В И Щ А
МАТЕМАТИКА
для електротехніків
у трьох модулях

М О Д У Л Ь 2

С.О. Станішевський
А.В. Якунін
А.О. Володченко

Інтегральне числення функцій однієї змінної

Диференціальні рівняння

Операційне числення
Елементи варіаційного числення

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

ВИЩА МАТЕМАТИКА
для електротехніків

у трьох модулях

Модуль 2

С.О. Станішевський, А.В. Якунін,
А.О. Володченко

Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків ХНАМГ 2010

УДК [517.3+517.4+517.9](075)
ББК 22.11я7
В55

***Рецензенти*:**

В.Д. Гордевський, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу (Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна);
О.М. Литвин, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики (Українська інженерно-педагогічна академія);
Ю.В. Куліш, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики (Українська державна академія залізничного транспорту);
В.Г. Моторіна, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики (Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів електротехнічних спеціальностей вищих навчальних закладів
(*лист № 1/ІІ-2758 від 02.04.2010 р.*)

Вища математика для електротехніків: у 3-х модулях:
В55 навч. посіб. / С.О. Станішевський, А.В. Якунін, В.С. Ситникова та ін.; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Х.: ХНАМГ, 2009. –
ISBN 978-966-695-165-9
Модуль 2: Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення / С.О. Станішевський, А.В. Якунін, А.О. Володченко. – 2010. – 350 с.
ISBN 978-966-695-166-6

За модульною технологією навчання викладено розділи, що відповідають другому семестру за діючою програмою для електротехнічних спеціальностей. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання для самостійної роботи.

Модуль 1 вийшов з друку в 2009 р.

УДК [517.3+517.4+517.9](075)
ББК 22.11я7

ISBN 978-966-695-165-9
ISBN 978-966-695-166-6 (Модуль 2)

Передмова

У навчальному посібнику за модульною технологією навчання викладено розділи, що відповідають другому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів електротехнічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю на застосування до електротехнічних задач. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах, частина з яких розрахована на самостійне опрацювання. До всіх розділів додаються контрольні запитання, а також індивідуальні розрахунково-графічні завдання.

Основою даного посібника є цикли лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті електропостачання і освітлення міст та на факультеті інженерної екології міст Харківської національної академії міського господарства.

Посібник призначений для студентів електротехнічних спеціальностей, а також може використовуватися для самоосвіти електротехніків-практиків.

Автори щиро вдячні своєму колезі Бізюку В.В. за сприяння у підготовці посібника.

Змістовий модуль 1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1.1. Невизначений інтеграл

1.1.1. Первісна функція та невизначений інтеграл. Геометричний зміст невизначеного інтеграла

Основна задача диференціального числення – знаходження похідної $f'(x)$ відомої функції $f(x)$. Механічне тлумачення: за відомим законом руху матеріальної точки $s(x)$ диференціюванням знайти її швидкість $v(x)=s'(x)$.

Основною для інтегрального числення є обернена задача – знаходження функції $F(x)$ за відомою її похідною $F'(x)=f(x)$. У механічній інтерпретації: якщо відома швидкість $v(x)=s'(x)$ матеріальної точки, то інтегруванням можна знайти закон її руху $s(x)$.

Нехай X – деякий проміжок на множині дійсних чисел R. Тобто X – це множина вигляду $[a;b]$, $[a;b)$, $(a;b]$ або $(a;b)$, причому цей проміжок може бути скінченним чи нескінченним.

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на X, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність

$\boxed{F'(x)=f(x)}$ або, що те саме, $\boxed{dF(x)=f(x)dx}$.

Іншими словами, *функція* $f(x)$ *– похідна своєї первісної* $F(x)$.

Приклад 1. Знайти первісну для даної функції:

а) $f(x)=x^3$; б) $f(x)=\cos 3x$; в) $f(x)=1/x$.

□ а) Оскільки $(x^4)'=4x^3$, то з означення первісної випливає, що функція $F(x)=x^4/4$ є первісна для $f(x)=x^3$: $(x^4/4)'=x^3$. Первісною є також $F(x)=x^4/4+C$, де C – довільна стала, оскільки додавання константи не змінює значення похідної. При цьому $X=(-\infty;+\infty)$.

б) Оскільки $(\sin 3x)'=3\cos 3x$, то для $f(x)=\cos 3x$ первісною є функція $F(x)=(1/3)\sin 3x+C$, $X=(-\infty;+\infty)$.

в) Оскільки $(\ln x)'=1/x$, то первісною для функції $f(x)=1/x$ служить функція $F(x)=\ln x+C$, $X=(0;+\infty)$, а також $F(x)=\ln|x|+C$. $X=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. ■

<u>Теорема (про загальний вигляд усіх первісних)</u>. *Нехай $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$ на проміжку X. Тоді функція $F(x)+C$, де C – довільна стала, також буде первісною функції $f(x)$. І навпаки, будь-яка первісна функції $f(x)$ на проміжку X може бути подана у вигляді $F(x)+C$.*

□ <u>Доведення</u> першої частини теореми випливає з властивостей похідної та означення первісної:

$$\left(F(x)+C\right)'=F'(x)+C'=f(x).$$

Для доведення другої частини припустимо, що $\Phi(x)$ – довільна первісна функції $f(x)$. Знайдемо похідну різниці $\Phi(x)-F(x)=\varphi(x)$:

$$\varphi'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)\equiv 0, \quad x\in X.$$

З одержаної тотожності випливає, що $\varphi(x)$ є сталою, $\varphi(x)=C$. Тоді $\Phi(x)-F(x)=C$, звідки $\Phi(x)=F(x)+C$. ■

Множину всіх первісних функції $f(x)$ на проміжку X називають ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)\,dx$.

При цьому $f(x)$ називають ***підінтегральною функцією***, $f(x)\,dx$ – ***підінтегральним виразом***, $\int$ – ***знаком інтеграла***, x – ***змінною інтегрування***.

Якщо функція $F(x)$ є деякою первісною для $f(x)$, тоді

$$\boxed{\int f(x)\,dx=F(x)+C}, \quad \text{де } C \text{ – довільна стала.}$$

Операція знаходження невизначеного інтеграла (множини всіх первісних функцій для $f(x)$) називається ***інтегруванням***.

Інтегрування – це обернена операція до диференціювання.

Тому первісну інколи називають анти-похідною.

Зауваження. При інтегруванні різними способами однієї й тієї ж функції результати можуть відрізнятися за своїм зовнішнім виглядом. Наприклад,

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C \; ; \quad \int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C \; .$$

Геометричний зміст. Первісна функції $f(x)$ є лінією $y = F(x)$, у кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює відповідному значенню функції $f(x)$. Невизначений інтеграл $\int f(x)\,dx$ – це сім’я таких “паралельних” ліній, що задається рівнянням $y = F(x) + C$ (рис. 1).

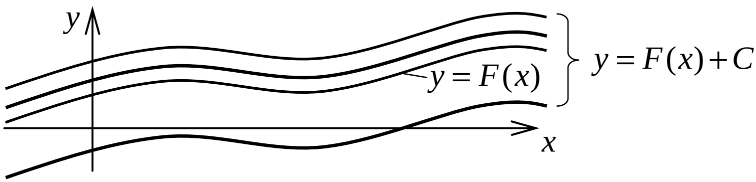

Рис. 1

1.1.2. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів. Безпосереднє інтегрування

Невизначений інтеграл має наступні властивості:

1. *Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції*:

$$\boxed{\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)}.$$

2. *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу*:

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx}.$$

3. *Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала*:

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C}.$$

Ці три властивості випливають з означення невизначеного інтеграла. Наступні дві співпадають з відповідними властивостями похідної.

4. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної функції окремо*:

$$\boxed{\int \left(f(x) + g(x) - h(x) \right) dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx - \int h(x)\, dx}.$$

5. *Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити з-під знака інтеграла*:

$$\boxed{\int af(x)\, dx = a\int f(x)\, dx, \quad a = const \neq 0}.$$

6. *Якщо* $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ *– будь-яка неперервно диференційовна функція, то*

$$\boxed{\int f(u)\, du = F(u) + C}.$$

Тобто, *змінною інтегрування може бути як незалежна змінна, так і довільна неперервно диференційовна функція іншої змінної.*

□ Доведемо цю властивість. Розглянемо $\int f(u)\, du$, в якому $u = \varphi(x)$. Тоді $du = \varphi'(x)\, dx$. Нехай для підінтегральної функції первісною є $F(u) = F\left(\varphi(x)\right)$. Знайдемо її похідну:

$$F'\left(\varphi(x)\right) = F'(u)\, \varphi'(x) = f(u)\, \varphi'(x) = f\left(\varphi(x)\right) \varphi'(x).$$

Тоді за третьою властивістю

$$\int dF\left(\varphi(x)\right) = \int f\left(\varphi(x)\right) \varphi'(x)\, dx = F\left(\varphi(x)\right) + C$$

або $\int f(u)\, du = F(u) + C$. ■

Зауваження 1. Згідно з властивостями 1 і 2 *правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням.*

Зауваження 2. Властивості 4 і 5 виражають лінійність операції інтегрування.

Зауваження 3. Властивість 6 виражає інваріантність формул інтегрування: *будь-яка формула залишається справедливою, якщо змінну інтегрування розглядати як довільну неперервно диференційовну функцію.*

На основі таблиці похідних (диференціалів) елементарних функцій можна скласти таблицю невизначених інтегралів:

Таблиця 1

Основні невизначені інтеграли			
1	$\int 0\,du = C$	5	$\int \sin u\;du = -\cos u + C$
2	$\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$	6	$\int \cos u\;du = \sin u + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\;u + C$
2б	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\,ctg\;u + C$
2в	$\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$	9	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
3	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	10	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + b}\right\rvert + C$ $(b \neq 0)$
4	$\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ $(a > 0;\;\; a \neq 1)$	11	$\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\,arctg\dfrac{u}{a} + C$ $(a \neq 0)$
4а	$\int e^u\,du = e^u + C$	12	$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$ $(a > 0)$

Додаткові невизначені інтеграли			
1	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\| tg\frac{u}{2} \right\| + C$	2	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\| tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\| + C$
3	$\int tg\,u\;du = -\ln\left\| \cos u \right\| + C$	4	$\int ctg\,u\;du = \ln\left\| \sin u \right\| + C$
5	$\int sh u\;du = ch u + C$	6	$\int ch u\;du = sh u + C$
7	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th\,u + C$	8	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -\,cth\,u + C$
9	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm$ $\pm\frac{1}{2}a^2\ \ln\left\| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\| + C$ $(a \neq 0)$	10	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{a}\sqrt{a^2 - u^2} +$ $+\ \frac{1}{2}a^2\ \arcsin\frac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
11	$\int e^{au}\sin bu\;du = \left(-b\,e^{au}\cos bu +\right.$ $\left.+\,a\,e^{au}\sin bu\right)/\left(a^2 + b^2\right) + C$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$	12	$\int e^{au}\cos bu\;du = \left(a\,e^{au}\cos bu +\right.$ $\left.+\,b\,e^{au}\sin bu\right)/\left(a^2 + b^2\right) + C$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$

Безпосереднім інтегруванням називають обчислення невизначеного інтеграла зведенням його до табличного на основі властивостей лінійності й інваріантності з використанням *тотожних перетворень* підінтегральної функції та *підведення під знак диференціала*.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int (2x^3 - 3e^x + 1)\,dx$; б) $\int tg^2 x\,dx$; в) $\int 2^{\sin x}\cos x\,dx$.

□ а) Використавши властивості 4 та 5, запишемо даний інтеграл у вигляді лінійної комбінації табличних інтегралів

$$\int (2x^3 - 3e^x + 1)\,dx = 2\int x^3 dx - 3\int e^x dx + \int dx$$

і з огляду на наведену вище таблицю отримаємо

$$2x^{3+1}/(3+1)-3e^{x}+x^{0+1}/(0+1)+C=x^{4}/2-3e^{x}+x+C\,.$$

б) Використавши властивості тригонометричних функцій та інтегралів, зробивши деякі елементарні перетворення, отримаємо

$$\int\left(\sin^2 x\big/\cos^2 x\right)dx=\int\left((1-\cos^2 x)\big/\cos^2 x\right)dx=$$

$$=\int\left(1/\cos^2 x-1\right)dx=\int dx/\cos^2 x-\int dx=tgx-x+C\,.$$

в) Використавши підведення під знак диференціала, отримаємо

$$\int 2^{\sin x}\cos x\,dx=\int 2^{\sin x}\,d(\sin x)=2^{\sin x}\big/\ln 2+C\,.\quad\blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти інтеграли і результат перевірити диференціюванням:

$$\text{а)}\int\left(3x^3-1/x\right)^2 dx\,;\qquad\qquad \text{б)}\int 3^{2x+1}5^{x}\,dx\,.$$

$\square$ а) $\int(3x^3-1/x)^2\,dx=\int(9x^6-6x^2+1/x^2)\,dx=9\int x^6\,dx-$

$$-6\int x^2\,dx+\int(1/x^2)\,dx=9x^7\big/7-2x^3-1/x+C\,;$$

$$((9/7)x^7-2x^3-1/x+C)'=(9/7)\cdot 7x^6-2\cdot 3x^2+$$

$$+1/x^2+0=(3x^3-1/x)^2\,;$$

б) $\int 3^{2x+1}5^x\,dx=3\int(3^2\cdot 5)^x\,dx=3\int 45^x\,dx=3\cdot 45^x\big/\ln 45+C\,;$

$$((3/\ln 45)\cdot 45^x+C)'=(3/\ln 45)\cdot 45^x\ln 45+0=3^{2x+1}5^x\,.\quad\blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти інтеграл $\int\dfrac{3\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x^2}+1}{x}\,dx$. Виділити первісну $y=F(x)$, графік якої проходить через точку $M_0(x_0\,;y_0)$, де $x_0=1$ і $y_0=-10$. Обчислити значення $F(x_1)$ отриманої первісної в точці $x_1=64$.

$$\int\frac{3\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x^2}+1}{x}\,dx=\int\left(3x^{1/2}-\frac{1}{\sqrt{x}}-4x^{-1/3}+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$= 3\int x^{1/2}dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 4\int x^{-1/3}dx + \int \frac{dx}{x} = 3\cdot x^{3/2}\big/(3/2) - 2\sqrt{x} -$$

$$-4\cdot x^{2/3}\big/(2/3) + \ln|x| + C = 2x^{3/2} - 2\sqrt{x} - 6x^{2/3} + \ln|x| + C\,.$$

З умови $F(x_0) = y_0$ знайдемо відповідне значення довільної сталої та шукану первісну:

$$F(1) = -10:\;\; 2\cdot 1^{3/2} - 2\sqrt{1} - 6\cdot 1^{2/3} + \ln|1| + C = -10\,;$$

$$C = -4;\;\; F(x) = 2x^{3/2} - 2\sqrt{x} - 6x^{2/3} + \ln|x| - 4$$

Обчислимо значення первісної в указаній точці $x_1 = 64$:

$$F(64) = 2\cdot 64^{3/2} - 2\sqrt{64} - 6\cdot 64^{2/3} + \ln|64| - 4 = 908 + \ln 64\,.\; \blacksquare$$

1.1.3. Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами

1. ***Метод заміни змінної*** (***підстановки***), що ґрунтується на властивості інваріантності, є основним при інтегруванні. Зокрема, підведення під знак диференціала можна розглядати як неявне застосування цього методу.

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)\,dx$, але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує.

Заміну змінної можна здійснити двома способами.

<u>Перший спосіб</u>. Зробимо заміну змінної у підінтегральному виразі, поклавши $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$. Тоді

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int g(t)\,dt =$$

$$= G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C\,.$$

Після інтегрування у правій частині рівності замість t підставлено його вираз через стару змінну x.

<u>Зауваження 1</u>. Функція $\varphi(t)$ обирається таким чином, щоб отриманий інтеграл $\int g(t)\,dt$ був простішим, зокрема, мав таблич-

ний вигляд або його можна було звести до такого вигляду за допомогою елементарних перетворень. Далі будуть наведені стандартні підстановки $x = \varphi(t)$ для деяких класів інтегралів.

Зауваження 2. Заміна змінної може застосовуватися повторно.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

□ Зробимо підстановку $x = 3\sin t$ з метою позбутись ірраціональності. Тоді $dx = 3\cos t\,dt$ і

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx = \int (3\sin t)^2\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt =$$

$$= \int 9\sin^2 t\cdot 3|\cos t|\cdot 3\cos t\,dt = 81\int \sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= (81/4)\int \sin^2 2t\,dt = (81/8)\int (1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= (81/8)\cdot\left(\int dt - \int \cos 4t\,dt\right) = (81/8)\cdot t - (81/8)\cdot\int \cos 4t\,dt$$

при умові $\cos t \ge 0$. Нехай $t = u/4$. Тоді $dt = (1/4)\,du$ і

$$\int \cos 4t\,dt = (1/4)\int \cos u\,du = (1/4)\sin u + C.$$

Отже

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx = (81/8)\cdot t - (81/8)\cdot(1/4)\sin u + C.$$

Повернемось до початкової змінної x:

$$t = \arcsin(x/3); \quad u = 4t = 4\arcsin(x/3).$$

Тоді

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx = \frac{81}{8}\arcsin(x/3) - \frac{81}{32}\sin(4\arcsin(x/3)) + C.$$

Звичайно, отриманий результат можна спростити, використовуючи тригонометричні тотожності. ■

Другий спосіб. Запишемо інтеграл $\int f(x)\,dx$ у вигляді $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$, тобто виділимо диференціал деякої функції $\varphi(x)$, і застосовуючи підстановку $u = \varphi(x)$, перейдемо в інтегралі

$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$ до нової змінної:

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int g(u)\,du\,.$$

Після цього знайдемо одержаний інтеграл і повернемося до старої змінної x, поклавши $u = \varphi(x)$:

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int g(u)\,du = G(u) + C = G(\varphi(x)) + C\,.$$

Зауваження 3. При другому способі за нову змінну вибирають функцію, похідна (диференціал) якої у вигляді множника, по суті, вже міститься у підінтегральному виразі.

Приклад 2. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int \sin(x^3 + 2)x^2 dx; \qquad \text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{arctg\, x}}{1 + x^2} dx\,.$$

□ а) Зробимо підстановку $u = x^3 + 2$. Тоді $du = 3x^2 dx$, $x^2 dx = (1/3)\,du$ і, отже,

$$\int \sin(x^3 + 2)\,x^2 dx = (1/3)\int \sin u\,du = (-1/3)\cos u + C =$$

$$= (-1/3)\cos(x^3 + 2) + C\,.$$

б) Зробимо підстановку $u = arctg\, x$. Тоді $dt = du/(1 + x^2)$ і, отже,

$$\int \frac{\sqrt[3]{arctg\, x}}{1 + x^2} dx = \int \sqrt[3]{u}\,du = \int u^{1/3} du = (3/4)u^{4/3} + C =$$

$$= (3/4) arctg^{4/3} x + C\,. \quad ■$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int f(ax + b)\,dx$, $a \neq 0$, якщо відомо, що $\int f(x)dx = F(x)$.

□ Використаємо лінійну підстановку $u = ax + b$. Для цієї підстановки $du = a\,dx$.

$$\int f(ax + b)dx = (1/a)\int f(ax + b)adx = (1/a)\int f(u)du =$$

$$= (1/a)F(u) + C\,.$$

Повертаючись до початкової змінної, маємо

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx=(1/a)F(ax+b)+C}.\blacksquare$$

Висновок 1. Оскільки у наведеному прикладі розглядалася довільна функція $f(x)$, отриманий результат можна застосовувати як одну з властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад 4. Знайти інтеграл

$$\int\left(1/\cos^2 6x+(2-9x)^{10}+\sin(x-6)\right)dx.$$

$$\square\ \int\left(1/\cos^2 6x+(2-9x)^{10}+\sin(x-6)\right)dx=$$

$$=\int dx/\cos^2 6x+\int(2-9x)^{10}dx+\int\sin(x-6)\,dx=$$

$$=(1/6)tg\,6x-\left(1/99\right)(2-9x)^{11}-\cos(x-6)+C.\quad\blacksquare$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$.

$$\square\ \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\left|\begin{array}{c}u=f(x)\\ du=f'(x)\,dx\end{array}\right|=\int\frac{du}{u}=$$

$$=\ln|u|+C=\ln|f(x)|+C.\quad\blacksquare$$

Висновок 2. *Інтеграл дробу, в якому чисельник є похідною знаменника, дорівнює сумі натурального логарифма модуля знаменника і довільної сталої*: $\boxed{\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C}$

2. *Метод інтегрування частинами*, що ґрунтується на правилі диференціювання добутку двох функцій, відіграє допоміжну роль і має специфічні сфери застосування.

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні. Візьмемо диференціал добутку цих функцій

$$d(uv)=v\,du+u\,dv,$$

а тепер проінтегруємо

$$\int d(uv)=\int v\,du+\int u\,dv,\ \text{але}\ \int d(uv)=uv+C.$$

Маємо ***формулу інтегрування частинами*** $\boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du}$.

Зауваження 4. Застосовувати цей метод доречно, коли інтеграл праворуч простіший, ніж той, що ліворуч, або йому подібний. Як правило, за u вибирають функцію, що спрощується при диференціюванні. Функцію v знаходять у явному вигляді як одну з первісних $\int dv$ (звичайно, поклавши $C = 0$).

