ртанням дуги параболи $y=x^2$, $x\in[0;2]$ навколо осі Oy.

□ З рівняння параболи $x=x(y)=\sqrt{y}$, $y\in[0;4]$. Тоді

$$V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{y}\right)^2dy=\pi(y^2/2)\Big|_0^4=8\pi \text{ (куб.од.).} \ \blacksquare$$

<u>Зауваження 2</u>. Коли криві, що обмежують плоску область D, обертанням якої утворюється тіло T, задані параметрично або в полярних координатах, то треба перейти до прямокутних координат і в інтегралі застосувати заміну змінної.

<u>Приклад 5</u>. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням криволінійної трапеції, обмеженої дугою циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0;\pi/2]$, прямою $x=a(\pi/2-1)$ і віссю Ox, навколо осі Ox.

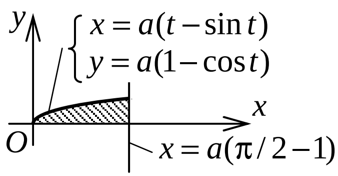

Рис. 37

□ Фігура, обертанням якої утворюється тіло, зображена на рис. 37. Проведемо обчислення:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\Big|x=x(t);\ y=y(t);\ dx=x'(t)\,dt\Big|=$$

$$=\pi\int_{t_1}^{t_2}y^2(t)\,x'(t)\,dt=$$

$$=\Big|\ x=a\,(t-\sin t);\ \ dx=a\,(1-\cos t)\,dt;\ \ y=a\,(1-\cos t);$$

$$t_1=0;\ t_2=\pi/2\,\Big|=\pi\int_0^{\pi/2}a^2(1-\cos t)^2a(1-\cos t)\,dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{\pi/2}(1-\cos t)^3dt=\pi a^3\int_0^{\pi/2}(1-3\cos t+3\cos^2 t-$$

$$-\cos^3 t)\,dt=\pi a^3\int_0^{\pi/2}(1-3\cos t+(3/2)(1+\cos 2t)-$$

$$-(1-\sin^2 t)\cos t\,)\,dt=\pi a^3\Big[\Big(t-3\sin t+(3/2)t+(3/4)\sin 2t-$$

$$-\sin t+(1/3)\sin^3 t\Big)\Big|_0^{\pi/2}\Big]=(15\pi-44)\pi a^3/12 \ \text{ (куб.од.).} \ \blacksquare$$

Приклад 6. Кардіоїда $\rho = a(1-\cos\varphi)$ обертається навколо полярної осі. Знайти об'єм тіла обертання.

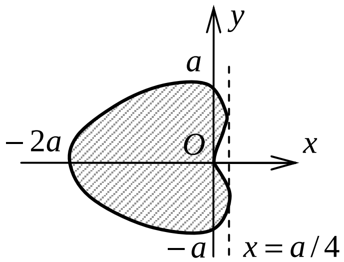

Рис. 38

□ Задана кардіоїда зображена на рис. 38. Скористаємося формулами зв'язку між прямокутними і полярними координатами і зробимо заміну змінної:

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \Big| \; x = x(\varphi) =$$

$$= \rho(\varphi)\cos\varphi; \; y = y(\varphi) = \rho(\varphi)\times$$

$$\times\sin\varphi; \; dx = x'(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= (\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi)\,d\varphi \Big| = \pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y^2(\varphi)\,x'(\varphi)\,d\varphi.$$

Проведемо обчислення:

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi = a(1-\cos\varphi)\cos\varphi = a(\cos\varphi - \cos^2\varphi)\,;$$

$$y = \rho(\varphi)\sin\varphi = a(1-\cos\varphi)\sin\varphi\,; \quad x' = a(-\sin\varphi +$$

$$+ 2\cos\varphi\sin\varphi) = a(2\cos\varphi - 1)\sin\varphi\,;$$

$$V = \pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y^2(\varphi)\,x'(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \pi\int_{\pi}^{0}(a(1-\cos\varphi)\sin\varphi)^2 a(2\cos\varphi - 1)\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \pi a^3\int_{\pi}^{0}\sin^2\varphi(1-\cos\varphi)(2\cos\varphi-1)\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \Big| u = \cos\varphi; \quad du = -\sin\varphi\,d\varphi; \; u_1 = \cos\pi = -1; \; u_2 = \cos 0 = 1;$$

$$\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi = 1-u^2 \Big| = -\pi a^3\int_{-1}^{1}(1-u^2)(1-u)(2u-1)\,du =$$

$$= -\pi a^3\int_{-1}^{1}(2u^5 + 5u^4 - 2u^3 - 4u^2 + 4u - 1)\,du = -\pi a^3(u^6/3 + u^5 -$$

$$- u^4/2 - 4u^3/3 + 2u^2 - u)\Big|_{-1}^{1} = -\pi a^3(1/3 + 1 - 1/2 - 4/3 + 2 - 1 -$$

$$-1/3 + 1 + 1/2 - 4/3 - 2 - 1) = 8\pi a^3/3 \quad \text{(куб.од.).} \; ■$$

1.4.5. Площа поверхні обертання

Нехай плоска гладка дуга L_{AB} є графіком невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $y = y(x) \ge 0$, що неперервна разом зі своєю похідною на цьому відрізку. Треба знайти площу S поверхні, утвореної обертанням дуги L_{AB} навколо осі Ox (рис. 39).

Перетнемо поверхню обертання двома площинами, що проходять через досить близькі точки x та $x+dx$, паралельно координатній площині Oyz. Наближено замінимо утворену між перерізами елементарну фігуру зрізаним конусом, твірна якого $dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$, а радіуси основ $y(x)$ та $y(x+dx)$. Якщо висота конуса dx нескінченно мала, то площа dS бічної поверхні цієї фігури дорівнює площі бічної поверхні зрізаного конуса, тобто маємо диференціал площі

$$dS = 2\pi\, y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

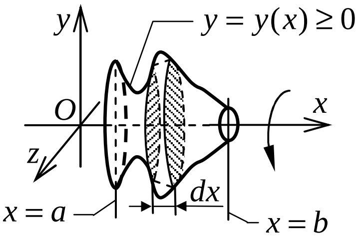

Рис. 39

Інтегруючи, знайдемо всю площу поверхні обертання:

$$\boxed{S = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}\,.$$

Приклад 1. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням дуги параболи $y^2 = 2px$ $(0 \le x \le 2p$; $p > 0)$ навколо осі Ox.

□ Спочатку рівняння дуги параболи запишемо у явному вигляді, виразивши y через x: $y = \sqrt{2px}$. Потім знайдемо похідну: $y' = \sqrt{p/(2x)}$. Далі обчислимо площу:

$$S = 2\pi\int\limits_0^{2p}\sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\left(\sqrt{p/(2x)}\,\right)^2}\,dx = 2\pi\sqrt{p}\,\times$$

$$\times\int_0^{2p}\sqrt{2x+p}\,\,dx = \pi\sqrt{p}\cdot(2/3)(2x+p)^{3/2}\Big|_0^{2p} =$$

$$= (2\pi/3)\left[5p^2\sqrt{5} - p^2\right] = (2\pi/3)\left[5\sqrt{5} - 1\right] p^2 \text{ (кв. од.).} \ \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти площу поверхні тора, утвореного обертанням кола $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ $(0 < r \le R)$ навколо осі Ox. (Форму тора має, наприклад, бублик).

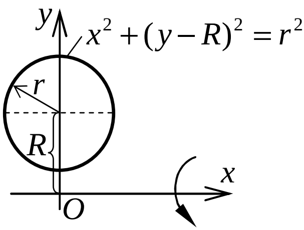

Рис. 40

□ Задане коло зображене на рис. 40. Шукану площу S поверхні тора можна знайти як суму $S = S_1 + S_2$ площ двох поверхонь, утворених обертанням відповідно нижнього $y = y_1(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ і верхнього $y = y_2(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ півкіл $\left(-r \le x \le r\right)$. Проведемо обчислення:

$$y_1'(x) = -x\Big/\sqrt{r^2 - x^2}\,; \quad y_2'(x) = x\Big/\sqrt{r^2 - x^2}\,; \quad S = S_1 + S_2 =$$

$$= 2\pi\int_{-r}^{r}\left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)\sqrt{1 + \left(-x\Big/\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2}\,dx + 2\pi\int_{-r}^{r}\left(R +\right.$$

$$\left. + \sqrt{r^2 - x^2}\right)\sqrt{1 + \left(x\Big/\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2}\,dx = 4\pi Rr\int_{-r}^{r} dx\Big/\sqrt{r^2 - x^2} =$$

$$= 4\pi Rr \cdot \arcsin(x/r)\Big|_{-r}^{r} = 4\pi^2 Rr \text{ (кв. од.).} \ \blacksquare$$

Зауваження 1. Коли крива, обертанням якої утворюється дана поверхня, задана параметрично або в полярних координатах, то треба радіус елементарного зрізаного конуса $y(x)$ і його твірну – диференціал довжини дуги dl – виразити у відповідній формі, а в інтегралі застосувати заміну змінної.

Якщо крива задана у параметричній формі $x = x(t)$, $y = y(t) \ge 0$, $\alpha \le t \le \beta$, тоді твірна зрізаного конуса дорівнює $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$, елемент площі dS визначається за формулою $dS = 2\pi\, y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ і площа поверхні обертання навколо осі Ox знаходиться наступним чином:

$$\boxed{S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}\ .$$

Аналогічно, площа поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі Ox кривої, що задана в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$, обчислюється за формулою

$$\boxed{S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi}\ .$$

<u>Приклад 3</u>. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ навколо осі Ox.

□ Астроїда (див. рис. 28 із п. 1.4.2) симетрична відносно обох координатних осей. Шукана площа S дорівнює подвоєній площі S_1 поверхні, описаної дугою астроїди, що лежить у першій чверті $(0 \le t \le \pi/2)$. Проведемо обчислення:

$$S = 2S_1 = 2\cdot 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \Big| x = a\cos^3 t;$$

$$y = a\sin^3 t;\ x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t;\ y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t;$$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)} =$$

$$= 3a\sin t\cos t;\ t_1 = 0;\ t_2 = \pi/2\Big| = 4\pi\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\cdot 3a\sin t \times =$$

$$\times\cos t\,dt = 12\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cdot\cos t\,dt = 12\pi a^2(1/5)\sin^5 t\Big|_0^{\pi/2} = .$$

$$= (12/5)\pi a^2 \text{ (кв. од.).}\ \blacksquare$$

<u>Приклад 4</u>. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням равлика Паскаля $\rho = 2 + \cos\varphi$ навколо полярної осі Ox.

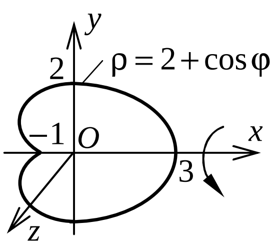

Рис. 41

□ Равлик Паскаля зображений на рис. 41. Він симетричний відносно полярної осі Ox. Поверхня обертання утворюється рухом верхньої половини равлика Паскаля, де $\varphi \in [0;\pi]$. Проведемо обчислення:

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}y(\varphi)\,dl=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\varphi)\sin\varphi\times$$

$$\times\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi=$$

$$=\Big|\rho=2+\cos\varphi;\ \rho'=-\sin\varphi;\quad \rho^2+(\rho')^2=(2+\cos\varphi)^2+$$

$$+\sin^2\varphi=5+4\cos\varphi;\ \alpha=0;\ \beta=\pi\Big|=$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}(2+\cos\varphi)\sin\varphi\sqrt{5+4\cos\varphi}\,d\varphi=\Big|t=\cos\varphi;$$

$$dt=-\sin\varphi\,d\varphi;\ t_1=\cos 0=1;\ t_2=\cos\pi=-1\Big|=$$

$$=-2\pi\int_1^{-1}(2+t)\sqrt{5+4t}\,dt=\Big|5+4t=u^2;\ t=(u^2-5)/4;$$

$$dt=(1/2)u\,du;\ u=\sqrt{5+4t};\ u_1=\sqrt{5+4}=3;\ u_2=\sqrt{5-4}=1\Big|=$$

$$=-2\pi\int_3^1(2+(u^2-5)/4)u\,(1/2)u\,du=-(\pi/4)\int_3^1(3+u^2)u^2\,du=$$

$$=-(\pi/4)\int_3^1(3u^2+u^4)\,du=-(\pi/4)\left(u^3+(1/5)u^5\right)\Big|_3^1=$$

$$=-(\pi/4)\left(1+1/5-27-243/5\right)=93\pi/5\ \text{(кв. од.).}\ \blacksquare$$

Зауваження 2. Якщо поверхня утворюється обертанням кривої навколо осі Oy, то формули для обчислення площі аналогічні, тільки в них змінні x та y міняються ролями.

Приклад 5. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням дуги параболи $y^2=2px$ $(0\le x\le p/6;\ p>0)$ навколо осі Oy.

□ Спочатку рівняння дуги параболи запишемо у явному вигляді, виразивши x через y: $x=y^2/(2p)$; $x_1=0\Rightarrow y_1=0$; $x_2=p/6\Rightarrow y_2=p/\sqrt{3}$. Потім знайдемо похідну: $x'=y/p$. Далі обчислимо площу:

$$S=2\pi\int_{y_1}^{y_2}x(y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy=2\pi\int_0^{p/\sqrt{3}}\left(y^2/(2p)\right)\times$$

$$\times\sqrt{1+(y/p)^2}\,dy=\left(\pi/p^2\right)\int_0^{p/\sqrt{3}} y^2\sqrt{p^2+y^2}\;dy=\Big|\,y=p\,ctg\,t\,;$$

$$dy=\left(-1/\sin^2 t\right)dt;\ \sqrt{p^2+y^2}=\sqrt{p^2+p^2ctg^2t}=p/\sin t;$$

$$t=arcctg\,\frac{y}{p};\ t_1=arcctg\,0=\frac{\pi}{2};\ t_2=arcctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}\Bigg|=\frac{\pi}{p^2}\times$$

$$\times\int_{\pi/2}^{\pi/3}(p\,ctg\,t)^2(p/\sin t)\left(-1/\sin^2 t\right)dt=-\pi\int_{\pi/2}^{\pi/3}\left(\cos^2 t/\sin^5 t\right)dt=$$

$$=\Big|\ tg\,(t/2)=u;\ t=2arctg\,u;\ dt=(2\,du)/(1+u^2);$$

$$\sin t=\frac{2u}{1+u^2};\ \cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2};\ u_1=tg\,\frac{\pi}{4}=1;\ u_2=tg\,\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Bigg|=$$

$$=-\pi\int_1^{\sqrt{3}/3}\frac{\left((1-u^2)/(1+u^2)\right)^2}{\left((2u)/(1+u^2)\right)^5}\cdot\frac{2\,du}{1+u^2}=-\frac{\pi}{16}\int_1^{\sqrt{3}/3}(1-u^2)^2\times$$

$$\times\left((1+u^2)^2/u^5\right)du=-(\pi/16)\int_1^{\sqrt{3}/3}\left((1-2u^4+u^8)/u^5\right)du=$$

$$=-(\pi/16)\int_1^{\sqrt{3}/3}\left(u^{-5}-2/u+u^3\right)du=-(\pi/16)\left(-(1/4)u^{-4}-\right.$$

$$\left.-2\ln|u|+(1/4)u^4\right)\Big|_1^{\sqrt{3}/3}=-(\pi/16)(-9/4-2\ln\sqrt{3}/3+1/36+$$

$$+1/4+2\ln 1-1/4)=\pi(20-9\ln 3)/144\ \text{(кв. од.).}\ \blacksquare$$

<u>Приклад 6</u>. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням лемніскати Бернуллі $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ ($a>0$) навколо осі Oy.

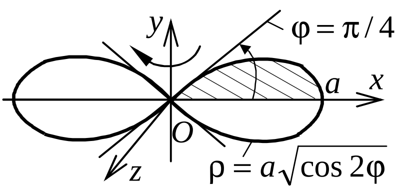

Рис. 42

□ Лемніската Бернуллі зображена на рис. 42. Вона симетрична відносно обох координатних осей Ox і Oy. Шукана площа S дорівнює подвоєній площі S_1 поверхні, описаної дугою лемніскати, що лежить у першій чверті $\left(0 \le \varphi \le \pi/4\right)$. Проведемо обчислення:

$$S = 2S_1 = 2\cdot 2\pi\int_\alpha^\beta x(\varphi)\,dl = 2\cdot 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\cos\varphi\times$$

$$\times\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi = \Big|\ \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi};\ \rho' = -a\sin 2\varphi :$$

$$:\sqrt{\cos 2\varphi};\ \sqrt{\rho^2+(\rho')^2} = \sqrt{a^2\cos 2\varphi + a^2\sin^2 2\varphi/\cos 2\varphi} =$$

$$= \sqrt{a^2(\cos^2 2\varphi + \sin^2 2\varphi)} : \sqrt{\cos 2\varphi} = a\Big/\sqrt{\cos 2\varphi};\ \alpha = 0;$$

$$\beta = \pi/4\ \Big| = 4\pi\int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\cdot\left(a\Big/\sqrt{\cos 2\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\,d\varphi = 4\pi a^2\sin\varphi\Big|_0^{\pi/4} = 2\sqrt{2}\pi a^2 \quad \text{(кв. од.).} \ \blacksquare$$

1.5. Фізичні застосування визначеного інтеграла

За допомогою інтегрального числення можна знаходити масу матеріальної дуги і пластинки, їх центр мас; роботу сили; сумарний електричний заряд; концентрацію електронів; напруженість електричного поля і т.п.

Розглянемо застосування визначеного інтеграла для розв'язування деяких типових задач.

1.5.1. Маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої дуги

Нехай задана матеріальна неоднорідна дуга гладкої плоскої кривої $y = y(x)$, $x \in [a; b]$ з лінійною густиною $\rho = \rho(x)$ (рис. 43). Знайдемо її масу m, статичні моменти M_x, M_y і моменти інерції I_x, I_y відповідно відносно координатних осей Ox і Oy та координати центра мас $C(x_c, y_c)$.

Поділимо відрізок $[a;b]$ на n елементарних частин довільно вибраними точками: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Позначимо i-ий крок розбиття $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Припустимо, що Δx_i

настільки мале, що масу Δm_i i-ої елементарної дуги $L_{M_{i-1}M_i}$ можна вважати зосередженою в одній точці $\overline{M}_i(\overline{x}_i;\overline{y}_i)$, де $\overline{y}_i = y(\overline{x}_i)$. Тоді

$$\Delta m_i \approx \rho(\overline{x}_i)\Delta L_i \approx \rho(\overline{x}_i)\sqrt{1+(y'(\overline{x}_i))^2}\Delta x_i .$$

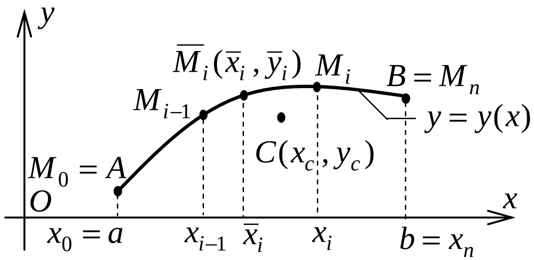

Рис. 43

Розглядаючи розбиття дуги як систему матеріальних точок $\overline{M}_i(\overline{x}_i;\overline{y}_i)$, $i=\overline{1,n}$, наближено знаходимо масу m дуги:

$$m = \sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(\overline{x}_i)\sqrt{1+(y'(\overline{x}_i))^2}\Delta x_i .$$

При необмеженому здрібненні розбиття, коли $\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i \to 0$, дістаємо точне значення маси m дуги у вигляді визначеного інтеграла:

$$\boxed{m = \int_a^b \rho(x)\,dl},$$

де $dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}dx$ – диференціал довжини дуги.

Статичний момент ΔM_l *матеріальної точки відносно осі* Ol *дорівнює добутку її маси* Δm *на відхилення* r *від осі*: $\Delta M_l = \Delta m \cdot r$.

Момент інерції ΔI_l *матеріальної точки відносно осі* Ol *дорівнює добутку її маси* Δm *на квадрат відхилення* r *від осі*: $\Delta I_l = \Delta m \cdot r^2$.

Момент системи матеріальних точок дорівнює сумі відповідних моментів всіх її складових.

Центром мас $C(x_c; y_c)$ *системи матеріальних точок називається матеріальна точка з їх сумарною масою* $m = \sum \Delta m_i$ *, що має ті самі сумарні статичні моменти* $M_x = \sum \Delta M_{xi}$ *і* $M_y = \sum \Delta M_{yi}$. Координати центра мас $C(x_c; y_c)$ обчислюються за формулами:

$$x_c = M_y / m; \quad y_c = M_x / m.$$

Розглядаючи розбиття дуги як систему матеріальних точок $\overline{M}_i(\overline{x}_i; \overline{y}_i)$, $i = \overline{1, n}$, отримуємо наближені значення статичних моментів M_x, M_y і моментів інерції I_x, I_y дуги:

а) відносно осі Ox:

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \overline{y}_i \approx \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i \, \rho(\overline{x}_i) \sqrt{1 + (y'(\overline{x}_i))^2} \Delta x_i ;$$

$$I_x \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \overline{y}_i^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i^2 \, \rho(\overline{x}_i) \sqrt{1 + (y'(\overline{x}_i))^2} \Delta x_i ;$$

б) відносно осі Oy:

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \overline{x}_i \approx \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i \, \rho(\overline{x}_i) \sqrt{1 + (y'(\overline{x}_i))^2} \Delta x_i ;$$

$$I_y \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \overline{x}_i^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i^2 \, \rho(\overline{x}_i) \sqrt{1 + (y'(\overline{x}_i))^2} \Delta x_i .$$

Застосовуючи граничний перехід при $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$, для вказаних величин одержуємо точні розрахункові формули:

$$\boxed{M_x = \int_a^b y \rho(x)\, dl} ; \quad \boxed{I_x = \int_a^b y^2 \rho(x)\, dl} ;$$

$$\boxed{M_y = \int_a^b x \rho(x)\, dl} ; \quad \boxed{I_y = \int_a^b x^2 \rho(x)\, dl} ,$$

де $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$ – диференціал довжини дуги.

Аналогічно для координат центра мас $C(x_c; y_c)$ дуги дістаємо формули:

$$\boxed{x_c = M_y / m} ; \quad \boxed{y_c = M_x / m} .$$

Приклад 1. Для дуги кола $y=\sqrt{9-x^2}$, $x\in[0;3]$, розташованої у першій координатній чверті, знайти масу m, статичні моменти M_x, M_y і моменти інерції I_x, I_y відповідно відносно осей Ox та Oy, а також координати центра мас $C(x_c;y_c)$. Лінійна густина $\rho(x)=\rho_0=const$.

□ Знайдемо диференціал довжини дуги:

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}};\quad dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2}}\,dx=\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Обчислимо масу дуги:

$$m=\int_a^b\rho(x)\,dl=\int_0^3\rho_0\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}=3\rho_0\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=3\rho_0\times$$

$$\times\arcsin(x/3)\Big|_0^3=3\rho_0(\arcsin 1-\arcsin 0)=3\rho_0\,\pi/2.$$

Знайдемо статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас:

$$M_x=\int_a^b y\rho(x)\,dl=\int_0^3\sqrt{9-x^2}\rho_0\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}=3\rho_0\int_0^3 dx=$$

$$=3\rho_0\,x\Big|_0^3=9\rho_0;\quad M_y=\int_a^b x\rho(x)\,dl=\int_0^3\frac{3x\rho_0}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=9-x^2;\ du=-2xdx;\\ u_1=9;\qquad u_2=0\end{matrix}\right|=-\frac{3}{2}\rho_0\int_9^0\frac{du}{\sqrt{u}}=$$

$$=-3\rho_0\sqrt{u}\Big|_9^0=9\rho_0;\quad I_x=\int_a^b y^2\rho(x)\,dl=\int_0^3(9-x^2)\rho_0\frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}=$$

$$=3\rho_0\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx=\Big|\ x=3\sin u;\ dx=3\cos u\,du;$$

$$\sqrt{9-x^2}=3\cos u;\ u=\arcsin(x/3);\ u_1=\arcsin 0=0;$$

$$u_2 = \arcsin 1 = \pi/2 \Big| = 3\rho_0 \int_0^{\pi/2} 3\cos u \cdot 3\cos u\, du =$$

$$= 27\rho_0 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = (27/2)\rho_0 \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2u)\, du =$$

$$= (27/2)\rho_0 (u + (1/2)\sin 2u)\Big|_0^{\pi/2} = 27\pi\rho_0/2\,;$$

$$I_y = \int_a^b x^2 \rho(x)\, dl = \int_0^3 x^2 \rho_0 \frac{3\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = 3\rho_0 \int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} =$$

$$= \Big|\ x = 3\sin u;\ dx = 3\cos u\, du;\ \sqrt{9-x^2} = 3\cos u;$$

$$u = \arcsin(x/3);\ u_1 = \arcsin 0 = 0;\ u_2 = \arcsin 1 = \pi/2 \Big| =$$

$$= 3\rho_0 \int_0^{\pi/2} \frac{(3\sin u)^2 \cdot 3\cos u\, du}{3\cos u} = 27\rho_0 \int_0^{\pi/2} \sin^2 u\, du = (27/2)\rho_0 \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} (1-\cos 2u)\, du = (27/2)\rho_0 (u - (1/2)\sin 2u)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{27\pi\rho_0}{2};\quad x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{9\rho_0}{3\pi\rho_0/2} = 6\pi;\quad y_c = \frac{M_x}{m} = 6\pi.\ \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти координати центра мас $C(x_c; y_c)$ однорідної дуги астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ ($a > 0$), що розташована у першій координатній чверті та має лінійну густину $\rho = \rho(x) = \rho_0 (x/a)^{1/3}$, де $\rho_0 = const > 0$.

