16L^2}=\omega^2>0\ .$$

Тоді

$$p^2+(R/(2L))p+1/(2LC)=\left(p^2+2\cdot(R/(4L))p+\right.$$

$$\left.+(R/(4L))^2\right)+\left(1/(2LC)-(R/(4L))^2\right)=(p+\beta)^2+\omega^2\,;$$

$$I_1(p)=\frac{(E/(2R))p^2+(E/(2L))p+E/(2RCL)}{(p+\alpha)\left((p+\beta)^2+\omega^2\right)}=\frac{E/(2R)}{p+\alpha}+$$

$$\frac{E/(4L)}{(p+\beta)^2+\omega^2}=\frac{E}{2R}\cdot\frac{1}{p+\alpha}+\frac{E}{4L\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+\beta)^2+\omega^2}\ \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{E}{2R}\ e^{-\alpha t}+\frac{E}{4L\omega}\ e^{-\beta t}\ \sin\omega t=i_1(t);$$

$$I_2(p)=-\frac{(E/(2R))\,p^2}{(p+\alpha)\left((p+\beta)^2+\omega^2\right)}=-\ \frac{E/(2R)}{p+\alpha}+$$

$$\frac{E/(4L)}{(p+\beta)^2+\omega^2}=-\ \frac{E}{2R}\cdot\frac{1}{p+\alpha}+\frac{E}{4L\omega}\cdot\frac{\omega}{(p+\beta)^2+\omega^2}\ \risingdotseq$$

$$\risingdotseq -\ \frac{E}{2R}\ e^{-\alpha t}+\frac{E}{4L\omega}\ e^{-\beta t}\ \sin\omega t=i_2(t).$$

Отже, шукані закони зміни сили струму

$$i_1(t)=\left(E/(2R)\right)e^{-\alpha t}+\left(E/(4L\omega)\right)e^{-\beta t}\ \sin\omega t\,;$$

$$i_2(t)=-\left(E/(2R)\right)e^{-\alpha t}+\left(E/(4L\omega)\right)e^{-\beta t}\ \sin\omega t\ . \quad \blacksquare$$

Зауваження. У багатьох випадках, зокрема, коли неможливе вимірювання внутрішніх змінних або невідомі закони протікання процесів, математичне моделювання здійснюється на основі дослідження зовнішньої поведінки системи у термінах “вхід – вихід”.

Передаточною функцією системи $W(p)$ називається відношення зображень вихідної $Y(p)$ і вхідної $U(p)$ змінних при нульових початкових умовах

$$W(p)=Y(p)/U(p)\ .$$

Метод дослідження і проектування систем за допомогою передаточної та зв'язаних з нею функцій є одним з основних у теорії автоматичного керування.

<u>Приклад 4</u>. На рис. 67 зображена аперіодична ланка у вигляді електричного ланцюга, що складається з активних опорів R_1, R_2 та індуктивності L. Знайти передаточну функцію $W(p)$ цієї системи.

□ Така система описується ДР першого порядку

$$T\frac{dy}{dt}+y=ku\,,$$

де $u=u_1(t)$ і $y=u_2(t)$ – відповідно вхідна та вихідна змінні (напруги на вході та виході); T, k – сталі коефіцієнти (T – стала часу, k – коефіцієнт підсилення). При цьому

$$T=L/(R_1+R_2);\quad k=R_2/(R_1+R_2).$$

Перейдемо до зображень за Лапласом при нульових початкових умовах:

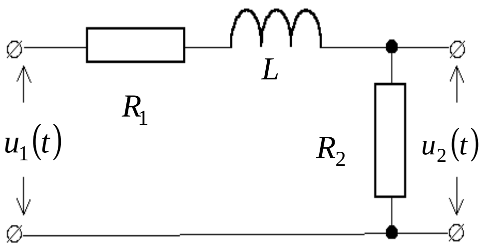

Рис. 67

$$u(t)\doteqdot U(p)\ ;$$

$$y(t)\doteqdot Y(p)\ ;$$

$$\frac{dy}{dt}\doteqdot pY(p).$$

Одержимо операторну форму рівняння динаміки аперіодичної ланки $(Tp+1)Y(p)=kU(p)$. Звідси

$$Y(p)=\left(k/(Tp+1)\right)U(p);\ \ W(p)=Y(p)/U(p)=k/(Tp+1)$$

– передаточна функція аперіодичної ланки. ■

3.5. Функціонал та його варіація. Екстремум

3.5.1. Поняття про функціонал

Нехай задано деякий клас D функцій $y(x)$. Якщо кожній функції $y(x)$ із класу D за деяким законом ставиться у відповідність певне числове значення змінної I, то ця змінна I називається ***функціоналом від однієї функціональної змінної*** $y(x)$ і позначається $I = I[y] = I[y(x)]$.