Типовими застосуваннями методу інтегрування частинами є випадки, коли підінтегральна функція містить добуток раціональних і трансцендентних функцій, а при цьому інші способи не прийнятні. Наведемо відповідні рекомендації щодо вибору u.

Якщо підінтегральна функція має вигляд:

а) $P_n(x)\cos bx$, $P_n(x)\sin bx$, $P_n(x)\, e^{ax}$, $P_n(x)\, ch\, bx$, $P_n(x)\, sh\, bx$, то за u слід взяти многочлен $P_n(x)$;

б) $P_n(x)\ln x$, $P_n(x)\arcsin bx$, $P_n(x)\arccos bx$, $P_n(x)\, arctg\, bx$, $P_n(x)\, arcctg\, bx$, $P_n(x)\, arsh\, bx$, $P_n(x)\, arch\, bx$, $P_n(x)\, arth\, bx$, $P_n(x)\, arcth\, bx$, то за u слід взяти відповідно логарифмічну $\ln x$, обернену тригонометричну $\arcsin bx$, $\arccos bx$, $arctg\, bx$, $arcctg\, bx$ чи обернену гіперболічну $arsh\, bx$, $arch\, bx$, $arth\, bx$, $arcth\, bx$ функцію;

в) $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, $\int \cos\ln x\, dx$, $\int \sin\ln x\, dx$, то за u в перших двох інтегралах можна взяти будь-яку з двох функцій: показникову чи тригонометричну, а в останніх – відповідну тригонометричну функцію. Після двократного інтегрування частинами одержуємо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Знаходимо інтеграл як розв'язок цього рівняння.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int x5^x dx$; б) $\int (x^2+4)\cos x\, dx$; в) $\int \ln(x+3)\, dx$; г) $\int e^x \sin 7x\, dx$.

□ а) Нехай $x = u$, $5^x dx = dv$. Тоді $v = \int 5^x dx = 5^x/\ln 5$. Інтегруємо частинами:

$$\int x5^x dx = x5^x/\ln 5 - (1/\ln 5)\int 5^x dx = x5^x/\ln 5 + 5^x/\ln^2 5 + C.$$

б) Припустимо, що $u = x^2 + 4$; $dv = \cos x\, dx$. Тоді

$du = 2x\,dx$, $v = \sin x$. Інтегруємо частинами:

$$\int \left(x^2+4\right)\cos x\,dx = \left(x^2+4\right)\sin x - 2\int x\sin x\,dx .$$

Застосувавши до інтеграла, який стоїть праворуч, ще раз інтегрування частинами $u = x$, $dv = \sin x\; dx$, $du = dx$, $v = -\cos x$, остаточно дістанемо:

$$\int \left(x^2+4\right)\cos x\,dx = \left(x^2+4\right)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C .$$

в) Приймемо, що $u = \ln(x+3)$, $dv = dx$. Тоді $du = dx/(x+3)$, $v = x$. Маємо:

$$\int \ln(x+3)\,dx = x\ln(x+3) - \int x\,dx/(x+3) = x\ln(x+3) -$$

$$-\int \frac{x+3-3}{x+3}dx = x\ln(x+3) - \int dx + 3\int \frac{dx}{x+3} = x\ln(x+3) -$$

$$-x + 3\ln(x+3) + C .$$

г) Покладемо $u = \sin 7x$, $dv = e^x dx$. Спираючись на це, знаходимо $du = 7\cos 7x\,dx$ та $v = e^x$. Використавши формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$I = \int e^x \sin 7x\,dx = e^x \sin 7x - \int e^x 7\cos 7x dx =$$

$$= e^x \sin 7x - 7\int e^x \cos 7x\,dx \;.$$

До інтегралу, що залишився, знову застосовуємо інтегрування частинами, причому $u = \cos 7x$, $dv = e^x dx$; $du = -7\sin 7x\,dx$, $v = e^x$. Маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7\left(e^x \cos 7x - \int e^x(-7\sin 7x)\,dx\right) =$$

$$= e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49\int e^x \sin 7x\,dx .$$

Далі прирівнюємо початковий вираз до останнього отриманого. Одержану рівність можна розглядати як рівняння, в якому невідомим є шуканий інтеграл I. Розв’язавши це рівняння, маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49I \;;\; 50I = e^x \sin x - 7e^x \cos 7x ;$$

$$I=\int e^x \sin 7x\,dx=(1/50)\left(e^x \sin 7x-7e^x \cos 7x\right)+C\,.\quad\blacksquare$$

Зауваження 5. Наведені методи вичерпують відомі загальні способи інтегрування. Вони можуть застосовуватися разом у різній послідовності й багаторазово. Далі будуть розглянуті особливості їх використання для інтегрування основних класів функцій. Треба творчо підходити до конкретної задачі, враховуючи її специфіку і допускаючи застосування нетипових способів інтегрування.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \cos^2 \sqrt{x}\,dx$.

□ Застосуємо заміну змінної, елементарні перетворення, а потім інтегрування частинами:

$$\int \cos^2 \sqrt{x}\,dx=\left|x=t^2;\ dx=2t\,dt\right|=2\int t\cos^2 t\,dt=2\int t\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}-\int t\cos 2t\,dt=\left|u=t;\ du=dt;\ dv=\cos 2t\,dt;\ v=\frac{\sin 2t}{2}\right|=$$

$$=\frac{t^2}{2}-t\frac{\sin 2t}{2}+\frac{1}{2}\int \sin 2t\,dt=\frac{t^2}{2}-t\frac{\sin 2t}{2}-\frac{1}{4}\cos 2t+C=\left|t=\sqrt{x}\right|=$$

$$=(1/4)\cdot\left(2x-2\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}-\cos 2\sqrt{x}\right)+C\,.\quad\blacksquare$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int dx/(x^2+9)^2$.

□ Застосуємо елементарні перетворення, інтегрування частинами і заміну змінної:

$$\int\frac{dx}{(x^2+9)^2}=\frac{1}{9}\int\frac{x^2+9-x^2}{(x^2+9)^2}dx=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2+9}-\frac{1}{9}\int\frac{x^2dx}{(x^2+9)^2}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}\,arctg\frac{x}{3}-\frac{1}{9}\int\frac{x\cdot x\,dx}{(x^2+9)^2}=\left|u=x;\ dv=\frac{x\,dx}{(x^2+9)^2}\right.;$$

$$du=dx;\ \ v=\int\frac{x\,dx}{(x^2+9)^2}=\left|t=x^2+9;\ \ dt=2x\,dx\right|=$$

$$\left.=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{2t}+C=-\frac{1}{2(x^2+9)}+C;\ C=0\right|=\frac{1}{27}\,arctg\frac{x}{3}-$$

$$-\frac{1}{9}\cdot\left(x\cdot\left(-\frac{1}{2(x^2+9)}\right)-\int\left(-\frac{1}{2(x^2+9)}\right)dx\right)=\frac{1}{27}\,arctg\,\frac{x}{3}+$$

$$+\frac{x}{18(x^2+9)}-\frac{1}{18}\cdot\int\frac{dx}{x^2+9}=\frac{1}{27}\,arctg\,\frac{x}{3}+\frac{x}{18(x^2+9)}-$$

$$-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}\,arctg\,\frac{x}{3}+C=\frac{1}{54}\,arctg\,\frac{x}{3}+\frac{x}{18(x^2+9)}+C. \quad ■$$

1.1.4. Інтегрування раціональних дробів

1. Розкладання многочлена з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники.

Розглянемо многочлен $P_n(x)$ ***стандартного вигляду*** з дійсними коефіцієнтами

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n;\ \ a_i\in R;\ i=\overline{0,n}\ .$$

На множині комплексних чисел C будь-який многочлен $P_n(x)$ n-го степеня за основною теоремою алгебри має точно n коренів, а тому єдиним способом (з точністю до порядку співмножників) розкладається у добуток

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_m)^{k_m}\ ,$$

де a_0 – старший коефіцієнт; $x_1, x_2,..., x_m$ – різні (дійсні чи комплексні) корені; $k_1, k_2, ..., k_m$ – відповідні кратності цих коренів, причому $k_1+k_2+...+k_m=n$.

При інтегруванні дійсних виразів бажано не виходити за межі множини дійсних чисел R. Розглянемо особливості розкладання на множники при цьому обмеженні.

Якщо комплексне число $a=\alpha+\beta i$ є коренем многочлена $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то й комплексно спряжене з ним $\overline{a}=\alpha+\beta i$ також буде коренем даного многочлена. Добуток $(x-a)(x-\overline{a})$, що відповідає парі комплексно спряжених коренів, породжує ***простий*** (***незвідний*** у множині дійсних чисел) квадратний тричлен $x^2 + px + q$ з дійсними коефіцієнтами $p, q \in R$ і від'ємним дискримінантом $D = p^2 - 4q < 0$.

Таким чином, *будь-який многочлен* $P_n(x)$ *з дійсними коефіцієнтами можна подати, і причому єдиним способом (з точністю до порядку), у вигляді добутку різних простих (лінійних і квадратичних) дійсних множників у відповідних степенях*:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_s)^{k_s} \times$$
$$\times (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}(x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t},$$

де лінійні двочлени $x - a$ відповідають його різним дійсним кореням $x_1, x_2, \dots, x_s$; квадратні тричлени $x^2 + px + q$ з від'ємним дискримінантом – різним парам спряжених комплексних коренів; $k_1, k_2, \dots, k_s$ і $l_1, l_2, \dots, l_t$ – кратності цих коренів, причому $k_1 + \dots + k_s + 2(l_1 + \dots + l_t) = n$.

<u>Приклад 1</u>. Розкласти многочлен $P(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6$ на різні прості дійсні множники.

□ За теоремою Вієта добуток коренів многочлена такого типу дорівнює вільному члену. Тобто, $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = -6$. Перевіримо числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, , \pm 6$, що служать дільниками вільного члена -6. Нехай $x = -1$. Тоді

$$P(-1) = (-1)^5 - (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 10 \cdot (-1) - 6 =$$
$$= -1 - 1 + 3 - 5 + 10 - 6 = 0.$$ Отже, $x = -1$ – корінь.

Знизимо степінь, розділивши многочлен "кутом" на двочлен $x - (-1) = x + 1$:

$$\begin{array}{l|l} -\,x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6 & x + 1 \\ \underline{x^5 + x^4} & x^4 - 2x^3 - x^2 - 4x - 6 \\ \quad -\,-2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6 & \\ \quad \underline{-2x^4 - 2x^3} & \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
-\begin{array}{l} -x^3-5x^2-10x-6 \\ \underline{-x^3-x^2} \end{array} \\
\qquad -\begin{array}{l} -4x^2-10x-6 \\ \underline{-4x^2-4x} \end{array}
\end{array}
\qquad
-\begin{array}{l} -6x-6 \\ \underline{-6x-6} \\ \qquad 0 \end{array}
$$

Отримаємо

$P(x)=(x+1)S(x)$, де $S(x)=x^4-2x^3-x^2-4x-6$.

Тепер треба знайти корені многочлена четвертого степеня. Нехай $x=-1$. Тоді

$S(-1)=1+2-1+4-6=0$. Отже, $x=-1$ – корінь.

Знизимо степінь, розділивши многочлен “кутом” на двочлен $x-(-1)=x+1$. (Виконайте ділення самостійно). Одержимо

$S(x)=(x+1)T(x)$, де $T(x)=x^3-3x^2+2x-6$.

Тепер треба знайти корені многочлена третього степеня. Нехай $x=3$. Тоді

$T(3)=3^3-3\cdot 3^2+2\cdot 3-6=0$. Отже, $x=3$ – корінь.

Знизимо степінь, розділивши многочлен “кутом” на двочлен $x-3$. (Виконайте ділення самостійно). Отримаємо

$$T(x)=(x-3)(x^2+2),$$

де неповний квадратний тричлен x^2+2 є простим, оскільки дійсних коренів не має.

Отже, $P(x)=(x+1)^2(x-3)(x^2+2)$. ■

2. Раціональні дроби.

Розглянемо два многочлена $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ степеня m і n відповідно:

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m;$$

$$Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n.$$

Раціональним дробом (***дробово-раціональною функцією***) називається відношення двох многочленів $P_m(x)/Q_n(x)$.

Якщо степінь m чисельника нижче степеня n знаменника, то дріб називається ***правильним***, якщо, навпаки, $m > n$ або $m = n$, то дріб – ***неправильний***.

Будь-який неправильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ *можна зобразити у вигляді суми многочлена і правильного дробу*

$$\boxed{P_m(x)/Q_n(x) = G_{m-n}(x) + R_k(x)/Q_n(x)},$$

причому цей розклад єдиний.

Тут $G_{m-n}(x)$ – многочлен, який називають ***цілою частиною*** раціонального дробу, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб, тобто $k < n$. Многочлени $G_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ – відповідно частка й остача від ділення "кутом" $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

<u>Приклад 2</u>. Вилучити цілу частину неправильного дробу $P(x)/Q(x) = (x^4 - 3x^2 + 5x + 4)/((x+4)(x-2))$ і подати його у вигляді суми многочлена та правильного дробу.

□ Для вилучення цілої частини використаємо ділення "кутом" многочлена на многочлен, спочатку виконавши множення в знаменнику і записавши результат у стандартному вигляді в порядку спадання степенів: $Q(x) = (x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$;

$$\begin{array}{r|l}
-\; x^4 - 3x^2 + 5x + 4 & \underline{x^2 + 2x - 8} \\
\underline{x^4 + 2x^3 - 8x^2} \qquad\quad & x^2 - 2x + 9 \\
-\; -2x^3 + 5x^2 + 5x + 4 & \\
\underline{-2x^3 - 4x^2 + 16x} \qquad & \\
-\; 9x^2 - 11x + 4 & \\
\underline{9x^2 + 18x - 72} & \\
-29x + 76 &
\end{array}$$

Таким чином,

$$P(x)/Q(x) = x^2 - 2x + 9 + (-29x + 76)/((x+4)(x-2)). \quad ■$$

Зауваження 1. Вилучення цілої частини неправильного раціонального дробу інколи можна зробити простіше, виконавши алгебраїчні перетворення чисельника.

Приклад 3. Вилучити цілу частину неправильного дробу $x^4/(x^2+1)$ і подати його у вигляді суми многочлена та правильного дробу.

□ Скористаємося алгебраїчними перетвореннями:

$$x^4/(x^2+1)=(x^4-1+1)/(x^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)/(x^2+1)+$$

$$+1/(x^2+1)=x^2-1+1/(x^2+1). \quad ■$$

3. Найпростіші раціональні дроби. Розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші.

Правильні раціональні дроби наступних чотирьох типів:

1) $\boxed{\dfrac{A}{x-a}}$; 2) $\boxed{\dfrac{A}{(x-a)^k}}$, $k\geq 2$; 3) $\boxed{\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}}$, $D=p^2-4q<0$;

4) $\boxed{\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}}$, $k\geq 2,\ D=p^2-4q<0$

називаються ***елементарними*** (***найпростішими***). Тут A, B, a, p, q – дійсні числа, $k\in N$. Підкреслимо, що квадратний тричлен x^2+px+q має тільки комплексні корені.

Кожний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна розкласти на суму скінченного числа найпростіших дробів вказаних чотирьох типів, причому цей розклад єдиний.

Розглянемо довільний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$, в якому знаменник $Q_n(x)$ – зведений многочлен (старший коефіцієнт $b_0=0$), розкладений на прості дійсні множники

$$Q_n(x)=(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t},$$

де $k_1+\ldots+k_s+2(l_1+\ldots+l_t)=n$.

Тоді правильний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна подати у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{11}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_{s1}}{(x-x_s)^{k_s}} +$$

$$+ \frac{A_{s2}}{(x-x_s)^{k_s-1}} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{x-x_s} + \ldots + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} +$$

$$+ \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}} + \frac{B_{t2}x + C_{t2}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t-1}} + \ldots + \frac{B_{tl_t}x + C_{tl_t}}{x^2+p_tx+q_t}.$$

Коефіцієнти A_{ij} $(i=\overline{1,s}\,;\ j=\overline{1,k_i})$ і B_{ij}, C_{ij} $(i=\overline{1,t}\,;\ j=\overline{1,l_t})$ визначаються після зведення правої частини до спільного знаменника і виділення тотожності многочленів у чисельниках праворуч і ліворуч (відкиданням однакових знаменників). Далі застосовуються наступні методи (окремо чи в комбінації):

– ***метод невизначених коефіцієнтів***: *прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях* x, *приходимо до системи лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів* (два многочлена тотожно рівні, коли рівні коефіцієнти при подібних членах – однакових степенях x);

– ***метод окремих значень*** (***метод підстановки***): *надаючи змінній* x *в отриманій тотожності конкретні значення, одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів* (тотожні вирази приймають однакові значення при довільному допустимому значенні аргументу x).

Зауваження 2. Використовуючи метод окремих значень, не треба розкривати дужки в многочленах, а підставляти зручно різні дійсні корені знаменника $Q_n(x)$, що приводить до простих рівнянь. Отримана система повинна мати розмірність, що дорівнює числу шуканих коефіцієнтів.

Зауваження 3. Метод підстановки рекомендується вживати, коли всі корені знаменника дійсні й серед них немає кратних. У протилежному випадку краще поєднати цей метод з методом невизначених коефіцієнтів. Але треба вибирати незалежні рівняння, щоб система мала єдиний розв'язок.

Зауваження 4. Існують інші, менш поширені, методи знаходження невідомих коефіцієнтів. Допитливі можуть з ними познайомитися, звернувшись до спеціалізованої літератури.

Приклад 3. Правильний раціональний дріб $P(x)/Q(x)$ розкласти на суму найпростіших дробів, де

а) $P(x) = -2x^4 - x^3 - 6x^2 + 18x + 13$

і $Q(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6$;

б) $P(x) = 7x - x^2 - 4$ і $Q(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$;

в) $P(x) = x^3 - 8$ і $Q(x) = x(x+4)(x^2 + 2x + 2)$.

□ а) Многочлен $Q(x)$ було розкладено на множники вище (див. Прикл.1): $Q(x) = (x+1)^2 (x-3)(x^2+2)$.

Шукане розкладання дробу матиме вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+2},$$

де числа A, B, C, D і E ще треба знайти. Зводячи праву частину до спільного знаменника (ним служить многочлен $Q(x)$), з умови рівності дробів дістаємо (відкидаючи однакові знаменники) тотожність многочленів:

$$A(x+1)^2(x^2+2) + B(x-3)(x^2+2) + C(x-3)(x+1)(x^2+2) +$$

$$+ (Dx+E)(x-3)(x+1)^2 = P(x).$$

Знайдемо невідомі A, B, C, D, E методом невизначених коефіцієнтів. Розкривши дужки і звівши подібні, прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x у лівій і правій частинах отриманої тотожності. Дістанемо і розв'яжемо (зробіть це самостійно, наприклад, методом Гаусса) систему п'яти лінійних рівнянь з п'ятьма невідомими:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A+C+D=-2, \\ x^3 & 2A+B-2C-D+E=-1\ , \\ x^2 & 3A-3B-C-5D-E=-6\ , \\ x^1 & 4A+2B-4C-3D-5E=18\ , \\ x^0 & 2A-6B-6C-3E=13\ ; \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} 1\\1\\1\\1\\1 \end{array}}\right\} \begin{array}{l|} A=-1; \\ B=1; \\ C=-2; \\ D=1; \\ E=-3. \end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд ·

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{x-3}{x^2+2}\,.$$

б) Даний дріб розкладається на елементарні наступним чином: $P(x)/Q(x)=A/(x+1)+B/(x-2)+C/(x-3)$.