□ Подамо лінійну густину через параметр t:

$$\rho = \rho_0 \left(a\cos^3 t / a\right)^{1/3} = \rho_0 \cos t\,.$$

Указаній частині астроїди відповідають значення параметра $0 \le t \le \pi/2$. Знайдемо диференціал довжини дуги, що задана параметрично:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt;\quad x' = -3a\cos^2 t \cdot \sin t\,;$$

$$y' = 3a\sin^2 t \cdot \cos t\,;\ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9a^2\cos^4 t \cdot \sin^2 t +$$

$$+9a^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t\,(\cos^2 t+\sin^2 t) =$$

$$= 9a^2\sin^2 t\cos^2 t\,; \quad dl = 3a\sin t\cos t\,dt\,.$$

Обчислимо масу, переходячи в інтегралі до параметра t:

$$m = \int_{t_1}^{t_2}\rho\,dl = \int_0^{\pi/2}\rho_0\cos t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt =$$

$$= 3a\rho_0\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin t\,dt = -a\rho_0\cdot\cos^3 t\Big|_0^{\pi/2} = a\rho_0\,.$$

Формули для статичних моментів у випадку параметрично заданої кривої приймають вигляд:

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\rho\,dl\,; \quad M_y = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\rho\,dl\,.$$

Тоді

$$M_x = \int_0^{\pi/2} a\sin^3 t\cdot\rho_0\cos t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt = 3a^2\rho_0\times$$

$$\times\int_0^{\pi/2}(\sin t\cos t)^2\sin^2 t\,dt = 3a^2\rho_0\int_0^{\pi/2}((1/2)\sin 2t)^2\cdot(1/2)\times$$

$$\times(1-\cos 2t)\,dt = (3/8)a^2\rho_0\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\cos 2t\,dt\right) = (3/8)a^2\rho_0\left((1/2)\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)\,dt-\right.$$

$$\left.-(1/6)\sin^3 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = (3/16)a^2\rho_0\left((t-(1/4)\sin 4t)\Big|_0^{\pi/2}-0\right) =$$

$$= 3\pi a^2\rho_0/32\,; \quad M_y = \int_0^{\pi/2} a\cos^3 t\cdot\rho_0\cos t\cdot 3a\sin t\cos t\,dt =$$

$$= 3a^2\rho_0\int_0^{\pi/2}\cos^5 t\sin t\,dt = 3a^2\rho_0\cdot(-1/6)\cos^6 t\Big|_0^{\pi/2} = a^2\rho_0/2\,.$$

Координати центра мас:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{a^2\rho_0/2}{a\rho_0} = \frac{a}{2}\,; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{3\pi a^2\rho_0/32}{a\rho_0} = \frac{3\pi a}{32}\,. \ \blacksquare$$

1.5.2. Маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої області

Нехай задана матеріальна неоднорідна плоска фігура D, що має вигляд криволінійної трапеції, обмеженої зверху графіком неперервної невід'ємної функції $y = y(x) \geq 0$, знизу віссю Ox, а з боків вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$, де $a < b$, причому поверхнева густина $\rho = \rho(x)$ залежить тільки від x (рис. 44). Знайдемо її масу m, статичні моменти M_x, M_y і моменти інерції I_x, I_y відповідно відносно координатних осей Ox і Oy та координати центра мас $C(x_c; y_c)$.

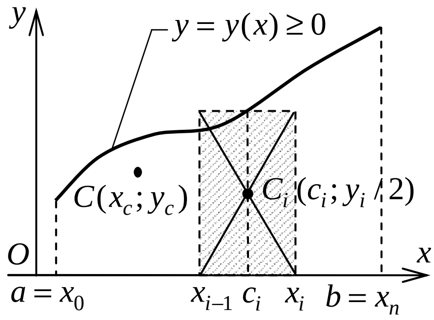

Рис. 44

Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n довільних частин точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$. Через кожну точку поділу x_i, $i = \overline{1, n}$ проведемо пряму, паралельну осі Oy, і розіб'ємо криволінійну трапецію на елементарні смужки – частинні криволінійні трапеції. Смужку, що міститься між прямими $x = x_{i-1}$ і $x = x_i$, наближено можна вважати однорідним прямокутником з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $y_i = y(c_i)$, де c_i − середина частинного відрізка $[x_{i-1}; x_i]$. Площа такого прямокутника $\Delta S_i = y_i \Delta x_i$, а його маса $\Delta m_i \approx \rho(c_i)\Delta S_i = \rho(c_i) y(c_i) \Delta x_i$.

З механіки відомо, що центр мас прямокутника зі сталою поверхневою густиною $\rho = const$ знаходиться в точці перетину його діагоналей $C_i\,(c_i; y_i/2)$. Якщо припустити, що вся маса кожного частинного прямокутника зосереджена в його центрі мас C_i, то дістанемо систему матеріальних точок Δm_i, $i = \overline{1, n}$. Тоді маса m криволінійної трапеції D, її статичні моменти M_x, M_y і моменти інерції I_x, I_y відповідно відносно осей Ox і Oy наближено визначаються співвідношеннями для такої системи:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\, y_i\, \Delta x_i \; ; \;\; M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot (y_i / 2) \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} (y_i / 2) \rho(c_i) y_i\, \Delta x_i = (1/2) \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i) y_i^2 \Delta x_i \; ;$$

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot c_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\, x_i\, y_i\, \Delta x_i \; ;$$

$$I_x \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot (y_i / 2)^2 \approx (1/4) \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i) y_i^3 \Delta x_i \; ;$$

$$I_y \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot \bar{x}_i^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(c_i)\, x_i^2\, y_i\, \Delta x_i \, .$$

Застосовуючи граничний перехід при $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$, для вказаних величин одержуємо точні розрахункові формули:

$$\boxed{m = \int_a^b \rho(x)\, dS = \int_a^b \rho(x) y(x)\, dx} \; ;$$

$$\boxed{M_x = (1/2) \int_a^b \rho(x) y(x)\, dS = (1/2) \int_a^b \rho(x) y^2(x)\, dx} \; ;$$

$$\boxed{M_y = \int_a^b \rho(x)\, x\, dS = \int_a^b \rho(x)\, x\, y(x)\, dx} \; ;$$

$$\boxed{I_x = (1/4) \int_a^b \rho(x) y^2(x)\, dS = (1/4) \int_a^b \rho(x) y^3(x)\, dx} \; ;$$

$$\boxed{I_y = \int_a^b \rho(x)\, x^2\, dS = \int_a^b \rho(x)\, x^2\, y(x)\, dx} \, ,$$

де $dS = y(x)\, dx$ – диференціал площі криволінійної трапеції.

Аналогічно для координат центра мас $C(x_c ; y_c)$ криволінійної трапеції дістаємо формули:

$$\boxed{x_c = M_y / m} \; ; \quad \boxed{y_c = M_x / m} \, .$$

<u>Зауваження 1</u>. Якщо плоска область D – правильна у напрямку осі Oy (рис. 9 із п. 1.4.1. 1), тобто може бути задана системою нерівностей

$$\begin{cases} a \le x \le b; \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \end{cases} \quad \text{де} \quad D \xrightarrow{Oy} [a;b] \subset Ox,$$

а поверхнева густина $\rho = \rho(x)$ залежить тільки від x, тоді її маса m, статичні моменти M_x, M_y, моменти інерції I_x, I_y і координати центра мас $C(x_c; y_c)$ обчислюються за формулами:

$$\boxed{m = \int_a^b \rho(x)\,(y_2(x) - y_1(x))\,dx};$$

$$\boxed{M_x = (1/2)\int_a^b \rho(x)\,(y_2^2(x) - y_1^2(x))\,dx};$$

$$\boxed{M_y = \int_a^b \rho(x)\,x\,(y_2(x) - y_1(x))\,dx};$$

$$\boxed{I_x = (1/4)\int_a^b \rho(x)(y_2^3(x) - y_1^3(x))\,dx};$$

$$\boxed{I_y = \int_a^b \rho(x)\,x^2(y_2(x) - y_1(x))\,dx};$$

$$\boxed{x_c = M_y / m}; \quad \boxed{y_c = M_x / m}.$$

Зауваження 2. Якщо плоска область D – правильна у напрямку осі Ox (рис. 10 із п. 1.4.1 а), , тобто може бути задана системою нерівностей

$$\begin{cases} c \le y \le d; \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), \end{cases} \quad \text{де} \quad D \xrightarrow{Ox} [c;d] \subset Oy,$$

а поверхнева густина $\rho = \rho(y)$ є функцією тільки змінної y, то вказані характеристики $m, M_x, M_y, I_x, I_y, x_c$, y_c обчислюються за аналогічними співвідношеннями, де змінні x та y міняються ролями. (Напишіть ці формули самостійно).

Приклад 1. Для параболічного сегмента D, який відсікає від параболи $y^2 = 6x$ пряма $x = 6$, знайти масу m, статичні моменти M_x, M_y і моменти інерції I_x, I_y відповідно відносно осей Ox та Oy, а також координати центра мас $C(x_c, y_c)$. Поверхнева густина $\rho = \rho_0 = const$ (фігура однорідна).

□ Дана область D є правильною (в обох напрямках Ox та Oy) і однорідною. Тому задачу можна розв'язати двома способами:

а) розглядаючи область D як правильну в напрямку Oy;

б) розглядаючи область D як правильну в напрямку Ox.

Розв'яжемо задачу способом а). Відповідне подання фігури D – на рис. 45.

Обчислимо масу області D:

$$m = \int_a^b \rho(x)(y_2(x) - y_1(x))\,dx = \int_0^6 \rho_0\left(\sqrt{6x} + \sqrt{6x}\right)dx =$$

$$= 2\rho_0\sqrt{6}\int_0^6 x^{1/2}dx = 2\rho_0\sqrt{6}\cdot(2/3)x^{3/2}\Big|_0^6 = 48\rho_0.$$

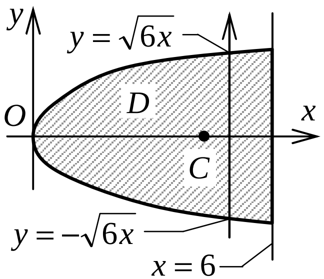

Рис. 45

Знайдемо статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас пластинки D.

По-перше, в силу однорідності й симетрії відносно осі Ox, маємо: $M_x = 0$; $y_c = 0$. Далі обчислюємо:

$$M_y = \int_a^b \rho(x)\,x\,(y_2(x) - y_1(x))\,dx =$$

$$= \int_0^6 \rho_0 x\left(\sqrt{6x} + \sqrt{6x}\right)dx =$$

$$= 2\rho_0\sqrt{6}\int_0^6 x^{3/2}\,dx = 2\rho_0\sqrt{6}\cdot(2/5)x^{5/2}\Big|_0^6 = 864\rho_0/5;$$

$$I_x = (1/4)\int_a^b \rho(x)(y_2^3(x) - y_1^3(x))\,dx = (1/4)\int_0^6 \rho_0\left((6x)^{3/2} +\right.$$

$$\left.+(6x)^{3/2}\right)dx = 3\rho_0\sqrt{6}\int_0^6 x^{3/2}dx = 3\rho_0\sqrt{6}\cdot(2/5)\,x^{5/2}\Big|_0^6 =$$

$$=1296\rho_0/5; \qquad I_y=\int_a^b \rho(x)\,x^2(y_2(x)-y_1(x))\,dx=$$

$$=\int_0^6 \rho_0 x^2\left(\sqrt{6x}+\sqrt{6x}\right)dx=2\rho_0\sqrt{6}\int_0^6 x^{5/2}dx=2\rho_0\sqrt{6}\cdot(2/7)\times$$

$$\times x^{7/2}\Big|_0^6=5184\rho_0/7; \quad x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{864\rho_0/5}{48\rho_0}=\frac{18}{5}=3{,}6.$$

Способом б) розв’яжіть задачу самостійно. ■

<u>Приклад 2</u>. Для фігури D, розташованої у першій чверті та обмеженої астроїдою $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$ ($a>0$, $b>0$), і осями координат, знайти масу m, статичні моменти M_x, M_y і координати центра мас $C(x_c;y_c)$. Поверхнева густина $\rho=\rho(x)=\rho_0\cdot(x/a)^{1/3}\sqrt{1-(x/a)^{2/3}}$, де $\rho_0=const>0$ (пластинка неоднорідна).

□ Область D, про яку йдеться в задачі, зображена на рис. 46 і має вигляд криволінійної трапеції, утвореної параметрично заданою дугою: $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$, $t\in[0;\ \pi/2]$.

Обчислимо указані характеристики, переходячи у відповідних інтегралах до параметра t.

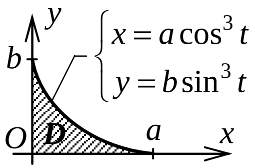

Рис. 46

Знайдемо диференціал функції $x=x(t)=a\cos^3 t$:

$$dx=x'(t)\,dt=a\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)\,dt=$$

$$=-3a\cos^2 t\sin t\,dt.$$

Виразимо поверхневу густину через параметр t:

$$\rho=\rho_0\cdot(a\cos^3 t:a)^{1/3}\sqrt{1-(a\cos^3 t:a)^{2/3}}=\rho_0\sin t\cos t.$$

Обчислимо масу пластинки D:

$$m=\int_a^b \rho(x)y(x)\,dx=\int_{t_1}^{t_2}\rho(x(t))y(t)\,x'(t)\,dt=$$

$$=\int_{\pi/2}^0 \rho_0\sin t\cos t\cdot b\sin^3 t\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt=-3ab\rho_0\times$$

$$\times\int_{\pi/2}^{0}\sin^5 t\cos^2 t\cos t\,dt = \Big|\, u=\sin t;\;\; du=\cos t\,dt;\;\; \cos^2 t =$$

$$=1-\sin^2 t = 1-u^2;\; u_1=\sin(\pi/2)=1;\;\; u_2=\sin 0 = 0\,\Big| =$$

$$=-3ab\rho_0\int_1^0 u^5(1-u^2)\,du = -3ab\rho_0\int_1^0 (u^5-u^7)\,du =$$

$$=-3ab\rho_0(u^6/6-u^8/8)\Big|_1^0 = ab\rho_0/8\,.$$

Знайдемо статичні моменти і координати центра мас:

$$M_x = (1/2)\int_a^b \rho(x)y^2(x)\,dx = (1/2)\int_{t_1}^{t_2}\rho(x(t))y^2(t)\,x'(t)\,dt =$$

$$=(1/2)\int_{\pi/2}^{0}\rho_0\sin t\cos t\cdot(b\sin^3 t)^2\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt =$$

$$=-(3/2)\,ab^2\rho_0\int_{\pi/2}^{0}\sin^8 t\cos^2 t\cos t\,dt = \Big|\,u=\sin t;\; du=\cos t\,dt;$$

$$\cos^2 t = 1-\sin^2 t = 1-u^2;\; u_1=\sin(\pi/2)=1;\; u_2=\sin 0=0\,\Big| =$$

$$=-(3/2)\,ab^2\rho_0\int_1^0 u^8(1-u^2)\,du = -(3/2)ab^2\rho_0\times$$

$$\times\int_1^0(u^8-u^{10})\,du = -(3/2)ab^2\rho_0(u^9/9-u^{11}/11)\Big|_1^0 = ab^2\rho_0/33\,;$$

$$M_y = \int_a^b\rho(x)\,x\,y(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2}\rho(x(t))\,x(t)\,y(t)\,x'(t)\,dt =$$

$$=\int_{\pi/2}^{0}\rho_0\sin t\cos t\cdot(a\cos^3 t)\cdot(b\sin^3 t)\cdot(-3a\cos^2 t\sin t)\,dt =$$

$$=-3a^2b\rho_0\int_{\pi/2}^{0}\sin^4 t\cos^6 t\sin t\,dt = \Big|\,u=\cos t;\; du=-\sin t\,dt;$$

$$\sin^4 t = (1-\cos^2 t)^2 = (1-u^2)^2;\; u_1=\cos(\pi/2)=0;$$

$$u_2=\cos 0 = 1\,\Big| = 3a^2b\rho_0\int_0^1(1-u^2)^2u^6\,du = 3a^2b\rho_0\times$$

$$\times\int_0^1(u^6-2u^8+u^{10})\,du = 3a^2b\rho_0(u^7/7-2u^9/9+u^{11}/11)\Big|_0^1 =$$

$$=8a^2b\rho_0/231;\;\;\; x_c = M_y\big/m = (8a^2b\rho_0/231):(ab\rho_0/8) =$$

$= 64a/231;\ \ y_c = M_x/m = (ab^2\rho_0/33):(ab\rho_0/8) = 8b/33$. ■

<u>Зауваження 3</u>. Аналогічно за допомогою визначеного інтеграла можна знаходити інші неперервно розподілені адитивні величини, наприклад, сумарний електричний заряд.

<u>Приклад 3</u>. Знайти сумарний електричний заряд q, неперервно розподілений в області D, що обмежена півеліпсом $y = 3\sqrt{1 - x^2/16}$, $x \in [-4; 4]$ і віссю Ox. Поверхнева густина розподілу заряду $\rho = \rho(x) = \rho_0(1 - x^2/16)$, де $\rho_0 = const > 0$.

□ Дана область D має вигляд криволінійної трапеції. Сумарний електричний заряд q можна знайти за формулою

$$q = \int_a^b \rho(x)\,dS = \int_a^b \rho(x)\,y(x)\,dx.$$

Проведемо обчислення:

$$q = \int_{-4}^{4} \rho_0(1 - x^2/16)\cdot 3\sqrt{1 - x^2/16}\,dx =$$

$$= 3\rho_0\int_{-4}^{4}(1 - x^2/16)^{3/2}\,dx = \Big|\ x = 4\sin u;\ dx = \cos u\,du;$$

$$(1 - x^2/16)^{3/2} = (1 - \sin^2 u)^{3/2} = \cos^3 u;\ \ u = \arcsin(x/4);$$

$$u_1 = \arcsin(-4/4) = -\pi/2;\ \ u_2 = \arcsin(4/4) = \pi/2\,\Big| =$$

$$= 3\rho_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 u\cdot\cos u\,du = 3\rho_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 u\,du = 3\rho_0\,(1/4)\times$$

$$\times\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1 + \cos 2u)^2\,du = (3/4)\rho_0\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1 + 2\cos 2u +$$

$$+ \cos^2 2u)\,du = (3/4)\rho_0\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}du + 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 2u\,du + (1/2)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1 + \cos 4u)\,du\right) = (3/4)\rho_0\left(u\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \sin 2u\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} +\right.$$

$$\left.+ (1/2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}du + (1/2)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos 4u\,du\right) = (3/4)\rho_0\left(\pi + 0 +\right.$$

$$\left.+ (1/2)\cdot u\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + (1/8)\cdot\sin 4u\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) = 9\pi\rho_0/2.\ \ ■$$

1.5.3. Робота змінної сили

Нехай під дією сили $F = F(x)$ матеріальна точка рухається прямолінійно вздовж осі Ox. Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то робота A, виконана цією силою при переміщенні точки на відрізку $[a;b]$, обчислюється за формулою

$$\boxed{A = \int_a^b F(x)\,dx}\,.$$

<u>Приклад 1</u>. Котел, який має форму параболоїда обертання $z = x^2/9 + y^2/9$ висотою $H = 4$, до країв заповнений рідиною з густиною $\rho_0 = const$ (рис. 47). Знайти роботу A, яку необхідно виконати, щоб викачати рідину з котла.

□ Задача зводиться до обчислення роботи, яку треба виконати, щоб послідовно підняти всі частинки рідини на рівень країв котла, бо далі вона вже під дією сили тяжіння сама витікає з нього. При цьому можна вважати, що кожна частинка описує шлях, який дорівнює глибині її занурення в котлі.

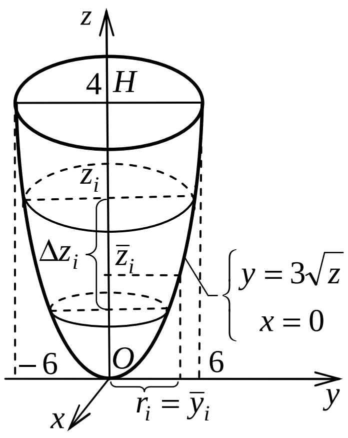

Рис. 47

Розіб'ємо загальний об'єм рідини в котлі на частини паралельними площинами $z = z_0 = 0$, $z = z_1$, …, $z = z_i$, ..., $z = z_n = H$. Позначимо i-ий крок розбиття $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$. Робота ΔA_i, яку треба виконати, щоб підняти частину (шар) рідини, що знаходиться на глибині від z_{i-1} до $z_i = z_{i-1} + \Delta z_i$, наближено дорівнює

$$\Delta A_i \approx \Delta m_i\, g\,(H - \bar{z}_i)\,,$$

де g − прискорення вільного падіння; $\Delta m_i = \rho_0 \Delta V_i$ − маса частини рідини; $\Delta V_i \approx \pi \bar{r}_i^{\,2}\, \Delta z_i$ − об'єм елементарного шару рідини; $\bar{r}_i = \bar{y}_i = 3\sqrt{\bar{z}_i}$; $\bar{z}_i$ − довільна точка відрізка $[z_{i-1}; z_i]$.

Тоді загальна робота A, яку необхідно виконати, наближено визначається рівністю

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n}\rho_0\pi 9\bar{z}_i g\,(H-\bar{z}_i)\Delta z_i = 9\pi\rho_0 g\sum_{i=1}^{n}\bar{z}_i(H-\bar{z}_i)\Delta z_i \ .$$

При необмеженому здрібненні розбиття, коли $\max\limits_{1\le i\le n}\Delta z_i \to 0$, дістаємо точне значення роботи A у вигляді визначеного інтеграла:

$$A=9\pi\rho_0 g\int_0^H z(H-z)\,dz = 9\pi\rho_0 g\int_0^4 z(4-z)\,dz =$$

$$=9\pi\rho_0 g(2z^2-z^3/3)\big|_0^4 = 96\pi\rho_0 g\ . \ \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Сила F, з якою електричний заряд q_1 відштовхує однойменний заряд q_2, що знаходиться на відстані r від нього, визначається за законом Кулона $F=k\,q_1q_2\big/r^2$, де k − сталий коефіцієнт пропорційності. Обчислити роботу A електричної сили по переміщенню заряду q_2 від $r_1=a$ до $r_2=b$, тоді як заряд q_1 залишається нерухомим.

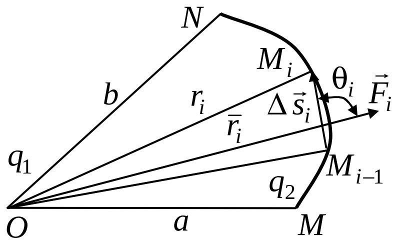

Рис. 48

□ Точку O, в якій знаходиться нерухомий заряд q_1, візьмемо за початок відліку. Нехай заряд q_2 переміщується з точки M у точку N (рис. 48). Позначимо через s пройдений зарядом q_2 на даний момент шлях – довжину пройденої частини траєкторії L_{MN}. Розіб'ємо всю траєкторію L_{MN} на n елементарних дуг $L_{M_{i-1}M_i}$, $i=\overline{1,n}$ довільно вибраними точками $M=M_0, M_1$, $M_2,\ldots,M_n=N$ при умові, що довжина пройденого шляху до них від точки M дорівнює відповідно $s_0=0$, $s_i=s_{i-1}+\Delta s_i$, $\Delta s_i>0$, $i=\overline{1,n}$. Кожна частинна дуга $L_{M_{i-1}M_i}$ має довжину Δs_i. Їй відповідає вектор переміщення $\Delta\vec{s}_i$. При переміщенні $\Delta\vec{s}_i$ від точки M_{i-1} до точки M_i відстань r між зарядами q_1 та q_2 змінюється на Δr_i: $r_i = r_{i-1} + \Delta r_i$.