Клас D функцій $y(x)$, на яких визначений функціонал, називається ***областю визначення*** функціоналу. При цьому функція $y(x)$ служить ***незалежною змінною (аргументом)*** функціоналу. Функції із області визначення D даного функціоналу I називаються ***функціями порівняння*** або ***допустимими функціями***.

Кожну функцію $y(x)$, яка належить області визначення D функціоналу $I[y]$, можна розглядати як точку (елемент) деякої множини (простору) функцій. Простори, елементами яких служать функції, називаються ***функціональними просторами***.

Функціонал – це відображення, при якому значеннями незалежної змінної $y(x)$ є точки функціонального простору, а значеннями залежної змінної I – числа.

Приклади функціоналів: значення функції в точці, границя функції, визначений інтеграл від функції.

Розглядаються також функціонали від кількох незалежних функціональних змінних. Якщо скінченному набору функцій $y_1(x)$, $y_2(x),\ldots,y_n(x)$ з певного класу D ставиться у відповідність за деяким законом певне числове значення змінної I, то I називається ***функціоналом від*** n ***функціональних змінних*** і позначається $I = I[y_1, y_2,\ldots, y_n] = I[y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)]$.

Приклад 1. Обчислити заданий функціонал при вказаних значеннях аргументу:

а) $I[y] = y(8)$; $y_1 = \sqrt[3]{x}$; $y_2 = tg\,(\pi x/32)$.

б) $I[y] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x}$; $y_1 = \sin x$; $y_2 = x e^{-x}$.

в) $I[y] = y'(\pi)$; $y_1 = \cos^2 x$; $y_2 = \sin x^3$.

г) $I[y] = \int\limits_0^{1/2} \frac{xy'}{\sqrt{1-y^2}} dx$; $y_1 = x$; $y_2 = \cos x$.

д) $I[y,z] = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{e^y z^3}{\sin^2 x} dx$; $y_1 = \cos x$; $z_1 = \sin x$.

□ а) $I[y_1] = \sqrt[3]{8} = 2$; $I[y_2] = tg\frac{\pi \cdot 8}{32} = 1$.

б) $I[y_1] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$; $I[y_2] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x e^{-x}}{x} = 0$.

в) $I[y_1] = (\cos^2 x)'\Big|_{x=\pi} = (-2\cos x \sin x)\Big|_{x=\pi} = 0$;

$I[y_2] = (\sin x^3)'\Big|_{x=\pi} = \left(\cos x^3 \cdot 3x^2\right)\Big|_{x=\pi} = 3\pi^2 \cos \pi^3$.

г) $I[y_1] = \int\limits_0^{1/2} \frac{x \cdot 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(-\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2}\right)\Bigg|_0^{1/2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$I[y_2] = \int\limits_0^{1/2} \frac{x \cdot (-\sin x)}{\sqrt{1-\cos^2 x}} dx = -\int\limits_0^{1/2} x\, dx = -\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{1/2} = -\frac{1}{8}$.

д) $I[y_1, z_1] = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{e^{\cos x} \sin^3 x}{\sin^2 x} dx = \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\cos x} \sin x\, dx =$

$$= -e^{\cos x}\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = -1 + e^{1/2}. \quad ■$$

<u>Зауваження</u>. Надалі будемо розглядати, в основному, функціонал у вигляді визначеного інтеграла $I[y] = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$, допустимими для якого служать функції класу $C_1[a;b]$, що визначені та неперервні разом з першою похідною на відрізку $[a;b]$, тобто, гладкі на відрізку $[a;b]$.

3.5.2. Екстремум функціоналу

Відстанню нульового порядку між функціями (лініями) $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $\boxed{\rho_0 = \rho_0(y_1, y_2) = \max\limits_{a \le x \le b} |y_1(x) - y_2(x)|}$. При цьому вважається, що розглядувані функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$.