Зводячи праву частину до спільного знаменника, з умови рівності дробів дістаємо тотожність многочленів:

$$A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2)=P(x)\,.$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти A, B і C, скористаємося методом окремих значень. Для отримання простої системи візьмемо ті значення x, що є коренями знаменника $Q(x)$, тобто $x=-1$, $x=2$ та $x=3$. Тоді

$$\begin{array}{r|r} x=-1 & 12A=-12, \\ x=\ \ 2 & -3B=6, \\ x=\ \ 3 & 4C=8; \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} 1\\1\\1 \end{array}}\right\} \quad \begin{array}{l} A=-1; \\ B=-2; \\ C=2. \end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд

$$P(x)/Q(x)=-1/(x+1)-2/(x-2)+2/(x-3)\,.$$

в) Многочлен $Q(x)$ уже розкладений на різні прості дійсні множники (переконайтеся самостійно, що квадратний тричлен x^2+2x+2 має від'ємний дискримінант). Шукане розкладання дробу на суму найпростіших матиме вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\,,$$

Зводячи праву частину до спільного знаменника, з умови рівності дробів дістаємо тотожність многочленів:

$$A(x+4)(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2)+$$
$$+(Cx+D)\,x(x+4)=P(x)\,.$$

Оскільки знаменник $Q(x)$ має лише два різних дійсних кореня $x=0$ і $x=-4$, то для складання системи рівнянь відносно невідомих A, B, C і D використаємо комбінацію методів окремих значень і невизначених коефіцієнтів. Дістанемо і розв'яжемо систему чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{array}{c|c} x=0 & 8A=-8, \\ x=-4 & -40B=-72, \\ x^3 & A+B+C=1, \\ x & 10A+2B+4D=0; \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \quad \begin{array}{c} A=-1; \\ B=9/5 \\ C=1-A-B=1/5; \\ D=-(5A+B)/2=8/5. \end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=-\frac{1}{x}+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x+4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x+8}{x^2+2x+2}\,. \quad \blacksquare$$

4. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

Елементарні дроби першого і другого типів легко інтегруються заміною змінної $t=x-a$ (пробробіть це самостійно):

1) $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C$;

2) $\displaystyle\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C\,,\quad k\ge 2\,.$

Розглянемо інтегрування найпростішого дробу третього типу:

3) $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx\,.$

Виділимо в квадратному тричлені повний квадрат

$$x^2+px+q=x^2+2x\cdot(p/2)+(p/2)^2+q-(p/2)^2=$$

$$= (x + p/2)^2 + a^2\,;\;\; a = \sqrt{q - p^2/4} > 0\,.$$

Зробимо заміну $t = x + p/2$. Тоді $x = t - p/2$, $dx = dt$. Одержимо

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{A(t - p/2) + B}{t^2 + a^2}\,dt = A\int \frac{t\,dt}{t^2 + a^2} +$$

$$+ (B - Ap/2)\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = A\int \frac{t\,dt}{t^2 + a^2} + (B - Ap/2)\cdot \frac{1}{a}\,arctg\,\frac{t}{a}\,.$$

Далі використовуємо заміну $u = t^2 + a^2$. Тоді $du = 2tdt$, $tdt = (1/2)\,du$. Отримаємо

$$\int \frac{t\,dt}{t^2 + a^2} = (1/2)\int \frac{du}{u} = (1/2)\ln|\,u\,| + C\,.$$

Повертаючись до старої змінної

$$t = x + p/2\,;\quad a = \sqrt{q - p^2/4}\,;$$

$$u = t^2 + a^2 = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 = x^2 + px + q\,,$$

після спрощення остаточно маємо

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}\,dx = (A/2)\ln|\,x^2 + px + q\,| +$$

$$+ \left((2B - Ap)\big/(4q - p^2)\right) arctg\left((2x + p)\big/\sqrt{4q - p^2}\right) + C\,.$$

Зауваження 5. Якщо в квадратному тричлені $x^2 + px + q$ дискримінант додатний $D > 0$, то дріб $(Ax + B)/(x^2 + px + q)$ за означенням неелементарний і зводиться до двох дробів першого типу. Однак його можна інтегрувати й наведеним вище способом, де замість арктангенса з'явиться логарифм.

Зауваження 6. Одержані формули запам'ятовувати не потрібно. Краще безпосередньо застосовувати розглянуті підходи для інтегрування кожного конкретного елементарного дробу.

Зауваження 7. Інтегрування найпростішого дробу четвертого типу розглядати не будемо. Бажаючим вивчити це питання треба звернутися до більш ґрунтовних підручників.

5. Розгляд основних випадків інтегрування раціональних дробів.

Нехай треба обчислити інтеграл від раціонального дробу $\int P(x)dx / Q(x)$. Якщо дріб неправильний, то його подаємо у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу. Останній дріб розкладаємо на суму найпростіших дробів.

Приклад 4. Знайти інтеграл $I = \int \frac{2x^3 - 15x - 45}{x^2 - 6x + 13} dx$.

□ Оскільки дріб неправильний, то діленням “кутом” виділимо в ньому цілу частину (проробіть це самостійно), а потім проінтегруємо, використовуючи заміни:

$$I = \int (2x-3)\,dx + \int (-44x-6)\,dx \Big/ (x^2 - 6x + 13) =$$

$$= \left| x^2 - 6x + 13 = (x-3)^2 + 4;\ t = x-3;\ x = t+3;\ dx = dt \right| = x^2 -$$

$$-3x + \int \frac{-44(t+3)-6}{t^2+4} dt = x^2 - 3x - 44\int \frac{t\,dt}{t^2+4} - 6\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \left| u = t^2 + 4;\ du = 2t\,dt;\ t\,dt = (1/2)\,du \right| = x^2 - 3x - 44 \times$$

$$\times \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - 6 \cdot \frac{1}{2} arctg\,\frac{t}{2} = x^2 - 3x - 22\ln|u| - 3arctg\,\frac{t}{2} + C =$$

$$= \left|\ t = x-3;\ \ u = t^2 + 4 = (x-3)^2 + 4 = x^2 - 6x + 13 \right| =$$

$$= x^2 - 3x - 22\ln(x^2 - 6x + 13) - 3\,arctg\,\frac{x-3}{2} + C$$

$$= 3arctg\,(x+1) - \ln|x-2| + C\,. \blacksquare$$

З попереднього відомо, що структура розвинення на елементарні дроби визначається коренями знаменника $Q(x)$. Тут можливі такі випадки:

а) Корені знаменника дійсні й прості, тобто

$$Q(x) = (x-a)(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-d)\,.$$

У цьому разі правильний дріб розкладається на найпростіші дроби тільки першого типу

$$P(x)/Q(x) = A/(x-a) + B/(x-b) + ... + D/(x-d).$$

Тоді

$$\int \frac{P(x)\,dx}{Q(x)} = \int \frac{A\,dx}{x-a} + \int \frac{B\,dx}{x-b} + ... + \int \frac{D\,dx}{x-d} =$$

$$= A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + ... + D\ln|x-d| + C.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $I = \int \frac{4x^2 - 13x + 7}{(x^2 - 5x + 6)(x+1)}\,dx$.

□ $I = \int \frac{4x^2 - 13x + 7}{(x-2)(x-3)(x+1)}\,dx = \int \frac{A\,dx}{x-2} + \int \frac{B\,dx}{x-3} + \int \frac{C\,dx}{x+1}$.

Тут $4x^2 - 13x + 7 = A(x-3)(x+1) + B(x-2)(x+1) +$

$$+ C(x-2)(x-3).$$

Використавши метод підстановки (проробіть це самостійно), маємо: $A = 1;\ B = 1; C = 2$.

$$I = \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{2dx}{x+1} =$$

$$= \ln|x-2| + \ln|x-3| + 2\ln|x+1| + C. \quad \blacksquare$$

б) Корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні:

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot (x-b)^{\beta} ... (x-d)^{\gamma}.$$

У цьому разі дріб розкладається на найпростіші дроби першого і другого типів.

Приклад 6. Знайти інтеграл $I = \int \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 8}{(x+2)^3(x-1)}\,dx$.

□ $I = \int \frac{A\,dx}{(x+2)^3} + \int \frac{B\,dx}{(x+2)^2} + \int \frac{C\,dx}{x+2} + \int \frac{D\,dx}{x-1}$.

Маємо тотожність $x^3 + 4x^2 + 5x + 8 = A(x-1) +$

$$+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2(x-1)+D(x-1)^3.$$

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів (пробробіть це самостійно), отримаємо: $A=-2, B=-1, \ C=1/3, D=2/3$.

Тоді $I=\int\frac{-2\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{-1dx}{(x+2)^2}+\int\frac{(1/3)\,dx}{x+2}+\int\frac{(2/3)\,dx}{x-1}=$

$$=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C. \quad \blacksquare$$

в) <u>Корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно спряжені</u>:

$$Q(x)=(x^2+px+q)...(x^2+rx+s)(x-a)^{\alpha}...(x-c)^{\gamma}.$$

У цьому разі дріб $P(x)/Q(x)$ розкладається на найпростіші дроби першого, другого і третього типів.

<u>Приклад 7</u>. Знайти інтеграл $I=\int\frac{-x^2+x-8}{(x^2+2x+2)(x-2)}dx$.

□ $I=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+2x+2}+\int\frac{C\,dx}{x-2}$.

Тут $-x^2+x-8=(Ax+B)(x-2)+C(x^2+2x+2)$.

Використаємо комбінацію методу окремих значень і методу невизначених коефіцієнтів. Нехай $x=2$ (дійсний корінь), маємо $10C=-10$, $C=-1$; нехай $x=0$ (довільно взяте значення), тоді $-2B+2C=-8$; $B=4+C=3$. Прирівнявши коефіцієнти при x^2, маємо $A+C=-1$; $A=-1-C=0$. Отже,

$$I=\int\frac{3\,dx}{x^2+2x+2}-\int\frac{dx}{x-2}=3\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}-\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=3arctg\,(x+1)-\ln|x-2|+C. \ \blacksquare$$

<u>Зауваження 8</u>. Залишився випадок, коли у знаменнику є кратні комплексні корені. Його розглядати не будемо. Бажаючих поглибити свою математичну підготовку відсилаємо до більш ґрунтовних підручників.

Справедливе твердження: *інтеграл від будь-якої раціональної функції може бути визначений через елементарні функції у скінченному вигляді*.

1.1.5. Інтегрування лінійних ірраціональностей

Не від усякої ірраціональної функції інтеграл можна виразити через елементарні функції у скінченній формі. Розглянемо інтеграли від ірраціональних функцій, що за допомогою підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій і, отже, інтегруються.

Домовимося, що запис $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означає раціональну функцію вказаних аргументів.

1. Інтеграл вигляду $\boxed{\int R(x, x^{m/n}, ..., x^{r/s})dx}$. Нехай k – спільний знаменник дробів $m/n, ..., r/s$. Зробимо підстановку $\boxed{x = t^k}$, $dx = kt^{k-1}dt$. Тоді кожний дробовий степінь x виразиться через цілу степінь t і, отже, підінтегральна функція перетвориться у раціональну від t. Після інтегрування за змінною t повертаємося до старої змінної x: $t = x^{1/k} = \sqrt[k]{x}$.

Приклад 1. Знайти інтеграл $I = \int \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)\,dx}{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{x}}$.

$$\square \quad I = \int \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)\,dx}{\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{x}} = \int \frac{(x^{1/3} - 1)\,dx}{x^{2/3} + 3x^{1/2}}.$$

Спільний знаменник дробів $1/3$, $2/3$ і $1/2$ є 6. Зробимо підстановку $x = t^6$; $dx = 6t^5dt$. Тоді $t = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$

$$I = \int \frac{(x^{1/3} - 1)\,dx}{x^{2/3} + 3x^{1/2}} = 6\int \frac{(t^2 - 1)t^5dt}{t^4 + 3t^3} = 6\int \frac{(t^2 - 1)t^5dt}{t^3(t+3)} =$$

$$= 6\int \frac{(t^4 - t^2)\,dt}{t+3} = 6\int \left(t^3 - 3t^2 + 8t - 24 + \frac{72}{t+3} \right) dt =$$

$$= 6(t^4/4 - t^3 + 4t^2 - 24t + 72\ln|t+3|) + C =$$

$$=3\sqrt[3]{x^2}/2-6\sqrt{x}+24\sqrt[3]{x}-144\sqrt[6]{x}+432\ln|\sqrt[6]{x}+3|+C\,.\ \blacksquare$$

2. Інтеграл вигляду

$$\boxed{\int R\Big(x,(ax+b)^{m/n},\ldots,(ax+b)^{r/s}\Big)\,dx,\quad a\neq 0}.$$

Він зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки $\boxed{ax+b=t^k}$, де k – спільний знаменник дробів $m/n,\ldots,r/s$. Тоді $x=(t^k-b)/a$; $dx=(k/a)t^{k-1}dt$. Після інтегрування за змінною t повертаємося до початкової змінної x: $t=(ax+b)^{1/k}=\sqrt[k]{ax+b}$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{(\sqrt{x-1}+2x)\,dx}{x-2\sqrt{x-1}}$.

□ Робимо заміну: $x-1=t^2$; $x=t^2+1$; $dx=2tdt$. Тоді

$$I=\int\frac{(t+2t^2+2)2t\,dt}{t^2+1-2t}=\int\frac{(4t^3+t^2+4t)\,dt}{t^2-2t+1}=\int(4t+10)\,dt+$$

$$=\int\Big(4t+10+(20t-10)/(t-1)^2\Big)dt=2t^2+10t+$$

$$+\int\frac{\big(20(t-1)+10\big)dt}{(t-1)^2}=2t^2+10t+\int\left(\frac{20}{t-1}+\frac{10}{(t-1)^2}\right)dt=$$

$$=2t^2+10t+20\ln|t-1|-10/(t-1)+C=\left|t=\sqrt{x-1}\right|=2(x-1)+$$

$$+10\sqrt{x-1}+20\ln|\sqrt{x-1}-1|-10\Big/\Big(\sqrt{x-1}-1\Big)+C\,.\ \blacksquare$$

1.1.6. Інтегрування тригонометричних виразів

Інтегралів від тригонометричних функцій може бути безліч. Більшість з них взагалі не обчислюються аналітично. Тому розглянемо деякі найголовніші типи таких функцій, що завжди інтегруються.

1. Інтеграли вигляду:

$$\boxed{\int\cos ax\,\cos bx\,dx,\ \int\sin ax\,\cos bx\,dx,\ \int\sin ax\,\sin bx\,dx}$$

знаходяться за допомогою тригонометричних формул перетворення добутків у суму відповідно:

$$\boxed{\begin{gathered}\cos ax\cos bx = \big(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\big)/2\,;\\ \sin ax\cos bx = \big(\sin(a+b)x + \cos(a-b)x\big)/2\,;\\ \sin ax\sin bx = \big(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\big)/2\,.\end{gathered}}$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти інтеграл $I = \int \sin 8x \cos 2x\, dx$.

□ $I = (1/2)\int (\sin 10x + \sin 6x)\, dx =$

$$= (-1/20)\cos 10x - (1/12)\cos 6x + C\,. \ ■$$

2. Інтеграл вигляду $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\, dx}$. Покажемо, що *цей інтеграл за допомогою* ***універсальної тригонометричної підстановки*** $\boxed{tg\,(x/2) = t}$ *завжди зводиться до інтеграла від раціональної функції*. Виконаємо необхідні перетворення:

$$\sin x = \frac{2tg\,(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}\,;\ \ \cos x = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,;$$

$$x = 2arctg\, t\,;\ \ dx = 2dt/(1+t^2)\,.$$

Отже, $\sin x$, $\cos x$ і dx мають раціональні вирази відносно t. Оскільки раціональна функція від раціональних функцій знову раціональна, маємо:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int \frac{R\big(2t/(1+t^2), (1-t^2)/(1+t^2)\big)2\,dt}{1+t^2}\,.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти інтеграл $I = \int \dfrac{dx}{3\sin x + \cos x}$.

□ $I = \displaystyle\int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\big(6t/(1+t^2) + (1-t^2)/(1+t^2)\big)} = \int \frac{2\,dt}{6t+1-t^2} =$

$$= -2\int \frac{dt}{(t-3)^2 - 10} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-3-\sqrt{10}}{t-3+\sqrt{10}}\right| + C =$$

$$=\left(-1/\sqrt{10}\right)\ln\left|\left(tg(x/2)-3-\sqrt{10}\right)/\left(tg(x/2)-3+\sqrt{10}\right)\right|+C\,. \ \blacksquare$$

Поряд з універсальною також є інші підстановки, що у ряді випадків дають значно простіші раціональні вирази і тим самим швидше ведуть до мети:

а) $\boxed{\int R(\sin x)\cos x\,dx}$. Підстановка $\boxed{\sin x = t}$, $\cos x\,dx = dt$ зводить цей інтеграл до $\int R(t)\,dt$;

<u>Приклад 3</u>. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{\cos^3 x\,dx}{\sin x-2}$.

$$\square \quad I=\int\frac{\cos^2 x\,\cos x\,dx}{\sin x-2}=\left|\cos^2 x=1-\sin^2 x\right|=$$

$$=\int\frac{(1-\sin^2 x)\cos x\,dx}{\sin x-2}=\left|\begin{array}{c}\sin x=t;\\ \cos x\,dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{(1-t^2)\,dt}{t-2}=$$

$$=\int\left(-t-2-3/(t-2)\right)dt=(-1/2)t^2-2t-3\ln|t-2|+C=$$

$$=(-1/2)\sin^2 x-2\sin x-3\ln|\sin x-2|+C\,. \ \blacksquare$$

б) $\boxed{\int R(\cos x)\sin x dx}$. Підстановка $\boxed{\cos x = t}$, $-\sin x\,dx = dt$ зводить цей інтеграл до $-\int R(t)\,dt$;

<u>Приклад 4</u>. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x-16}dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $\cos x = t$).

в) $\boxed{\int R(tg\ x)\,dx}$. Підстановка $\boxed{tg\ x = t}$, $x = arctg\,t$, $dx = dt/(1+t^2)$, зводить цей інтеграл до $\int R(t)dt/(1+t^2)$;

<u>Приклад 5</u>. Знайти інтеграл $I=\int\dfrac{tg\ x\ (1+tg^2 x)}{tg^2 x+2tg\ x+5}dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $tg\ x = t$).

г) $\boxed{\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x)\,dx}$. Підстановка $\boxed{tg\ x = t}$,

$x = arctg\,t$ зводить цей інтеграл до $\int R(t)\,dt$ тому що

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2};$$

$$\sin x \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{1+t^2}; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

<u>Приклад 6</u>. Знайти інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x}$.

$$\square \quad I = \left| \begin{array}{l} t = tg\,x; \\ x = arctg\,t; \end{array} \; dx = \frac{dt}{1+t^2};\; \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \right.$$

$$\left. \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right| = \int \frac{dt/(1+t^2)}{\left(t/\sqrt{1+t^2}\right)^2 + 6\left(t/\sqrt{1+t^2}\right)\left(1/\sqrt{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t(t+6)} = \int \frac{Adt}{t} + \int \frac{Bdt}{t+6} = \left| \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A(t+6) + Bt = 1} \\ t = 0 & \left.\begin{array}{l} 6A = 1 \\ -6B = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 1/6 \\ B = -1/6 \end{array} \\ t = -6 & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t+6} = \frac{1}{6}\ln|t| - \frac{1}{6}\ln|t+6| + C =$$

$$= \left| t = tg\,x \right| = (1/6)\ln|tg\,x| - (1/6)\ln|tg\,x + 6| + C. \quad \blacksquare$$

д) $\boxed{\int \sin^m x \cos^n x\,dx}$, де m і n – цілі числа. Тут можливі такі особливості:

• Якщо хоча б одне з чисел m чи n – непарне, то відокремлюємо від непарного степеня одну функцію, що в добутку з dx дає диференціал "кофункції" (без врахування знака). Цю "кофункцію" приймаємо за нову змінну t.

Наприклад, нехай $n = 2p+1$, тоді

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x\,dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x\,dx =$$

$$= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x\,dx.$$

Зробимо заміну: $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$. Отже,

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m (1-t^2)^p\,dt$$

– інтеграл від раціональної функції.

Зауваження 1. Якщо можливо, то треба вибирати непарний додатний (краще менший за модулем) показник степеня. При цьому показник степеня іншої функції може бути довільним.

Зауваження 2. Якщо обидва числа m і n – непарні від'ємні, то краще застосувати підстановку $\boxed{tg\, x = t}$.

Приклад 7. Знайти інтеграл $I = \int \sqrt[6]{\cos x} \sin^5 x\,dx$

□ $I = \int \sqrt[6]{\cos x} \sin^4 x \sin x\,dx = \int \sqrt[6]{\cos x} (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx =$

$$= \left| \cos x = t;\ -\sin x\,dx = dt \right| =$$

$$= -\int t^{1/6}(1-t^2)^2\,dt = -\int (t^{1/6} - 2t^{13/6} + t^{25/6})\,dt = (-6/7)t^{7/6} +$$

$$+ (12/19)t^{19/6} - (6/31)t^{31/6} = -(6/7)(\cos x)^{7/6} +$$

$$+ (12/19)(\cos x)^{19/6} - (6/31)(\cos x)^{31/6} + C. \ \blacksquare$$

• Якщо m і n – парні невід'ємні числа, то використовуємо формули зниження степеня тригонометричних функцій:

$$\boxed{\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2; \quad \cos^2 x = (1+\cos 2x)/2}.$$

Отже,

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = 2^{-p-q} \int (1-\cos 2x)^p (1+\cos 2x)^q\,dx$$

де $m = 2p$ і $n = 2q$.

Після піднесення до степенів p, q і множення матимемо $\cos 2x$ як у парних, так і непарних степенях. Члени з непарними степенями інтегруються, як показано вище. Члени з парними степенями знову перетворюємо за формулами зниження степеня. Продовжуючи цей процес, дійдемо до інтегралів від сталих величин і функцій $\cos kx$, які легко інтегруються.

Зауваження 3. Для зниження степеня можна додатково використати формулу $\boxed{\sin x \cos x = (\sin 2x)/2}$.

Приклад 8. Знайти інтеграл $I = \int \sin^2 3x \cos^2 3x \, dx$.

$$\square \quad I = \left| \sin^2 3x \cos^2 3x = (\sin 3x \cos 3x)^2 = \big((1/2)\sin 6x\big)^2 = \right.$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 6x \left| = \frac{1}{4}\int \sin^2 6x \, dx = \right| \sin^2 6x = \frac{1-\cos 12x}{2} \bigg| =$$

$$= (1/8)\int (1-\cos 12x)\, dx = (1/8)\, x - (1/96)\sin 12x + C . \ \blacksquare$$

• Якщо m і n – парні числа, з яких хоча б одне від'ємне, то робимо заміну $tg\, x = t$, або $ctg\, x = t$;

Приклад 9. Знайти інтеграл $I = \int dx \big/ \cos^4 x$

$$\square \quad I = \left| tg\, x = t;\ x = arctg\, t;\ dx = dt/(1+t^2) \right| =$$

$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)\cdot 1/(1+t^2)^2} = \int \frac{dt}{1/(1+t^2)} = \int (1+t^2)\, dt =$$

$$= t + (1/3)t^3 + C = tg\, x + (1/3)\, tg^3 x + C . \ \blacksquare$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $I = \int \left(\cos^2 x \big/ \sin^6 x\right) dx$.

(Розв’яжіть самостійно, використовуючи підстановку $tg\, x = t$).