На кожній елементарній дузі Δs_i силу $\vec{F}$, що діє з боку заряду q_1 на заряд q_2, можна наближено вважати сталою, рівною значенню $\vec{F}_i$ в довільній проміжній точці $\overline{M}_i$, що знаходиться на відстані $\bar{r}_i$ від заряду q_1. Тоді робота ΔA_i по переміщенню заряду q_2 на ділянці $L_{M_{i-1}M_i}$ визначається наближеною рівністю

$$\Delta A_i \approx \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i \text{, або } \Delta A_i \approx F_i \cos\theta_i \, \Delta s_i ,$$

де θ_i – кут між векторами $\vec{F}_i$ та $\Delta\vec{s}_i$.

Оскільки $\cos\theta_i \approx \Delta r_i / \Delta s_i; \quad F_i = kq_1q_2 \big/ \bar{r}_i^2$, то

$$\Delta A_k \approx (kq_1q_2 / \bar{r}_i^2) \cdot (\Delta r_i / \Delta s_i) \cdot \Delta s_i = k\, q_1q_2\, \Delta r_i / \bar{r}_i^2 .$$

Тоді вся робота A електричної сили по переміщенню заряду q_2 з точки M у точку N наближено дорівнює

$$A = \sum\nolimits_{i=1}^{n} k\, q_1q_2 \Delta r_k / \bar{r}_k^2 .$$

Переходячи до границі при $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta z_i \to 0$, отримаємо точне значення роботи A:

$$A = \lim_{\max\Delta z_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} kq_1q_2 \Delta r_k / \bar{r}_k^2 = kq_1q_2 \int_a^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{kq_1q_2}{r}\Bigg|_a^b =$$

$$= k\, q_1q_2 (1/a - 1/b). \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Електричний струм $I = I_0 \cos\omega t$ (I_0 – амплітуда; ω – кругова частота; t – час), який протікає в провіднику з активним опором R, здійснює роботу, що переходить у тепло. Знайти кількість тепла Q, що виділяється у цьому провіднику за період $T = 2\pi/\omega$.

□ Розіб'ємо весь період T на досить дрібні елементарні проміжки часу так, що на кожному з них силу струму I можна наближено вважати сталою, рівною її значенню в довільній проміжній точці. Для постійного струму кількість тепла ΔQ, що виділяється за елементарний проміжок часу Δt, обчислюється за законом Джоуля – Ленца: $\Delta Q = k\,I^2 R\,\Delta t$, де k − сталий коефіцієнт пропорційності. Відповідно диференціал (елемент) dQ кількості тепла, що виділяється за термін dt, визначається формулою: $dQ = k\,I^2 R\,dt$. Інтегруючи обидві частини цієї рівності, дістанемо шукану загальну кількість тепла Q:

$$Q = kR\int_0^T I^2 dt = kRI_0^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t\,dt = kRI_0^2 (1/2)\int_0^{2\pi/\omega} (1+$$

$$+\cos 2\omega t)\,dt = (kRI_0^2/2)\cdot(t + (1/(2\omega))\sin 2\omega t)\Big|_0^{2\pi/\omega} = \pi kRI_0^2/\omega.$$

■

1.6. Чисельне інтегрування

При математичному моделюванні різноманітних процесів часто виникає потреба в наближених обчисленнях визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, якщо: а) підінтегральна функція $f(x)$ задана графічно, таблично чи іншим неаналітичним способом; б) первісна $F(x)$ не є елементарною функцією; в) первісна $F(x)$ хоч і є елементарною функцією, але обчислення її значень досить громіздке.

В основі ***чисельних наближених методів*** лежить подання визначеного інтеграла як границі інтегральної суми

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i,$$

звідки випливає на ближена рівність $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i}$.

Методи ***чисельного інтегрування*** різняться способами розбиття відрізка $[a;b]$ на частини Δx_i, вибором точок $c_i \in [x_{i-1};x_i]$

та наближень для відповідних значень $f(c_i)$ $(i=\overline{1,n})$.

Далі розглянемо найбільш прості методи, що у випадку невід'ємної підінтегральної функції $f(x)\ge 0$ мають ясний геометричний зміст – наближене обчислення площі $S=\int_a^b f(x)\,dx$ відповідної криволінійної трапеції при рівномірному розбитті відрізка $[a;b]$, $a<b$ зі сталим ***кроком*** $\Delta x_i = h=(b-a)/n$, $i=\overline{1,n}$.

Формули прямокутників.

Нехай треба наближено обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, де функція $f(x)$ невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$ (рис. 49).

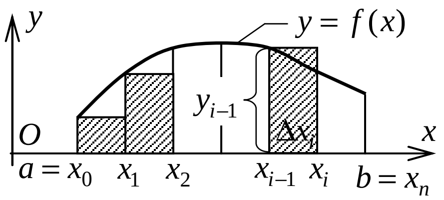

Рис. 49

Будемо спиратися на геометричний зміст інтеграла: $\int_a^b f(x)\,dx=S$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин з кроком $h=(b-a)/n$ точками $x_0=a$, $x_i=x_{i-1}+h$, $i=\overline{1,n}$.

Кожну i-ту частинну криволінійну трапецію наближено замінимо прямокутником з основою $\Delta x_i = h$ і висотою $y_{i-1}=f(x_{i-1})$, що є значенням функції $y=f(x)$ у крайній лівій точці елементарного відрізка $[x_{i-1};x_i]$. Площа цього прямокутника $\Delta S_i = y_{i-1}h$. Тоді площа S всієї криволінійної трапеції:

$$S\approx\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}h=h\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}\,.$$

Маємо ***формулу лівих прямокутників*** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=((b-a)/n)(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})+R_n}\,,$$

де R_n – похибка.

Якщо за висоти частинних прямокутників узяти значення функції $y = f(x)$ у крайніх правих точках елементарних відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1,n}$, то дістанемо ***формулу правих прямокутників***:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)(y_1 + y_2 + ... + y_n) + R_n},$$

де R_n – похибка.

Коли функція $f(x)$ монотонно зростає на відрізку $[a;b]$, то формули лівих і правих прямокутників дають наближене значення інтеграла відповідно з недостачею і з надлишком.

<u>Зауваження 1</u>. Формули прямокутників ґрунтуються на наближенні функції $f(x)$ кусково-сталою.

Якщо похідна $f'(x)$ існує й обмежена на відрізку $[a;b]$, то істинну абсолютну похибку $\Delta_0 = |R_n|$ обчислення інтеграла за цими формулами можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_0 = |R_n| \le \Delta = ((b-a)^2/(2n))M_1},$$

де $M_1 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$. Тобто, похибка формул прямокутників має порядок $1/n$.

<u>Формула трапецій</u>.

Як і в попередньому пункті а), розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n рівних частин. Сполучимо відрізком кінці кожної частинної дуги даної лінії $y = f(x)$, як показано на рис. 50.

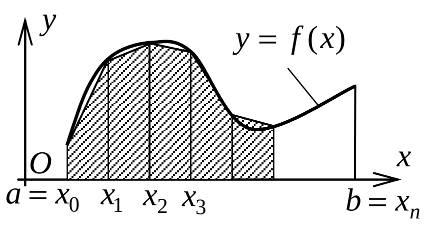

Рис. 50

Кожну i-ту частинну криволінійну трапецію наближено замінимо звичайною трапецією з висотою $\Delta x_i = h$ і основами $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ та $y_i = f(x_i)$, що має площу $\Delta S_i = (y_{i-1} + y_i)h/2$. Тоді площа S всієї криволінійної трапеції:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i) h/2 = h \sum_{i=1}^{n} (y_{i-1} + y_i)/2 .$$

Дістаємо ***формулу трапецій*** для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = ((b-a)/n)\cdot(y_0/2 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + y_n/2) + R_n} ,$$

де R_n – похибка.

Зауваження 2. Формула трапецій базується на наближенні функції $f(x)$ кусково-лінійною – вписаною ламаною.

Якщо друга похідна $f''(x)$ існує й обмежена на відрізку $[a;b]$, то істинну абсолютну похибку $\Delta_0 = |R_n|$ обчислення інтеграла за формулою трапецій можна оцінити граничною абсолютною похибкою Δ за допомогою співвідношення:

$$\boxed{\Delta_0 = |R_n| \le \Delta = ((b-a)^3/(12n^2))M_2} ,$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)|$. Тобто, похибка формули трапецій має порядок $1/n^2$.

Формула парабол (формула Симпсона).

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на парне число $n = 2m$ рівних частин з кроком $h = (b-a)/n$ точками $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ..., $x_{2i-1} = x_{2i-2} + h$, $x_{2i} = x_{2i-1} + h$, ..., $x_n = b$, $i = \overline{1,m}$.

Як це показано на рис. 51, дві сусідні елементарні криволінійні трапеції, що спираються на спарені відрізки $[x_{2i-2}; x_{2i-1}]$ і $[x_{2i-1}; x_{2i}]$, наближено замінимо однією криволінійною трапецією, обмеженою зверху дугою вертикальної параболи $y = A_i(x - x_{2i-1})^2 + B_i(x - x_{2i-1}) + C_i$. Ця парабола проходить через три верхні вершини даних частинних трапецій, що породжує лінійну алгебраїчну систему, з якої однозначно знаходяться невідомі коефіцієнти A_i, B_i, C_i:

$$A_i=(y_{2i-2}-2y_{2i-1}+y_{2i})/(2h^2)\,;\;\; B_i=(y_{2i}-y_{2i-2})/(2h)\,;$$
$$C_i=y_{2i-1}\,.$$

Тоді площа ΔS_{pi} елементарної параболічної трапеції:

$$\Delta S_{pi}=\int_{-h}^{h}\Big(A_i(x-x_{2i-1})^2+B_i(x-x_{2i-1})+C_i\Big)dx=(h/3)\times$$
$$\times(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i})\,.$$

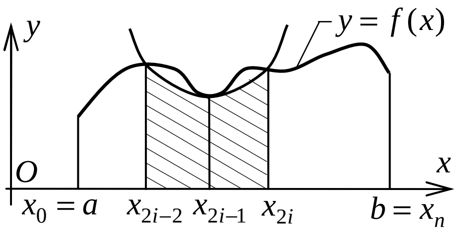

Рис. 51

Підсумовуючи ΔS_{pi} за всіма $i=\overline{1,m}$, дістаємо наближений вираз для площі S всієї криволінійної трапеції:

$$S\approx\sum_{i=1}^{m}\Delta S_{pi}=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}(h/3)(y_{2i-2}+4y_{2i-1}+y_{2i})\,.$$

Маємо ***формулу Симпсона*** (***формулу парабол***) для наближеного обчислення визначеного інтеграла:

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx=((b-a)/(3n))\cdot(y_0+y_n+4(y_1+y_3+...+y_{n-1})+\\+2(y_2+y_4+...+y_{n-2}))+R_n\,,\end{aligned}}$$

де R_n – похибка.

Зауваження 3. В основі формули Симпсона лежить неперервне кусково-параболічне наближення підінтегральної функції $f(x)$ вписаною лінією.

Якщо на відрізку $[a;b]$ існує обмежена четверта похідна $f^{IV}(x)$, то істинна абсолютна похибка $\Delta_0=|R_n|$ обчислення інтеграла за формулою парабол оцінюється граничною абсолютною похибкою Δ так:

$$\boxed{\Delta_0 = |R_n| \le \Delta = ((b-a)^5/(180n^4))M_4},$$

де $M_4 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f^{IV}(x)|$. Тобто, похибка формули Симпсона має порядок $1/n^4$.

Зауваження 4. Усі розглянуті формули тим точніші, чим густіше розбиття: $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. При одному й тому ж значенні n формула Симпсона – найбільш точна з них.

Приклад 1. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^1 (x+2)^{-2}dx$, застосовуючи при $n=4$ формули: а) лівих прямокутників, б) трапецій, в) Симпсона, . Оцінити допущені абсолютні похибки. Обчислення проводити з округленням до п'ятого десяткового знака після коми. Одержані результати порівняти з точним значенням інтеграла, обчисленим за формулою Ньютона – Лейбниця:

$$I_0 = \int_0^1 (x+2)^{-2}dx = -1/(x+2)\Big|_0^1 = -1/3 + 1/2 \approx 0{,}16667.$$

□ Розіб'ємо заданий відрізок інтегрування $[0;1]$ на $n=4$ рівних частин точками $x_0 = a = 0$, $x_1 = 0{,}25$, ..., $x_4 = b = 1$. Обчислимо значення y_0, y_1, ..., y_4 підінтегральної функції $y = 1/(x+2)^2$, що відповідають указаним точкам, і запишемо результат у таблицю:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75	1
y_i	0,25	0,19753	0,16	0,13223	0,11111

а) Знайдемо значення інтеграла за допомогою формули лівих прямокутників:

$$I \approx ((b-a)/4)(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = ((1-0)/4)\times$$

$$\times(0{,}25 + 0{,}19753 + 0{,}16 + 0{,}13223) = 0{,}73976/4 \approx 0{,}18494.$$

Знайдемо і порівняємо граничну Δ та істинну $\Delta_0 = |I - I_0|$ абсолютні похибки.

Щоб обчислити граничну абсолютну похибку Δ, знайдемо похідну підінтегральної функції: $y' = -2/(x+2)^3$. Найбільше за модулем значення цієї похідної на відрізку $[0;1]$ дорівнює $M_1 = |y'(0)| = 0{,}25$. Тоді $\Delta = ((1-0)^2/(2\cdot 4))\cdot 0{,}25 \approx 0{,}03125$.

Істинна абсолютна похибка $\Delta_0 = |0{,}18494 - 0{,}16667| \approx$ $\approx 0{,}01827$. Можемо переконатися, що істинна похибка не перевищує граничної: $\Delta_0 = 0{,}01827 < 0{,}03125 = \Delta$.

б) Обчислимо наближене значення інтеграла за формулою трапецій:

$$I \approx ((b-a)/4)\cdot(y_0/2 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4/2) = ((1-0)/4)\times$$
$$\times(0{,}25/2 + 0{,}19753 + 0{,}16 + 0{,}13223 + 0{,}11111/2) \approx 0{,}16758.$$

Знайдемо граничну Δ та істинну Δ_0 абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y''(x) = 6/(x+2)^4; \quad M_2 = |y''(0)| = 0{,}375;$$
$$\Delta = ((1-0)^3/(12\cdot 4^2))\cdot 0{,}375 \approx 0{,}00195;$$
$$\Delta_0 = |0{,}16758 - 0{,}16667| \approx 0{,}00091; \;\; \Delta_0 < \Delta.$$

в) Обчислимо наближене значення визначеного інтеграла за формулою Симпсона:

$$I \approx ((b-a)/(3\cdot 4))\cdot(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) =$$
$$= ((1-0)/(3\cdot 4))\cdot(0{,}25 + 0{,}11111 + 4\cdot(0{,}19753 +$$
$$+ 0{,}13223) + 2\cdot 0{,}16) = 2{,}00015/12 \approx 0{,}16668$$

Знайдемо граничну Δ та істинну Δ_0 абсолютні похибки і порівняємо їх:

$$y^{IV} = 120/(x+2)^6; \quad M_4 = |y^{IV}(0)| = 1{,}875;$$
$$\Delta = ((1-0)^5/(180\cdot 4^4))\cdot 1{,}875 \approx 0{,}00004;$$

$$\Delta_0 = |0{,}16668 - 0{,}16667| \approx 0{,}00001; \quad \Delta_0 < \Delta.$$

Порівнюючи результати обчислень, можна зробити висновок, що найближче до точного значення інтеграла, як очікувалося, дає формула парабол. ■

Приклад 2. Застосовуючи формулу Симпсона, обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx$ з точністю до $\alpha = 0{,}001$.

□ За умовою треба знайти значення інтеграла до третього десяткового знака після коми (з точністю $\alpha = 0{,}001$). Тому обчислення будемо проводити з округленням до четвертого (запасного) знака після коми.

Продиференціюємо підінтегральну функцію $y = x^2 e^{x^2}$:

$$y' = 2e^{x^2}(x^3 + x); \quad y'' = 2e^{x^2}(2x^4 + 5x^2 + 1);$$

$$y''' = 4e^{x^2}(2x^5 + 9x^3 + 6x); \quad y^{IV} = 4e^{x^2}(4x^6 + 28x^4 + 39x^2 + 6).$$

Оскільки четверта похідна $y^{IV} > 0$ і на відрізку інтегрування $[0;1]$ її похідна (п’ята) $y^{(5)} = 8e^{x^2} x(4x^6 + 40x^4 + 105x^2 + 45) \geq 0$, то $|y^{IV}| = y^{IV}$ монотонно зростає і набуває найбільшого значення при $x = 1$:

$$M_4 = \max_{x\in[0;1]} |y^{IV}(x)| = y^{IV}(1) = 308e \approx 837{,}2308.$$

Отже, гранична абсолютна похибка:

$$\Delta = ((1-0)^5 / (180n^4))M_4 \approx 4{,}6513 / n^4.$$

Нерівність $\Delta \leq \alpha$ розв’язуємо підбором:

$$4{,}6513/n^4 \leq 0{,}001; \quad n = 10: \ 4{,}6513/10^4 < 0{,}0005 < 0{,}001;$$

$$n = 8: \ 4{,}6513/8^4 > 0{,}0011 > 0{,}001.$$

Таким чином, розіб’ємо відрізок інтегрування $[0;1]$ на $n = 10$ рівних частин точками $x_0 = a = 0$, $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, ...,

$x_{10} = b = 1$. Обчислимо значення y_0, y_1, ..., y_{10} підінтегральної функції $y = x^2 e^{x^2}$ у відповідних точках і занесемо результат у таблицю:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	0,0101	0,0416	0,0985	0,1878	0,3210	0,5160	0,7998	1,2138	1,8208	2,7183

Далі за формулою парабол знайдемо наближене значення інтеграла:

$$I \approx ((b-a)/(3\cdot 10))\cdot(y_0 + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) +$$
$$+ 2\cdot(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)) = ((1-0)/30)\cdot(0 + 2{,}7183 + 4\times$$
$$\times(0{,}0101 + 0{,}0985 + 0{,}3210 + 0{,}7998 + 1{,}8208) + 2\cdot(0{,}0416 +$$
$$+ 0{,}1878 + 0{,}5160 + 1{,}2138)) = 0{,}6279 \approx 0{,}628. \ \blacksquare$$

1.7. Контрольні запитання

1. Яка функція служить первісною для даної функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?
3. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
4. Як перевірити правильність виконання операції інтегрування?
5. У чому полягає спосіб безпосереднього інтегрування?
6. У яких двох формах реалізується метод заміни змінної в невизначеному інтегралі?
7. Наведіть формулу методу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. Коли доречно застосовувати цей метод?
8. Наведіть типові випадки застосування інтегрування частинами і дайте відповідні рекомендації щодо вибору u.

9. Наведіть стандартний вигляд многочлена $P_n(x)$ n-го степеня.
10. Як розкладається многочлен з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники?
11. Що називається раціональним дробом? За якої умови раціональний дріб є правильним? Неправильним?
12. Як подати неправильний раціональний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу?
13. Які правильні раціональні дроби називаються елементарними (найпростішими)?
14. Який вигляд має розклад правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів?
15. Які методи застосовуються для знаходження коефіцієнтів цього розкладу? У чому суть методу невизначених коефіцієнтів і методу окремих значень? Дайте рекомендації щодо їх застосування.
16. Як інтегруються елементарні дроби різних типів?
17. Як інтегруються правильні раціональні дроби у наступних випадках: а) корені знаменника дійсні й прості; б) корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні; в) корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно спряжені?
18. Як за допомогою підстановок інтеграли з лінійними ірраціональностями зводяться до інтегралів від раціональних функцій?
19. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int \cos ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \sin bx \, dx$?
20. У чому полягає універсальна тригонометрична підстановка?
21. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int R(\sin x)\cos x \, dx$, $\int R(\cos x)\sin x \, dx$, $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x) \, dx$, $\int R(tg\, x) \, dx$, $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, де R – знак раціональної функції?
22. Як за допомогою тригонометричних підстановок інтегруються вирази, що містять квадратний корінь із суми чи різниці квадратів?
23. Наведіть приклади інтегралів, що “не беруться”.
24. Що таке інтегральна сума? Який її геометричний і фізичний зміст?

25. Що називається визначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний і фізичний зміст?
26. Сформулюйте необхідну умову інтегровності функції.
27. У чому полягає достатня умова інтегровності?
28. Наведіть формулу Ньютона – Лейбниця, що встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами.
29. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
30. Якою подвійною нерівністю задається оцінка визначеного інтеграла?
31. Що називається середнім інтегральним значенням функції на відрізку? Сформулюйте теорему про середнє інтегральне. У чому полягає її геометричний зміст?
32. Що таке визначений інтеграл зі змінною верхньою межею?
33. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі?
34. Наведіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
35. Що таке невласний інтеграл на необмеженому проміжку? У чому полягає його геометричний зміст?
36. Що таке невласний інтеграл від необмеженої функції? У чому полягає його геометричний зміст?
37. Сформулюйте ознаки збіжності невласних інтегралів з нескінченною верхньою межею.
38. Наведіть дві основні схеми застосування визначеного інтеграла.
39. Що таке область? Замкнена область? Обмежена область?
40. Яка область називається правильною (стандартною) в напрямку осі Oy? Осі Ox? Просто правильною?
41. Як знаходиться площа правильної в напрямку осі Oy області? Правильної в напрямку осі Ox області?
42. Як знаходиться площа криволінійного сектора в полярних координатах?
43. Яка область називається правильною (стандартною) в напрямку координатних променів полярної системи координат? Як знаходиться площа такої області?
44. Як знаходиться довжина дуги плоскої лінії у випадку, коли: а) лінія задана явно в прямокутних координатах; б) лінія задана параметрично в прямокутних координатах; в) лінія задана в полярних координатах?
45. Що таке кривина плоскої лінії? Як вона обчислюється?

46. Що таке коло, центр і радіус кривини?
47. Що називається вершиною плоскої кривої?
48. Як знаходиться об'єм тіла з відомими площами паралельних перерізів?
49. Як знаходиться об'єм тіла обертання?
50. Як знаходиться площа поверхні обертання?
51. Як знаходяться маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої дуги?
52. Як знаходяться маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої області?
53. Як обчислюється робота змінної сили?
54. Коли виникає потреба в чисельному інтегруванні? Наведіть формули лівих і правих прямокутників, трапецій, Симпсона наближеного обчислення визначеного інтеграла.