Відстанню першого порядку між функціями (лініями) $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число

$$\boxed{\rho_1 = \rho_1(y_1, y_2) = \max\limits_{a \le x \le b} |y_1(x) - y_2(x)| + \max\limits_{a \le x \le b} |y'_1(x) - y'_2(x)|}\ .$$

При цьому вважається, що функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні разом зі своїми першими похідними на відрізку $[a;b]$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти відстань першого порядку між кривими $y = y_1(x) = x^2/2$ і $y = y_2(x) = x^3/3$ на відрізку $[0;2]$.

□ $\rho_1 = \max\limits_{0 \le x \le 2} |y_1(x) - y_2(x)| + \max\limits_{0 \le x \le 2} |y'_1(x) - y'_2(x)|$.

Розглянемо функції $z_0(x) = y_1(x) - y_2(x) = x^2/2 - x^3/3$ і $z_1(x) = y'_1(x) - y'_2(x) = x - x^2$. Знайдемо їх найбільші та найменші значення на відрізку $[0;2]$:

$$z'_0(x) = x - x^2 = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ z_0(0) = 0;\ z_0(1) = 1/6;$$

$$z_0(2) = -2/3;\ \max\limits_{0 \le x \le 2} z_0(x) = 1/6;\ \min\limits_{0 \le x \le 2} z_0(x) = -2/3;$$

$$z'_1(x) = 1 - 2x = 0;\ x_1 = 1/2;\ z_1(1/2) = 1/4;\ z_1(0) = 0;$$

$$z_1(2) = -2;\ \max\limits_{0 \le x \le 2} z_1(x) = 1/4;\ \min\limits_{0 \le x \le 2} z_1(x) = -2.$$

Тоді $\max\limits_{0 \le x \le 2} |y_1(x) - y_2(x)| = \max\limits_{0 \le x \le 2} |z_0(x)| = 2/3;$

$$\max\limits_{0 \le x \le 2} |y'_1(x) - y'_2(x)| = \max\limits_{0 \le x \le 2} |z_1(x)| = 2;\ \rho_1 = \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}.\ \blacksquare$$

Нехай D_1 – деякий клас функцій порівняння (підмножина області визначення D) функціоналу $I = I[y]$. Функціонал $I = I[y]$ має в цьому класі D_1 ***абсолютний мінімум (максимум)***, який реалізується функцією $\overline{y}(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$ виконується нерівність

$$I[y(x)] \geq I[\overline{y}(x)] \quad \left(I[y(x)] \leq I[\overline{y}(x)]\right).$$

Функціонал $I = I[y]$ має в класі D_1 ***локальний або відносний мінімум (максимум)***, який реалізується функцією $y_0(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$, яка близька до функції $y_0(x)$, виконується нерівність

$$I[y(x)] \geq I[y_0(x)] \quad \left(I[y(x)] \leq I[y_0(x)]\right).$$

Максимуми і мінімуми називаються ***екстремумами***.

Якщо близькість функцій розуміється в сенсі відстані нульового порядку, тобто $\rho_0(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – досить мале число, то такий відносний екстремум називається ***сильним***.

Якщо близькість функцій розуміється в сенсі відстані першого порядку, тобто $\rho_1(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – досить мале число, то такий відносний екстремум називається ***слабким***.

На рис. 68 зображені лінії, близькі в сенсі відстані нульового порядку (координати їх близькі, а напрямки дотичних можуть суттєво відрізнятись), а на рис. 69 наведені криві, близькі в сенсі відстані першого порядку (близькі не тільки їх координати, а і напрямки дотичних).

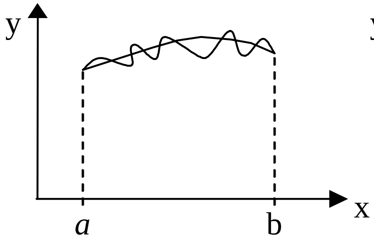

Рис. 68

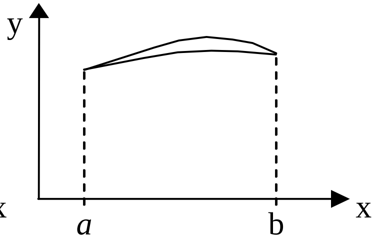

Рис. 69