1.1.7. Інтегрування виразів, що містять квадратний корінь із суми чи різниці квадратів

Виокремлюють три типи таких інтегралів:

1) $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx}$; 2) $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx}$;

3) $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx}$.

Тут $a > 0$. Для знаходження кожного з цих інтегралів використовується відповідна тригонометрична підстановка, що дозволяє позбутись ірраціональності.

• В інтегралі першого типу вводиться заміна $\boxed{x = a \sin t}$, $dx = a \cos t \, dt$ (або $x = a \cos t$, $dx = -a \sin t \, dt$).

• В інтегралі другого типу – $\boxed{x = a\,tg\,t}$, $dx = a\,dt/\cos^2 t$ (або $x = a\,ctg\,t$, $dx = -a\,dt/\sin^2 t$).

• В інтегралі третього типу – $\boxed{x = a/\cos t}$, $dx = a\sin t dt/\cos^2 t$ (або $x = a/\sin t$, $dx = -a\cos t dt/\sin^2 t$).

Приклад 1. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int \frac{\sqrt{9-x^2}\,dx}{x^2}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{(x^2+4)^3}\,dx}{x^6}; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{(x^2-16)^{3/2}}.$$

□ а)
$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = 3\sin t;\ dx = 3\cos t\,dt; \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = 3\cos t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3\cos t}{(3\sin t)^2} \cdot 3\cos t\,dt = \int \frac{(1-\sin^2 t)\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t} + \int dt =$$

$$= -ctg\,t - t + C = \left| \sin t = x/3;\ t = \arcsin(x/3) \right| =$$

$$= -ctg\left(\arcsin(x/3)\right) - \arcsin(x/3) + C.$$

б)
$$\int \frac{\sqrt{(x^2+4)^3}}{x^6}dx = \left| \begin{array}{c} x = 2\,tg\,t;\ dx = 2\ dt\big/\cos^2 t; \\ \sqrt{(x^2+4)^3} = \sqrt{(4\,tg^2 t+4)^3} = 8\big/\cos^3 t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{8\big/\cos^3 t}{(2\,tg\,t)^6} \cdot 2\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos t\ dt}{\sin^6 t} = \left| \begin{array}{c} u = \sin t \\ du = \cos t\,dt \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^6} =$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{-6}du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{-5}}{-5} + C = \left| t = arctg(x/2);\ u = \sin t \right| =$$

$$= -(1/20)\ \sin^{-5}\left(arctg(x/2)\right) + C.$$

в)
$$\int \frac{dx}{(x^2-16)^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} x = 4/\cos t;\ dx = 4\sin t\,dt\big/\cos^2 t; \\ (x^2-16)^{3/2} = \left((4/\cos t)^2 - 16\right)^{3/2} = 64\sin^3 t\big/\cos^3 t \end{array} \right| =$$

$$=\int \frac{4\sin t\,dt/\cos^2 t}{64\sin^3 t/\cos^3 t}=\frac{1}{16}\int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}=\left|\begin{matrix} u=\sin t \\ du=\cos t\,dt \end{matrix}\right|=\frac{1}{16}\int \frac{du}{u^2}=$$

$$=(1/16)\cdot(-1/u)+C=\left|t=\arccos(4/x);\; u=\sin t\right|=$$

$$=-(1/16)\sin^{-1}\bigl(\arccos(4/x)\bigr)+C\,. \quad \blacksquare$$

Зауваження 1. Для інтегралів указаних типів можна застосувати інші підстановки. Зокрема, інколи корисною є підстановка $\boxed{x=a/t}$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{dt}{x\sqrt{x^2-3}}$.

$$\square \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}}=\left|x=\sqrt{3}/t;\quad dx=-\sqrt{3}dt/t^2\right|=$$

$$=\int \frac{-\sqrt{3}dt/t^2}{\left(\sqrt{3}/t\right)\sqrt{\left(\sqrt{3}/t\right)^2-3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=-\left(1/\sqrt{3}\right)\arcsin t+C=-\left(1/\sqrt{3}\right)\arcsin\left(\sqrt{3}/x\right)+C\,. \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. Якщо під знаком квадратного кореня стоїть квадратний тричлен ax^2+bx+c, $a\neq 0$, то виділивши повний квадрат двочлена $ax^2+bx+c=a\bigl(x+b/(2a)\bigr)^2+\bigl(c-b^2/(4a)\bigr)$ і застосувавши заміну $t=\sqrt{|a|}\bigl(x+b/(2a)\bigr)$; $dx=dt/\sqrt{|a|}$, переходимо до одного з розглянутих випадків суми чи різниці квадратів.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int x\sqrt{6x-x^2-5}\,dx$.

$$\square \quad \int x\sqrt{6x-x^2-5}\,dx=\left|6x-x^2-5=-(x^2-6x+9-9+5)=\right.$$

$$\left.=-(x-3)^2+4\right|=\int x\sqrt{4-(x-3)^2}\,dx=\left|t=x-3;\;\; x=t+3;\right.$$

$$\left.dx=dt\right|=\int (t+3)\sqrt{4-t^2}\,dx=\left|t=2\sin u;\;\; dt=2\cos u\,du;\right.$$

$$\sqrt{4-t^2}=\sqrt{4-(2\sin u)^2}=2\cos u \Big| = \int (2\sin u+3)\cdot 2\cos u \times$$

$$\times 2\cos u\, du = 8\int \cos^2 u\ \sin u\ du + 12\int \cos^2 u\, du = \Big| z=\cos u;$$

$$dz=-\sin u\, du \Big| = -8\int z^2 dz + 12\cdot(1/2)\int (1+\cos 2u)\, du =$$

$$= -8\cdot z^3\big/3 + 6\int du + 6\int \cos 2u\, du = -(8/3)\cos^3 u + 6u +$$

$$+6\cdot(1/2)\sin 2u + C = \Big| u = \arcsin(t/2) = \arcsin\big((x-3)/2\big)\Big| =$$

$$= -(8/3)\cos^3 \arcsin\big((x-3)/2\big) + 6\arcsin\big((x-3)/2\big) +$$

$$+3\sin\big(2\arcsin\big((x-3)/2\big)\big) + C. \quad \blacksquare$$

1.1.8. Інтеграли, що “не беруться”

Диференціювання ґрунтується на формулах для похідної кожної з операцій, за допомогою яких формуються елементарні функції. Тому *похідна довільної елементарної функції також є елементарною*.

При інтегруванні не існує відповідних формул для добутку, частки і суперпозиції функцій. Тому *не кожну первісну, навіть коли вона існує, можна подати через елементарні функції у скінченному вигляді*.

Говорять, що інтеграл $\int f(x)\, dx = F(x)+C$ “***не береться***”, якщо первісна $F(x)$ – неелементарна функція.

Такого типу первісні, що часто застосовуються в математиці та інших дисциплінах, називаються ***спеціальними функціями***. Для них складені відповідні таблиці, побудовані графіки і створені комп’ютерні програми.

Наведемо деякі інтеграли, що “не беруться”, і відповідні спеціальні функції:

а) $\left(1\big/\sqrt{2\pi}\right)\int e^{-x^2/2} dx = \Phi(x)+C$, де первісна $\Phi(x)$, що задовольняє додатковій умові $\Phi(0)=0$, називається ***функцією Лапласа*** (***інтегралом ймовірностей***);

б) $\int \dfrac{\sin x}{x} dx = \mathrm{Si}\ (x)+C$, де первісна $\mathrm{Si}\ (x)$, що задовольняє додатковій умові $\operatorname{Si}(0)=0$, називається ***інтегральним синусом***;

в) $\int \sin\left(\pi x^2/2\right)dx = \mathrm{S}(x)+C$ і $\int \cos\left(\pi x^2/2\right)dx = \mathrm{C}(x)+C$, де первісні $\mathrm{S}(x)$ і $\mathrm{C}(x)$, що задовольняють додатковій умові відповідно $\mathrm{S}(0)=0$ і $\mathrm{C}(0)=0$, називаються ***інтегралами Френеля***.

1.2. Визначений інтеграл

1.2.1. Інтегральна сума. Її геометричний і фізичний зміст

Визначений інтеграл відіграє значну роль як у суто теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосуваннях. До його обчислення зводяться задачі знаходження площі фігури, об'єму тіла, центру ваги плоскої кривої, моменту інерції та інші.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n <u>довільних</u> (не обов'язково рівних) елементарних частин точками поділу x_i, $i=\overline{0,n}$ такими, що $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$. На кожному частинному відрізку $[x_{i-1};x_i]$ візьмемо по одній <u>довільній</u> (не обов'язково середній) точці c_i, $i=\overline{1,n}$. Обчислимо значення функції $f(c_i)$ і помножимо його на довжину відповідного частинного відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Складемо суму отриманих добутків

$$S_n(f)=f(c_1)\Delta x_1+\ldots+f(c_i)\Delta x_i+\ldots+f(c_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Цей вираз називається ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

<u>Зауваження</u>. Інтегральна сума $S_n(f)$, як це випливає з її побудови, не є функцією змінної n і не є функцією змінної x. Інтегральна сума залежить як від способу розбиття, тобто від вибору точок поділу x_i, $i=\overline{0,n}$, так і від вибору точок c_i, $i=\overline{1,n}$ по одній на кожному частинному відрізку.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Фігура, обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу віссю Ox і вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ (рис.2), називається ***криволінійною трапецією***. Знайдемо її площу S

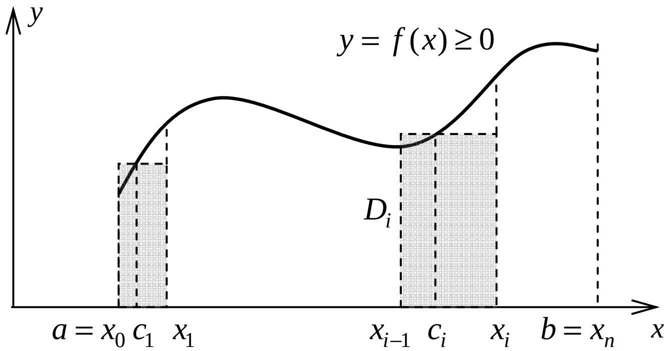

Рис. 2

Добуток $f(c_i)\Delta x_i$ чисельно дорівнює площі прямокутника D_i з основою Δx_i і висотою $f(c_i)$. *Інтегральна сума* $S_n(f)$ чисельно дорівнює площі східчастої фігури, утвореної з таких прямокутників, і *служить наближеним значенням площі криволінійної трапеції*: $S \approx S_n(f)$.

Фізичний зміст. Нехай матеріальна точка рухається вздовж деякої кривої l з лінійною швидкістю $v = v(t)$. Треба знайти довжину пройденого шляху S за проміжок часу від $t = \alpha$ до $t = \beta$.

Розіб'ємо відрізок $[\alpha;\beta]$ на n довільних частин точками $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_{i-1} < t_i < ... < t_n = \beta$. Розглянемо будь-який частинний проміжок $[t_{i-1};t_i]$. Припустимо, що цей відрізок $[t_{i-1};t_i]$ настільки малий, що швидкість на ньому $v = v(t)$ змінюється мало, а тому її можна наближено вважати сталою: $v = v(c_i)$,

$c_i \in [t_{i-1};t_i]$. Тоді довжина шляху ΔS_i, який пройдено точкою за час $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ наближено дорівнює добутку $v(c_i)\Delta t_i$: $\Delta S_i \approx v(c_i)\Delta t_i$. *Інтегральна сума* $S_n(v) = \sum_{i=1}^{n} v(c_i)\Delta t_i$ *є наближеним значенням пройденого шляху за весь проміжок часу* $[\alpha;\beta]$: $S \approx S_n(v)$.

1.2.2. Поняття визначеного інтеграла й умови його існування

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ – її інтегральна сума на $[a;b]$. Позначимо через $\max \Delta x_i$ найбільшу з довжин відрізків $[x_{i-1};x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум при умові $\max \Delta x_i \to 0$. Очевидно, що при цьому число n у розбитті прямує до нескінченності.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому здрібненні розбиття відрізка $[a;b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i},$$

де a і b – відповідно ***нижня*** і ***верхня межі інтегрування***; $[a;b]$ – ***відрізок інтегрування***.

Підкреслимо, що границя розглядається при будь-яких розбиттях відрізка $[a;b]$ таких, що $\max \Delta x_i \to 0$, і при будь-якому виборі точок c_i на елементарних відрізках $[x_{i-1};x_i]$, $i = \overline{1,n}$.

<u>Зауваження 1</u>. Не зважаючи на близькість позначень, невизначений і визначений інтеграли різні за суттю, оскільки невизначений інтеграл – це сім'я <u>функцій</u> (первісних), а визначений інтеграл – це <u>число</u> (значення границі).

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *чисельно дорівнює площі* S *відповідної криволінійної трапеції*: $S=\int_a^b f(x)\,dx$.

Фізичний зміст. Нехай матеріальна точка рухається вздовж деякої кривої l з лінійною швидкістю $v=v(t)$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ *чисельно дорівнює пройденому шляху* S *за проміжок часу* $[\alpha;\beta]$: $S=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$.

Теорема 1 (***необхідна умова інтегровності***). *Якщо функція інтегровна на деякому відрізку, то вона обмежена на ньому.*

□ Припустимо супротивне. Нехай функція $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$ необмежена. Тоді для довільного розбиття існує хоча б один елементарний відрізок $[x_{i-1};x_i]$, де функція необмежена. Вибираючи на ньому відповідним чином точку c_i, можна зробити значення функції $f(c_i)$, а з нею інтегральну суму $S_n(f)$ як завгодно великою. Тому скінченна границя для $S_n(f)$ не існує. ■

Зауваження 2. Умова обмеженості функції є необхідною, але не є достатньою для інтегровності функції. Наприклад, функція Діріхле $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in I,\end{cases}$ де Q та I – відповідно множини раціональних та ірраціональних чисел, є обмеженою, але вона неінтегровна на будь-якому відрізку.

Теорема 2 (***достатня умова інтегровності***). *Функція, неперервна на відрізку, інтегровна на ньому.*

Ця теорема є наслідком більш загальної теореми, наведеної в п. 2.1.6.

Зауваження 3. Розглядаючи визначені інтеграли, надалі будемо припускати підінтегральну функцію неперервною на проміжку інтегрування.

1.2.3. Формула Ньютона – Лейбниця

Визначений інтеграл фактично відкрито понад 2000 років тому. Але широкого застосування він довго не мав, оскільки безпосередньо знаходити границі інтегральних сум важко навіть у найпростіших випадках. Невизначений інтеграл відкрито значно пізніше (у XXVII столітті) і для нього розроблено досить ефективні методи обчислення. Тоді ж був встановлений зв'язок між цими типами інтегралів, що дозволило розширити сфери застосування інтегрального числення.

Теорема (***Ньютона – Лейбниця***). *Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і* $F(x)$ *– яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції* $y = f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *дорівнює приросту первісної* $F(x)$ *на цьому відрізку*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b}$$ – ***формула Ньютона – Лейбниця***.

Тут символом $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ позначено приріст первісної (читається: "$F(x)$ з підстановкою від a до b").

□ Розглянемо приріст $F(b) - F(a)$. Перепишемо його, додаючи та віднімаючи значення функції в кожній внутрішній точці розбиття $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, враховуючи, що $x_0 = a, x_n = b$, та використовуючи на кожному елементарному відрізку формулу Лагранжа, а потім зробимо граничний перехід:

$$F(b) - F(a) = (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + ... +$$

$$+ (F(x_n) - F(x_{n-1})) = \big| F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\,\Delta x_i\,,$$

$$c_i \in [x_{i-1}; x_{i-1}] \big| = F'(c_1)\Delta x_1 + F'(c_2)\Delta x_2 + ... + F'(c_n)\Delta x_n =$$

$$= \big| F'(c_i) = f(c_i) \big| = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... +$$

$$+ f(c_n)\Delta x_n = S_n(f); \quad \lim_{\Delta x_i \to 0}(F(b) - F(a)) = \lim_{\Delta x_i \to 0} S_n(f).$$

Таким чином $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

Приклад. Знайти інтеграл $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$.

□ Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона – Лейбниця, одержимо:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1. \quad \blacksquare$$

Зауваження. Формула Ньютона – Лейбниця залишається справедливою для будь-якої інтегровної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$, що має неперервну первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F'(x) = f(x)$ на всьому відрізку $[a;b]$ за винятком хіба що скінченного числа точок.

1.2.4. Властивості визначеного інтеграла

Спираючись на означення та формулу Ньютона – Лейбниця, що зв'язує визначений інтеграл з невизначеним, можна встановити основні властивості визначеного інтеграла.

Найпростіші властивості:

1. *Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування* (змінна інтегрування є “німою”):

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt}.$$

2. *Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю*:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\, dx = 0}.$$

3. *Якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx}.$$

Властивість адитивності за проміжком:

4. *Для будь-яких трьох чисел* a , b *і* c *справедлива рівність*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx},$$

якщо тільки всі ці інтеграли існують.

Доведення спирається на властивість інтегральної суми, яку можна розділити на окремі частини, що відповідають частинам всього відрізка інтегрування.

Властивості лінійності:

5. *Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла*:

$$\boxed{\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx}, \text{ де } A = const.$$

$$\square \int_a^b Af(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} A\, f(c_i)\Delta x_i =$$

$$= A \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)\,dx. \ \blacksquare$$

6. *Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій окремо*. Так, у разі трьох функцій:

$$\boxed{\int_a^b (f(x)+g(x)-h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx}.$$

Доведення спирається на відповідну властивість границі суми.

Властивості монотонності:

7. *Якщо підінтегральна функція неперервна і невід'ємна на відрізку* $[a;b]$, $f(x) \ge 0, x \in [a;b]$, *а верхня межа інтегрування більша або дорівнює нижній* $b \ge a$, *то визначений інтеграл на цьому відрізку також невід'ємний*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \ge 0}.$$

8. *Якщо на відрізку* $[a;b]$, *де* $a < b$, *функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *задовольняють нерівності*

$$\boxed{f(x) \le \varphi(x), \text{ то } \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx}.$$

Іншими словами, *нерівність між неперервними функціями можна інтегрувати почленно при умові, що верхня межа інтегрування більша нижньої*.

□ Розглянемо різницю

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (\varphi(x) - f(x))\,dx =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n (\varphi(c_i) - f(c_i))\Delta x_i \,.$$

Тут кожна різниця $\varphi(c_i) - f(c_i) \geq 0$, $\Delta x_i > 0$. Отже, кожен член суми додатний, додатна вся сума і невід'ємна її границя, тобто $\int_a^b (\varphi(x) - f(x))\,dx \geq 0$. Звідси

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \text{або} \quad \int_a^b \varphi(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx \,. \ ■$$

9. *Абсолютна величина визначеного інтеграла не перевищує визначеного інтеграла від абсолютної величини підінтегральної функції при умові, що верхня межа інтегрування не менша за нижню* $b \geq a$:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx}.$$

□ За властивістю модуля $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Враховуючи властивість 8, з цього випливає

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\text{або} \quad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \,. \ ■$$

1.2.5. Оцінка визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення

Теорема 1 (***оцінка визначеного інтеграла***). *Якщо функція* $f(x)$ *інтегровна на відрізку* $[a;b]$, *а* m *і* M *– відповідно її найменше і найбільше значення на цьому відрізку* $[a;b]$ *і* $a \leq b$, *то справедлива оцінка*

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)}.$$

□ За умовою $m \leq f(x) \leq M$. Згідно властивості 8 визначеного інтеграла маємо

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx\,.$$

Але $\int_a^b m\,dx = m(b-a),\ \int_a^b M\,dx = M(b-a)\,.$

Після підстановки цих рівностей у попередню нерівність маємо шукану оцінку інтеграла. ■

Геометричний зміст. Для неперервної невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ площа відповідної криволінійної трапеції обмежена знизу і зверху площами двох прямокутників з тією ж основою $b-a$ і висотою відповідно m і M (рис. 3).

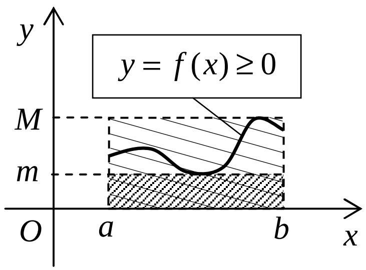

Рис. 3

Приклад 1. Оцінити інтеграл $I = \int_0^2 \sqrt{9+x^4}\,dx\,.$

□ Знайдемо найменше і найбільше значення підінтегральної функції $y = f(x) = \sqrt{9+x^4}$ на відрізку інтегрування $[0;2]$:

$$y' = 2x^3\Big/\sqrt{9+x^4} = 0\,;\ \ x=0\,;$$

$$f(0) = \sqrt{9+0^4} = 3\,;$$

$$f(2) = \sqrt{9+2^4} = 5\,;\ m = \min_{x\in[0;2]} f(x) = 3\,;\ \ M = \max_{x\in[0;2]} f(x) = 5\,.$$

Тоді $3\cdot(2-0) \le I \le 5\cdot(2-0)\,;\ \ 6 \le I \le 10\,.$ ■

Для функції $f(x)$, інтегровної на відрізку $[a;b]$, ***середнім інтегральним значенням*** на цьому відрізку називається число μ, яке визначається рівністю

$$\boxed{\mu = \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Теорема 2 (***про середнє значення***). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *то на інтервалі* $(a;b)$ *існує хоча б одна точка* c *така, що середнє інтегральне* μ *функції* $f(x)$ *на відрізку*

$[a;b]$ *дорівнює значенню функції* $f(c)$ *в цій точці:*

$$f(c)=\mu=\left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

□ Нехай $a<b$. Якщо m і M найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то на підставі теореми 1 маємо:

$$m\le\left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\,dx\le M\,.$$

Вираз, який розташований всередині цієї нерівності, дорівнює μ. Тобто, $m\le\mu\le M$. Тоді за теоремою про проміжне значення неперервної на відрізку функції при деякому значенні c $(a<c<b)$ будемо мати $\mu=f(c)$. ■

<u>Геометричний зміст</u>. Для неперервної невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ всередині цього відрізка знайдеться хоча б одна точка c така, що площа відповідної криволінійної трапеції дорівнює площі прямокутника з тією ж основою $b-a$ і висотою $\mu=f(c)$ (рис. 4).