1.8. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Знайти невизначені інтеграли і одержані результати перевірити диференціюванням:

№ в-та	Завдання 1)	Завдання 2)
1	$\int \frac{(2x+7)dx}{x(x^2-6x+5)}$	$\int x^3 \ln^2 x dx$
2	$\int \frac{(2x^2+5)dx}{x(x^2+2x-8)}$	$\int x^2 \cos 4x\, dx$
3	$\int \frac{(3x^2-7)dx}{(x^2-5x+6)x}$	$\int x^2\, arctg\, 3x\, dx$
4	$\int \frac{(2x^2+3)\,dx}{(x-1)(x^2-5x+4)}$	$\int (x-1)\ln^2 x dx$
5	$\int \frac{(3x^2-2)dx}{x(x^2+4x-12)}$	$\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

6	$\int \frac{(3x^2+5x)dx}{(x+1)(x^2-4x+8)}$	$\int x^2 \cdot 5^{2x} dx$
7	$\int \frac{(4x^2-5)dx}{(x+4)(x^2+x-12)}$	$\int x^2 \sin 6x\, dx$
8	$\int \frac{(5x+4)dx}{(x-2)(x^2+x-6)}$	$\int (x^2+2)e^{-x/2} dx$
9	$\int \frac{(3x^2-2)dx}{(x-2)(x^2-2x+10)}$	$\int x\, arctg \frac{x}{4} dx$
10	$\int \frac{(6x+5)dx}{(x+1)(x^2-2x-3)}$	$\int x^2 \cdot 10^{3x} dx$
11	$\int \frac{(3x^2+7)dx}{(x-2)(x^2-4x+5)}$	$\int x^2 \cdot \cos \frac{x}{3} dx$
12	$\int \frac{(4x^2+3x)dx}{(x+2)(x^2-6x+8)}$	$\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}} dx$
13	$\int \frac{(2x^2-9x)dx}{(x-3)(x^2-6x+10)}$	$\int x\, arctg \frac{x}{2} dx$
14	$\int \frac{(3x^2-7)dx}{(x+1)(x^2-4x+8)}$	$\int \arcsin \frac{x}{2} dx$
15	$\int \frac{(4x^2+7x)dx}{(x-1)(x^2+10x+26)}$	$\int x^5 \ln^2 x dx$
16	$\int \frac{(2x^2-5)dx}{(x+2)(x^2+2x+10)}$	$\int (x^2-6x)e^{-3x} dx$
17	$\int \frac{(2x^2-3x)dx}{(x-3)(x^2+3x-4)}$	$\int \cos 4x \cdot \cos 8x\, dx$
18	$\int \frac{(3x^2-4)dx}{(x+2)(x^2+8x+17)}$	$\int x^{-4} \ln^2 x dx$

19	$\int \frac{(4x^2+x)dx}{(x+3)(x^2-2x+5)}$	$\int x \arcsin 4x\, dx$
20	$\int \frac{(4x^2-5)dx}{(x+2)(x^2+5x+4)}$	$\int (x^2-3)e^{-x}dx$
21	$\int \frac{(3x^2+4)dx}{x(x^2+5x-6)}$	$\int \sqrt{x^3}\ln^2 x dx$
22	$\int \frac{(4x^2-1)dx}{(x\_1)(x^2+2x+26)}$	$\int (x+1)\ arctg\ x\ dx$
23	$\int \frac{(5x+2)dx}{x(x^2-7x+6)}$	$\int (2x^2-1)e^{-2x}dx$
24	$\int \frac{(3x^2-x)dx}{(x+1)(x^2-8x+20)}$	$\int arctg \frac{x}{3}\ dx$
25	$\int \frac{(x^2+5x)dx}{(x-2)(x^2-6x+5)}$	$\int x^2 \cdot \sin \frac{x}{2}\ dx$
26	$\int \frac{(2x^2-7x)dx}{(x+2)(x^2-3x-10)}$	$\int (x^2-4x)e^{-3x}dx$
27	$\int \frac{(3x^2+7x)dx}{(x-1)(x^2-4x+3)}$	$\int \sin 2x \cdot \cos 8x\, dx$
28	$\int \frac{(4x^2-3)dx}{(x-3)(x^2-6x+25)}$	$\int x^2 e^{-3x}dx$
29	$\int \frac{(4x^2-7x)dx}{(x+2)(x^2+4x+13)}$	$\int (x^2-5)\cos \frac{x}{2} dx$
30	$\int \frac{(2x^2+7x)\ dx}{(x+2)(x^2+8x+25)}$	$\int \sin 2x \cdot \sin 6x\, dx$

Завдання 2. Обчислити визначені інтеграли:

№ в-та	Завдання 1)	Завдання 2)
1	$\int_3^4 x\ln(x-2)\,dx$	$\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,dx$
2	$\int_0^2 x^2 e^{-2x}dx$	$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$
3	$\int_1^e x^3\ln^2 x\;dx$	$\int_0^{\pi/4}\sin^3 2x\,dx$
4	$\int_0^{\pi} x^2\sin x\;dx$	$\int_0^{4\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}$
5	$\int_0^1 x^3\,arctg\,x\,dx$	$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\sin x}$
6	$\int_{3/2}^2 arctg(2x-3)\,dx$	$\int_3^8\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$
7	$\int_1^2 (x-1)\ln^2 x\,dx$	$\int_0^4 x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$
8	$\int_{1/4}^1 x\arcsin\sqrt{x}\,dx$	$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$
9	$\int_1^3\frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$	$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{3+2\sin x}\,dx$
10	$\int_0^1 (4x^2+1)e^{-2x}dx$	$\int_3^{10}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$
11	$\int_1^2 \ln\frac{x-1}{x}dx$	$\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$

12	$\int_{1/4}^{1/2} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$	$\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$
13	$\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx$	$\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$
14	$\int_{0}^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$	$\int_{0}^{\pi/2} \cos^5 x\,dx$
15	$\int_{0}^{1} (x^2+6x)e^{-4x}dx$	$\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$
16	$\int_{0}^{\pi} (x^2+\pi)\cos\frac{x}{2}\,dx$	$\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$
17	$\int_{-1/2}^{1/2} x\arccos 2x\,dx$	$\int_{0}^{\pi/4} \sin^5 x\,dx$
18	$\int_{1}^{4} \ln(x+2)\,dx$	$\int_{0}^{\pi/3} \frac{dx}{3+\cos x}$
19	$\int_{-1}^{0} (x^2+1)e^{2x}dx$	$\int_{0}^{\pi/4} \sin^4\frac{x}{2}\,dx$
20	$\int_{1/2}^{1} \arcsin(1-x)\,dx$	$\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$
21	$\int_{0}^{\pi/8} x^2\sin 4x\,dx$	$\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$
22	$\int_{0}^{1} (x^2-8x)e^{3x}dx$	$\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x^4dx}{(4-x^2)^{3/2}}$
23	$\int_{1}^{3} arctg\sqrt{x}\,dx$	$\int_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

24	$\int_1^e (x-e)\ln^2 x\,dx$	$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^4 x\,dx$
25	$\int_1^3 x\,arctg\sqrt{x}\,dx$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{(1+\sin x)^2}$
26	$\int_0^1 (2x^2-1)e^{x/2}dx$	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{5+4\sin x}$
27	$\int_1^2 x\ln\frac{x-1}{x}dx$	$\int_0^{2arctg(1/2)} \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2}dx$
28	$\int_0^1 \frac{arctg\,x}{(1+x)^2}\,dx$	$\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$
29	$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$	$\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-1}dx$
30	$\int_2^3 \frac{\ln(x-1)}{x^2}\,dx$	$\int_0^{\pi/8} \cos^4 x\,dx$

Завдання 3. Користуючись визначеним інтегралом, знайти довжину заданої дуги L плоскої лінії:

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\rho = 6\cos\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi/3)$	16	$\rho = 4(1-\sin\varphi)$ $(0 \le \varphi \le \pi)$
2	$\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$	17	$\begin{cases} x = 5(t-\sin t) \\ y = 5(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$
3	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$	18	$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2\,arctg\,t \end{cases}$ $(0 \le t \le 1)$

4	$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$	19	$\begin{cases} x = 10\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/2)$
5	$y = 2 - e^x$ $(\ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8})$	20	$\rho = 6\cos^3(\varphi/3)$ $(0 \le \varphi \le \pi/2)$
6	$y = \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$ $(1/4 \le x \le 1)$	21	$y = \ln x$ $(\sqrt{3} \le x \le \sqrt{15})$
7	$y = \ln(x + (x^2 - 1)^{1/2})$ $(5/4 \le x \le 5/3)$	22	$y = -\ln\cos x$ $(0 \le x \le \pi/6)$
8	$y = (x^2 - 2\ln x)/4$ $(1 \le x \le 2)$	23	$\rho = 2\sin\varphi$ $(0 \le \varphi \le 2\pi/3)$
9	$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le \pi/3)$	24	$y = \ln(x^2 - 1)$ $(2 \le x \le 3)$
10	$\rho = 4e^{3\varphi/4}$ $(\pi/4 \le \varphi \le \pi/2)$	25	$y = (1/3)(x^2 + 2)^{3/2}$ $(1 \le x \le 2)$
11	$y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$ $(0 \le x \le 7/9)$	26	$y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ $(-2 \le x \le 2)$
12	$y = (2/3)(x - 1)^{3/2}$, $1 \le x \le 9$	27	$y = 2\ln(x^2/4 - 1)$ $(3 \le x \le 4)$
13	$\rho = 4e^{4\varphi/3}$ $(\pi/4 \le \varphi \le \pi/2)$	28	$\rho = 4\sin^3(\varphi/3)$ $(0 \le \varphi \le 3\pi/2)$
14	$y = 4 + \ln\cos x$ $(0 \le x \le \pi/3)$	29	$\rho = 6e^{5\varphi/12}$ $(0 \le \varphi \le \pi/2)$
15	$y = \ln\sin x$ $(\pi/6 \le x \le \pi/2)$	30	$\rho = 4(1 - \cos\varphi)$ $(\pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2)$

Завдання 4. Плоска область D задана рівняннями ліній, що її обмежують. Необхідно:

1) Зобразити область D у декартовій прямокутній системі координат Oxy.

2) Подати область D як правильну в напрямку осі Oy, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити площу плоскої області D, застосовуючи визначений інтеграл по x.

3) Подати область D як правильну в напрямку осі Ox, при необхідності розбиваючи її на частини, і зробити відповідний рисунок. Обчислити площу плоскої області D, застосовуючи визначений інтеграл по y.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y = x^2 - 4x + 3;$ $y = -x + 1$	16	$y = (2/3)\,x^2;$ $y = 2x^2 - 4x$
2	$y = (x-2)^2;$ $y = 4x - 8$	17	$x + y = 2;$ $y = \sqrt{x};$ $y = 0$
3	$xy = 4;$ $x - y = 0;$ $y = 4$	18	$y = (x+1)^2;$ $y^2 = x + 1$
4	$y = \sqrt{1 - x^2};$ $x = y + 1;$ $y = 1$	19	$y = -x^2 - 6x + 7;$ $y = -x - 1$
5	$y = x^2 - 3x + 1;$ $y = x - 2$	20	$y = 2x - x^2 + 3;$ $y = x^2 - 4x + 3$
6	$x = (y-2)^2;$ $x = 4y - 8$	21	$x = 4 - y^2;$ $x = y^2 - y$
7	$y^2 = 4 - x;$ $x + 3y = 0$	22	$y = 4 - x;$ $y = 0;$ $x = \sqrt{2y}$
8	$x = 4 - y^2;$ $y = x - 2$	23	$y = 4 - x^2;$ $y = x^2 - 2x$

9	$y=(x-1)^2$; $y^2=x-1$	24	$y=x^2$; $y=2-x$
10	$y^2=2x+1$; $x-y-1=0$	25	$x=4-(y-1)^2$; $x=y^2-4x+3$
11	$x=y^2-4$; $y=-x-2$	26	$y=x^2+4x$; $y=3x+6$
12	$y=(2/3)\,x^2$; $y=-2x^2+8x$	27	$xy=6$; $x=6$; $y=x-1$
13	$xy=4$; $y=5-x$	28	$y=4-x^2$; $y=x+2$
14	$x+y=2$; $y=x^3$; $y=0$	29	$y=-x^2+2x+2$; $y=-x-2$
15	$y=x^2+4x$; $y=x+4$	30	$y=x^2/2$; $xy=4$; $x=4$

Завдання 5. Користуючись визначеним інтегралом, знайти об’єм тіла V, отриманого обертанням навколо координатної осі Ox заданої плоскої області D, що обмежена указаними лініями.

Зробити рисунок плоскої області D у декартовій прямокутній системі координат Oxy на площині та рисунок тіла обертання V у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$ у просторі.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y=-x^2+5x-6$; $y=0$	16	$y=2x-x^2$, $y=-x+2$
2	$x^2+(y-2)^2=4$	17	$y=x^2$; $y^2-x=0$
3	$y=\sin^2 x$; $y=0$; $0\le x\le \pi/2$	18	$y=4-x^2$; $y=\sqrt{4-x^2}$
4	$y=2x-x^2$; $y=4x-2x^2$	19	$y=x^3$; $y=\sqrt{x}$

5	$y=\cos^2 x$; $y=0$; $0\le x\le \pi/2$	20	$y=\sin^{3/2} x$; $y=0$; $0\le x\le \pi$
6	$y=2x-x^2$; $y=1$; $y=\sqrt{-x}$	21	$y=1-x^2$; $y=1$; $x=1$
7	$y=e^x$; $y=xe^x$; $x=0$	22	$y^2=(4-x)^3$; $x=0$
8	$xy=4$, $y=x$, $x=4$	23	$y=2-x^2$, $y=x^2$
9	$x=\sqrt{4-3y^2}$; $y=x^2$; $y=0$	24	$y=x^2+1$; $x=1$; $y=\sqrt{1-x^2}$
10	$y=\sqrt{x-1}$; $y=1$; $x=1$	25	$y=\ln x$; $y=0$; $x=e^2$
11	$y=(x-1)^2$; $y=1$	26	$y=x^2$; $y=\sqrt{2-x^2}$
12	$y=x^3$; $y=2-x$; $x=0$	27	$y=(x-1)^2$; $x=2$; $y=0$
13	$y=9-2x$; $x=\sqrt{3y}$; $y=0$	28	$y=4+x^2$; $x=0$; $y=x^3$
14	$y=2-x^2$; $x=0$; $y=x^{3/2}$	29	$y=x^3$; $y=\sqrt{2-x}$; $x=0$
15	$y=1-x^2$; $x=1$; $y=1+x^2$	30	$y=\sqrt{2-x^2}$; $y=x^3$; $x=0$

Завдання 6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням заданої дуги навколо осі Ox:

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$y=3(e^{x/6}+e^{-x/6})$; $0\le x\le 6$	16	$y=2\sqrt{x-1}$; $4\le x\le 9$
2	$y=3\sqrt{x}$; $4\le x\le 18$	17	$y=(e^{2x}+e^{-2x})/4$; $0\le x\le 1/2$

3	$y=\sqrt{4-x^2}$; $0\le x\le 2$	18	$y=(1/9)(x-27)\sqrt{x}$; $3\le x\le 6$
4	$y=\sqrt{3x}$; $1/4\le x\le 3/2$	19	$y=\sqrt{8x-x^2}$; $0\le x\le 4$
5	$y=\sqrt{4-2x^2}$; $0\le x\le 1$	20	$y=\sqrt{16-3x^2}$; $0\le x\le 2$
6	$y=(1/2)\sqrt{4-x^2}$; $1\le x\le 2$	21	$y=2\sqrt{1-x^2}$; $0\le x\le 1$
7	$y=x^3/12$; $0\le x\le \sqrt{3}$	22	$y=\sqrt{x(6-x)}$; $0\le x\le 3$
8	$y=\sqrt{x(12-x)}$; $0\le x\le 6$	23	$y=e^{x/2}+e^{-x/2}$; $0\le x\le 2$
9	$y=\sqrt{x(x-1/3)}$; $1/3\le x\le 1$	24	$y=2\sqrt{12-x^2}$; $0\le x\le 2$
10	$y=(1/2)\sqrt{12-3x^2}$; $0\le x\le 2$	25	$y=2\sqrt{9-x^2}$; $-3\le x\le 0$
11	$y=(1/2)\sqrt{3-x^2}$; $0\le x\le 1$	26	$y=(1/3)(x-3)\sqrt{x}$; $1\le x\le 3$
12	$y=4x^3/3$; $0\le x\le 1/\sqrt{3}$	27	$y=2\sqrt{9-x^2/3}$; $0\le x\le 3\sqrt{3}$
13	$y=2(e^{x/4}+e^{-x/4})$; $0\le x\le 4$	28	$y=x^3/9$; $0\le x\le 2$
14	$y=\sqrt{2x}$; $4\le x\le 18$	29	$y=(1/6)(12-x)\sqrt{x}$; $3\le x\le 6$
15	$y=2\sqrt{4+x}$; $4\le x\le 11$	30	$y=x^3/3$; $0\le x\le 1$

Завдання 7. Користуючись означенням, обчислити невласний інтеграл чи встановити його розбіжність:

№ в-та	Завдання 1)	Завдання 2)
1	$\int_{e}^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{x^2}$	$\int_{1}^{2} \frac{x\, dx}{\sqrt{4-x^2}}$
2	$\int_{6}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+8}$	$\int_{0}^{1} \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{x^5-1}}$
3	$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$	$\int_{3}^{6} \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2-9}}$
4	$\int_{1/3}^{+\infty} \frac{dx}{(1+9x^2)\sqrt{arctg 3x}}$	$\int_{0}^{1/5} \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$
5	$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$	$\int_{0}^{1} \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x}$	$\int_{0}^{\pi/3} \frac{\sin x\, dx}{1-2\cos x}$
7	$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$	$\int_{0}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}$
8	$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	$\int_{0}^{\pi/16} \frac{dx}{\sin^2 4x}$
9	$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{(2x-e)\ln(2x-e)}$	$\int_{0}^{3} \frac{x\, dx}{9-x^2}$
10	$\int_{1}^{+\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$	$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\,(\ln x)^{4/3}}$
11	$\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x}$	$\int_{0}^{\pi/6} \frac{\sin 3x\, dx}{\sqrt{\cos 3x}}$

12	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+13}$	$\int_{0}^{3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{27-x^3}}$
13	$\int_{4}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x-3}$	$\int_{0}^{\pi/8} \frac{\cos 4x\, dx}{\sqrt{\sin 4x}}$
14	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$	$\int_{-1}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{8-x^3}}$
15	$\int_{0}^{+\infty} \frac{x\, dx}{(x^2+25)^{3/2}}$	$\int_{2}^{\sqrt{5}} \frac{x\, dx}{\sqrt{x^4-16}}$
16	$\int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$	$\int_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 2x}$
17	$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} \sin x\, dx$	$\int_{-2}^{0} \frac{x^2 dx}{(x^3+8)^2}$
18	$\int_{1}^{+\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{x+3}}$	$\int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}$
19	$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x dx}{1+e^x}$	$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$
20	$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln^2 x-1)}$	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
21	$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x} dx$	$\int_{0}^{2} x^{-2} e^{-2/x} dx$
22	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$	$\int_{1}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$
23	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$	$\int_{1}^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
24	$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x}$

25	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+x^2}}$
26	$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$	$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x\,dx}{2\sin x-1}$
27	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$	$\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^4}}$
28	$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$	$\int_0^{\pi/6} ctg\,3x\,dx$
29	$\int_1^{+\infty} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+3e^2}}$	$\int_0^1 \frac{\arcsin^3 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$
30	$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{\ln^2 x\,dx}{x}$	$\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^{3/4}}$

Завдання 8. Знайти наближено заданий визначений інтеграл $I=\int_a^b f(x)\,dx$ указаними способами, розбиваючи відрізок інтегрування $[a;b]$ на $n=10$ рівних частин. Для кожного методу знайти істинну абсолютну похибку $\Delta_0 = |I - I_0|$, де I_0 – точне значення інтеграла, обчислене за формулою Ньютона – Лейбниця. Усі обчислення проводити з округленням до четвертого десяткового знака після коми.

У варіантах №1, 4, 7, ..., 28 використати формули лівих прямокутників і трапецій. У варіантах №2, 5, 8, ..., 29 – формули правих прямокутників і парабол. У варіантах №3, 6, 9, ..., 30 – формули трапецій і парабол.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{(x^4+9)^{1/2}}$	16	$\int_0^{10} \frac{15x^2\,dx}{(x^3+225)^{3/2}}$
2	$\int_0^2 \frac{3x^2\,dx}{(x^3+1)^{3/2}}$	17	$\int_2^3 \frac{2x\,dx}{x^4-1}$

3	$\int_{-1}^{2} x^2 \sqrt{x^3+1}\,dx$	18	$\int_{-3}^{0} x^2 \sqrt{x^3+36}\,dx$
4	$\int_{0}^{2} (2x^2-8)^{1/3}\,x\,dx$	19	$\int_{0}^{4} x\sqrt{x^2+9}\,dx$
5	$\int_{1}^{3} \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{x^3+3x}}$	20	$\int_{1}^{8} \frac{(3x^2+8)\,dx}{\sqrt{x^3+8x}}$
6	$\int_{1}^{5} \frac{(2x+15)\,dx}{x^2+15x}$	21	$\int_{0}^{1} \frac{6x^2\,dx}{x^6+1}$
7	$\int_{0}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{9+x^2}}$	22	$\int_{0}^{2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5+4}}$
8	$\int_{-3}^{0} (x^3+27)^{1/3}\,x^2\,dx$	23	$\int_{-2}^{3} x^2 \sqrt{x^3+9}\,dx$
9	$\int_{0}^{1} \frac{6x\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$	24	$\int_{0}^{2} \frac{3x^2\,dx}{(3x^3+1)^{3/2}}$
10	$\int_{1}^{2} (x^3-9)^{1/3}\,x^2\,dx$	25	$\int_{0}^{3} x\sqrt{x^2+16}\,dx$
11	$\int_{0}^{2} x^3 \sqrt{x^4+9}\,dx$	26	$\int_{-2}^{0} (x^3+8)^{1/3}\,x^2\,dx$
12	$\int_{1}^{2} \frac{(9x^2-2)\,dx}{(3x^3-2x+7)^{1/3}}$	27	$\int_{1}^{2} \frac{(3x^2+2)\,dx}{x^3+2x-2}$
13	$\int_{0}^{2} \frac{3x^2\,dx}{(9+2x^3)^{1/2}}$	28	$\int_{2}^{4} \frac{(x-1)\,dx}{(x^2-2x+8)^{1/3}}$
14	$\int_{0}^{1} \frac{6x^2 dx}{\sqrt{4-x^6}}$	29	$\int_{1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+8}}$
15	$\int_{0}^{3} (x^2-1)^{1/3}\,x\,dx$	30	$\int_{0}^{1} 4x^3(x^8+1)^{-1}\,dx$

Змістовий модуль 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

2.1. Загальні поняття про диференціальні рівняння

2.1.1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь

При вивченні різноманітних явищ в науці, техніці та інших сферах часто не вдається безпосередньо встановити функціональну залежність між значеннями шуканих і відомих величин, проте можливо виявити зв'язки між нескінченно малими приростами (диференціалами) змінних, що фігурують у задачі. Диференціальні зв'язки завдяки лінеаризації, як правило, суттєво простіші скінченних. Крім того, результати спостережень чи експериментів часто подаються в диференціальній формі. Тому для моделювання неперервних динамічних процесів широко використовуються диференціальні та інші споріднені з ними рівняння. Наведемо декілька прикладів подібних задач.

Задача 1. Тіло масою m падає з деякої висоти. Потрібно встановити закон $v = v(t)$ зміни швидкості v з бігом часу t, якщо на тіло діють сила тяжіння $F_1 = mg$ (g − прискорення вільного падіння) і гальмуюча сила опору повітря $F_2 = -kv$, пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності $k > 0$). За другим законом Ньютона $ma = F$, де $a = dv/dt$ − прискорення рухомого тіла, а $F = F_1 + F_2 = mg - kv$ − рівнодійна сил, діючих на тіло. Отже, $dv/dt = mg - kv$. Одержано диференціальне рівняння відносно невідомої функції $v = v(t)$.

Задача 2. Розглянемо явище радіоактивного розпаду. Відомо, що швидкість (інтенсивність) розпаду m' прямо пропорційна масі m наявної радіоактивної речовини. Таку закономірність описує диференціальне рівняння $m' = -km$ або $dm/dt = -km$, де k − додатна стала розпаду; t − час. Знак мінус перед k вказує на зменшення маси радіоактивної речовини. Розв'язок рівняння $m(t) = m_0 e^{-kt}$ дає зміну маси m з часом t. Тут m_0 − початкова маса речовини.

Аналогічне диференціальне рівняння моделює процес затухання сили струму в контурі, що складається з послідовно сполучених активного опору та індуктивності, при його відключенні від джерела зі сталою електрорушійною силою і закороченні.

Задача 3. Нехай ведеться виборча компанія. У початковий момент часу $t_0 = 0$ агітаційну інформацію про кандидата A мають x_0 громадян, загальна кількість яких дорівнює X . Далі ця інформація поширюється через спілкування людей між собою. Припустимо, що швидкість цього процесу dx/dt (зростання числа громадян $x = x(t)$, ознайомлених з даною інформацією за час t) прямо пропорційна як числу x вже проінформованих на даний момент t людей, так і числу $X - x$ громадян, ще не охоплених агітацією. Тоді приходимо до диференціального рівняння $dx/dt = kx(X - x)$, де k − додатний сталий коефіцієнт пропорційності. Розв'язком цього рівняння служить *логістична крива* $x = X\big/\left(1 + (X / x_0 - 1)\, e^{-Xkt}\right)$.

Подібне диференціальне рівняння моделює поширення технічних нововведень, зростання популяції певного виду тварин та інші процеси.

2.1.2. Поняття про диференціальне рівняння. Загальний і частинний розв'язки та їх геометричний зміст

Рівняння називається ***диференціальним***, якщо воно містить похідні (диференціали) шуканої функції.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної (диференціала), що входить у нього.