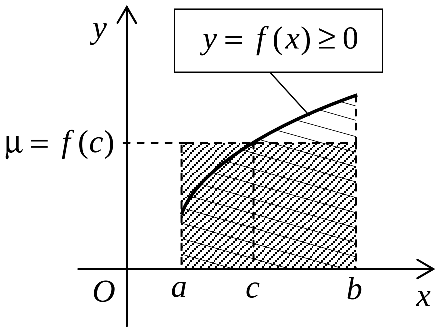

Рис. 4

<u>Приклад 2</u>. Сила змінного струму $i=i_0\sin(2\pi t/T)$, де i_0 – амплітуда; T – період; t – час. Знайти ефективну силу струму i_e – квадратний корінь із середнього за період значення $\overline{i^2}$ квадрата сили струму.

□

$$\overline{i^2}=\mu=\left(1/(T-0)\right)\int_0^T i^2dt=(1/T)\int_0^T\left(i_0\sin(2\pi t/T)\right)^2dt=$$

$$=\frac{1}{T}\cdot i_0^2\cdot\int_0^T\frac{1-\cos(4\pi t/T)}{2}dt=\frac{i_0^2}{2T}\left(t-\frac{T}{4\pi}\sin\frac{4\pi t}{T}\right)\Bigg|_0^T=\frac{i_0^2}{2}\,.$$

Тоді ефективна сила струму $i_e = \sqrt{\overline{i^2}} = \sqrt{i_0^2/2} = i_0/\sqrt{2}$. ■

Приклад 3. Знайти середнє значення інтеграла

$I = \int_{-1}^{1} (5x^4 + 4x^3 - 2)\, dx$. (Розв'яжіть самостійно).

1.2.6. Визначений інтеграл зі змінною верхньою межею

Окрім інтегралів, що мають фіксовані верхню та нижню межі інтегрування, розглядаються також інтеграли зі змінними межами. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b]$ і x – довільна точка цього відрізка, $x \in [a;b]$, то існує визначений інтеграл $\int_a^x f(t)\, dt$. (Для зручності змінну інтегрування позначено іншою буквою t, ніж верхню x межу інтегрування). Цей інтеграл є деякою функцією змінної x:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

яку називають і***нтегралом зі змінною верхньою межею***.

Теорема. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то похідна по x визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею $\int_a^x f(t)\, dt$ дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі x:*

$$\boxed{\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)}.$$

□ За формулою Ньютона – Лейбниця маємо:

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = \frac{d}{dx} F(t)\Big|_a^x = \frac{d}{dx}\big(F(x) - F(a)\big) =$$

$$= F'(x) = f(x). \quad ■$$

Зауваження. $\Phi(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$. Таким чином, *інтеграл зі змінною верхньою межею $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ є первісною для піді-*

нтегральної функції $f(x)$, *при цьому* $\Phi(a)=0$.

Приклад. Знайти інтеграл зі змінною верхньою межею $\int_4^x t^{-3/2}dt$. Показати, що похідна від нього дорівнює значенню підінтегральної функції для верхньої межі.

□ Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона – Лейбниця, дістанемо:

$$\int_4^x t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2}\Big|_4^x = -2x^{-1/2} + 2\cdot 4^{-1/2} = -2x^{-1/2} + 1.$$

Знайдемо похідну від цього виразу за змінною x. Тоді

$$(-2x^{-1/2}+1)' = x^{-3/2} = f(x). \ ■$$

1.2.7. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. *Нехай функція* $y=f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *а функція* $x=\varphi(t)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $x'=\varphi'(t)$ *і монотонна на відрізку* $[\alpha;\beta]$, *причому* $\varphi(\alpha)=a$ *і* $\varphi(\beta)=b$. *Тоді справедлива* ***формула заміни змінної у визначеному інтегралі***

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| x=\varphi(t);\ dx=\varphi'(t)\,dt;\ t=\varphi^{-1}(x);\right.$$

$$\left.\alpha=\varphi^{-1}(a);\ \beta=\varphi^{-1}(b)\right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

де $t=\varphi^{-1}(x)$ *– обернена функція.*

□ Якщо $F(x)$ – деяка первісна для функції $f(x)$, то можемо записати

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C; \quad \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))+C.$$

Справедливість останньої рівності перевіряється диференціюванням обох частин по t. З цих рівностей відповідно маємо:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a); \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt =$$

$$= F(\varphi(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Праві частини одержаних виразів рівні, отже, ліві частини теж рівні: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$. ■

Зауваження 1. При заміні змінної значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі відрізка $[a;b]$, коли аргумент t змінюється на проміжку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Монотонна на $[\alpha;\beta]$ функція $x = \varphi(t)$ ці умови задовольняє.

Зауваження 2. Аналогічно випадку невизначеного інтеграла, формула заміни змінної може використовуватись як в прямому, так і в зворотному напрямку.

Зауваження 3. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної: якщо обчислено один з визначених інтегралів формули заміни, то маємо деяке число; цьому числу дорівнює також інший інтеграл.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

□ $$I = \left| \begin{array}{c} x+1 = t^2;\ \ x = t^2 - 1;\ dx = 2t\,dt; \\ t = \sqrt{x+1};\ \ t_1 = \sqrt{3+1} = 2;\ t_2 = \sqrt{8+1} = 3 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_2^3 \frac{t^2 - 1 - 3}{t} 2tdt = 2\int\limits_2^3 (t^2 - 4)\,dt = 2\int\limits_2^3 t^2 dt - 8\int\limits_2^3 dt =$$

$$= (2/3)t^3\Big|_2^3 - 8t\Big|_2^3 = (2/3)\cdot(3^3 - 2^3) - 8\cdot(3-2) = 14/3.\ \blacksquare$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-2}^{-1} \frac{2x^3 + 5x}{x^4 + 5x^2 + 6}\,dx$.

□ $$I = \Big| t = x^4 + 5x^2 + 6;\ \ dt = (4x^3 + 5\cdot 2x)\,dx = 2(2x^3 + 5x)\,dx;$$

$$(2x^3 + 5x)\,dx = (1/2)\,dt;\ t_1 = (-2)^4 + 5\cdot(-2)^2 + 6 = 42;$$

$$t_2 = (-1)^4 + 5\cdot(-1)^2 + 6 = 12 \Big| = \int\limits_{42}^{12} \frac{dt}{2t} = (1/2)\ln|t|\Big|_{42}^{12} =$$

$$= (1/2)\cdot(\ln|12| - \ln|42|) = (1/2)\ln(2/7)\,. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Обчислити: а) $\int\limits_{2}^{7} \frac{\sqrt[4]{3x-5}\,dx}{\sqrt{3x-5}+1}$; б) $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи відповідно підстановки: а) $3x-5=t^4$; б) $x=2/\cos t$).

<u>Зауваження 4</u>. При обчисленні визначеного інтеграла заміну змінної можна проводити у відповідному невизначеному інтегралі. Тоді треба повернутись до початкової змінної і скористатися формулою Ньютона – Лейбниця. Звичайно цим користуються у простих випадках, коли заміну здійснюють усно.

<u>Приклад 4</u>. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\cos x}$, виконуючи заміну змінної у відповідному невизначеному інтегралі.

$$\square\ I = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\cos x} = \left|\int \frac{dx}{4+5\cos x} = \right| t = tg\,\frac{x}{2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\,arctg\,t;\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \Bigg| = \int \frac{2\,dt\big/(1+t^2)}{4+5\cdot(1-t^2)\big/(1+t^2)} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{t^2-9} = -2\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\,(x/2)-3}{tg\,(x/2)+3}\right| + C\ \Bigg| = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\,(x/2)-3}{tg\,(x/2)+3}\right|\Bigg|_{0}^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\ln\left|\frac{tg\,(\pi/4)-3}{tg\,(\pi/4)+3}\right| - \ln\left|\frac{tg\,0-3}{tg\,0+3}\right|\right) = \frac{1}{3}\ln 2\,. \quad \blacksquare$$

1.2.8. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – диференційовні функції від x на відрізку $[a;b]$. Тоді $(uv)'=u'v+v'u$. Інтегруємо обидві частини рівності у межах від a до b, маємо

$$\int_a^b (u\,v)'\,dx=\int_a^b u'v\,dx+\int_a^b u\,v'\,dx.$$

Оскільки $\int (u\,v)'\,dx=u\,v+C$, тому $\int_a^b (u\,v)'\,dx=u\,v\Big|_a^b$.

Отже $u\,v\Big|_a^b=\int_a^b v\,du+\int_a^b u\,dv$. Звідси остаточно маємо ***формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі***

$$\boxed{\int_a^b u\,dv=u\,v\Big|_a^b-\int_a^b v\,du},$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I=\int_1^2 xe^x dx$.

□ Нехай $u=x\,, dv=e^x dx$. Тоді $du=dx$, $v=e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла, маємо:

$$I=xe^x\Big|_1^2-\int_1^2 e^x dx=2e^2-e-e^x\Big|_1^2=2e^2-e-e^2+e=e^2. \ ■$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$I=\int_{-2}^0 (4x^2-12x-8)\cos 2x\,dx.$$

$$□ \quad I=\left|\begin{matrix} u=4x^2-12x-8; \ dv=\cos 2x\,dx; \\ du=(8x-12)\,dx; \ v=(1/2)\sin 2x \end{matrix}\right|=$$

$$=(4x^2-12x-8)(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^0-\int_{-2}^0 (1/2)\sin 2x\cdot(8x-12)\,dx=$$

$$=32\sin 4-2\int_{-2}^0 (2x-3)\sin 2x\,dx=\Big|u=2x-3; \ du=2dx;$$

$$dv=\sin 2x\,dx; \ v=-(1/2)\cos 2x\Big|=32\sin 4-$$

$$-2\left((2x-3)\cdot(-1/2)\cos 2x\Big|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}(-1/2)\cos 2x\cdot 2dx\right)=$$

$$=32\sin 4-3+7\cos 4-2\int_{-2}^{0}\cos 2x\,dx=32\sin 4-3+$$

$$+7\cos 4-2\cdot(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^{0}=31\sin 4+7\cos 4-3.\ \blacksquare$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{\pi/2}e^{4x}\cos 5x\,dx$.

$$\square\quad I=\Big|u=\cos 5x;\ dv=e^{4x}dx;\ du=-5\sin 5x\,dx;$$

$$v=(1/4)e^{4x}\Big|=\left(\cos 5x\cdot(1/4)e^{4x}\right)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(1/4)e^{4x}\times$$

$$\times(-5\sin 5x)\,dx=-1/4+(5/4)\int_0^{\pi/2}e^{4x}\sin 5x\,dx=$$

$$=\Big|u=\sin 5x;\ dv=e^{4x}dx;\ du=5\cos 5x\,dx;\ v=(1/4)\,e^{4x}\Big|=$$

$$=-1/4+(5/4)\left(\left(\sin 5x\cdot(1/4)e^{4x}\right)\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(1/4)e^{4x}\times\right.$$

$$\left.\times 5\cos 5x\,dx\right)=-1/4+(5/16)e^{2\pi}-(25/16)\int_0^{\pi/2}e^{4x}\cos 5x\,dx;$$

$$I=-1/4+(5/16)\,e^{2\pi}-(25/16)\,I;\quad I=(5e^{2\pi}-4)/41.\ \blacksquare$$

Зауваження. Розглянемо визначений інтеграл $\int_a^b z(t)\,dt$, де $z(t)=x(t)+i\,y(t)$ – комплекснозначна функція дійсного аргументу t; i – уявна одиниця, $i^2=-1$. Аналогічно операції диференціювання, за означенням окремо інтегруються дійсна $x(t)$ й уявна $y(t)$ частини:

$$\boxed{\int_a^b z(t)\,dt=\int_a^b x(t)\,dt+i\int_a^b y(t)\,dt}.$$

Таким чином, дійсна частина інтеграла $\mathrm{Re}\int_a^b z(t)\,dt=\int_a^b x(t)\,dt$, уявна частина $\mathrm{Im}\int_a^b z(t)\,dt=\int_a^b y(t)\,dt$. Ця властивість може бути корисною для знаходження деяких дійсних інтегралів.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{\pi/2} e^{4x}\cos 5x\,dx$ з попереднього прикладу 3, використовуючи комплексні функції дійсного аргументу.

□ Розглянемо допоміжний інтеграл $\int_0^{\pi/2} e^{4x}e^{5xi}\,dx$. За формулою Ейлера $e^{5xi}=\cos 5x+i\sin 5x$. Тоді $e^{4x}e^{5xi}=$ $=e^{4x}\cos 5x+ie^{4x}\sin 5x$ і $\int_0^{\pi/2} e^{4x}e^{5xi}dx=\int_0^{\pi/2} e^{4x}\cos 5x\,dx+$ $+i\int_0^{\pi/2} e^{4x}\sin 5x\,dx$. Отже, шуканий інтеграл є дійсною частиною введеного допоміжного інтеграла

$$I=\int_0^{\pi/2} e^{4x}\cos 5x\,dx=\mathrm{Re}\int_0^{\pi/2} e^{4x}e^{5xi}\,dx=\mathrm{Re}\int_0^{\pi/2} e^{(4+5i)x}\,dx.$$

Знайдемо інтеграл

$$\int_0^{\pi/2} e^{(4+5i)x}dx=\big(1/(4+5i)\big)e^{(4+5i)x}\Big|_0^{\pi/2}=\big(1/(4+5i)\big)e^{(4+5i)\pi/2}-$$

$$-\frac{e^0}{4+5i}=\frac{e^{2\pi}e^{5\pi i/2}-1}{4+5i}=\frac{e^{2\pi}\big(\cos(5\pi/2)+i\sin(5\pi/2)\big)-1}{4+5i}=$$

$$=\frac{ie^{2\pi}-1}{4+5i}=\frac{(ie^{2\pi}-1)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{4e^{2\pi}i-5e^{2\pi}i^2-4+5i}{16-25i^2}=$$

$$=\frac{5e^{2\pi}-4+i(4e^{2\pi}+5)}{16+25}=\frac{5e^{2\pi}-4}{41}+i\,\frac{4e^{2\pi}+5}{41}.$$

Таким чином, $I=\mathrm{Re}\int_0^{\pi/2} e^{4x}e^{5xi}dx=(5e^{2\pi}-4)/41$. ■

1.3. Невласні інтеграли

При вивченні визначеного інтеграла виходили з двох умов: а) скінченність проміжку інтегрування; б) неперервність (або хоча б обмеженість) підінтегральної функції.

Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним.

Так у випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на n частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума явно не має скінченної границі.

Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до невласного інтеграла – інтеграла на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

1.3.1. Невласні інтеграли по нескінченному проміжку (першого роду)

Інтеграл по нескінченному проміжку від обмеженої функції також називають невласним інтегралом першого роду.

Нехай функція $f(x)$ визначена на вправо нескінченному проміжку $[a;+\infty)$ й інтегровна на будь-якому відрізку $[a;b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді границю $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ називають ***невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею*** і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким чином,

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx}\,.$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, а підінтегральну функцію $f(x)$ – ***інтегровною*** на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$. Сама границя приймається за ***значення*** цього ***інтеграла***.

Якщо ж вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл називається ***розбіжним***, а функція $f(x)$ – ***неінтегровною*** на $[a;+\infty)$.

Невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею визначається аналогічно (на вліво нескінченному проміжку $(-\infty;b]$):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx}\,.$$

Невласний інтеграл з обома нескінченними межами визначається рівністю

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx}\,,$$

де c – довільне фіксоване дійсне число. *Інтеграл ліворуч у цій формулі існує (є збіжним) лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли праворуч.* Можна довести, що інтеграл, визначений цією рівністю, не залежить від вибору числа c.

З наведених означень випливає, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею визначеного інтеграла зі змінною межею інтегрування.

Збіжні невласні інтеграли мають усі основні властивості звичайних визначених інтегралів. Тому при розгляді невласного інтеграла перш за все виникає питання про його збіжність, яке вирішується або його безпосереднім обчисленням, або за допомогою спеціальних ***ознак збіжності***.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на проміжку $[a;+\infty)$, а відповідний *невласний інтеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається. Тоді природно вважати, що він *визначає площу необмеженої області – трапеції з нескінченною основою*, що на рис. 5 позначена похилими та перехресними штрихами. Починаючи з деякого значення b, ця площа приблизно дорівнює площі обмеженої області, яка позначена на рис. 5 перехресними штрихами. Тобто, при $x \to +\infty$ функція $f(x)$ прямує до нуля настільки швидко, що площа відповідної нескінченної криволінійної трапеції виявляється скінченною.

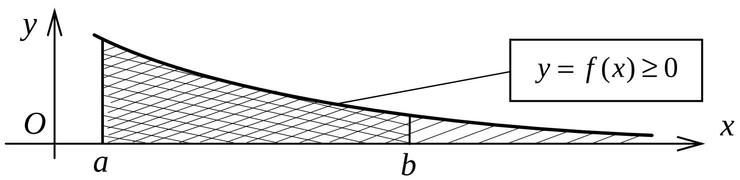

Рис. 5

Приклад 1. Обчислити дані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\text{а) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}; \quad \text{б) } \int_3^{+\infty} \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{2} \frac{x^2dx}{x^6+64}.$$

□ а) $I = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \lim\limits_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{2}^{b} = \frac{1}{2}\times$

$$\times \lim_{b\to+\infty}\left(\ln\left|(b-1)/(b+1)\right| - \ln(1/3)\right) = (1/2)(\ln 1 + \ln 3) = (1/2)\ln 3 .$$

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I = (1/2)\ln 3$.

$$\text{б)}\ I = \int\limits_{3}^{+\infty} \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{3}^{b} \frac{2x+3}{x^2+3x-10}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = x^2+3x-10; \quad dt = 2x+3; \\ t_1 = 3^2+3\cdot 3-10 = 8;\ \ t_2 = b^2+3b-10 \end{matrix} \right| = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{8}^{b^2+3b-10} \frac{dt}{t} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \ln|t|\,\Big|_{8}^{b^2+3b-10} = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln|b^2+3b-10| - \ln|8|\right) = +\infty .$$

Невласний інтеграл розбігається.

$$\text{в)}\ I = \int\limits_{-\infty}^{2} \frac{x^2dx}{x^6+64} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{2} \frac{x^2dx}{x^6+64} = \left| \begin{matrix} t = x^3; \quad dt = 3x^2dx; \\ t_1 = a^3;\ \ t_2 = 2^3 = 8 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a^3}^{8} \frac{dt}{t^2+8^2} = \frac{1}{3} \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{8}\, arctg\, \frac{t}{8}\Bigg|_{a^3}^{8} = \frac{1}{24} \lim_{a\to-\infty}\Big(arctg\, 1 -$$

$$- arctg\,(a^3/8)\Big) = (1/24)\ (\pi/4 + \pi/2) = \pi/32 .$$

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I = \pi/32$. ■

<u>Приклад 2</u>. Встановити, при яких значеннях α інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ збігається і при яких розбігається.

□ 1) Нехай $\alpha \neq 1$. Тоді $\int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Bigg|_{1}^{b} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right)$;

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \begin{cases} 1/(\alpha-1),\ \textit{якщо}\ \ \alpha > 1; \\ +\infty,\ \textit{якщо}\ \ \alpha < 1. \end{cases}$$

2) Нехай $\alpha = 1$. Тоді $\int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^b = \ln b$; $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x} = +\infty$.

Отже, *інтеграл* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ *збігається при* $\alpha > 1$ *і розбігається при* $\alpha \le 1$. ■

Зауваження 1. Якщо симетричний невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ розбігається, то все ж може збігатись так зване ***головне значення*** цього інтеграла:

$$p.v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx .$$

Приклад 3. Перевірити, що даний симетричний невласний інтеграл розбігається, а його головне значення збігається:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + x + 4}{x^2 + 1}\,dx .$$

□ Спочатку знайдемо відповідний невизначений інтеграл:

$$\int \frac{x^3 + x + 4}{x^2 + 1}\,dx = \int \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}\,dx + \int \frac{4}{x^2 + 1}\,dx = \int x\,dx + 4\int \frac{dx}{x^2 + 1} =$$

$$= x^2/2 + 4arctg\,x + C .$$

Тоді $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + x + 4}{x^2 + 1}\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}(x^2/2 + 4arctg\,x)\Big|_a^0 +$

$$+\lim_{b\to+\infty}(x^2/2 + 4arctg\,x)\Big|_0^b = \left|\underbrace{-\infty}_{при\ a\to-\infty} + 2\pi \quad \underbrace{+\infty}_{при\ b\to+\infty} + 2\pi\right| .$$

Границя не існує. Отже, інтеграл розбігається.

$$p.v.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 + x + 4}{x^2 + 1}\,dx = \lim_{a\to+\infty}(x^2/2 + 4arctg\,x)\Big|_{-a}^{a} =$$

$$= 8\lim_{a\to+\infty} arctg\,a = 8\cdot(\pi/2) = 4\pi .$$

Головне значення інтеграла збігається і дорівнює 4π. ■

Зауваження 2. При обчисленні невласних інтегралів для скорочення іноді застосовують запис, аналогічний формулі Ньютона – Лейбниця. Наприклад,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \text{ де } F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

Аналогічно узагальнюється формула інтегрування частинами:

$$\int_a^{+\infty} u\,dv = u\,v\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v\,du\,.$$

Приклад 4. Обчислити невласний інтеграл $I = \int_{-\infty}^{0} x e^{x/4} dx$ або встановити його розбіжність.

$$\square \quad I = \int_{-\infty}^{0} x e^{x/4} dx = \left| u = x;\ dv = e^{x/4}dx; du = dx;\ v = 4e^{x/4} \right| =$$

$$= \left(x \cdot 4e^{x/4}\right)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} 4e^{x/4}dx = -4e^{-\infty} - 4\cdot 4e^{x/4}\Big|_{-\infty}^{0} = \left|e^{-\infty} = 0\right| =$$

$= 0 - 16\ (e^0 - e^{-\infty}) = -16$. Інтеграл збігається і дорівнює -16. ■

Зауваження 3. Застосування заміни змінної може звести невласний інтеграл до звичайного визначеного інтеграла.

Приклад 5. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{5/2}}$ або встановити його розбіжність.

$$\square \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{5/2}} = \left| x = \operatorname{tg} t;\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t};\ (x^2+1)^{5/2} = \right.$$

$$= (tg^2 t + 1)^{5/2} = 1/\cos^5 t;\ t = arctg\, x;\ t_1 = arctg 0 = 0;$$

$$\left. t_2 = arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2} \right| = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{tg^2 t}{1/\cos^5 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t\, dt =$$

$$= \left| u = \sin t;\ du = \cos t\, dt;\ u_1 = \sin 0 = 0;\ u_2 = \sin(\pi/2) = 1 \right| =$$

$= (u^3/3)\Big|_0^1 = 1/3$. Інтеграл збігається і дорівнює $1/3$. ■

1.3.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій (другого роду)

Інтеграл по скінченному проміжку від необмеженої функції також називають невласним інтегралом другого роду.

Розглянемо інтеграл $\int_{-1}^{1} dx/x^2$. За формулою Ньютона – Лейбниця маємо $\int_{-1}^{1} dx/x^2 = -(1/x)\Big|_{-1}^{1} = -1-1 = -2$. Отримали хибний результат – від'ємне значення інтеграла від додатної функції. Це пояснюється неправомірним застосуванням формули до розривної функції.

Використаємо наступний підхід: 1) ізолюємо точку розриву разом з невеликим околом; 2) обчислимо інтеграл по частинах відрізка, що залишились; 3) зробимо граничний перехід при стягуванні околу ізоляції в точку розриву. Якщо існує скінченна границя, то візьмемо її за значення інтеграла.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на всьому відрізку $[a;b]$ за винятком скінченного числа точок, у яких функція необмежена. Точка $c \in [a;b]$ називається ***особливою точкою*** функції $f(x)$, якщо функція необмежена в ній, тобто $f(x) \to \infty$ при $x \to c$.

Зауваження 1. В особливій точці c функція $f(x)$ має вертикальну асимптоту $x = c$. Такою може бути внутрішня точка області визначення, в якій функція має розрив другого роду, або кінцева точка інтервалу області визначення.

Нехай $x = b$ – єдина особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, тобто $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a;b)$ і $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$ (рис. 6).

Тоді функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;b-\varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b-\varepsilon > a$. Невласним інтегралом від необмеженої функції називається границя

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx}.$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, а підінтегральну функцію $f(x)$ – ***інтег-***

ровною на відрізку $[a;b]$. Сама границя приймається за ***значення*** цього ***інтеграла***. Якщо ж ця границя нескінченна або взагалі не існує, то інтеграл називають ***розбіжним***.

Геометричний зміст. *Невласний інтеграл* $\int_a^b f(x)\,dx = = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, якщо він збігається, у випадку невід'ємної функції $f(x)$ *визначає площу необмеженої області – відповідної трапеції з нескінченною висотою*. Починаючи з деякого значення $\varepsilon > 0$, ця площа приблизно дорівнює площі обмеженої області, що заштрихована на рис. 6.

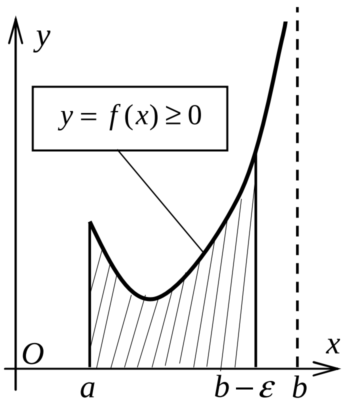

Рис. 6

Аналогічно, якщо $x = a$ – єдина особлива точка, то невласний інтеграл визначається так:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx}.$$

Якщо $f(x)$ необмежена в околі якої-небудь однієї внутрішньої точки $c \in (a;b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^c f(x)\,dx$ і $\int_c^b f(x)\,dx$ за означенням покладають:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}.$$

Нарешті, якщо a та b – особливі точки, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^d f(x)\,dx$ і $\int_d^b f(x)\,dx$ за означенням покладають

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx},$$

де d – довільна фіксована точка інтервалу $(a;b)$.

Зауваження 2. Невласний інтеграл другого роду за своїм записом нічим не відрізняється від звичайного визначеного інтеграла. Тому треба перевіряти, чи не містить проміжок інтегрування особливих точок.

Приклад. Обчислити дані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\text{а)}\int_0^1 \ln x\,dx\,;\ \text{б)}\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\,;\ \text{в)}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}\,;\ \text{д)}\int_2^4 \frac{dx}{x^2-4x}\,.$$

$$\square\ \text{а)}\ \int_0^1 \ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{0+\varepsilon}^1 \ln x\,dx=\left|u=\ln x;\ dv=dx;\ du=dx/x;\right.$$

$$\left.v=x\right|=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(x\ln x\,|_{\varepsilon}^{1}-\int_{\varepsilon}^{1}x\cdot dx/x\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln 1-\varepsilon\ln\varepsilon-x\,|_{\varepsilon}^{1}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon\ln\varepsilon-1+\varepsilon)=-\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon-1=|0\cdot\infty|=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon}-1=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{(\ln\varepsilon)'}{(1/\varepsilon)'}-1=-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1/\varepsilon}{-(1/\varepsilon)^2}-1=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon-1=-1.$$ Інтеграл збігається і дорівнює -1.

$$\text{б)}\ \int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}=\left|\sqrt[3]{(x-1)^4}=0;\ x=1\in[0;9]\right|=$$

$$=\int_0^1 (x-1)^{-4/3}dx+\int_1^9 (x-1)^{-4/3}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}(x-1)^{-4/3}dx+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{1+\delta}^{9}(x-1)^{-4/3}dx=\left|\int (x-1)^{-4/3}dx=-3(x-1)^{-1/3}+C=\right.$$

$$\left.=-3\Big/\sqrt[3]{x-1}+C\right|=-3\lim_{\varepsilon\to+0}\left(1\Big/\sqrt[3]{x-1}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon}-3\lim_{\delta\to+0}\left(1\Big/\sqrt[3]{x-1}\right)\Big|_{1+\delta}^{9}=$$

$$=-3\lim_{\varepsilon\to+0}\left(1\Big/\sqrt[3]{-\varepsilon}-1\Big/\sqrt[3]{-1}\right)-3\lim_{\delta\to+0}\left(1\Big/\sqrt[3]{8}-1\Big/\sqrt[3]{\delta}\right)=+\infty\,.$$

Невласний інтеграл розбігається.

$$\text{в)}\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}=\left|\begin{array}{c}\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}=0;\\ 1-x^2=0\ \textit{або}\ \arcsin x=0;\end{array}\right.$$

$$\left.x_1=-1\notin[0;1];\ x_2=1\in[0;1];\ x_3=0\in[0;1]\right|=$$

$$=\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}+\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}+\lim_{\delta\to+0}\int_{1/2}^{1-\delta}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}=$$

$$=\left|t=\arcsin x;\ dt=dx\Big/\sqrt{1-x^2}\ ;\ t_{11}=\arcsin\varepsilon;\right.$$

$$\left.t_{12}=t_{21}=\arcsin(1/2)=\pi/6;\ t_{22}=\arcsin(1-\delta)\right|=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\arcsin\varepsilon}^{\pi/6}\frac{dt}{\sqrt{t}}+\lim_{\delta\to+0}\int_{\pi/6}^{\arcsin(1-\delta)}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\lim_{\varepsilon\to+0}2\sqrt{t}\Big|_{\arcsin\varepsilon}^{\pi/6}+$$

$$+\lim_{\delta\to 0}2\sqrt{t}\Big|_{\pi/6}^{\arcsin(1-\delta)}=2\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt{\pi/6}-\sqrt{\arcsin\varepsilon}\right)+2\times$$

$$\times\lim_{\delta\to+0}\left(\sqrt{\arcsin(1-\delta)}-\sqrt{\pi/6}\right)=2\sqrt{\pi/6}+2\sqrt{\pi/2}-2\sqrt{\pi/6}=$$

$=\sqrt{2\pi}$. Невласний інтеграл збігається і дорівнює $\sqrt{2\pi}$.

д) $$\int_2^4\frac{dx}{x^2-4x}=\left|\begin{array}{l}x^2-4x=0;\quad x(x-4)=0;\\ x_1=0\notin[2;4];\ x_2=4\in[2;4]\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_2^{4-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-4x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_2^{4-\varepsilon}\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}\right)dx=\left|\begin{array}{l}A(x-4)+Bx=1\\ \left.\begin{array}{l}x=0\\ x=4\end{array}\right|\ \begin{cases}-4A=1\\ \ \ 4B=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r}A=-1/4\\ B=1/4\end{array}\right|=-\frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_2^{4-\varepsilon}\frac{dx}{x}-\int_2^{4-\varepsilon}\frac{dx}{x-4}\right)=-\frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_2^{4-\varepsilon}-\right.$$

$$\left.-\ln|x-4|\Big|_2^{4-\varepsilon}\right)=-(1/4)\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|4-\varepsilon|-\ln|2|-\ln|-\varepsilon|+\right.$$

$$\left.+\ln|-2|\right)=-(1/4)\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|4-\varepsilon|-\ln|\varepsilon|\right)=-\infty.$$

Невласний інтеграл розбігається. ■

1.3.3. Ознаки збіжності невласних інтегралів

У багатьох задачах немає потреби обчислювати невласний інтеграл, а досить знати, збіжний він чи ні. Для з'ясування цього питання без обчислення самого інтеграла використовуються ***ознаки збіжності***. Наведемо деякі з них для випадку невласних інтегралів першого роду з нескінченною верхньою межею. Для інших типів невласних інтегралів ознаки аналогічні.

Зауваження 1. Збіжність невласного інтеграла з нескінченною верхньою межею залежить лише від поведінки функції на нескінченності (при $x \to +\infty$), тобто невласні інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ і $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$, де $a \neq b$, збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема 1 (**основна ознака порівняння**). *Якщо на проміжку* $[a;+\infty)$ *функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *неперервні і задовольняють умові* $0 \le f(x) \le g(x)$, *то*

1) *зі збіжності більшого інтеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *випливає збіжність меншого інтеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$;

2) *з розбіжності меншого інтеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *випливає розбіжність більшого інтеграла* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Наведена ознака має простий геометричний зміст: якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченною величиною, то площа меншої області також є скінченною величиною; якщо площа меншої області є нескінченно великою, то площа більшої області також є нескінченно великою.

Зауваження 2. Для порівняння використовуються ***еталонні*** (***стандартні***) ***інтеграли***, умови збіжності яких відомі. Щоб підібрати еталонний інтеграл, треба грубо оцінити поведінку підінтегральної функції на нескінченності (при $x \to +\infty$).

Приклад 1. Дослідити на збіжність дані інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}; \qquad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

□ а) Очевидно, що для всіх $x \in [1; +\infty)$ виконуються нерівності $0 < f(x) = 1/(x^2(1+e^x)) < 1/x^2 = g(x)$. Тому за еталонний інтеграл порівняння вибираємо $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} dx\big/x^2$. Так як цей інтеграл збігається (згідно прикладу 2 із пункту 1.3.1, оскільки показник степеня $\alpha = 2 > 1$), то за основною ознакою порівняння інтеграл, що досліджується, також збігається.

б) Оскільки для всіх $x \in [1; +\infty)$ виконується нерівність $0 < 1/\sqrt[3]{x} < e^x/\sqrt[3]{x}$, то цей інтеграл розбігається за основною ознакою порівняння, бо еталонний інтеграл $\int_1^{\infty} dx\big/x^{1/3}$ є розбіжним (показник степеня $\alpha = 1/3 \le 1$). ■

<u>Теорема 2</u> (***гранична ознака порівняння***). *Нехай для неперервних і додатних на проміжку* $[a; +\infty)$ *функцій* $f(x)$ *і* $g(x)$ *існує відмінна від нуля скінченна границя*

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)/g(x)\big) = k,\ 0 < k < +\infty,\ \big(f(x) > 0, g(x) > 0\big).$$

Тоді інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *і* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються.*

На практиці гранична ознака зручніша, бо не потребує перевірки нерівності $0 \le f(x) \le g(x)$.

<u>Приклад 2</u>. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{x^2\,dx}{x^3 + \ln x}$.

□ Оцінимо поведінку підінтегральної функції $f(x) = x^2\big/(x^3 + \ln x)$ при $x \to +\infty$:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3 + \ln x} \sim \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} = g(x), \quad \text{бо } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0.$$

Тому за еталонний приймаємо інтеграл $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = $ $= \int_1^{+\infty} dx\big/x$. Розглянемо границю:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^3+\ln x}:\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+\ln x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(x^3+\ln x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{3x^2+1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{3+1/x^3}=1.$$

Оскільки еталонний інтеграл розбігається (показник степеня $\alpha=1\le 1$), то згідно з граничною ознакою порівняння заданий інтеграл теж розбігається. ■

Наведені ознаки збіжності передбачають, що підінтегральні функції невід'ємні.

У випадку знакозмінної підінтегральної функції має місце наступна ознака збіжності.

Теорема 3 (***достатня ознака збіжності***). *Якщо інтеграл від модуля* $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ *збігається, то збігається також інтеграл від самої функції* $\int_a^{+\infty}f(x)dx$.

В цьому випадку останній інтеграл називається ***абсолютно збіжним***. Ця ознака є лише достатньою. Якщо інтеграл від модуля $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ розбігається, а інтеграл від самої функції $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ збігається, то останній інтеграл називається ***умовно збіжним***.

Геометричний зміст: якщо інтеграл збігається абсолютно, то площа необмеженої області, що відповідає кривій $y=|f(x)|$ при $a\le x<+\infty$, є скінченною величиною. Тоді буде скінченною також алгебраїчна сума площ областей, обмежених кривою $y=f(x)$ при $a\le x<+\infty$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$.

□ Оскільки для всіх $x\in[1;+\infty)$ справедлива нерівність $\left|\cos x/x^2\right|\le 1/x^2$ а інтеграл $\int_1^{+\infty}dx/x^2$ збігається ($\alpha=2>1$), то за основною ознакою порівняння збігається інтеграл від модуля $\int_1^{+\infty} \left|\cos x/x^2\right| dx$. Отже, сам інтеграл $\int_1^{+\infty} \left(\cos x/x^2\right) dx$ також збігається, причому абсолютно. ■

1.4. Геометричні застосування визначеного інтеграла

Інтегральне числення служить могутнім засобом досліджень у математиці, фізиці, механіці, електротехніці та інших дисциплінах. Обчислення площ областей, обмежених кривими, довжин дуг, об'ємів просторових тіл, роботи, швидкості, довжини пройденого шляху, моментів інерції та ін. зводиться до знаходження визначеного інтеграла.

Різноманітні застосування визначеного інтеграла реалізуються за однією з двох схем:

1) Для шуканої величини, в припущенні адитивності (можливість підсумовування по елементам розбиття) і лінійності в малому (лінійна залежність між головними частинами нескінченно малих приростів, що фігурують в задачі), складається інтегральна сума, що наближено її визначає, а потім здійснюється граничний перехід при необмеженому здрібненні розбиття і одержується точне значення у вигляді визначеного інтеграла.

2) Складають співвідношення для диференціала (або похідної) шуканої функції, а потім саму функцію знаходять інтегруванням.

Розглянемо задачі обчислення основних кількісних характеристик геометричних об'єктів: довжини, площі, об'єму. Для спрощення розрахунків будемо враховувати симетрію та інші особливості конкретних фігур.

1.4.1. Площа плоскої фігури

1. <u>Випадок, коли лінії, що обмежують фігуру, задані рівняннями в явному вигляді у прямокутних координатах</u>.

Якщо на відрізку $[a;b]$ функція $f(x) \geq 0$, то за геометричним тлумаченням визначеного інтеграла площа S криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)\,dx}\,.$$

Якщо $f(x)\le 0$ на $[a;b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ теж від'ємний. Площа S відповідної криволінійної трапеції задається рівністю

$$\boxed{S=-\int_a^b f(x)\,dx}\,.$$

Якщо $f(x)$ скінченне число разів змінює знак на відрізку $[a;b]$, то для знаходження площі S відповідної криволінійної фігури треба знайти суму абсолютних значень інтегралів по проміжкам знакосталості. Тоді

$$\boxed{S=\int_a^b |\,f(x)\,|dx}\,.$$

Приклад 1. Обчислити площу S фігури, обмеженої лінією $y=\ln x$ і віссю Ox, коли $1\le x\le e$.

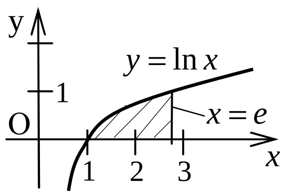

Рис. 7

□ Фігура, площу якої необхідно обчислити, зображена на рис. 7.

$$S=\int_1^e \ln x\,dx=\Big|u=\ln x;\ dv=dx;$$

$$du=dx/x;v=x\Big|=x\ln x\,|_1^e-$$

$$-\int_1^e x\,dx/x=e\ln e-\ln 1-x\,|_1^e=$$

$$=e\ln e-e+1=1 \text{ (кв.од.). } \blacksquare$$

Приклад 2. Обчислити площу S фігури, обмеженої лінією $y=x^3-3x^2-\ -4x+12$ і віссю Ox, коли $-2\le x\le 3$.

□ Побудуємо (по точкам) графік заданої кривої (рис. 8). Очевидно, що $y(x)\ge 0$, коли $-2\le x\le 2$ і $y(x)\le 0$, коли $2\le x\le 3$.

Тоді $S=\int_a^b |\,f(x)\,|dx=\int_{-2}^2 (x^3-3x^2-4x+12)\,dx-$

$$-\int_2^3 (x^3-3x^2-4x+12)\,dx=\Big((1/4)x^4-x^3-2x^2+12x\Big)\Big|_{-2}^{2}-$$

$$-\left((1/4)x^4 - x^3 - 2x^2 + 12x\right)\Big|_2^3 = 2^4/4 - 2^3 - 2\cdot 2^2 + 12\cdot 2 -$$

$$-\left((-2)^4/4 - (-2)^3 - 2(-2)^2 + 12(-2)\right) - (3^4/4 - 3^3 - 2\cdot 3^2 +$$

$$+12\cdot 3) + 2^4/4 - 2^3 - 2\cdot 2^2 + 12\cdot 2 = 4 - 8 - 8 + 24 - 4 - 8 + 8 +$$

$$+24 - 81/4 + 27 + 18 - 36 + 4 - 8 - 8 + 24 = 32{,}75 \text{ (кв. од.)}. \ \blacksquare$$

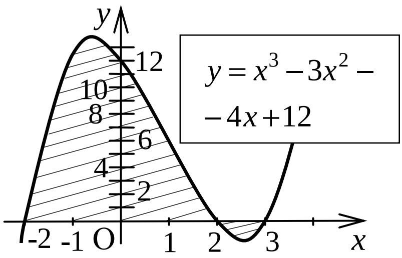

Рис. 8

При розгляді питання про обчислення площі плоскої фігури основним є поняття правильної області.

Непорожня множина D точок координатної площини Oxy називається ***областю*** (***відкритою областю***), якщо виконуються такі умови: 1) вона ***відкрита***, тобто разом з кожною своєю точкою містить деякий окіл цієї точки; 2) вона ***зв'язна***, тобто будь-які дві її точки можна сполучити деякою ламаною L, всі точки якої належать цій множині D.

Точка M_0 називається ***межовою точкою*** області D, якщо в кожному її околі містяться точки, що належать і що не належать цій області.

Множина всіх межових точок Γ області D називається ***межею*** цієї області.

Зауваження 1. Надалі розглядаються області, межа яких Γ складається зі скінченного числа кусково-неперервних кривих та ізольованих точок.

Якщо при русі вздовж межі Γ область D весь час залишається ліворуч, то такий напрям орієнтації межі Γ називається ***додатним обходом***.

Об'єднання області D з її межею Γ, називається ***замкненою областю***.

Зауваження 2. Домовимось ділянку межі Γ зображати суцільною лінією, якщо вона входить в область D, і пунктирною лінією, якщо вона не входить в область D.