Коли шукана функція $y = y(x)$ є функцією однієї змінної x, то диференціальне рівняння (ДР) називають ***звичайним***. Далі будемо займатися лише звичайними ДР.

Диференціальне рівняння n***–го порядку*** зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', \ldots,\ y^{(n)}$ (чи відповідні диференціали).

Диференціальне рівняння n–го порядку можна подати в ***за-***

гальному вигляді

$$\boxed{F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0},$$

де $y=y(x)$ – шукана функція. Рівняння може не містити в явному вигляді незалежну змінну x, саму шукану функцію y та її похідні нижчих порядків $y',y'',...,y^{(n-1)}$, але до нього обов'язково повинна входити n-а похідна $y^{(n)}$.

Це неявна форма запису ДР. Розв'язавши загальне рівняння відносно найвищої похідної, отримаємо ***канонічний*** (***нормальний***) ***вигляд*** ДР

$$\boxed{y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}\right)}.$$

Наприклад, $y'''+5(y')^4-\sqrt{y}-2e^x=0$ – ДР третього порядку, подане у загальній (неявній) формі; $y^{(6)}=y'''-4x(y')^8$ – ДР шостого порядку, записане в канонічній (явній) формі.

Уже відома задача знаходження первісної $y=F(x)$ для даної функції $f(x)$ породжує найпростіше диференціальне рівняння $y'=f(x)$, розв'язування якого зводиться до інтегрування.

Розв'язком диференціального рівняння називається довільна функція $y=y(x)$, що при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність.

Графік розв'язку ДР називається ***інтегральною кривою***.

Зауваження 1. Розв'язок ДР n–го порядку є n разів диференційовною функцією. Тому інтегральна крива є досить гладкою лінією.

Процес знаходження розв'язку ДР називається його ***інтегруванням***.

Зауваження 2. Розв'язок ДР, записаний ***у неявній формі***, часто називають ***інтегралом*** диференціального рівняння.

Зауваження 3. Розв'язок ДР також може подаватися ***в параметричній формі***.

Зауваження 4. Диференціальне рівняння вважається ***розв'язаним***, якщо множина його розв'язків задається співвідношеннями без диференціювання, що можуть включати операції інтегрування відомих функцій. Серед вказаних інтегралів допускаються й ті, що не виражаються через елементарні функції у скінченному вигляді. Як правило, будемо намагатися знаходити розв'язок ДР у найбільш простій явній формі та обчислювати всі наявні інтеграли.

Приклад 1. Перевірити, чи служить явно задана функція $y = C_1 + C_2 e^{10x} - x^3/30 - x^2/100 - x/500$, де C_1, C_2 − довільні сталі, розв'язком диференціального рівняння $y'' - 10y' = x^2$.

□ Диференціюючи вказану функцію, знайдемо

$$y' = 10C_2 e^{10x} - x^2/10 - x/50 - 1/500;$$

$$y'' = 100C_2 e^{10x} - x/5 - 1/50.$$

Підставимо функцію та її похідні у рівняння:

$$100C_2 e^{10x} - x/5 - 1/50 - 10\big(10C_2 e^{10x} - x^2/10 - x/50 -$$

$$-1/500\big) = x^2;\ \ 100C_2 e^{10x} - x/5 - 1/50 -$$

$$-100C_2 e^{10x} + x^2 + x/5 + 1/50 = x^2;\ \ x^2 = x^2.$$

Оскільки тотожність вірна, то вказана функція є розв'язком заданого ДР. ■

Приклад 2. Перевірити, що функція $y = y(x, C)$, яка задана в неявному вигляді співвідношенням $-x^2/(2y^2) = \ln|Cy|$, де C − довільна стала, служить розв'язком диференціального рівняння $dy/dx = xy/(x^2 - y^2)$.

□ Знайдемо похідну неявно заданої функції:

$$\left(-x^2/(2y^2)\right)' = \left(\ln|Cy|\right)';\ \ -\frac{1}{2}\cdot\frac{2xy^2 - 2x^2 y\, y'}{y^4} = \frac{Cy'}{Cy};$$

$$\frac{-xy + x^2 y'}{y^3} = \frac{y'}{y};\quad -xy + x^2 y' = y^2 y';\ \ y' = xy/(x^2 - y^2).$$

Підстановка отриманого виразу в ДР дає вірну тотожність

$$xy/(x^2 - y^2) = xy/(x^2 - y^2).$$

Отже, вказана функція є розв'язком заданого ДР. ■

Приклад 3. Перевірити, що функція $y = y(x, C)$, яка задана параметрично співвідношеннями $x = C\cos t$ і $y = C^3 \sin^3 t$, де C − довільна стала, служить розв'язком диференціального рівняння $(y')^3 + 27x^3 y = 0$.

□ Знайдемо похідну параметрично заданої функції:

$$x_t' = -C\sin t\,; \quad y_t' = 3C^3 \sin^2 t\cos t\,;$$

$$y_x' = y_t'/x_t' = -3C^2 \sin t\cos t\,.$$

Підставимо функцію та її похідну в рівняння:

$$(-3C^2 \sin t\cos t)^3 + 27(C\cos t)^3 C^3 \sin^3 t = 0\,; \;\; 0 = 0\,.$$

Отже, вказана функція є розв'язком заданого ДР. ■

Щоб знайти шукану функцію з ДР n-го порядку, треба в загальному випадку виконати n операцій інтегрування, що дає n довільних сталих. Таким чином, диференціальне рівняння має безліч розв'язків.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку є функція $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, що містить n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ і задовольняє диференціальному рівнянню при будь-яких допустимих значеннях $C_1, C_2, ..., C_n$.

Геометричний зміст: загальному розв'язку відповідає сім'я інтегральних кривих. При цьому через кожну внутрішню точку області визначення сім'ї проходить єдина інтегральна крива.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку при конкретних фіксованих значеннях довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$.

Геометричний зміст: частинному розв'язку відповідає конкретний екземпляр з сім'ї інтегральних ліній.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = 3x^2$. Вказати три його частинні розв'язки.

□ $dy/dx = 3x^2$; $dy = 3x^2 dx$; $y = 3\int x^2 dx = x^2 + C$.

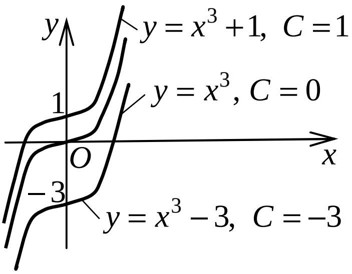

Рис. 52

Отже, $y = x^3 + C$ – загальний розв'язок. Геометрично йому відповідає однопараметрична сім'я інтегральних кривих. Поклавши послідовно $C = -3$, $C = 0$ і $C = 1$, отримаємо три частинні розв'язки, зображені на рис. 52. ■

2.1.3. Початкові та крайові умови. Задача Коші та крайова задача

Для знаходження конкретних значень довільних сталих, що входять у загальний розв'язок, звичайно використовуються:

1) ***початкові умови*** – відомі значення функції та її похідних в деякій одній фіксованій точці $x = x_0$; або

2) ***крайові*** (***граничні***) ***умови*** – відомі значення функції та її похідних в декількох різних фіксованих точках.

Початкових або крайових умов повинно бути стільки, скільки довільних сталих.

Для ДР n-го порядку початкові умови мають вигляд:

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0';...;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ – відомі числа (початкові дані).

Диференціальне рівняння разом з початковими умовами називають ***початковою задачею*** (***задачею Коші***).

Диференціальне рівняння разом з крайовими умовами називають ***крайовою*** (***граничною***) ***задачею***.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші (знайти частинний розв'язок заданого ДР, що задовольняє вказаним початковим умовам):

$$y'' = e^{-x/2};\quad y(0) = -1;\quad y'(0) = 1.$$

□ Знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$y' = \int e^{-x/2} dx;\quad y' = -2e^{-x/2} + C_1;$$

$$y=\int(-2e^{-x/2}+C_1)\,dx; \quad y=4e^{-x/2}+C_1x+C_2.$$

В одержаний загальний розв'язок та його першу похідну підставимо задані початкові умови і знайдемо C_1, C_2:

$$-1=4e^0+C_1\cdot 0+C_2;\ 1=-2\,e^0+C_1;\ \ C_1=3,\ C_2=-5.$$

Тоді частинний розв'язок рівняння (розв'язок задачі Коші):

$$y_K=4e^{-x/2}+3x-5. \ \blacksquare$$

Приклад 2. Розв'язати крайову задачу (знайти частинний розв'язок заданого ДР, що задовольняє вказаним граничним умовам):

$$y''=6x; \quad y(0)=3; \ \ y'(1)=-1.$$

□ Знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$y'=6\int x\,dx; \ \ y'=3x^2+C_1; \ \ y=\int(3x^2+C_1)\,dx;$$

$$y=x^3+C_1x+C_2.$$

В отриманий загальний розв'язок та його першу похідну підставимо задані крайові умови і знайдемо C_1, C_2:

$$3=0+C_1\cdot 0+C_2;\ -1=3\cdot 1+C_1;\ \ C_1=-4,\ C_2=3.$$

Звідси частинний розв'язок (розв'язок крайової задачі):

$$y_b=x^3-4x+3. \ \blacksquare$$

Зауваження 1. У диференціального рівняння можуть існувати так звані ***особливі розв'язки***, які неможливо одержати із загального розв'язку ні при яких значеннях довільних сталих. Геометрично особлива інтегральна крива не входить у сім'ю, що відповідає загальному розв'язку, а тому не може лежати всередині області існування цієї сім'ї.

Наприклад, нехай маємо рівняння $y'=y^{2/3}$. При $y\neq 0$ отримаємо: $y^{-2/3}y'=1$; $(3y^{1/3})'=1$; $3y^{1/3}=x+C$. Звідси $y=(1/27)(x+C)^3$ – загальний розв'язок. Але розв'язок $y(x)\equiv 0$ у нього не входить і тому є особливим.

Зауваження 2. У деяких випадках виникає обернена задача знаходження ДР, що описує задану сім'ю інтегральних кривих.

Приклад 3. Знайти ДР першого порядку, загальний розв’язок якого $y = C\sin x - x^2$, де C − довільна стала.

□ Продиференціюємо загальний розв’язок. Вираз для похідної $y' = C\cos x - 2x$ не можна назвати диференціальним рівнянням, оскільки коефіцієнт C − невизначений. Вилучимо з нього C. Для цього з початкового рівняння $y = C\sin x - x^2$ виразимо C і підставимо знайдене значення у співвідношення для похідної:

$$C = (y + x^2)/\sin x; \quad y' = \cos x(y + x^2)/\sin x - 2x \text{ або}$$

$$y'\sin x = y\cos x + x^2\cos x - 2x\sin x$$

− шукане ДР першого порядку. ■

Приклад 4. Знайти ДР першого порядку, загальний інтеграл якого $x^3 y + 4x = Ce^{2y}$.

□ Продиференціюємо загальний інтеграл (знайдемо похідну неявної функції):

$$(x^3 y + 4x)' = (Ce^{2y})'; \quad 3x^2 y + x^3 y' + 4 = 2Ce^{2y} y';$$

$$2Ce^{2y} y' - x^3 y' = 3x^2 y + 4; \quad y' = (3x^2 y + 4)/(2Ce^{2y} - x^3).$$

Вилучимо з отриманого виразу невизначений коефіцієнт C. З рівняння $x^3 y + 4x = Ce^{2y}$ маємо $C = (x^3 y + 4x)e^{-2y}$.

Підставимо це значення в одержану похідну:

$$y' = (3x^2 y + 4)\Big/\left(2e^{2y} \cdot (x^3 y + 4x)e^{-2y} - x^3\right);$$

$$y' = (3x^2 y + 4)/(2x^3 y + 8x - x^3)$$

− шукане ДР першого порядку. ■

Зауваження 3. Теорія диференціальних рівнянь ще далека до завершення. Для ДР у канонічній формі доведено теореми, що виражають достатні умови існування та єдиності розв'язку відповідної задачі Коші. На жаль, аналогічні умови для крайових задач значно жорсткіші, менше просунені й досить віддалені від необхідних. У практичних застосуваннях задача Коші, при певних обмеженнях, має єдиний розв'язок, крайова задача може мати довільну кількість розв'язків.

2.2. Диференціальні рівняння першого порядку

2.2.1. Умови існування й єдиності розв'язку задачі Коші

Диференціальне рівняння першого порядку має ***загальний вигляд*** $\boxed{F(x,y,y')=0}$, де $y=y(x)$ – шукана функція незалежної змінної x.

Припустимо, що це рівняння можна розв'язати відносно похідної і подати його в ***нормальній формі*** $\boxed{y'=f(x,y)}$. Для таких рівнянь справджується

теорема Коші (існування й єдиності розв'язку). *Нехай у рівнянні* $y'=f(x,y)$ *функція* $f(x,y)$ *та її частинна похідна* $f_y'(x,y)$ *неперервні у деякій області* D *площини* Oxy. *Тоді для довільної внутрішньої точки* $M_0(x_0;y_0)$ *цієї області існує визначений і диференційовний у деякому околі точки* x_0 *єдиний розв'язок* $y=y(x)$ *даного рівняння, що задовольняє початковій умові* $y(x_0)=y_0$. (Без доведення).

З неперервності правої частини $f(x,y)$ випливає існування розв'язку, а умова неперервності похідної $f_y'(x,y)$ забезпечує його єдиність.

Геометричний зміст: для кожної внутрішньої точки $M_0(x_0;y_0)$ області D існує і причому єдина інтегральна крива ДР $y'=f(x,y)$, яка проходить через цю точку.

Особливими точками ДР $y'=f(x,y)$ називаються ті, в яких не виконуються умови теореми Коші, тобто де права частина $f(x,y)$ або її похідна $f_y'(x,y)$ мають розрив.

Такі точки можуть бути ізольованими чи утворювати ***особливі лінії***. Якщо особлива лінія є інтегральною, то вона відповідає особливому розв'язку ДР. Геометрично через особливу точку або не проходить жодна інтегральна крива, або проходить не менше двох.

2.2.2. Геометричний зміст диференціальних рівнянь першого порядку. Їх наближене розв'язування

Геометричний зміст: рівняння $y' = f(x, y)$ задає ***поле напрямків*** дотичних до його розв'язку: кожній точці $M(x; y) \in D$ (D − область визначення рівняння) ДР ставить у відповідність напрямок дотичної до єдиної інтегральної кривої, яка проходить через цю точку $M(x; y)$ (рис. 53).

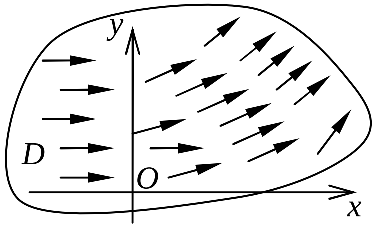

Рис. 53

Ізоклиною називається крива на площині Oxy, в кожній точці якої розглядуване поле має один і той самий напрямок $y' = k$, $k = const$. Рівняння ізоклин має вигляд

$$\boxed{f(x, y) = k, \ \ k = const}$$

Розглянемо декілька методів наближеного розв'язування ДР першого порядку.

1. Знаходження ізоклин та напрямів вздовж них дозволяє впорядкувати поле напрямків та наближено побудувати інтегральні лінії даного ДР, тобто ***графічно проінтегрувати*** це рівняння ***методом ізоклин***.

Приклад 1. Для диференціального рівняння $y' = x^2 + y$ побудувати поле напрямків, покладаючи y' рівним -1, 0, $1/\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 3. Побудувати методом ізоклін наближено інтегральну лінію, яка проходить через точку $M_0(1;-2)$.

□ Рівняння ізоклин даного ДР має вигляд $x^2 + y = k$, $k = const$. Тобто, ізоклини − однопараметрична сім'я вертикальних парабол $y = k - x^2$.

Покладемо y' рівним кожному з указаних значень по черзі. Отримаємо: $-1 = x^2 + y$ при $y' = -1$, що відповідає параболі $y = -1 - x^2$; $0 = x^2 + y$ при $y' = 0$, що відповідає параболі $y = -x^2$; $1/\sqrt{3} = x^2 + y$ при $y' = 1/\sqrt{3}$, що відповідає параболі

$y = 1/\sqrt{3} - x^2$; $\sqrt{3} = x^2 + y$ при $y' = \sqrt{3}$, що відповідає параболі $y = \sqrt{3} - x^2$; $3 = x^2 + y$ при $y' = 3$, що відповідає параболі $y = 3 - x^2$. Всі ці лінії складають поле напрямків і показані на рис. 54.

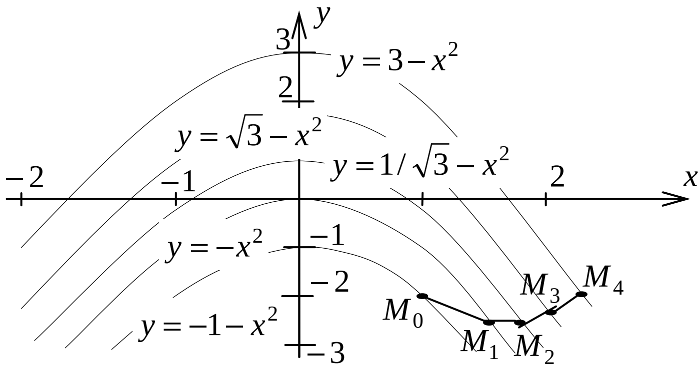

Рис. 54

Побудуємо наближено інтегральну лінію, яка проходить через задану точку M_0. Точка M_0 знаходиться на ізоклині, що відповідає значенню $y' = -1$. Для неї $tg\,\alpha = k = -1$, $\alpha_0 = -45^\circ$. Проведемо через точку M_0 пряму, що утворює кут α_0 з додатнім напрямком осі Ox до найближчої точки M_1 перетину з наступною ізоклиною $y = -x^2$. З точки M_1 проведемо пряму, яка утворює з Ox кут $\alpha_1 = 0^\circ$, оскільки для цієї ізоклини $tg\,\alpha = k = 0$. Отримаємо точку M_2, яка лежить на перетині цієї прямої з $y = 1/\sqrt{3} - x^2$. Через точку M_2 будемо проводити пряму, що утворює з Ox кут $\alpha_2 = 30^\circ$. Через M_3 − пряму під кутом $\alpha_3 = 60^\circ$.

Таким чином, отримали ламану $M_0M_1M_2M_3M_4$, що служить наближеним розв'язком ДР $y' = x^2 + y$ з початковою умовою

$y(1) = -2$ (на рис. 54 ламана розтягнута вздовж Ox відповідно відношенню масштабів осей Ox і Oy). ■

2. ***Метод Ейлера*** відноситься до ***чисельних методів*** розв'язування диференціальних рівнянь.

На відрізку $[a;b]$ розглянемо диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$, для якого задана початкова умова $y(x_0) = y_0$, де $x_0 = a$. Нехай відрізок $[a;b]$ розбитий на n рівних частин одновимірною ***сіткою*** – послідовністю точок $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$, де $x_i = x_0 + ih$ – i-й ***вузол сітки*** (розбиття) ($i = 0,1,\ldots,n$), $h = (b-a)/n$ – ***крок сітки*** (***крок дискретизації***). Потрібно знайти розв'язок $y = y(x)$ поставленої задачі Коші на відрізку $[a;b]$ у вигляді наближених значень $\tilde{y}_i$, $i = \overline{0,n}$ ***сіткової функції*** $y_i = y(x_i)$, $i = \overline{0,n}$.

Згідно з методом Ейлера у кожному вузлі x_{i-1}, $i = 1,\ldots,n$ замінимо похідну y' її ***скінченно різницевою апроксимацією вперед*** за формулою

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \;\Rightarrow\; y'_{i-1} \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \approx \frac{\Delta \tilde{y}_i}{\Delta x_i} = \frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_{i-1}}{h},$$

а праву частину $f(x, y)$ обчислимо в точці $(x_{i-1}; \tilde{y}_{i-1})$. У результаті отримаємо ***різницеве рівняння***

$$\boxed{\tilde{y}_i = \tilde{y}_{i-1} + h\, f(x_{i-1}, \tilde{y}_{i-1}),\; i = 1,2,\ldots,n},$$

що служить наближенням даного ДР з похибкою порядку h^2 на кожному кроці. На n кроках сумарна похибка має перший порядок: $nh^2 = (x_n - x_0)^2 / n = O(h)$.

Додаючи початкову умову $\tilde{y}_0 = y_0$, одержимо ***різницеву задачу Коші***, що апроксимує відповідну диференціальну задачу.

Якщо кожну пару сусідніх точок $M_{i-1}(x_{i-1}; \tilde{y}_{i-1})$ і $M_i(x_i; \tilde{y}_i)$, $i = \overline{1,n}$ сполучити відрізком прямої, то шукана інтегральна крива $y = y(x)$, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, наближено замінюється ***ламаною Ейлера*** $M_0M_1M_2...M_n$. Кожна ланка $M_{i-1}M_i$ цієї ламаної має напрям, який співпадає з напрямом тієї інтегральної кривої ДР, що проходить через точку M_{i-1}.

Приклад 2. Побудувати ламану Ейлера, що служить апроксимацією інтегральної кривої – розв'язку задачі Коші $y'=x^2+y$, $y(1)=-2$ на відрізку $[1;2]$. Крок дискретизації $h=0,2$. Обчислення проводити наближено до трьох десяткових знаків після коми.

□ За умовою $f(x,y)=x^2+y$; $h=0,2$; $x_0=1$; $y_0=-2$. Кількість кроків $n=(b-a)/h=(2-1)/0,2=5$. Тоді за формулою $\tilde{y}_i=\tilde{y}_{i-1}+h\,f(x_{i-1},\tilde{y}_{i-1})$ маємо:

$$i=1:\ x_0=1;\ \tilde{y}_0=y_0=-2;\ \ f(x_0,\tilde{y}_0)=1-2=-1;$$

$$\tilde{y}_1=\tilde{y}_0+h\,f(x_0,\tilde{y}_0)=-2+0,2\cdot(-1)=-2,2;$$

$$i=2:\ x_1=x_0+h=1+0,2=1,2;\ \ f(x_1,\tilde{y}_1)=(1,2)^2-2,2=$$

$$=-0,76;\ \ \tilde{y}_2=\tilde{y}_1+h\,f(x_1,\tilde{y}_1)=-2,2+0,2\cdot(-0,76)=-2,352.$$

Продовжуючи обчислення до кроку $i=n=5$, запишемо отримані результати у вигляді таблиці:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$\tilde{y}_i$	-2	$-2,2$	$-2,352$	$-2,43$	$-2,4$	$-2,24$
$f(x_i,\tilde{y}_i)$	-1	$-0,76$	$-0,392$	0,13	0,836	1,763

Ламана Ейлера $M_0M_1M_2...M_5$ показана на рис. 55. ■

Зауваження 1. Описаний метод Ейлера – ***явний*** (нове значення $\tilde{y}_i$ обчислюється безпосередньо) і ***однокроковий*** (на кожному кроці використовується значення розв'язку тільки в одній попередній точці x_{i-1}) зі сталою довжиною кроку h. Метод Ейлера є досить грубим і використовується, в основному, для отримання орієнтовних значень, однак його ідеї лежать в основі більш досконалих способів чисельного розв'язування ДР.

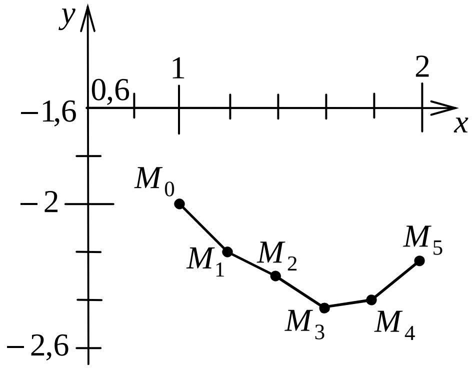

Рис. 55

3. ***Метод ітерацій*** (***метод Пікара***) відноситься до ***наближених аналітичних способів*** розв'язування задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

За цим методом здійснюється перехід до еквівалентного ***інтегрального рівняння***

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt},$$

яке розв'язується за допомогою послідовних наближень.

Шуканий розв'язок $y(x)$ знаходиться як границя послідовності функцій $y_0(x), y_1(x), ..., y_n(x), ...$ ($n = 0, 1, 2, ...$):

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x),$$

де $\boxed{y_0(x) = y_0}$; $\quad y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt$; $\; y_2(x) = y_0 +$

$$+\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt; \;\; ...; \;\; \boxed{y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt}.$$

Практично число необхідних ітерацій n визначається з умови $\max\limits_{x\in[a;b]} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \varepsilon$, де $[a;b]$ – відрізок, на якому розв'язується задача Коші; ε – максимально допустима абсолютна похибка обчислень.

<u>Приклад 3</u>. Методом Пікара знайти третє наближення $y_3(x)$ до розв'язку задачі Коші: $y' = 3x^2 - 4y$, $y(0) = 1$.

□ За умовою $y_0(x)=1$. Тоді за методом Пікара:

$$y_1(x)=1+\int_0^x(3t^2-4\cdot 1)\,dt=1+(t^3-4t)\Big|_0^x=1+x^3-4x;$$

$$y_2(x)=1+\int_0^x\Big(3t^2-4\cdot(1+t^3-4t)\Big)\,dt=1+\int_0^x(3t^2-4-4t^3+$$

$$+16t)\,dt=1+(t^3-4t-t^4+8t^2)\Big|_0^x=1+x^3-4x-x^4+8x^2;$$

$$y_3(x)=1+\int_0^x\Big(3t^2-4\cdot(1+t^3-4t-t^4+8t^2)\Big)\,dt=1+$$

$$+\int_0^x(4t^4-4t^3-29t^2+16t-4)\,dt=1+(4t^5/5-t^4-29t^3/3+$$

$$+8t^2-4t)\Big|_0^x=4x^5/5-x^4-29x^3/3+8x^2-4x+1. \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. При грубій оцінці розв’язку ДР часто використовуються різні ***спрощуючі прийоми***: лінеаризація функцій; усереднення коефіцієнтів; розщеплення на швидкі та повільні процеси; розбиття області дослідження на частини, де домінують певні фактори; введення додаткових чи відкидання наявних малих членів і т.п.

2.2.3. Рівняння з відокремлюваними змінними

Не існує єдиного аналітичного методу точного розв'язування ДР першого порядку. Далі розглянемо окремі типи таких рівнянь і відповідні методи знаходження аналітичного розв'язку.

Зауваження 1. Зустрічаються рівняння, що одночасно відносяться до різних типів. Інколи ДР тотожними перетвореннями чи заміною змінних можна перевести з одного типу в інший. Для розв'язування таких рівнянь треба вибирати їх найзручніше подання.

Диференціальне рівняння першого порядку $y'=f(x,y)$ називається ***рівнянням з відокремлюваними змінними***, якщо його права частина $f(x,y)$ може бути подана як добуток $f(x,y)=h(x)\,g(y)$ двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної.

Щоб знайти розв'язок такого ДР $\boxed{y' = h(x)\ g(y)}$, треба відокремити змінні: похідну записати як відношення диференціалів $y' = dy/dx$, а потім обидві його частини помножити на dx і поділити на такий вираз $g(y)$, щоб в одну частину рівняння входила тільки змінна y, а в іншу − тільки змінна x. Шуканий розв'язок $y = y(x)$ перетворює одержане рівняння $dy/g(y) = h(x)dx$ у тотожність. Інтегруючи її, знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$\boxed{\int dy/g(y) = \int h(x)\,dx + C},$$

де C – довільна стала.

Зауваження 2. При діленні обох частин рівняння на вираз, який містить змінні x чи y, можна "втратити" розв'язки, що перетворюють цей вираз у нуль. Такі випадки треба розглядати окремо.

Зауваження 3. Для спрощення запису загального розв'язку ДР часто довільну сталу подають у вигляді деякого виразу з іншою довільною сталою C, при умові, що цей вираз приймає довільні значення. Наприклад, $(1/2)\ln C$, де $C > 0$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

а) $xyy' = 1 + y^2$; б) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$;

в) $(x + xy^2)\,dx + (y - x^2 y)\,dy = 0$.

□ а) Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 + y^2; \quad \frac{ydy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}; \quad \int\frac{2ydy}{1+y^2} = 2\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln(1+y^2) = 2\ln|x| + \ln|C|.$$

Вигляд одержаного загального інтеграла можна спростити потенціюванням. Саме тому довільна стала записана як логарифм іншої довільної сталої. Тоді загальний інтеграл можна записати так: $1 + y^2 = Cx^2$. Далі $y = \pm\sqrt{Cx^2 - 1}$ – загальний розв’язок в явній формі.

Виконуючи ділення, припускали, що $x \neq 0$, і могли втратити розв’язок $x = 0$. Підставляючи $x = 0$ у рівняння, переконуємося, що ця функція не є розв'язком.

б) Перенесемо синуси в один бік від знака рівності та перетворимо їх різницю в добуток, користуючись відповідною тригонометричною тотожністю:

$$y' = \sin(x-y) - \sin(x+y);$$

$$y' = 2\sin((x-y-x-y)/2)\cos((x-y+x+y)/2);$$

$$y' = 2\sin(-y)\cos x; \quad y' = -2\sin y\cos x.$$

Відокремимо змінні й проінтегруємо:

$$dy/\sin y = -2\cos x\,dx; \quad \int\frac{dy}{\sin y} = -2\int\cos x\,dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|tg(y/2)\right| = -2\sin x + \ln|C|; \quad \ln\left|tg(y/2)\right| = \ln\left|Ce^{-2\sin x}\right|;$$

$$tg(y/2) = Ce^{-2\sin x}$$

– загальний розв’язок у неявній формі (загальний інтеграл).

в) Спочатку винесемо з перших дужок x, з других − y, а потім відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$x(1+y^2)\,dx + y(1-x^2)\,dy = 0;$$

$$\frac{x\,dx}{1-x^2} + \frac{y\,dy}{1+y^2} = 0; \quad \int\frac{x\,dx}{1-x^2} + \int\frac{y\,dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\ln C.$$

Зробимо заміну змінної: у першому інтегралі $s = 1-x^2$, у другому − $t = 1+y^2$. Отримаємо

$$-\frac{1}{2}\int\frac{ds}{s} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln C;$$

$$(-1/2)\ln|s| + (1/2)\ln|t| = (1/2)\ln C; \quad \ln|t/s| = \ln C.$$

Здійснивши обернену підстановку та потенціювання одержимо загальний інтеграл рівняння

$$(1+y^2)/(1-x^2) = C.$$

Звідси $y = \pm\sqrt{C(1-x^2)-1}$ – загальний розв’язок в явній формі. ■

Приклад 2. Розв’язати задачу Коші:

а) $y/y' = \ln y$, $y(2)=1$; б) $e^x y' + xy^2 = 0$, $y(0) = -1$.

□ а) Спочатку знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$y' = \frac{y}{\ln y}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}; \quad \frac{\ln y\, dy}{y} = dx; \quad \int \frac{\ln y\, dy}{y} = \int dx.$$

Зробивши заміну $t = \ln y$, отримаємо

$$(1/2)\ln^2 y = x + C.$$

Враховуючи початкову умову $y(2)=1$, підставимо у рівняння замість x значення 2, замість y значення 1 і знайдемо C:

$$(1/2)\ln^2 1 = 2 + C; \quad 2 + C = 0; \quad C = -2.$$

Отримуємо частинний розв’язок у неявній формі (частинний інтеграл)

$$\ln^2 y = 2(x-2).$$

Звідси $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ – частинний розв’язок в явній формі.

(Задачу б) розв’язати самостійно). ■

Зауваження 4. Диференціальне рівняння вигляду $y' = f(ax+by+c)$, де a, b і c − задані числа, заміною $u = ax+by+c$, де $u = u(x)$ − нова шукана функція, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними: $u' = a + b\,y'$; $u' = a + b\,f(u)$.

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок:

а) $y' = \sqrt{2x+y}$; б) $y' = \cos^2(x-y)$.

□ Нехай $u = 2x + y$, $u' = 2 + y'$, $y' = u' - 2$. Складемо й розв’яжемо рівняння для u:

$$u' - 2 = \sqrt{u}; \quad \frac{du}{\sqrt{u}+2} = dx; \quad \int \frac{du}{\sqrt{u}+2} = \int dx;$$

$$t = \sqrt{u}; \quad \int \frac{2t\,dt}{t+2} = x + C; \quad \int (2 - 4/(t+2))\,dt = x + C;$$

$$2t-4\ln|t+2|=x+C;\quad 2\sqrt{2x+y}-\ln(\sqrt{2x+y}+2)^4=x+C$$

– загальний розв’язок у неявній формі (загальний інтеграл).

(Рівняння б) розв’язати самостійно). ■

2.2.4. Рівняння з однорідною правою частиною (однорідні рівняння)

Функція $f(x,y)$ називається ***однорідною*** k***-го порядку однорідності***, якщо виконується тотожність

$$\boxed{f(tx,ty)=t^k f(x,y)}\,.$$

<u>Приклад 1</u>. Переконатися, що функція

$$f(x,y)=xy+5y^2\sin(x/y)+\sqrt{x^4+y^4}-x^5/(x^3+y^3)$$

є однорідною і знайти порядок однорідності.

$$\square\ f(tx,ty)=tx\cdot ty+5(ty)^2\sin(tx/ty)+\sqrt{(tx)^4+(ty)^4}-$$

$$-(tx)^5/((tx)^3+(ty)^3)=t^2xy+5t^2y^2\sin(x/y)+t^2\sqrt{x^4+y^4}-$$

$$-t^2x^5/(x^3+y^3)=t^2(xy+5y^2\sin(x/y)+\sqrt{x^4+y^4}-$$

$$-x^5/(x^3+y^3))=t^2 f(x,y);\quad k=2.$$

Отже, дана функція є однорідною другого порядку однорідності. ■

Диференціальним рівнянням з однорідною правою частиною (***однорідним рівнянням***) називається рівняння, яке можна подати у вигляді

$$\boxed{y'=f(y/x)}\ \text{або}\ \boxed{P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0}\,,$$

де $f(y/x)$ − однорідна функція нульового порядку однорідності; $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ − однорідні функції одного порядку однорідності.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $u=y/x$, де $u=u(x)$ − допоміжна шукана функція. Тоді $y=ux$, $y'=u'x+u$ і ДР $y'=f(y/x)$ після перетворень приймає вигляд $du/\big(f(u)-u\big)=dx/x$.

Зауваження. Якщо $f(u)-u=0$, тобто $f(y/x)-y/x=0$. Тоді $f(y/x)=y/x$. Рівняння $y'=f(y/x)$ приймає вигляд ДР з відокремлюваними змінними $y'=y/x$ і розв'язується відповідним чином.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'=-3xy/(x^2-y^2)$; б) $\sqrt{x^2-y^2}\,dx+y\,dx-x\,dy=0$.

□ а) Це рівняння – однорідне, оскільки його права частина є однорідною функцією нульового порядку однорідності:

$$f(tx,ty)=-3(tx)(ty)/((tx)^2-(ty)^2)=-3t^2xy/(t^2(x^2-y^2))=$$

$$=-3xy/(x^2-y^2)=f(x,y).$$

Зробимо заміну $u=y/x$, де u − нова шукана функція аргументу x. Тоді $y=ux$, $y'=u'x+u$. Вихідне рівняння набуває вигляду

$$u'x+u=-3x\cdot ux/(x^2-u^2x^2)=3u/(u^2-1);$$

$$u'x=\frac{3u}{u^2-1}-u;\;\; u'x=\frac{3u-u^3+u}{u^2-1};\;\; \frac{du}{dx}\,x=-\frac{u(u^2-4)}{u^2-1}.$$

Припускаючи, що $x\neq 0$ і $u(u^2-4)\neq 0$, тобто $u\neq 0$, $u\neq \pm 2$, відокремимо змінні:

$$\frac{(u^2-1)du}{u(u^2-4)}=-\frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування обох частин рівняння знайдемо

$$\int\frac{(u^2-1)\,du}{u(u^2-4)}=\int\frac{(u^2-1)\,du}{u(u+2)(u-2)}=\int\left(\frac{A}{u}+\frac{B}{u+2}+\frac{C}{u-2}\right)du=$$

$$=\Big|A(u+2)(u-2)+Bu(u-2)+Cu(u+2)=u^2-1;$$

$$\left.\begin{array}{r} u=0: \\ u=2: \\ u=-2: \end{array}\begin{cases} -4A=-1, & A=1/4; \\ 8C=3, & C=3/8; \\ 8B=3; & B=3/8 \end{cases}\right| = \frac{1}{4}\int\frac{du}{u}+\frac{3}{8}\int\frac{du}{u+2}+$$

$$+\frac{3}{8}\int\frac{du}{u-2}=\frac{1}{4}\ln|u|+\frac{3}{8}\ln|u+2|+\frac{3}{8}\ln|u-2|+C=$$

$$=\frac{1}{8}\ln|u^2(u^2-4)^3|+C; \quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C;$$

$$(1/8)\ln|u^2(u^2-4)^3|=-\ln|x|+(1/8)\ln|C|;$$

$$\ln|u^2(u^2-4)^3|=\ln|Cx^{-8}|; \;\; u^2(u^2-4)^3=Cx^{-8}.$$

Підставляючи значення $u=y/x$, одержимо загальний інтеграл рівняння:

$$(y/x)^2((y/x)^2-4)^3=Cx^{-8} \;\; \text{або} \;\; y^2((y^2-4x^2)^3=C \qquad .$$

Виконуючи ділення, могли втратити розв’язки $x=0$, $u=0 \Rightarrow y=0$, $u=\pm 2 \Rightarrow y=\pm 2x$. Підставляючи їх у початкове рівняння, переконуємося, що функція $x=0$ не є розв'язком, а функції $y=0$ та $y=\pm 2x$ служать розв'язками, причому входять у загальний інтеграл при $C=0$.

б) Функції $P(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}+y$ та $Q(x,y)=-x$ є однорідними одного (першого) порядку однорідності. Це означає, що дане ДР є однорідним. Розв'яжемо його відносно похідної $y'=dy/dx$:

$$\sqrt{x^2-y^2}+y=x\,dy/dx; \;\; y'=\sqrt{1-(y/x)^2}+y/x.$$

Покладемо $u=y/x$. Тоді $y=ux$, $y'=xu'+u$. Підставивши в рівняння вирази для y та y', отримаємо

$$x\,du/dx=\sqrt{1-u^2}.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$du/\sqrt{1-u^2}=dx/x; \;\; \int du/\sqrt{1-u^2}=\int dx/x;$$

$$\arcsin u=\ln x+\ln C; \quad \arcsin u=\ln Cx.$$

Замінивши u на y/x, будемо мати загальний інтеграл

$$\arcsin(y/x) = \ln Cx \quad \text{або} \quad y = x \sin \ln Cx$$

– загальний розв’язок в явній формі.

Крім того, розв'язками є $u = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x$, що могли бути втрачені при діленні. Ці розв'язки не містяться в загальному розв’язку і є особливими. ■

2.2.5. Лінійні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку, яке алгебраїчними перетвореннями можна звести до вигляду

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)},$$

де $p(x)$ і $q(x)$ − відомі неперервні функції від x (або сталі), називається ***лінійним***. Тобто, таке ДР є лінійним відносно шуканої функції $y = y(x)$ та її похідної $y' = dy/dx$.

Якщо $q(x) \equiv 0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним*** (***ЛОДР***) (***лінійним рівнянням з нульовою правою частиною***), у протилежному випадку – ***лінійним неоднорідним*** (***ЛНДР***) (***лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною***).

Лінійне однорідне рівняння – це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його відповідним чином:

$$\boxed{y' + p(x)\,y = 0}; \quad dy/y = -p(x)\,dx; \quad \int dy/y = -\int p(x)\,dx;$$

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + \ln|C|; \quad \boxed{y = C\,e^{-\int p(x)\,dx}}$$

– загальний розв'язок.

1. Для розв'язування ЛНДР застосуємо ***метод варіації довільної сталої*** (***метод Лагранжа***). За цим методом загальний розв'язок шукаємо в такому ж самому вигляді, як і розв'язок відповідного однорідного ДР, одержаного відкиданням правої частини $q(x)$ (поклавши $q(x) \equiv 0$), але вважаємо C не сталою, а невідомою функцією x, тобто $\boxed{y = C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}}$.

Знайдемо похідну y':

$$y' = C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} - C(x)\, e^{-\int p(x)dx} p(x)\,.$$

Підставимо вирази для y і y' в неоднорідне ДР і отримаємо співвідношення для знаходження функції $C(x)$:

$$C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} - C(x)\, e^{-\int p(x)dx} p(x) + p(x)\, C(x)\, e^{-\int p(x)dx} =$$

$$= q(x);\; C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} = q(x)\,;\;\; C'(x) = q(x)\, e^{\int p(x)dx}\,.$$

Інтегруючи, одержуємо

$C(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + \tilde{C}$, де $\tilde{C}$ – довільна стала.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$\boxed{y = \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + \tilde{C} \right) e^{-\int p(x)\, dx}}\,.$$

<u>Зауваження 1</u>. Загальний розв'язок ЛНДР можна подати у вигляді суми

$$\boxed{y = \tilde{C} e^{-\int p(x)\, dx} + \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx \right) e^{-\int p(x)\, dx} = \bar{y} + y_*}\,,$$

де $\bar{y} = \tilde{C} e^{-\int p(x)\, dx}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння; $y_* = \left(\int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx \right) e^{-\int p(x)\, dx}$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (при $\tilde{C} = 0$).

<u>Приклад 1</u>. Знайти загальний розв’язок ЛНДР першого порядку $x^2 y' - x^2 y \cos x = 3e^{\sin x}$ методом варіації довільної сталої.

□ Ділячи обидві частини ДР на x^2, зводимо його до стандартного вигляду $y' - y\cos x = (3/x^2) e^{\sin x}$.

Розв'язуємо відповідне однорідне ДР (без правої частини):

$$y' - y\cos x = 0\,;\;\; dy/dx = y\cos x\,;\;\; dy/y = \cos x\, dx\,;$$

$$\int dy/y = \int \cos x\, dx\,;\quad \ln|y| = \sin x + \ln|C|\,;\quad y = C\, e^{\sin x}$$

– загальний розв'язок.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)e^{\sin x}$. Тоді $y' = C'(x)\, e^{\sin x} - C(x)\, e^{\sin x} \cos x$.

Підставляємо в неоднорідне ДР і знаходимо невідому функцію $C(x)$:

$$C'(x)\, e^{\sin x} - C(x)\, e^{\sin x} \cos x + C(x)\, e^{\sin x} \cos x = (3/x^2) e^{\sin x};$$

$$C'(x) = 3/x^2; \;\; C(x) = 3\int dx/x^2 = -3/x + \tilde{C}.$$

Таким чином, $y = (-3/x + \tilde{C})e^{\sin x}$ – загальний розв'язок неоднорідного ДР. ■

2. Лінійне неоднорідне ДР можна розв'язати безпосередньо ***методом Бернуллі***. Згідно з ним загальний розв'язок будуємо у вигляді добутку двох функцій від x: $\boxed{y = u(x)v(x)}$ (***підстановка Бернуллі***). Оскільки при такій заміні вже відшукуються дві функції, то виникає додатковий ступінь вільності, що дозволяє розщепити лінійне ДР на два рівняння з відокремлюваними змінними.

Диференціюємо добуток: $y' = u'v + uv'$. Підставимо цей вираз у початкове рівняння, матимемо

$$u'v + uv' + puv = q \text{ або } u'v + u(v' + pv) = q.$$

Використовуючи наявний ступінь вільності, виберемо функцію v такою, що

$$v' + pv = 0.$$

Це співвідношення є рівнянням з відокремлюваними змінними для функції $v = v(x)$. Інтегруючи його, виберемо найпростіший за формою частинний розв'язок $v = e^{-\int p(x)\,dx}$.

Підставимо знайдену функцію у передостаннє ДР (враховуючи, що $v' + pv = 0$) і отримаємо для функції $u = u(x)$ рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'v = q \;\; \text{або} \;\; du/dx = q(x)/v(x),$$

звідки $u = \int \big(q(x)/v(x)\big)dx + C$ – загальний розв'язок. Тут C – довільна стала.

Підставивши u і v у вираз для шуканої функції y, остаточно маємо

$$y = uv = \left(\int \left(q(x)/v(x) \right) dx + C \right) v(x) .$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок ЛНДР першого порядку $y'+2y = e^x$ за допомогою підстановки Бернуллі.

□ Рівняння є лінійним відносно шуканої функції y та її похідної y'. Зробимо заміну $y = u(x) \cdot v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$. Отримаємо рівняння

$$u'v + uv'+2uv = e^x \quad \text{або} \quad u'v + u(v'+2v) = e^x .$$

Знайдемо функцію v як частинний розв'язок рівняння $v'+2v = 0$. Це ДР з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні і проінтегруємо його:

$$dv / dx + 2v = 0 ; \;\; dv = -2v\,dx ; \;\; dv / v = -2\,dx ;$$

$$\int dv / v = -2\int dx ; \;\; \ln v = -2x .$$

Потенціюючи обидві частини рівняння, отримаємо $v = e^{-2x}$. Враховуючи, що $v'+2v = 0$, підставимо цю функцію у ДР, де виконали заміну, і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними для функції $u = u(x)$: $u'e^{-2x} = e^x$.

Розв'язавши його, знайдемо функцію u:

$$e^{-2x} du / dx = e^x ; \; du = e^{3x} dx ; \; \int du = \int e^{3x} dx ; \; u = (1/3)e^{3x} + C .$$

Тоді загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = uv = ((1/3)e^{3x} + C)e^{-2x} \quad \text{або} \quad y = (1/3)e^x + Ce^{-2x} . \quad ■$$

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші і знайти значення $\tilde{y} = y_K(\tilde{x})$ отриманого розв'язку $y_K = y_K(x)$ при вказаному значенні аргументу $\tilde{x}$:

$$y'+2xy = xe^{-x^2}, \; y(0) = 2 ; \quad \tilde{x} = -1 .$$

□ Задане рівняння – лінійне. Спочатку знайдемо його загальний розв'язок за допомогою підстановки Бернуллі $y = uv$. Здійснимо заміну:

$$u'v + uv'+2xuv = xe^{-x^2} ; \;\; u'v + u(v'+2xv) = xe^{-x^2} .$$

Знайдемо v як деякий частинний розв'язок рівняння $v'+2xv=0$:

$$dv/dx=-2xv;\quad dv/v=-2x\,dx;\quad \int dv/v=-2\int x\,dx;$$

$$\ln v=-x^2;\quad v=e^{-x^2}.$$

Підставимо отриману функцію у рівняння, в якому зробили заміну, і розв'яжемо його відносно u:

$$u'e^{-x^2}=xe^{-x^2};\ du/dx=x;\ du=x\,dx;\ u=x^2/2+C.$$

Одержуємо загальний розв'язок початкового ДР:

$$y=uv=(x^2/2+C)e^{-x^2}.$$

Виділимо частинний розв'язок, що задовольняє початковій умові $y(0)=2$. Для цього знайдемо відповідне значення довільної сталої C:

$$2=(0/2+C)e^0;\ C=2.$$

Підставивши $C=2$ у загальний розв'язок, дістаємо шуканий частинний розв'язок (розв'язок задачі Коші):

$$y_K=(x^2/2+2)e^{-x^2}.$$

Обчислимо значення цього розв'язку в точці $\tilde{x}=-1$:

$$y_K(-1)=((-1)^2/2+2)e^{-(-1)^2}=(5/2)e^{-1}.\quad ■$$

<u>Зауваження 2</u>. Диференціальне рівняння першого порядку інколи може бути лінійним не відносно y як функції від x, а навпаки, відносно x як функції від y, тобто може бути зведене до вигляду $\boxed{x'+p(y)x=q(y)}$.

<u>Приклад 4</u>. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^2=(x+ye^{-1/y})y'.$$

□ Це ДР не є лінійним відносно функції $y=y(x)$. Перепишемо рівняння, вважаючи, що x є функцією змінної y:

$$y^2=(x+ye^{-1/y})\,dy/dx;\quad y^2dx/dy=x+ye^{-1/y};$$

$$x'-x/y^2=e^{-1/y}/y.$$

Отримане рівняння є лінійним відносно оберненої функції $x=x(y)$ та її похідної $x'=dy/dx$. Використаємо підстановку Бернуллі $x=u(y)\cdot v(y)$. Тоді

$$x'=u'v+uv';\ \ u'v+uv'-uv/y^2=e^{-1/y}/y;$$

$$u'v+u(v'-v/y^2)=e^{-1/y}/y;\ \ v'-v/y^2=0;\ \ dv/dy=v/y^2;$$

$$dv/v=dy/y^2;\ \ \int dv/v=\int dy\big/y^2;\ \ \ln v=-1/y;\ \ v=e^{-1/y}.$$

Підставимо у рівняння одержану функцію $v=v(y)$ і знайдемо множник $u=u(y)$, а потім їх добуток $x=uv$:

$$u'e^{-1/y}=e^{-1/y}/y;\ du/dy=1/y;\ du=dy/y;$$

$$\int du=\int dy/y;\ u=\ln|y|+C,\ \ x=uv=(\ln y+C)e^{-1/y}.$$

Маємо загальний розв'язок (загальний інтеграл) вихідного рівняння $x=(\ln y+C)e^{-1/y}$. ■

2.2.6. Рівняння Бернуллі

Диференціальним рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду $\boxed{y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}}$, де $p(x)$ і $q(x)$ − відомі неперервні функції; $\alpha\neq 0$ і $\alpha\neq 1$.