Область D називається ***обмеженою***, якщо існує таке додатне число C, що відстань будь-якої точки області D до початку координат не перевищує числа C. У противному випадку область D називається ***необмеженою***.

Нехай D – деяка замкнена плоска область (рис. 9), відрізок $[a;b]$ - її проекція паралельно осі Oy на вісь Ox. Область D називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку осі*** Oy, якщо виконуються наступні умови: 1) вона обмежена знизу "горизонтальною" ***лінією входу*** $y = y_1(x)$, зверху – "горизонтальною" ***лінією виходу*** $y = y_2(x)$, а зліва і справа – вертикальними прямими відповідно $x = a$ і $x = b$ ($a < b$); 2) довільна пробна пряма $x = c$, що паралельна осі Oy, так само напрямлена і проходить через деяку внутрішню точку c відрізка $[a;b]$, перетинає межу цієї області лише в двох точках: в одній точці на ближній лінії входу та в одній точці на дальній лінії виходу; 2) лінію входу (аналогічно лінію виходу) можна задати в явному вигляді одним рівнянням $y = y_1(x)$ (аналогічно $y = y_2(x)$), розв'язаним відносно y.

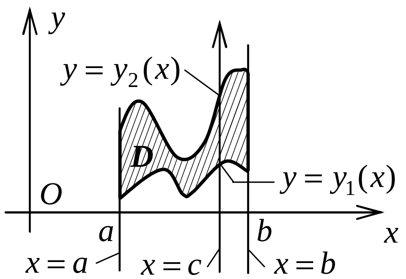

Рис. 9

Правильна в напрямку осі Oy плоска область D може бути задана системою нерівностей

$$\begin{cases} a \le x \le b; \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \end{cases}$$

де $D \xrightarrow{Oy} [a;b] \subset Ox$.

Площу такої області можна подати як алгебраїчну суму площ відповідних криволінійних трапецій, одна з основ кожної з яких лежить на осі Ox. Тоді площу правильної в напрямку осі Oy області D можна обчислити за формулою:

$$\boxed{S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\, dx}.$$

Аналогічно визначається ***правильна*** (***стандартна***) ***в напря-***

мку осі Ox плоска область D (рис. 10). При цьому змінні x і y міняються ролями. (Сформулюйте означення самостійно).

Правильна в напрямку осі Ox плоска область D може бути задана системою нерівностей

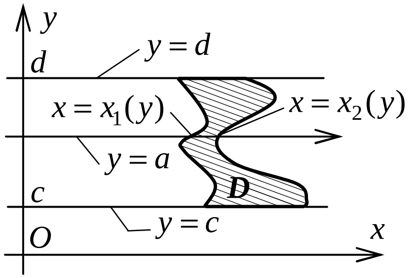

Рис. 10

$$\begin{cases} c \le y \le d; \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), \end{cases}$$

де $D \xrightarrow{Ox} [c;d] \subset Oy$.

Площу правильної в напрямку осі Ox області D можна обчислити за формулою:

$$\boxed{S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy}\,.$$

Якщо область D – правильна в напрямку обох координатних осей Ox і Oy, то вона називається просто ***правильною*** (***стандартною***).

Наприклад, область, обмежена еліпсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, є правильною. Область D: $x^2 \le y \le 2 - x^2$; $x \in [-1;1]$, обмежена двома вертикальними параболами, що перетинаються, – правильна в напрямку осі Oy, але неправильна в напрямку осі Ox. Кругове кільце $r^2 \le x^2 + y^2 \le R^2$ – неправильне в обох напрямках Ox і Oy.

Зауваження 3. Якщо область D – неправильна, то звичайно прямими, що паралельні осям координат, її розбивають на правильні частини, що не мають спільних внутрішніх точок.

Приклад 3. Знайти площу області D, обмеженої лініями $x = 4 - \sqrt{y}$, $x - y + 2 = 0$ та $y = 1$. Задачу розв'язати двома способами: а) використовуючи інтегрування за змінною x; б) використовуючи інтегрування за змінною y. Для кожного способу зробити відповідний рисунок.

□ Знайдемо характерні точки області D – її кутові точки, в яких перетинаються лінії, що утворюють межу області. Для цього складемо і розв'яжемо відповідні системи з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} x = 4-\sqrt{y}; \\ y=1; \end{cases} \quad x=3;\ A(3;1);\ \begin{cases} x-y+2=0; \\ y=1; \end{cases} \quad x=-1;\ B(-1;1);$$

$$\begin{cases} x = 4-\sqrt{y}; \\ x-y+2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=(4-x)^2,\ x\le 4; \\ x-(4-x)^2+2=0; \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1=2; \\ x_2=7>4; \end{matrix}$$

$$y_1=(4-2)^2=4;\quad C(2;4).$$

За цими точками побудуємо ескізи заданих ліній – двох прямих $x-y+2=0$, $y=1$ і лівої половини $x=4-\sqrt{y}$ вертикальної параболи. Одержимо попереднє зображення області D (рис. 11) і проаналізуємо її форму.

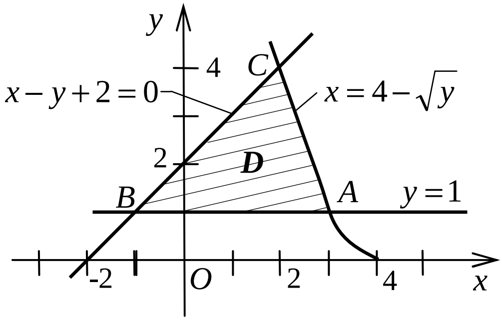

Рис. 11

а) Щоб скористатися формулою $S=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))\,dx$, необхідно подати область D як правильну в напрямку осі Oy. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то її треба розбити на правильні частини. З рис. 11 видно, що область D – неправильна, оскільки її верхня межа утворена двома різними лініями, що з'єднуються в кутовій точці C. Тому розбиваємо область D на дві правильні частини D_1 і D_2 (рис. 12). Нехай площа першої фігури S_1, площа другої фігури S_2. Тоді шукана площа заданої області

$S = S_1 + S_2$. Проведемо обчислення:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{2}((x+2)-1)\,dx + \int_{2}^{3}\left((x-4)^2 - 1\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}(x+1)\,dx + \int_{2}^{3}(x^2 - 8x + 15)dx = \left((1/2)x^2 + x\right)\Big|_{-1}^{2} +$$

$$+ \left((1/3)x^3 - 4x^2 + 15x\right)\Big|_{2}^{3} = 2 + 2 - 1/2 + 1 + 9 - 36 + 45 -$$

$$-8/3 + 16 - 30 = 35/6 \text{ (кв. од.).}$$

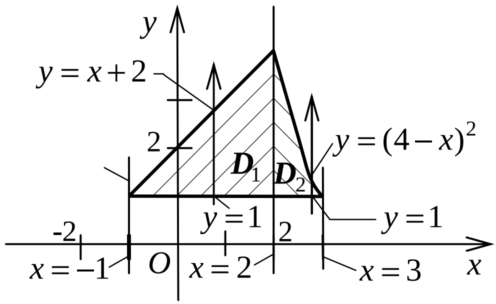

Рис. 12

б) Щоб скористатися формулою $S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy$, необхідно розглянути область D як правильну в напрямку осі Ox. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то треба розбити її на правильні частини. З рис. 11 видно, що область D у напрямку осі Ox є правильною. Відповідне зображення подано на рис. 13. Проведемо обчислення:

$$S = \int_1^4 \left(\left(4 - \sqrt{y}\right) - (y-2)\right)dy = \int_1^4 \left(6 - \sqrt{y} - y\right)dy =$$

$$= \left(6y - (2/3)\,y^{3/2} - (1/2)\,y^2\right)\Big|_1^4 = 24 - 16/3 - 8 - 6 + 2/3 +$$

$$+1/2 = 35/6 \text{ (кв. од.).} \quad \blacksquare$$

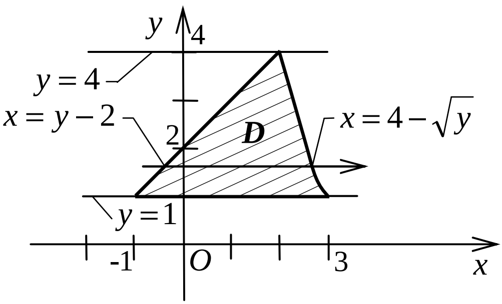

Рис. 13

<u>Зауваження 4</u>. Звичайно, при обчисленні площі конкретної фігури треба використовувати особливості її форми і вибирати той спосіб її подання як правильної області, що приводить до більш простих розрахунків.

<u>Приклад 4</u>. Обчислити площу фігури D, обмеженої параболами $y = 2x - x^2 + 3$ і $y = x^2 - 4x + 3$.

□ Знайдемо точки перетину парабол:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 + 3; \\ y = x^2 - 4x + 3; \end{cases} \quad 2x - x^2 + 3 = x^2 - 4x + 3\,; \; 2x(x-3) = 0\,;$$

$$x_1 = 0; \; y_1 = 3; \; x_2 = 3; \; y_2 = 0; \; x = 3\,; \; A(0;3)\,; \; B(3;0)\,.$$

Характерними точками також є вершини парабол. Для знаходження вершин і зручності побудови парабол виділимо в їх рівняннях повні квадрати двочлена:

$$y = 2x - x^2 + 3 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 + 3 = 4 - (x-1)^2\,; \; C(1;4)\,;$$

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1\,; \; E(2;-1)\,.$$

Вказану фігуру D зображено на рис. 14. З нього видно, що область D – правильна в напрямку осі Oy. Крім того, задані рівняння кривих, що обмежують область, мають явний вигляд відносно змінної y. Відповідне зображення подано на рис. 15.

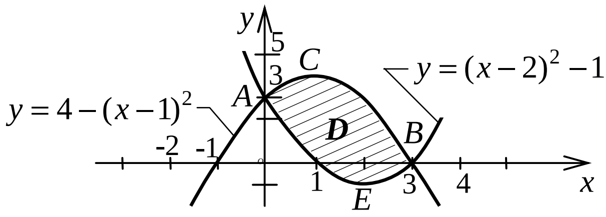

Рис. 14

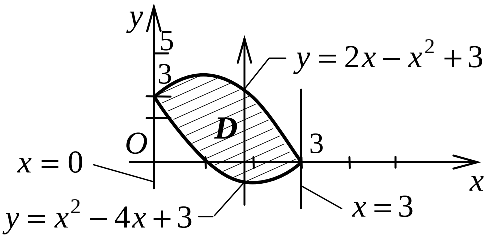

Рис. 15

За формулою $S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx$ маємо:

$$S = \int_0^2 \Big((2x - x^2 + 3) - (x^2 - 4x + 3)\Big)dx = \int_0^2 (6x - 2x^2)\,dx =$$

$$= \Big(3x^2 - (2/3)x^3\Big)\Big|_0^3 = 27 - 18 = 9 \text{ (кв. од.).} \quad ■$$

<u>Приклад 5</u>. Знайти площу області D, обмеженої лініями $y = x$, $y = 4x$, $xy = 4$.

□ Область D зображено на рис. 16. Як видно з рис. 16, дана область складається з двох симетричних частин, оскільки всі лінії, що її обмежують, є непарними. Тоді шукана площа $S = 2S_1$, де S_1 – площа частини D_1, що розташована в першій чверті. Область D_1 – неправильна. Знайшовши її кутові точки $(0;0)$, $(1;4)$ і $(2;2)$ (обчислення проведіть самостійно), область D_1 можна розбити на дві правильні в напрямку осі Oy частини D_{11} і D_{12} (рис. 17).

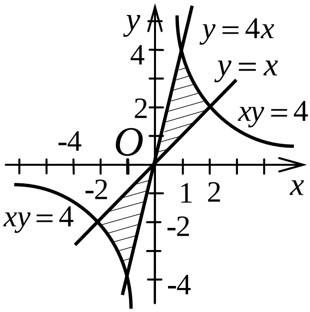

Рис. 16

Маємо:

$$S_1 = S_{11} + S_{12} = \int_0^1 (4x - x)\,dx +$$

$$+ \int_1^2 (4/x - x)\,dx = (3/2)x^2\Big|_0^1 +$$

$$+ \left(4\ln|x| - (1/2)x^2\right)\Big|_1^2 = 3/2 +$$

$$+ 4\ln 2 - 2 - 4\ln 1 + 1/2 = 4\ln 2;$$

$$S = 2S_1 = 8\ln 2 \text{ (кв. од.).} \quad \blacksquare$$

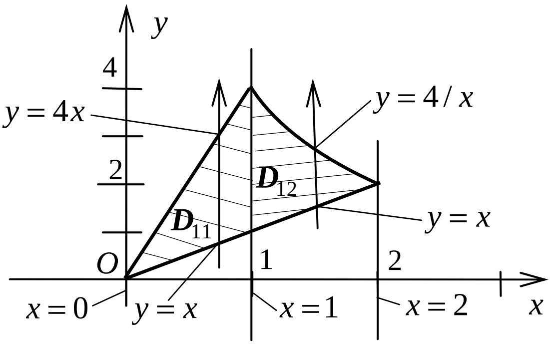

Рис. 17

2. Випадок криволінійної трапеції, обмеженої зверху лінією, що задана параметричними рівняннями у прямокутних координатах.

Нехай параметричні рівняння $x = x(t)$, $y = y(t) \geq 0$, де функція $x = x(t)$ диференційовна і монотонна при $\alpha \leq t \leq \beta$, визначають дугу неперервної невід'ємної кривої $y = y(x) \geq 0$ на відрізку $[a; b]$, причому $x(\alpha) = a$ і $x(\beta) = b$. Площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою $S = \int_a^b y(x)\,dx$, де треба зробити заміну змінної. Тоді

$$S=\int_a^b y(x)\,dx=\Big|\; y=y(t);\;\; x=x(t);\;\; dx=x'(t)\,dt;$$

$$a\to\alpha;\; b\to\beta\Big|=\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt;\;\; \boxed{S=\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt}\,.$$

<u>Приклад 6</u>. Обчислити площу фігури D, обмеженої віссю Ox і першою аркою циклоїди: $x=2(t-\sin t),\; y=3(1-\cos t)$.

□ Фігура D площу якої необхідно знайти, виділена на рис. 18 штриховою. Першій арці циклоїди відповідають значення параметра $0\le t\le 2\pi$. Проведемо обчислення:

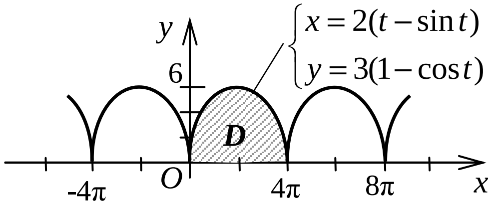

Рис. 18

$$x'=2(t-\sin t)'=2(1-\cos t);\qquad S=\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}3(1-\cos t)\cdot 2(1-\cos t)\,dt=6\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=$$

$$=6t\,\big|_0^{2\pi}-12\sin t\,\big|_0^{2\pi}+3\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=12\pi-0-12\sin 2\pi+$$

$$+12\sin 0+3t\,\big|_0^{2\pi}+(3/2)\sin 2t\,\big|_0^{2\pi}=12\pi+6\pi-0+$$

$$+(3/2)\sin 4\pi-(3/2)\sin 0=18\pi \text{ (кв. од.)}.\quad\blacksquare$$

<u>Приклад 7</u>. Знайти площу фігури, обмеженої еліпсом:

$$x=a\cos t,\;\; y=b\sin t.$$

□ Фігуру D, площу якої необхідно знайти, зображено на рис. 19. Координатні осі розбивають еліпс на 4 рівні частини. Для того, щоб знайти площу S всього еліпса, достатньо знайти площу S_1 його частини D_1, розташованої у першій чверті (на рис. 19 вона показана подвійною штриховою). Тоді $S=4S_1$.

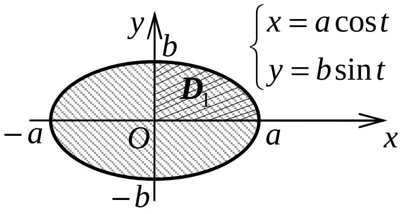

Рис. 19

Проведемо обчислення:

$a\cos t = 0 \Rightarrow t_1 = \pi/2$;

$a\cos t = a \Rightarrow t_2 = 0$;

$dx = -a\sin t\, dt$;

$$S = 4\int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t)\, dt = 4\times$$

$$\times\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a)\sin t\, dt =$$

$$= -4ab\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\, dt = -2ab\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos 2t)\, dt = -2ab\big(t-(1/2)\times$$

$$\times\sin 2t\big)\Big|_{\pi/2}^{0} = -2ab\,(0-\pi/2) + ab(\sin 0 - \sin\pi) = \pi ab \text{ (кв.од.).} \ \blacksquare$$

3. Випадок, коли лінії, що обмежують фігуру, задані рівняннями у полярних координатах.

Криволінійний сектор. Нехай у полярній системі координат маємо криву, яка визначена рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ – неперервна функція, коли $\alpha \le \varphi \le \beta$. Знайдемо площу S криволінійного сектора OAB. обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і координатними променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$.

Розіб'ємо сектор OAB на n частин довільними координатними променями $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$, …, $\varphi = \varphi_n$, де $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots$ $\ldots < \varphi_i < \ldots < \varphi_n = \beta$. Позначимо через $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ кут між сусідніми променями, $i = \overline{1,n}$ (рис. 20).

На кожному елементарному проміжку $[\varphi_{i-1};\varphi_i]$ довільним способом виберемо по одному значенню полярного кута $\overline{\varphi}_i$. Позначимо через $\overline{\rho}_i$ довжину відповідного радіус-вектора $\overline{\rho}_i = \rho(\overline{\varphi}_i)$.

Розглянемо елементарний криволінійний сектор, що відповідає приросту $\Delta\varphi_i$ полярного кута. Його площа ΔS_i наближено дорівнює площі сектора круга з радіусом $\overline{\rho}_i$ і центральним кутом $\Delta\varphi_i$: $\Delta S_i \approx (1/2)\,\overline{\rho}_i^{\,2}\cdot\Delta\varphi_i$.

Сума $S_n = 1/2\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\overline{\varphi}_i)\,\Delta\varphi_i$ дає площу сектора зі "ступінчатою" межею, що наближено визначає шукану площу S криволінійного сектора OAB.

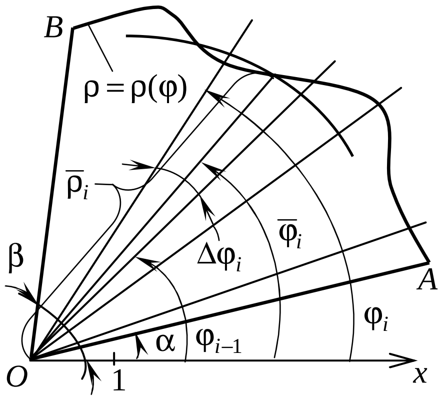

Рис. 20

Ця сума є інтегральною для функції $(1/2)\rho^2(\varphi)$ на відрізку $[\alpha,\beta]$. Здійснюючи граничний перехід при $\max\Delta\varphi_i \to 0$, отримуємо точне значення площі сектора OAB у вигляді визначеного інтеграла:

$$\boxed{S = (1/2)\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi}\,.$$

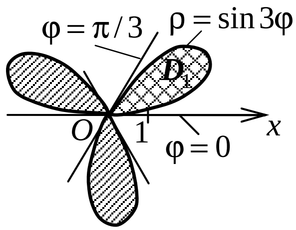

Рис. 21

Приклад 8. Обчислити площу фігури, обмеженої трипелюстковою трояндою $\rho = \sin 3\varphi$.

□ Фігура D, площу якої необхідно знайти, зображена на рис. 21.

Як бачимо, фігура D складається з трьох однакових „пелюсток”. Щоб знайти її площу S, достатньо знайти площу S_1 однієї з її „пелюсток”, наприклад, тієї D_1, що на рис. 21 позначена подвійною штриховою. Тоді $S = 3S_1$. Проведемо обчислення:

$$S = 3S_1 = 3\cdot(1/2)\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi = (3/2)\int_{0}^{\pi/3}\sin^2 3\varphi\,d\varphi =$$

$$= (3/4)\int_{0}^{\pi/3}(1-\cos 6\varphi)\,d\varphi == (3/4)\cdot(\varphi-(1/6)\sin 6\varphi)\Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= (3/4)\cdot(\pi/3-(1/6)\sin 2\pi - 0 + (1/6)\sin 0) = \pi/4 \text{ (кв.од.)}. \blacksquare$$

Правильна область у полярних координатах. Нехай D – деяка замкнена плоска область (рис. 22), розміщена між крайніми координатними променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, причому полюс O не лежить у ній. Область D називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку координатних променів*** $\varphi = C$ ($C = const$), якщо виконуються наступні умови:

1) довільний пробний координатний промінь $\varphi = C$, що лежить між крайніми променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$, перетинає межу області D тільки в двох точках: в одній точці на ближній ***лінії входу*** $\rho = \rho_1(\varphi)$ і в одній точці на дальній ***лінії виходу*** $\rho = \rho_2(\varphi)$;

2) лінію входу (аналогічно лінію виходу) можна задати в явному вигляді одним рівнянням $\rho = \rho_1(\varphi)$ (аналогічно $\rho = \rho_2(\varphi)$), розв'язаним відносно ρ.