<u>Зауваження 1</u>. При $\alpha=0$ це рівняння стає лінійним, а при $\alpha=1$ маємо ДР з відокремлюваними змінними.

<u>Зауваження 2</u>. Рівняння Бернуллі можна звести до лінійного наступним чином. Спочатку помножимо обидві його частини на $(1-\alpha)y^{-\alpha}$, а потім зробимо заміну змінної $y^{1-\alpha}=z(x)$:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y'+p(x)(1-\alpha)y^{1-\alpha}=(1-\alpha)q(x);\ \ (1-\alpha)y^{-\alpha}y'=z';$$

$$z'+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x).$$

Відносно функції $z=z(x)$ дістали лінійне ДР

$$z'+\tilde{p}(x)z=\tilde{q}(x),\ \text{де}\ \ \tilde{p}(x)=(1-\alpha)p(x);\ \ \tilde{q}(x)=(1-\alpha)q(x).$$

Зауваження 3. Краще всього рівняння Бернуллі розв'язувати безпосередньо за допомогою заміни $y = u(x)v(x)$ – підстановки Бернуллі. Схема методу розглянута вище на лінійному ДР.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння Бернуллі $y' - 4xy = 2e^{x^2}\sqrt{y}\cos x$.

□ Застосуємо підстановку Бернуллі:

$$y = uv;\quad y' = u'v + uv';\quad u'v + uv' - 4xuv = 2e^{x^2}\sqrt{uv}\cos x;$$

$$u'v + u(v' - 4xv) = 2e^{x^2}\sqrt{uv}\cos x;\quad v' - 4xv = 0;\quad dv/dx = 4xv;$$

$$dv/v = 4x\,dx;\quad \int dv/v = 4\int x\,dx;\quad \ln v = 2x^2;\quad v = e^{2x^2}.$$

Підставивши $v = e^{2x^2}$ у рівняння, одержимо:

$$u'e^{2x^2} = 2e^{x^2}\sqrt{ue^{2x^2}}\cos x;\quad u' = 2\sqrt{u}\cos x;$$

$$du/dx = 2\sqrt{u}\cos x;\quad \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\cos x\,dx;\quad \int\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\int\cos x\,dx;$$

$$2\sqrt{u} = 2\sin x + 2C;\quad u = (\sin x + C)^2;$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y = uv = (\sin x + C)^2 e^{2x^2}.\quad ■$$

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші: $y' + y = xy^2$, $y(0) = 1$.

□ Задане ДР є рівнянням Бернуллі. Його можна проінтегрувати за допомогою підстановки $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Коли підставимо у початкове рівняння, отримаємо

$$u'v + uv' + uv = xu^2v^2;\quad u'v + u(v' + v) = xu^2v^2;$$

$$v' + v = 0;\quad dv/dx = -v;\quad dv/v = -dx;\quad \int dv/v = -\int dx;$$

$$\ln v = -x;\quad v = e^{-x}.$$

Підставивши $v = e^{-x}$ у рівняння, дістанемо:

$$e^{-x}du/dx = xu^2e^{-2x};\quad du/u^2 = xe^{-x}dx;\quad \int du/u^2 = \int xe^{-x}dx;$$

$$-1/u = -xe^{-x} - e^{-x} - C\,;\;\; u = 1/(xe^{-x} + e^{-x} + C)\,.$$

(Для знаходження інтеграла $\int xe^{-x}dx$ скористалися формулою інтегрування частинами).

Тоді загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = uv = e^{-x}/(xe^{-x} + e^{-x} + C) = 1/(x + 1 + Ce^{x})\,.$$

Конкретне значення сталої C знайдемо з початкової умови:

$$y(0) = 1:\;\; 1/(1 + C) = 1;\;\; C = 0\,.$$

Шуканий частинний розв'язок рівняння (розв'язок задачі Коші) має вигляд $y_K = 1/(x+1)$. ■

2.2.7. Загальні рекомендації щодо розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку

Для вибору способу аналітичного розв'язування заданого ДР першого порядку треба з'ясувати його тип. Для цього необхідно розв'язати його відносно похідної і привести до нормального вигляду $y' = f(x, y)$.

Потім подивитися, чи розкладається права частина $f(x, y)$ на множники, кожний з яких залежить тільки від одного аргументу x або y. Якщо таке розвинення можливе, то далі ДР розв'язується відокремленням змінних.

Коли змінні не відокремлюються безпосередньо, то треба перевірити, чи є права частина $f(x, y)$ однорідною функцією нульового порядку однорідності, тобто чи можна функцію $f(x, y)$ записати у формі $f(x, y) = f(y/x)$. Якщо це так, то дане ДР розв'язується як однорідне рівняння.

Коли дане ДР не відноситься до розглянутих двох типів, то треба вияснити, чи є це ДР лінійним або рівнянням Бернуллі, тобто чи можна функцію $f(x, y)$ подати у вигляді $f(x, y) = -p(x)y + q(x)$ або $f(x, y) = -p(x)y + q(x)y^{\alpha}$.

Зауваження. Ще один важливий тип ДР першого порядку – рівняння в повних диференціалах – буде розглянуто далі при вивченні криволінійних інтегралів.

2.3. Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають його зниження

Диференціальне рівняння другого порядку може бути записане у ***загальному вигляді***:

$$\boxed{F(x, y, y', y'') = 0}\,.$$

Якщо це рівняння вдається розв'язати відносно старшої похідної, то воно набуває ***канонічної*** (***нормальної***) ***форми***:

$$\boxed{y'' = f(x, y, y')}\,.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку – це функція незалежної змінної x та двох довільних сталих C_1 та C_2: $y = y(x, C_1, C_2)$.

Для ДР другого порядку ***задача Коші*** має вигляд:

$$\boxed{F(x, y, y', y'') = 0; \quad y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'}$$

і з геометричної точки зору зводиться до побудови інтегральної кривої, що проходить через задану точку $M_0(x_0\,;\, y_0)$, в якій дотична має заданий кутовий коефіцієнт y_0'. За відповідною теоремою Коші при певних умовах ця крива існує й єдина.

Для ДР другого порядку може ставитися ***крайова задача***, зокрема, такого вигляду:

$$F(x, y, y', y'') = 0; \quad y(a) = y_a; \quad y(b) = y_b\,.$$

<u>Зауваження 1</u>. При розв'язуванні задачі Коші (крайової задачі) звичайно спочатку знаходять загальний розв'язок ДР, а вже потім враховують початкові (крайові) умови. Коли в задачі досить визначити лише відповідний частинний розв'язок, то часто простіше відразу шукати цей розв'язок, враховуючи додаткові умови поступово, безпосередньо в процесі розв'язування.

Розглянемо три поширені типи ДР другого порядку, що шляхом заміни змінної зводяться до рівнянь першого порядку.

1. ***Найпростіше диференціальне рівняння другого порядку***

$$\boxed{y'' = f(x)}\,.$$

Це ДР стає рівнянням першого порядку в результаті заміни $\boxed{y' = p}$, де $p = p(x)$ – нова шукана функція. Тоді $y'' = p'$, і дістаємо ДР $p'=f(x)$, загальний розв'язок якого $p=\int f(x)\,dx+C_1$. Повертаючись до початкової змінної, знову маємо рівняння першого порядку $y'=\int f(x)\,dx+C_1$, що розв'язується безпосереднім інтегруванням: $y=\int\left(\int f(x)\,dx\right)dx+C_1x+C_2$ – загальний розв'язок вихідного ДР другого порядку.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\sqrt[3]{x+4}\,y''=1.$$

□ Приведемо задане рівняння до канонічного вигляду і зробимо відповідну заміну: $y''=1/\sqrt[3]{x+4}$, заміна $p=y'$.

Тоді отримаємо найпростіше рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, яке розв'яжемо розглянутим раніше способом:

$$p'=1/\sqrt[3]{x+4};\ \ dp=dx/\sqrt[3]{x+4};\ \ \int dp=\int (x+4)^{-1/3}dx;$$

$$p=3(x+4)^{2/3}/2+C_1.$$

Але згідно зробленій заміні $p=y'$, і дістаємо ще одне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$y'=(3/2)(x+4)^{2/3}+C_1.$$

Розв'язуємо його:

$$dy/dx=(3/2)(x+4)^{2/3}+C_1;\ \ dy=((3/2)(x+4)^{2/3}+C_1)\,dx;$$

$$\int dy=\int((3/2)(x+4)^{2/3}+C_1)\,dx;$$

$y=(9/10)(x+4)^{5/3}+C_1x+C_2$ – загальний розв'язок. ■

Зауваження 2. У випадку ДР довільного n-го порядку ($n\ge 2$) вигляду $y^{(n)}=f(x)$ робиться заміна $y^{(n-1)}=p$, що зводить його до такого ж найпростішого рівняння першого порядку $p'=f(x)$. Загальний розв'язок вихідного ДР знаходиться n-кратним інтегруванням.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{IV}=e^{2x}+1/\sqrt{x}.$$

□ Зробимо заміну $p = y'''$. Тоді:

$$y^{IV} = p'; \quad p' = e^{2x} + 1/\sqrt{x}; \quad \int dp = \int \left(e^{2x} + 1/\sqrt{x}\right) dx;$$

$$p = (1/2)e^{2x} + 2\sqrt{x} + C_1; \quad y''' = (1/2)e^{2x} + 2x^{1/2} + C_1.$$

Тепер зробимо заміну $p = y''$ Тоді:

$$y''' = p'; \quad p' = (1/2)e^{2x} + 2x^{1/2} + C_1; \quad \int dp = \int((1/2)e^{2x} +$$

$$+ 2x^{1/2} + C_1)\,dx; \quad p = (1/4)e^{2x} + (4/3)x^{3/2} + C_1 x + C_2;$$

$$y'' = (1/4)e^{2x} + (4/3)x^{3/2} + C_1 x + C_2.$$

Знову зробимо аналогічну заміну $p = y'$ Тоді:

$$y'' = p'; \quad p = (1/4)e^{2x} + (4/3)x^{3/2} + C_1 x + C_2;$$

$$\int dp = \int((1/4)e^{2x} + (4/3)x^{3/2} + C_1 x + C_2)\,dx;$$

$$p = (1/8)e^{2x} + (8/15)x^{5/2} + (C_1/2)x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$y' = (1/8)e^{2x} + (8/15)x^{5/2} + (C_1/2)x^2 + C_2 x + C_3;$$

$$\int dy = \int((1/8)e^{2x} + (8/15)x^{5/2} + (C_1/2)x^2 + C_2 x + C_3)\,dx;$$

$$y = (1/16)e^{2x} + (16/105)x^{7/2} + (C_1/6)x^3 + (C_2/2)x^2 +$$

$$+ C_3 x + C_4$$ – загальний розв'язок. ■

2. ***Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно шуканої функції*** y, тобто має вигляд

$$\boxed{F(x, y', y'') = 0}.$$

Зниження порядку досягається заміною $\boxed{y' = p}$, де $\boxed{p = p(x)}$ − допоміжна шукана функція від x. Тоді $y'' = p'$, і одержується ДР першого порядку загального вигляду $F(x, p, p') = 0$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^3 y'' + 2x^2 y' = \sqrt{x}.$$

□ Зробимо заміну $y' = p(x)$. Тоді $y'' = p'$. Дістанемо рівняння першого порядку

$$x^3 p'+2x^2 p=\sqrt{x}\,; \quad p'+2p/x=x^{-5/2},$$

що є лінійним відносно функції p та її похідної p'. Розв'яжемо його за допомогою підстановки Бернуллі:

$$p=uv\,;\ \ p'=u'v+uv'\,;\ \ u'v+uv'+2uv/x=x^{-5/2}\,;\ \ u'v+u(v'+$$

$$+\,2v/x)=x^{-5/2}\,;\ \ v'+2v/x=0\,;\ \ v'=-2v/x\,;\ \ dv/v=-2\,dx/x\,;$$

$$\int dv/v=-2\int dx/x\,;\ \ \ln|v|=-2\ln|x|\,;\ \ \ln|v|=\ln x^{-2}\,;\ \ v=x^{-2}\,;$$

$$u'x^{-2}=x^{-5/2}\,;\ \ u'=1/\sqrt{x}\,;\ \ du=dx/\sqrt{x}\,;\ \ \int du=\int dx\big/\sqrt{x}\,;$$

$$u=2\sqrt{x}+C_1; \quad p=(2x^{1/2}+C_1)x^{-2}.$$

Повернемося до початкової функції y, враховуючи зроблену заміну, і проінтегруємо одержане рівняння:

$$y'=2x^{-3/2}+C_1x^{-2}\,; \quad dy=(2x^{-3/2}+C_1x^{-2})\,dx\,;$$

$$\int dy=\int(2x^{-3/2}+C_1x^{-2})\,dx\,; \quad y=-4x^{-1/2}-C_1x^{-1}+C_2$$

– загальний розв'язок. ■

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші:

а) $xy''=y'\ln(y'/x)$; $\quad y(1)=0$; $\quad y'(1)=1$;

б) $y''-2y'tg\,x=3\sqrt{y'\sin x}$; $\quad y(0)=2$; $\quad y'(0)=0$;

в) $y''-y'\cos x=-e^{\sin x}\sin x$; $\quad y(0)=-1$; $\quad y'(0)=1$.

□ а) Схема розв'язування: відразу шукаємо відповідний частинний розв'язок, знаходячи конкретні значення довільних сталих, що з'являються при інтегруванні, безпосередньо в місцях їх виникнення.

Зробимо заміну $y'=p$, де $p=p(x)$. Тоді $y''=p'$. Отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$xp'=p\ln(p/x)\,; \ \ p'=(p/x)\ln(p/x),$$

що є рівнянням з однорідною правою частиною. Зробимо в ньому заміну $p/x=u$. Тоді:

$$p = ux\,;\quad p' = u'x = u\,;\quad u = p/x\,;\quad u'x + u = u\ln(ux/x)\,;$$

$$u'x = u\ln u - u\,;\quad u' = (u\ln u - u)/x\,;\quad du/(u\ln u - u) = dx/x\,;$$

$$\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}\,;\quad \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \begin{vmatrix} z = \ln u - 1; \\ dz = du/u \end{vmatrix} = \int \frac{dz}{z} =$$

$$= \ln|z| = \ln|\ln u - 1|\,;\quad \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C_1|\,;$$

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|C_1 x|\,;\quad \ln u - 1 = C_1 x\,.$$

Повернемося до функції p, а потім до початкової функції y:

$$\ln(p/x) - 1 = C_1 x\,;\quad \ln(y'/x) - 1 = C_1 x\,.$$

Використаємо початкову умову $y'(1) = 1$ і знайдемо C_1:

$$\ln 1 - 1 = C_1 \cdot 1\,;\quad C_1 = -1\,;\quad \ln(y'/x) - 1 = -x\,;$$

$$\ln(y'/x) = 1 - x\,;\quad y'/x = e^{1-x}\,;\quad y' = xe^{1-x}\,.$$

Дістали ще одне ДР першого порядку – рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$dy = xe^{1-x}dx\,;\ \int dy = \int xe^{1-x}dx\,;\ \int xe^{1-x}dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = e^{1-x}; v = -e^{1-x} \end{vmatrix} =$$

$$= -xe^{1-x} + \int e^{1-x}dx = -xe^{1-x} - e^{1-x} + C_2\,;\ y = -xe^{1-x} - e^{1-x} + C_2\,.$$

Знайдемо C_2, використовуючи початкову умову $y(1) = 0$, і отримаємо розв'язок задачі Коші:

$$0 = -1 \cdot e^0 - e^0 + C_2\,;\quad C_2 = 2\,;\quad y_K = -xe^{1-x} - e^{1-x} + 2\,.$$

б) Застосовуємо попередню схему. Спочатку з'являється рівняння Бернуллі, яке розв'язуємо відповідним чином:

$$y' = p\,,\ \text{де}\ p = p(x)\,;\quad y'' = p'\,;\quad p' - 2p\,tg\,x = 3\sqrt{p}\sqrt{\sin x}\,;$$

$$p = uv\,;\quad p = u'v + uv'\,;\quad u'v + uv' - 2uv\,tg\,x = 3\sqrt{uv}\sqrt{\sin x}\,;$$

$$u'v + u(v' - 2v\,tg\,x) = 3\sqrt{uv}\sqrt{\sin x}\,;\quad v' - 2v\,tg\,x = 0\,;$$

$$dv/v = 2\,tg\,x\,dx\,;\quad \int dv/v = 2\int tg\,x\,dx\,;\quad \ln v = -2\ln\cos x\,;$$

$$\ln v = \ln\cos^{-2} x\,;\; v = \cos^{-2} x\,;\; u'\cos^{-2} x = 3\sqrt{u\cos^{-2} x}\,\sqrt{\sin x}\,;$$

$$u' = 3\sqrt{u}\,\sqrt{\sin x}\cos x\,;\quad du/dx = 3\sqrt{u}\sqrt{\sin x}\cos x\,;$$

$$\int du/\sqrt{u} = 3\int \sin^{1/2} x\cos x\, dx\,;\quad 2\sqrt{u} = 2\sin^{3/2} x + 2C_1\,;$$

$$u = (\sin^{3/2} x + C_1)^2\,;\quad p = u\,v = (\sin^{3/2} x + C_1)^2\cos^{-2} x\,;$$

$$y' = (\sin^{3/2} x + C_1)^2\cos^{-2} x\,.$$

Використовуючи початкову умову $y'(0) = 0$, знайдемо C_1:

$$(\sin^{3/2} 0 + C_1)^2\cos^{-2} 0 = 0\,;\quad (0 + C_1)^2 = 0\,;\quad C_1 = 0\,;$$

$$y' = (\sin^{3/2} x + 0)^2\cos^{-2} x\,;\quad y' = \sin^3 x\cos^{-2} x\,.$$

Інтегруючи отримане ДР, дістаємо:

$$y = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x\sin x}{\cos^2 x}dx = \Big|\cos x = u\,;$$

$$du = -\sin x\,dx;\, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2\Big| = -\int \frac{1-u^2}{u^2}dx =$$

$$= -\int du/u^2 + \int du = 1/u + u + C_2 = 1/\cos x + \cos x + C_2\quad .$$

Значення C_2 визначається з початкової умови $y(0) = 2$:

$$1/\cos 0 + \cos 0 + C_2 = 2\,;\quad 2 + C_2 = 2\,;\quad C_2 = 0\,.$$

Тоді $y_K = 1/\cos x + \cos x$ – розв’язок задачі Коші.

в) Розв’яжіть самостійно за наведеною схемою. Спочатку застосуйте заміну $y' = p(x)$. В отриманому лінійному ДР використайте підстановку Бернуллі. Відповідь: $y_K = e^{\sin x} - 2$. ■

3. ***Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно незалежної змінної*** x, тобто має вигляд:

$$\boxed{F(y, y', y'') = 0}.$$

У цьому випадку приймаємо $\boxed{y' = p}$, де $\boxed{p = p(y(x))}$ − допоміжна складена функція від x, причому зовнішня функція

$p = p(y)$ проміжного аргументу y служить новою шуканою змінною. Тоді за правилом диференціювання складеної функції маємо $y'' = (p(y))'_x = (dp/dy)\cdot(dy/dx) = p'p$ і приходимо до ДР першого порядку вигляду $F(y, p, p'p) = 0$.

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' + 5(y')^2 ctg 5y = 0.$$

□ Зробимо заміну $y' = p(y)$. Тоді отримаємо і розв’яжемо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'' = p'p;\ \ p'p + 5p^2 ctg 5y = 0;\ \ p(dp/dy + 5p\, ctg 5y) = 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p = 0\ \ \text{або}\ \ dp/dy + 5p\, ctg 5y\, dy = 0;\ \ y' = 0\ \ \text{або}$$

$$dp/p = -5 ctg 5y\, dy;\ \ \int dp/p = -5\int ctg 5y\, dy;$$

$$\ln|p| = -\ln|\sin 5y| + \ln|C_1|;\ \ \ln|p| = \ln|C_1/\sin 5y|;$$

$$p = C_1/\sin 5y;\ \ y' = C_1/\sin 5y.$$

Звідси $\quad y = C \quad \text{або} \quad dy/dx = C_1/\sin 5y;$

$$\int \sin 5y\, dy = C_1\int dx;\qquad (1/5)\cos 5y = C_1 x + C_2$$

– загальний розв’язок (загальний інтеграл), який включає в себе розв’язок $y = C$ при $C_1 = 0$. ■

Приклад 6. Розв’язати задачу Коші

$$y\,y'' = (y')^2 - (y')^3;\ \ y(-1) = 1;\ \ y'(-1) = 2.$$

□ Схема розв’язування: відразу шукаємо частинний розв’язок, що задовольняє вказаним початковим умовам, знаходячи відповідні значення довільних сталих поступово, безпосередньо в місцях їх виникнення.

Зробимо у рівнянні заміну $y' = p$, де $p = p(y)$. Тоді дістанемо і розв’яжемо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'' = p'p;\ \ yp\, dp/dy = p^2 - p^3;\ \ p\left(y\, dp/dy - p + p^2\right) = 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p = 0\ \ \text{або}\ \ y\, dp/dy - p + p^2 = 0;\ \ y' = 0\ \ \text{або}$$

$$\frac{dp}{p^2-p}=\frac{dy}{y};\ \int\frac{dp}{p(p-1)}=\int\frac{dy}{y};\ \int\frac{dp}{p(p-1)}=\int\left(\frac{A}{p}+\right.$$

$$\left.\frac{B}{p-1}\right)dp=\left|A(p-1)+Bp=1;\begin{matrix}p=0:\\ p=1:\end{matrix}\begin{cases}-A=1;\\ B=1;\end{cases}A=-1\right|=$$

$$=-\int\frac{dp}{p}+\int\frac{dp}{p-1}=-\ln|p|+\ln|p-1|+C=\ln\left|\frac{p-1}{p}\right|+C;$$

$$\ln|(p-1)/p|=-\ln|y|+\ln|C_1|;\ \ln|(p-1)/p|=\ln|C_1/y|;$$

$$(p-1)/p=C_1/y;\ (y'-1)/y'=C_1/y.$$

Співвідношення $y'=0$ не задовольняє початкову умову $y'(-1)=2$. Його відкидаємо.

Знайдемо C_1, використавши початкові умови $y(-1)=1$ і $y'(-1)=2$:

$$(2-1)/2=C_1/1;\quad C_1=1/2;\ (y'-1)/y'=(1/2)/y;$$

$$y'=2yy'-2y;\ y'-2y\,y'=-2y;\ (1-2y)\,y'=-2y;$$

Розв’яжемо отримане ДР першого порядку, що також є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$(1-2y)\,dy=-2y\,dx;\ \int(1-1/(2y))\,dy=\int dx;$$

$$y-(1/2)\ln|y|=x+C_2.$$

Підставивши початкову умову $y(-1)=1$, дістанемо C_2:

$$1-(1/2)\ln 1=-1+C_2;\ C_2=2.$$

Тоді $y_K-(1/2)\ln|y_K|=x+2$ – розв’язок задачі Коші (частинний інтеграл, що відповідає заданим початковим умовам). ■

Зауваження 3. У випадку ДР другого порядку, що не містить явно як самої шуканої функції y, так і її аргументу x, тобто має вигляд $F(y',y'')=0$ можна застосувати будь-яку підстановку $y'=p(x)$ чи $y'=p(y)$, але частіше більш доцільно першу з них.

<u>Приклад 7</u>. Розв'язати задачу Коші:

$$y''=2\sqrt{y'};\quad y(2)=-1/3;\quad y'(2)=4$$

двома способами: а) підстановкою $y'=p(x)$; б) підстановкою $y'=p(y)$. (Розв'яжіть самостійно. Відповідь: $y_K=x^3/3-3$).

2.4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

2.4.1. Загальні поняття

Лінійним диференціальним рівнянням n***-го порядку*** $(n\geq 1)$ називається рівняння вигляду

$$\boxed{y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=f(x)},$$

де $y=y(x)$ − шукана функція аргументу x; $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ та $f(x)$ − відомі неперервні функції від x (або сталі), причому $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ − ***коефіцієнти***, $f(x)$ − ***права частина***. Тобто, таке ДР є лінійним відносно шуканої функції $y=y(x)$ та всіх її похідних.

Якщо $f(x)\equiv 0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним*** ДР (ЛОДР) (***лінійним рівнянням з нульовою правою частиною***), у протилежному випадку, коли $f(x)\neq 0$, − ***лінійним неоднорідним*** (ЛНДР) (***лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною***).

Загальні властивості лінійних ДР вищих порядків розглянемо на прикладі ***лінійного ДР другого порядку***

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)},$$

де $p(x)$ і $q(x)$ − коефіцієнти; $f(x)$ − права частина.

Система функцій $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$ $(n\geq 2)$ називається ***лінійно залежною*** в інтервалі $(a;b)$, якщо існують сталі числа $\mu_1,\ \mu_2,\ ...,\ \mu_n$, не всі рівні нулю, такі, що для відповідної лінійної комбінації у кожній точці $x\in(a;b)$ виконується рівність

$$\boxed{\mu_1 y_1(x)+\mu_2 y_2(x)+...+\mu_n y_n(x)\equiv 0}\,.$$

Якщо ця тотожність виконується лише за умови, коли всі $\mu_i = 0$, $i=\overline{1,n}$, то система функцій $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ називається ***лінійно незалежною*** в інтервалі $(a;b)$.

У випадку двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ умову лінійної залежності можна подати у вигляді

$$y_1(x)/y_2(x) = C = const\,,\ \forall x\in (a;b)\,.$$

Наприклад, а) функції $y_1(x)=\ln x$ і $y_2(x)=\lg x$ лінійно залежні на півпрямій $(0;+\infty)$, оскільки

$$y_1(x)/y_2(x)=\ln x/\lg x=\ln 10 = const\,;$$

б) функції $y_1(x)=\sin x$ і $y_2(x)=\sin 2x$ лінійно незалежні на множині дійсних чисел R, оскільки

$$y_1(x)/y_2(x)=\sin x/\sin 2x = 1/(2\cos x)\neq const\,.$$

2.4.2. Структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

На деякому проміжку $(a;b)$ розглянемо систему n функцій $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$, що є частинними розв'язками деякого одного ЛОДР n-го порядку $(n\geq 2)$ і тому n разів диференційовні. Сформуємо функціональний визначник

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

що називається ***визначником Вронського*** (***вронськіаном***) даної системи.

Ознаку лінійної залежності чи незалежності такої системи виражає наступна теорема 1. *Якщо вронськіан* $W(x)$ *системи* n *частинних розв'язків* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *якого-небудь одного ЛОДР* n*-го порядку дорівнює нулю в деякій точці* $x_0 \in (a;b)$*, то ця система розв'язків – лінійно залежна, причому вронськіан* $W(x)$ *тотожно рівний нулю на всьому проміжку* $(a;b)$*. Якщо вронськіан* $W(x)$ *системи* $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *відмінний від нуля в деякій точці* $x_0 \in (a;b)$*, то ця система розв'язків – лінійно незалежна, причому вронськіан* $W(x)$ *не перетворюється в нуль у жодній точці проміжку* $(a;b)$.

(Без доведення).

Для даного ЛОДР n-го порядку будь-яка лінійно незалежна система n його частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ називається ***фундаментальною***.

Структуру загального розв'язку ЛОДР другого порядку відображає така

теорема 2. *Якщо функції* $y_1(x), y_2(x)$ *утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків ЛОДР другого порядку, то їх лінійна комбінація*

$$\boxed{\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2},$$

де C_1 *і* C_2 *− довільні сталі, служить загальним розв'язком цього рівняння*.

□ Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ − фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Перевіримо, що їх лінійна комбінація $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ також є розв'язком (задовольняє ЛОДР). Для цього підставимо функцію $\bar{y}$ та її похідні у рівняння:

$$\bar{y}' = C_1 y_1' + C_2 y_2'; \quad \bar{y}'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'';$$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1(y_1'' +$$

$$+ py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Далі покажемо, що для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'$$

знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2.

Справді, для визначення C_1 і C_2 дістаємо лінійну алгебраїчну систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0; \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0', \end{cases}$$

визначником якої служить вронськіан

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Для фундаментальної системи $y_1(x)$, $y_2(x)$ вронськіан відмінний від нуля $W(x_0) \neq 0$. Тому система лінійних рівнянь відносно C_1 і C_2 завжди має і причому єдиний розв'язок.

Отже, $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ − загальний розв'язок ЛОДР. ■

Наприклад, частинними розв'язками ЛОДР другого порядку $y'' + y = 0$ служать функції $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$. (Перевірте це самостійно). Їх вронськіан відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Тому ці розв'язки $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$ − лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему. Отже, загальний розв'язок ЛОДР можна подати у вигляді

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Зауваження 1. Очевидний нульовий розв'язок ЛОДР $y = 0$ не утворює фундаментальної системи з довільними іншими частинними розв'язками, оскільки при цьому вронськіан тотожно рівний нулю. (Перевірте це самостійно).

Зауваження 2. Для ЛОДР другого і вищих порядків у загальному випадку не існує конструктивного способу знаходження його ненульових розв'язків. Проте якщо один такий розв'язок y_1 відомий (наприклад, знайдений підбором), то можна понизити на одиницю порядок рівняння, зберігаючи лінійність, підстановкою $y = y_1 \int u\, dx$, де $u = u(x)$ − нова шукана функція.

2.4.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Для ***ЛОДР*** n ***-го порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0\,,\;\; a_i = const \in R\,,\; i = \overline{1,n}}$$

Ейлером розроблено загальний метод його розв'язування шляхом побудови фундаментальної системи і на її основі загального розв'язку. Розглянемо його на прикладі ***ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***:

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0\,,\;\; p = const \in R;\; q = const \in R}\,.$$

Частинні розв'язки шукаємо у вигляді експоненти $y = e^{kx}$, де k − невідомий сталий коефіцієнт. Підставимо цю функцію $y = e^{kx}$ та її похідні $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ у рівняння і дістанемо $(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$. Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то для визначення k отримуємо співвідношення

$$\boxed{k^2 + pk + q = 0}\,,$$

яке називають ***характеристичним рівнянням*** даного ЛОДР.

Характеристичне рівняння є квадратним відносно k і на множині комплексних чисел завжди має два розв'язки k_1 і k_2. При цьому можливі три випадки, в залежності від знака дискримінанта $\boxed{D = p^2 - 4q}$.

<u>Випадок 1</u>. $D > 0$. Обидва корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1 \neq k_2$: $k_{1,2} = \left(-p \pm \sqrt{D}\right)/2$. Тоді $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$ − лінійно незалежні розв'язки, що утворюють фундаментальну систему. За-

гальний розв'язок має вигляд $\boxed{\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок $y'' + 3y' + 2y = 0$.

$$\square \; k^2 + 3k + 2 = 0; \; D = 9 - 8 = 1 > 0;$$

$$k_1 = -1, \; k_2 = -2; \; \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}. \quad \blacksquare$$

Випадок 2. $D = 0$. Корені k_1 і k_2 − дійсні рівні числа $k_1 = k_2 = k = -p/2$. Тобто, $k = -p/2$ − один корінь кратності $r = 2$. Тоді $y_1 = e^{kx}$ − частинний розв'язок. Знайдемо другий лінійно незалежний з ним розв'язок y_2. Скористаємося методом збурень.

Вважатимемо, що k_1 і k_2 відрізняються на нескінченно малу величину Δk: $k_1 = k$; $k_2 = k + \Delta k$; $\Delta k \to 0$. Таким чином, повертаємося до випадку 1. Тоді лінійна комбінація $y_{2*} = \left(e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx}\right) / \Delta k$ − теж частинний розв'язок. Переходячи у y_{2*} до границі при $\Delta k \to 0$, дістаємо невизначеність типу $0/0$, що розкривається за правилом Лопіталя:

$$y_2 = \lim_{\Delta k \to 0} y_{2*} = \lim_{\Delta k \to 0} \left(e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx}\right) / \Delta k = \left|0/0\right| =$$

$$= \lim_{\Delta k \to 0} (e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx})' / (\Delta k)' = \lim_{\Delta k \to 0} e^{(k+\Delta k)x} x = x e^{kx}.$$

Перевіримо, що одержана функція $y_2 = x\,e^{kx}$ служить розв'язком ЛОДР:

$$y_2' = e^{kx} + kxe^{kx}; \quad y_2'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2 xe^{kx} = 2ke^{kx} + k^2 xe^{kx};$$

$$2ke^{kx} + k^2 xe^{kx} + p(e^{kx} + kxe^{kx}) + qxe^{kx} = e^{kx}(k^2 x + 2k +$$

$$+ p + pkx + qx) = \left|k = -p/2\right| = e^{kx}((-p/2)^2 x + 2(-p/2) +$$

$$+ p + p(-p/2)x + qx) = -(1/4)e^{kx}(p^2 - 4q)x =$$

$$= \left|p^2 - 4q = D = 0\right| = -xe^{kx} \cdot 0 = 0.$$

До того ж, вронськіан системи $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x\,e^{kx}$ відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & x\,e^{kx} \\ k\,e^{kx} & e^{kx} + kx\,e^{kx} \end{vmatrix} = e^{2kx} \neq 0 .$$

Тому ці розв'язки $y_1 = e^{kx}$ і $y_2 = x\,e^{kx}$ – лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему.

Отже, загальний розв'язок ЛОДР можна подати у вигляді

$$\boxed{\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1\,e^{kx} + C_2 x\,e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)} .$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок $y'' - y' + 0{,}25y = 0$.

□ $D = 1 - 1 = 0$, $k_1 = k_2 = k = 1/2$; $\bar{y} = e^{x/2}(C_1 + C_2 x)$. ■

Випадок 3. $D < 0$. Характеристичне рівняння має два комплексні спряжені корені $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, де $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{-D}/2$, $D = p^2 - 4q < 0$, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Тоді $y_{1к} = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x}$, $y_{2к} = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - \beta i)x}$ – комплексні лінійно незалежні розв'язки. Їх лінійна комбінація $\boxed{\bar{y}_к = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}}$ служить комплексним загальним розв'язком.

Але ДР має дійсні коефіцієнти, тому бажано мати розв'язки в дійсній формі. На основі формули Ейлера маємо:

$$y_{1к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) ; \quad y_{2к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) .$$

Можна показати, що *для комплекснозначної функції, яка є розв'язком диференціального рівняння, її уявна та дійсна частини також будуть його розв'язками*. (Зробіть це самостійно).

Таким чином, дістаємо лінійно незалежні дійсні частинні розв'язки $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, що утворюють фундаментальну систему. Дійсним загальним розв'язком служить їх лінійна комбінація

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = \\ = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) . \end{aligned}}$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок $y''+4y'+13y=0$.

$$\square\ k^2+4k+13=0;\ D=16-52=-36<0;$$

$$k_{1,2}=(-4\pm\sqrt{-36})/2=(-4\pm 6\sqrt{-1})/2=(-4\pm 6i)/2=-2\pm 3i;$$

$$\alpha=-2;\ \beta=3;\quad \bar{y}=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).\ \blacksquare$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші:

а) $y''+16y'=0;\quad y(1)=-2;\ y'(1)=0$;

б) $y''-16y=0;\quad y(0)=3;\ y'(0)=-4$;

в) $y''+8y'+16y=0;\quad y(0)=1;\ y'(0)=3$;

г) $y''+16y=0;\quad y(\pi/2)=6;\ y'(\pi/2)=2$;

д) $y''+8y'+20y=0;\quad y(0)=0;\ y'(0)=12$.

□ а) Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2+16k=0;\ k(k+16)=0;\ k_1=0;\ k_2=-16.$$

Оскільки корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1\neq k_2$, то маємо випадок 1. У відповідній формі записуємо загальний розв'язок: $\bar{y}=C_1e^{0x}+C_2e^{-16x}=C_1+C_2e^{-16x}$.

Конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2 знаходимо, враховуючи початкові умови:

$$\bar{y}'=-16C_2e^{-16x};$$

$$\begin{matrix} y(1)=-2: \\ y'(1)=0: \end{matrix}\quad \begin{cases} -2=C_1+C_2e^{-16\cdot 1}; \\ \ \ 0=-16C_2e^{-16\cdot 1}; \end{cases}\quad \begin{cases} C_2=0; \\ C_1=-2-0=-2. \end{cases}$$

Тоді $y_K=-2$ − розв'язок задачі Коші.

б) $k^2-16=0;\ k^2=16;\ k_{1,2}=\pm 4;\ \bar{y}=C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}$;

$$\bar{y}'=4C_1e^{4x}-4C_2e^{-4x};\ \begin{cases} 3=C_1e^{4\cdot 0}+C_2e^{-4\cdot 0}; \\ -4=4C_1e^{4\cdot 0}-4C_2e^{-4\cdot 0}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3; \\ C_1 - C_2 = -1; \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = 2 \end{cases} y_K = e^{4x} + 2e^{-4x}.$$

в) $k^2 + 8k + 16 = 0$; $D = 64 - 64 = 0$; $k_1 = k_2 = k = -4$;

$$\bar{y} = e^{-4x}(C_1 + C_2 x);\ \bar{y}' = C_2 e^{-4x} - 4(C_1 + C_2 x)e^{-4x};$$

$$\begin{cases} 1 = e^{-4\cdot 0}(C_1 + C_2 \cdot 0); \\ 3 = C_2 e^{-4\cdot 0} - 4(C_1 + C_2 \cdot 0)e^{-4\cdot 0}; \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 - 4C_1 = 3;\ C_2 = 7; \end{cases}$$

$$y_K = e^{-4x}(1 + 7x).$$

г) $k^2 + 16 = 0$; $k^2 = -16$; $k_{1,2} = \pm 4i$; $\alpha = 0$; $\beta = 4$;

$$\bar{y} = e^{0x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x;$$

$$\bar{y}' = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x;$$

$$\begin{matrix} y(\pi/2) = 6: \\ y'(\pi/2) = 2: \end{matrix} \begin{cases} 6 = C_1 \cos(4\cdot\pi/2) + C_2 \sin(4\cdot\pi/2); \\ 2 = -4C_1 \sin(4\cdot\pi/2) + 4C_2 \cos(4\cdot\pi/2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 = C_1; \\ 2 = 4C_2;\ C_2 = 1/2; \end{cases} \quad y_K = 6\cos x + (1/2)\sin 4x.$$

д) $k^2 + 8k + 20 = 0$; $D = 64 - 80 = -16 < 0$;

$$k_{1,2} = (-4 \pm \sqrt{-16})/2 = (-4 \pm 4i)/2 = -2 \pm 2i;\ \ \alpha = -2;\ \beta = 2;$$

$$\bar{y} = e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);\ \ \bar{y}' = -2e^{-2x}(C_1 \cos 2x +$$

$$+ C_2 \sin 2x) + e^{-2x}(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x);$$

$$\begin{cases} 0 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0); \\ 12 = -2e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0(-2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = C_1; \\ 12 = -2C_1 + 2C_2;\ C_2 = 6; \end{cases} \quad y_K = 6e^{-2x} \sin 2x. \ \blacksquare$$

Приклад 5. Розв'язати крайову задачу:

$$y''+4y=0; \qquad y(0)=5; \;\; y'(\pi/2)=6\,.$$

$$\square \;\; k^2+4=0\,; \;\; k^2=-4\,; \;\; k_{1,2}=\pm 2i\,;$$

$$\bar{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\,; \;\; \bar{y}'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x\,;$$

$$\begin{cases} 5=C_1\cos 0+C_2\sin 0; \\ 6=-2C_1\sin\pi+2C_2\cos\pi; \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1=5; \\ -2C_2=6; \;\; C_2=-3; \end{cases}$$

$y_b=5\cos 2x-3\sin 2x$ − розв'язок крайової задачі. ■

Зауваження. Для ЛОДР довільного n-го порядку $(n\geq 2)$ зі сталими коефіцієнтами характеристичне рівняння має n коренів k_i, $i=\overline{1,n}$ і його загальний розв'язок можна подати у вигляді $\bar{y}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$, де $y_1(x),\, y_2(x),\ldots,\, y_n(x)$ − фундаментальна система частинних розв'язків. Можливі три випадки.

1. Усі корені $k_1,k_2,\ldots,k_n$ – дійсні різні числа. Тоді

$\bar{y}=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+\ldots+C_ne^{k_nx}$, тобто $y_i=e^{k_ix}$, $i=\overline{1,n}$.

2. Усі корені – різні числа, але серед них є комплексні попарно спряжені. Тоді кожній парі комплексно спряжених коренів $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ відповідає пара дійсних лінійно незалежних розв'язків $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

3. Серед коренів є кратні (рівні між собою). Тоді:

а) кожному дійсному кореню k кратності r відповідає r лінійно незалежних розв'язків: $y_1=e^{kx},\, y_2=xe^{kx},\ldots,y_r=x^{r-1}e^{kx}$;

б) кожній парі комплексно спряжених коренів $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ кратності s відповідає $2s$ дійсних лінійно незалежних розв'язків:

$$y_{2i-1}=x^{i-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\,, \;\; y_{2i}=x^{i-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\,, \;\; i=\overline{1,s}\,.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок:

а) $y'''-y''-2y'=0$; б) $y'''+y''-y'-y=0$;

в) $y'''+y''+y'+y=0$; г) $y^{IV}+2y''+y=0$.

□ а) $k^3-k^2-2k=0$; $k(k^2-k-2)=0$; $k_1=0$;

$k^2-k-2=0$; $D=1+8=9$; $k_2=2$; $k_3=-1$;

$$\bar{y}=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}.$$

б) $k^3+k^2-k-1=0$; $k^2(k+1)-(k+1)=0$;

$(k+1)(k^2-1)=0$; $(k+1)^2(k-1)=0$; $k_1=k_2=k=-1$;

$r=2$; $k_3=1$; $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3e^{x}$.

в) $k^3+k^2+k+1=0$; $k^2(k+1)+(k+1)=0$;

$(k+1)(k^2+1)=0$; $k_1=-1$; $k_{2,3}=\pm i$;

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

г) $k^4+2k^2+1=0$; $(k^2+1)^2=0$; $k_1=k_2=i$; $k_3=k_4=-i$.

Кратність пари $k=\pm i$ комплексно спряжених коренів $s=2$. Тоді $\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3x\cos x+C_4x\sin x$. ■

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші:

$y'''+2y''=0$; $y(0)=3$; $y'(0)=0$; $y''(0)=12$.

□ $k^3+2k^2=0$; $k^2(k+2)=0$; $k_1=k_2=k=0$ − корінь кратності $r=2$; $k_3=-2$; $\bar{y}=C_1+C_2x+C_3e^{-2x}$.

Конкретні значення довільних сталих C_1, C_2 і C_3 знаходимо з початкових умов:

$$\bar{y}'=C_2-2C_3e^{-2x};\quad \bar{y}''=4C_3e^{-2x};$$

$$\begin{array}{r} y(0)=3: \\ y'(0)=0: \\ y''(0)=12: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} C_1+C_3=3; \\ C_2-2C_3=0; \\ 4C_3=12; \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} C_3=3; \\ C_2=2C_3=6; \\ C_1=-C_3+3=0. \end{array}$$

Тоді розв'язок задачі Коші: $y_K=6x+3e^{-2x}$. ■

2.4.4. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Принцип суперпозиції

Структуру загального розв'язку ЛНДР другого порядку визначає така

теорема 1. *Загальний розв'язок ЛНДР другого порядку*

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)},$$

можна зобразити у вигляді суми загального розв'язку $\bar{y}$ *відповідного ЛОДР*

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=0}$$

і якого-небудь частинного розв'язку y_* *ЛНДР*: $\boxed{y=\bar{y}+y_*}$.

□ Перевіримо, що функція $y=\bar{y}+y_*$ є розв'язком ЛНДР:

$$y'=\bar{y}'+y_*'\,;\ y''=\bar{y}''+y_*'';\ \ \bar{y}''+y_*''+p(\bar{y}'+y_*')+q(\bar{y}+y_*)=$$

$$=(\bar{y}''+p\bar{y}'+q\bar{y})+(y_*''+py_*'+qy_*)=0+f(x)=f(x).$$

Оскільки $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$, де $y_1(x),y_2(x)$ – фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР, то розв'язок $y=\bar{y}+y_*=C_1y_1+C_2y_2+y_*$ містить дві довільні сталі C_1 і C_2. Можна показати (зробіть це самостійно аналогічно доведенню теореми про структуру загального розв'язку ЛОДР), що для довільних початкових умов $y(x_0)=y_0;\ \ y'(x_0)=y_0'$ знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2. Тобто розв'язок $y=\bar{y}+y_*$ є загальним. ■

Принцип суперпозиції розв'язків ЛНДР другого порядку відображає наступна

теорема 2. *Якщо у ЛНДР другого порядку*

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)}$$

права частина є сумою двох функцій $\boxed{f(x)=f_1(x)+f_2(x)}$, *то його частинний розв'язок також можна подати у вигляді суми* $\boxed{y_*=y_{*1}+y_{*2}}$, *де* y_{*1} *і* y_{*2} *– частинні розв'язки рівнянь*

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y = f_1(x)} \text{ і } \boxed{y''+p(x)y'+q(x)y = f_2(x)}$$

з тією ж самою частиною ліворуч і відповідними функціями $f_1(x)$, $f_2(x)$ *праворуч.*

(Доведіть самостійно безпосередньою підстановкою).

Зауваження 1. Сформульовані теореми безпосередньо переносяться на ЛНДР довільного n-го порядку $(n \geq 2)$.

Зауваження 2. Способи знаходження загального розв'язку $\bar{y}$ ЛОДР розглянуто раніше. Частинний розв'язок y_* ЛНДР залежить від правої частини $f(x)$ і для його побудови розроблені методи, що наведені далі.

2.4.5. Метод варіації довільних сталих

За ***методом варіації довільних сталих*** (***методом Лагранжа***) *загальний розв'язок ЛНДР ІІ порядку*

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y = f(x)}$$

можна шукати в такому ж вигляді, як загальний розв'язок відповідного ЛОДР, вважаючи при цьому C_1 *і* C_2 *не довільними сталими, а невідомими функціями від* x:

$$\boxed{y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)},$$

де $y_1(x), y_2(x)$ – фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР; $C_1(x), C_2(x)$ – нові шукані функції.

Оскільки замість однієї невідомої функції $y(x)$ тепер відшукуються дві $C_1(x)$ і $C_2(x)$, то з'являється додатковий ступінь вільності, використання якого дозволяє спростити процес розв'язування задачі.

Знайдемо похідну від функції $y(x)$:

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) =$$

$$= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) + C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x).$$

Використовуючи додатковий ступінь вільності, накладемо на функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ умову:

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0.$$

Тоді $y'=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)$, тобто похідна загального розв’язку набуває такого ж вигляду, як при сталих C_1 і C_2.

Друга похідна загального розв'язку ЛНДР має вигляд

$$y''=C_1'(x)y_1'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_2(x)y_2''(x).$$

Підставимо отримані y, y', y'' у неоднорідне ДР:

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_2(x)y_2''(x)+$$
$$+\,p(C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x))+q(C_1(x)y_1(x)+$$
$$+C_2(x)y_2(x))=f(x);\ C_1'y_1'+C_2'y_2'+$$
$$+C_1(\underbrace{y_1''+py_1'+qy_1}_{=0})+C_2(\underbrace{y_2''+py_2'+qy_2}_{=0})=f(x).$$

Отже, $$C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x).$$

Об’єднавши одержані рівності, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\boxed{\begin{cases}C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0;\\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x),\end{cases}}$$

де невідомими є похідні $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Дана система є сумісною і визначеною, бо її визначником є відмінний від нуля вронськіан

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Знайшовши єдиний розв’язок цієї системи $C_1'(x)=\varphi_1(x)$ і $C_2'(x)=\varphi_2(x)$, далі дістаємо:

$$C_1(x)=\int\varphi_1(x)\,dx+\tilde{C}_1;\ C_2(x)=\int\varphi_2(x)\,dx+\tilde{C}_2,$$

де $\tilde{C}_1$ і $\tilde{C}_2$ − нові довільні сталі.

Загальний розв’язок ЛНДР має вигляд