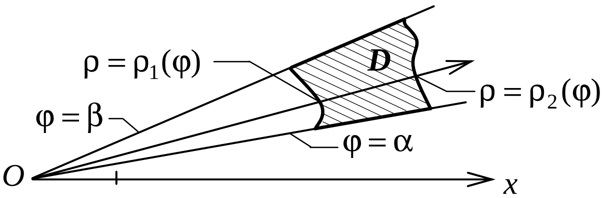

Рис. 22

Правильна в напрямку координатних променів плоска область D може бути задана системою нерівностей

$$\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta; \\ \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi). \end{cases}$$

Зауваження 5. Крайні координатні промені $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ утворюють центральний кут $\Delta\varphi = \beta - \alpha$, величина якого лежить в межах $0 \le \Delta\varphi \le 2\pi$. Зокрема, для області D вигляду криволінійного кільця з полюсом у "дірці" маємо $\Delta\varphi = 2\pi$. При цьому звичайно покладають $\alpha = 0$ і $\beta = 2\pi$.

Зауваження 6. При виконанні вказаних вище двох умов поняття правильної області поширюється на випадки, коли полюс O

лежить на межі області D (рис. 23) чи всередині області D (рис. 24). При цьому лінія входу вироджується в точку – полюс O: $\rho_1(\varphi) = 0$.

Площу правильної області можна подати як алгебраїчну суму площ відповідних криволінійних секторів, що лежать в одному центральному куті $\Delta\varphi = \beta - \alpha$. Тоді площу правильної в напрямку координатних променів області D можна обчислити за формулою

$$\boxed{S = (1/2)\int_{\alpha}^{\beta}\left(\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)\right) d\varphi}.$$

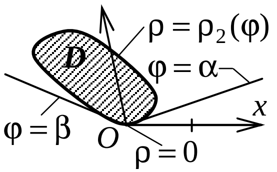

Рис. 23

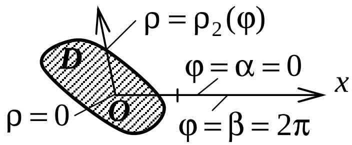

Рис. 24

<u>Приклад 9</u>. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $\rho = 3/(4\cos\varphi)$ (пряма, що перпендикулярна до полярної осі Ox) та $\rho = \cos\varphi$ (коло).

□ Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують фігуру:

$$\begin{cases} \rho = 3/(4\cos\varphi); \quad 3/(4\cos\varphi) = \cos\varphi; \\ \rho = \cos\varphi; \qquad \cos\varphi = \pm\sqrt{3}/2; \end{cases} ; \ \cos\varphi = \pm\sqrt{3}/2;$$

$$\varphi_1 = -\pi/6; \ \ \varphi_2 = \pi/6.$$

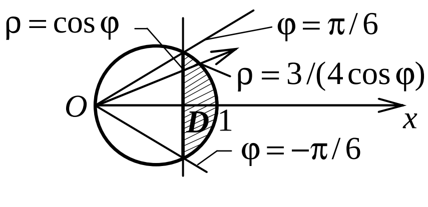

Рис. 25

Область D, площу якої необхідно обчислити, зображено на рис. 25. З цього рисунка видно, що область D – правильна в напрямку координатних променів. Тоді її площа:

$$S=(1/2)\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\left(\cos^2\varphi-(3/(4\cos\varphi))^2\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi-\frac{9}{32}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{1}{4}\left(\varphi+(1/2)\sin 2\varphi\right)\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6}-$$

$$-(9/32)\,tg\,\varphi\,\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6}=(1/4)\big(\pi/6+(1/2)\sin(\pi/3)+\pi/6-$$

$$-(1/2)\sin(-\pi/3)\big)-(9/32)\big(tg(\pi/6)-tg(-\pi/6)\big)=$$

$$=(1/4)\cdot(\pi/3+\sqrt{3}/2)-(9/32)\cdot(2\sqrt{3}/3)=\pi/12+\sqrt{3}/8-$$

$$-3\sqrt{3}/16=\pi/12-\sqrt{3}/16 \text{ (кв. од.).} \quad \blacksquare$$

1.4.2. Довжина дуги кривої

1. Випадок дуги плоскої лінії, що задана явно рівнянням у прямокутних координатах.

Нехай на координатній площині Oxy задана деяка лінія рівнянням у явній формі $y=y(x)$. Потрібно обчислити довжину L її дуги L_{AB}. (рис. 26).

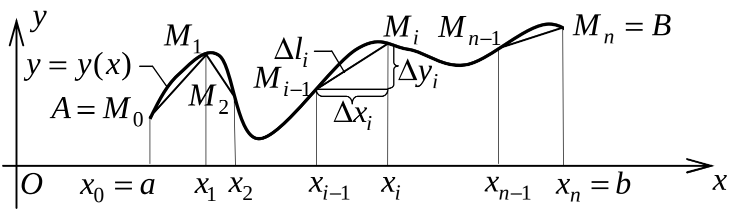

Рис. 26

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i=\overline{1,n}$ точками $A=M_0, M_1, M_2, ..., M_n=B$ з абсцисами $a=x_0<x_1<x_2<...<x_i<...<x_n=b$ і проведемо хорди $M_0M_1, M_1M_2, ..., M_{i-1}M_i, ..., M_{n-1}M_n$, довжини яких позначимо відповідно через Δl_1, $\Delta l_2, \dots, \Delta l_i, ..., \Delta l_n$. Тоді маємо ламану $M_0M_1...M_i...M_{n-1}M_n$, вписану в дугу L_{AB}. Довжина ламаної L_n

дорівнює сумі довжин її ланок $L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Довжиною L ***дуги*** L_{AB} називають границю довжини L_n вписаної ламаної при необмеженому здрібненні розбиття, тобто коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля (при цьому число n цих ланок прямує до нескінченності):

$$L = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, .$$

<u>Теорема 1</u>. *Якщо функція* $y = y(x)$, *визначена на відрізку* $[a;b]$, *неперервна разом зі своєю похідною на цьому відрізку, то довжина* L *дуги* L_{AB}, *що служить її графіком на відрізку* $[a;b]$, *обчислюється за формулою*

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, dx} \, .$$

□ Позначимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\Delta y_i = y(x_i) - y(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + (\Delta y_i / \Delta x_i)^2} \Delta x_i$$

За формулою Лагранжа про скінченні прирости маємо

$\Delta y_i / \Delta x_i = (y(x_i) - y(x_{i-1})) / (x_i - x_{i-1}) = y'(c_i)$, де $x_{i-1} < c_i < x_i$.

Отже, $\Delta l_i = \sqrt{1 + (y'(c_i))^2} \Delta x_i$, оскільки $\Delta x_i > 0$.

Таким чином, довжина вписаної ламаної дорівнює

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (y'(c_i))^2} \Delta x_i \, .$$

За умовою похідна $y'(x)$ – неперервна, тому функція $\sqrt{1 + (y'(x))^2}$ теж неперервна. Тоді вираз для довжини ламаної L_n є інтегральною сумою для неперервної функції. Отже, існує визначений інтеграл – границя L_n при необмеженому здрібненні розбиття, що дає довжину L дуги L_{AB}:

$$L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (y'(c_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, dx \, . \ \blacksquare$$

Приклад 1. Знайти довжину вказаної дуги

$$y = \ln x, \ x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}].$$

□ Похідна $y' = 1/x$. Тоді:

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + (1/x)^2}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 = t^2;\ \sqrt{1+x^2} = t;\ \ x = \sqrt{t^2-1};\ dx = t\,dt \big/ \sqrt{t^2-1}\ ; \\ t_1 = \sqrt{1+3} = 2; \\ t_1 = \sqrt{1+8} = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t \cdot t\, dt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{t^2-1}} = \int_2^3 \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2-1}\, dt = \int_2^3 dt +$$

$$+ \int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = t\,\Big|_2^3 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Bigg|_2^3 = 3 - 2 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4} - \ln\frac{1}{3} \right) =$$

$$= 1 + (1/2)\ln(3/2) \text{ (од.). } \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти довжину кола $x^2 + y^2 = R^2$.

□ Довжина L_1 дуги кола, що розташована у першому квадранті, складає четверту частину довжини L всього кола. Рівняння цієї дуги має вигляд $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, звідки $y' = -x \big/ (R^2 - x^2)^{1/2}$. Тоді довжину L кола можна обчислити так:

$$L = 4L_1 = 4\int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4R \arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_0^R =$$

$$= 4R(\arcsin 1 - \arcsin 0) = 2\pi R \text{ (од.). } \blacksquare$$

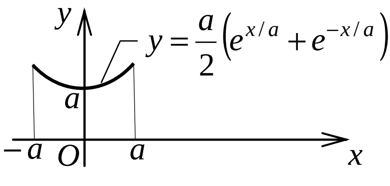

Рис. 27

Приклад 3. Електричній дріт, кінці якого закріплені на двох опорах, під дією сили тяжіння набуває форми ланцюгової лінії. Знайти довжину заданої дуги ланцюгової лінії (рис. 27):

$$y=(a/2)(e^{x/a}+e^{-x/a})\quad (a>0);\quad x\in[-a;a].$$

□ Знайдемо похідну:

$$y'=(a/2)(e^{x/a}\cdot(1/a)+e^{-x/a}\cdot(-1/a))=(1/2)(e^{x/a}-e^{-x/a}).$$

Використовуючи симетрію дуги відносно осі Oy, обчислимо шукану довжину:

$$L=2\int_0^a\sqrt{1+\left((1/2)(e^{x/a}-e^{-x/a})\right)^2}dx=\int_0^a(e^{x/a}+e^{-x/a})dx=$$

$$=\int_0^a e^{x/a}dx+\int_0^a e^{-x/a}dx=ae^{x/a}\Big|_0^a-ae^{-x/a}\Big|_0^a=a(e-e^{-1})\ \text{(од.)}.\ ■$$

2. <u>Випадок дуги лінії, що задана параметричними рівняннями у прямокутних координатах</u>.

Розглянемо дугу L_{AB} гладкої плоскої лінії, що задана параметрично $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, де функції $x=x(t)$ і $y=y(t)$ – неперервні разом зі своїми похідними, причому функція $x=x(t)$ – монотонно зростаюча, $\varphi(\alpha)=a$ і $\varphi(\beta)=b$. За наведеною вище формулою довжина цієї дуги

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx.$$

З урахуванням рівнянь лінії та властивостей похідної параметрично заданої функції маємо:

$$dx=x'(t)\,dt,\ y'(x)=y'(t)/x'(t);$$

$$\alpha=x^{-1}(a);\quad \beta=x^{-1}(b);\quad x'(t)>0;\ \beta\ge\alpha.$$

Зробимо заміну змінної в інтегралі для довжини дуги:

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(y'(t)/x'(t)\right)^2}x'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt.$$

Таким чином, довжина дуги плоскої кривої, що задана параметрично, визначається за формулою

$$\boxed{L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt},\quad \text{де } \beta\ge\alpha.$$

Наведена формула залишається справедливою у випадку монотонно спадної функції $x = x(t)$ при умові, що $\beta \ge \alpha$.

Приклад 4. Знайти довжину астроїди:

$$x = 2\cos^3 t, \quad y = 2\sin^3 t.$$

□ Обчислимо довжину астроїди – замкненої кривої, що задана параметричними рівняннями (рис. 28). Для цього спочатку знайдемо

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \left(-6\cos^2 t \cdot \sin t\right)^2 + \left(6\sin^2 t \cdot \cos t\right)^2 =$$

$$= 36\sin^2 t\cos^2 t = 9\sin^2 2t; \quad \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 3\sin 2t.$$

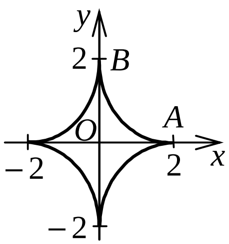

Рис. 28

Чверть L_{AB} астроїди розміщена в першому квадранті від точки $A(2;0)$ до точки $B(0,2)$ (рис. 28). Знайдемо значення параметра t, що відповідають кінцям цієї дуги:

$$2\cos^3 t = 2; \quad \cos t = 1; \quad \alpha = 0;$$

$$2\cos^3 t = 0; \quad \cos t = 0; \quad \beta = \pi/2.$$

Тоді довжина всієї астроїди:

$$L = 4\cdot 3\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = -12\cdot(1/2)\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -6(-1-1) = 12 \text{ (од.)}. \quad ■$$

Зауваження. Довжина дуги гладкої просторової кривої, заданої параметричними рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [\alpha;\beta],$$

обчислюється за аналогічною формулою:

$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt}, \quad \text{де } \beta \ge \alpha.$$

Приклад 5. Знайти довжину заданої дуги гвинтової лінії:

$$x = 6\cos t; \quad y = 6\sin t; \quad z = 8t, \quad t \in [0; 2\pi].$$

$$□ \quad x' = -6\sin t; \quad y' = 6\cos t; \quad z' = 8;$$

$$\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2=(-6\sin t)^2+(6\cos t)^2+8^2=$$

$$=36(\sin^2 t+\cos^2 t)+64=100;$$

$$L=100\int_0^{2\pi}dt=100t\Big|_0^{2\pi}=200\pi \text{ (од.).} \quad \blacksquare$$

3. <u>Випадок дуги плоскої лінії, що задана рівнянням у полярних координатах</u>.

<u>Теорема 2</u>. *Нехай дуга* L_{AB} *задана в полярних координатах рівнянням* $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$, *де функція* $\rho(\varphi)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $\rho'(\varphi)$ *на відрізку* $[\alpha;\beta]$, *причому точкам* A *і* B *відповідають значення* α *і* β. *Тоді довжина дуги* L_{AB} *обчислюється за формулою:*

$$\boxed{L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi}\,.$$

□ Використовуючи формули переходу від полярної до прямокутної системи координат $x=\rho\cos\varphi$ і $y=\rho\sin\varphi$, перейдемо до параметричного задання дуги L_{AB}:

$$x=\rho(\varphi)\cos\varphi;\quad y=\rho(\varphi)\sin\varphi,$$

де роль параметра відіграє полярний кут φ.

Для обчислення довжини дуги застосуємо формулу $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2+\left(y'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$, що відповідає параметричному випадку. Спочатку знайдемо похідні від x і y за параметром:

$$x'(\varphi)=\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi;$$

$$y'(\varphi)=\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi.$$

Тоді

$$(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2=\left(\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi\right)^2+$$

$$+\left(\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi\right)^2=(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2,$$

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi. \quad \blacksquare$$

Приклад 6. Знайти довжину кардіоїди $\rho = 6(1+\sin\varphi)$.

□ Кардіоїда – замкнена лінія, що зображена на рис. 29. Вона симетрична відносно осі Oy. Тому її довжину L можна знайти, подвоївши довжину L_1 її правої частини L_{OA}, що розташована в четвертій та першій чвертях і при цьому $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Проведемо обчислення:

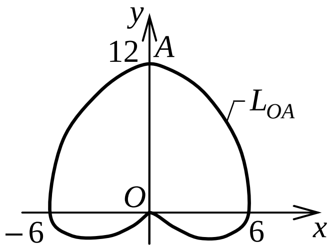

Рис. 29

$$\rho' = 6(1+\sin\varphi)' = 6\cos\varphi;$$

$$\rho^2 + (\rho')^2 = (6(1+\sin\varphi))^2 + + (6\cos\varphi)^2 = 36(1+2\sin\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 36\cdot 2(1+\sin\varphi) = = 72(1+\cos(\pi/2-\varphi)) = 72\times \times 2\cos^2\big((\pi/2-\varphi)/2\big) =$$

$$=144\cos^2(\pi/4-\varphi/2);\quad \sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2} = 12\left|\cos(\pi/4-\varphi/2)\right| =$$

$$=12\cos(\pi/4-\varphi/2);\quad L = 2L_1 = 2\int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2}\,d\varphi =$$

$$= 2\cdot 12\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 24\cdot(-2)\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= -48(\sin 0 - \sin(\pi/2)) = 48 \text{ (од.).} \ \blacksquare$$

Приклад 7. Знайти довжину кривої $\rho = 4\sin^3(\varphi/3)$, де $0 \le \varphi \le 3\pi$.

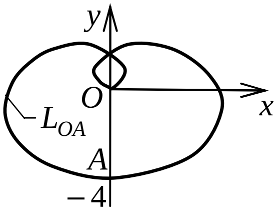

Рис. 30

□ Задана крива зображена на рис. 30. Вона замкнена і утворює петлю. Виходячи з симетрії цієї кривої відносно осі Oy, можна її довжину L знайти, подвоївши довжину L_1 її лівої половини L_{OA}, що розташована в першій, другій та третій чвертях і при цьому $0 \le \varphi \le 3\pi/2$.

Проведемо обчислення:

$$L = 2L_1 = 2\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2}\,d\varphi = \Big| L_{OA}:\ \rho = 4\sin^3(\varphi/3);$$

$$\alpha = 0;\quad \beta = 3\pi/2;\ \rho' = 4\cdot 3\sin^2(\varphi/3)\cos(\varphi/3)\cdot(1/3) =$$

$$= 4\sin^2(\varphi/3)\cos(\varphi/3);\ \rho^2 + (\rho')^2 = (4\sin^3(\varphi/3))^2 +$$

$$+ (4\sin^2(\varphi/3)\cos(\varphi/3))^2 = 36\sin^4(\varphi/3)\cdot(\sin^2(\varphi/3) +$$

$$+ \cos^2(\varphi/3)) = 36\sin^4(\varphi/3);\ \sqrt{(\rho)^2+(\rho')^2} = 6\sin^2(\varphi/3)\Big| =$$

$$= 6\int_0^{3\pi/2}\sin^2(\varphi/3)\,d\varphi = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{3\pi/2}\big(1-\cos(2\varphi/3)\big)\,d\varphi =$$

$$= 3\cdot\big(\varphi - (3/2)\sin(2\varphi/3)\big)\Big|_0^{3\pi/2} = 9\pi/2\ \text{(од.)}.\ \blacksquare$$

1.4.3. Диференціал довжини дуги і кривина лінії

1. Диференціал довжини дуги. Нехай дуга L_{AB} гладкої плоскої лінії задається функцією $y = y(x)$, що неперервна разом зі своєю похідною на відрізку $[a;b]$. Для довільної точки $M(x;y(x))$, $x \in [a;b]$, довжина дуги L_{AM} є функцією x і визначається формулою $L(x) = \int_a^x \sqrt{1+(y'(t))^2}\,dt$.

Це інтеграл зі змінною верхньою межею. Тоді виконується умова $L'(x) = \sqrt{1+(f'(x))^2}$. Звідси диференціал довжини дуги дорівнює:

$$dL = L'(x)\,dx = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}\ .$$

Отже, $\boxed{(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2}$.

Для явно заданої плоскої лінії: $\boxed{dL = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}$.

Для параметрично заданої плоскої лінії:

$$\boxed{dL = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}\,.$$

Для параметрично заданої просторової лінії:

$$\boxed{dL = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt}\,.$$

Для лінії в полярних координатах:

$$\boxed{dL = \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi}\,.$$

2. Кривина лінії. Різні лінії можуть відрізнятися степенем викривлення. Розглянемо це питання детальніше.

Модуль відношення $|\Delta\alpha/\Delta L|$, де ΔL − довжина дуги L_{MM_1} (рис. 31), $\Delta\alpha$ − величина кута в радіанах, на який повертається дотична, коли точка дотику переміщується з точки M в точку M_1, називається ***середньою кривиною дуги*** L_{MM_1}.

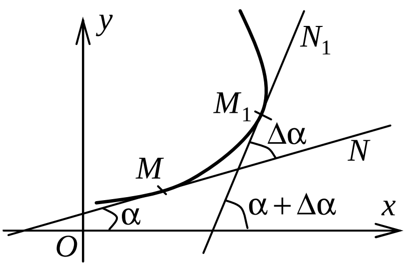

Рис. 31

Границя (якщо вона існує) середньої кривини дуги L_{MM_1}, коли точка M_1 наближається вздовж кривої до точки M, називається ***кривиною*** K ***лінії в точці*** M:

$$\boxed{K = \lim_{M_1 \to M} |\Delta\alpha/\Delta L| = |d\alpha/dL|}\,.$$

Якщо крива задана в явній формі рівнянням $y = y(x)$, то

$$tg\,\alpha = y';\ \alpha = arctg\,y';\ \alpha' = \frac{y''}{1+(y')^2};\ d\alpha = \frac{y''dx}{1+(y')^2};;$$

$$dL = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx;\quad \boxed{K = |y''| \big/ \left(1+(y')^2\right)^{3/2}}.$$

Величина R, обернена до кривини K, називається ***радіусом кривини***: $\boxed{R = 1/K}$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти кривину і радіус кривини даних ліній в довільній точці x: а) пряма $y = kx + b$, б) коло $x^2 + y^2 = r^2$, в) косинусоїда $y = \cos x$.

□ а) Знайдемо похідні $y' = k$, $y'' = 0$. Тоді $K = 0$ і $R = +\infty$. Тобто, у прямої кривина відсутня.

б) Знайдемо першу та другу похідні функції, заданої неявно:

$$2x + 2y \cdot y' = 0; \quad y' = -x / y; \quad y'' = -(y - xy') / y^2 =$$

$$= -(y + x(x / y)) \big/ y^2 = -(x^2 + y^2) \big/ y^3 = -r^2 \big/ y^3;$$

$$K = \frac{|-r^2 / y^3|}{\left(1 + (-x / y)^2\right)^{3/2}} = \frac{|-r^2 / y^3|}{(x^2 + y^2)^{3/2} \big/ y^3} = \frac{1}{r}; \quad R = 1 / K = r.$$

Тобто, коло має сталу кривину, радіус якої дорівнює радіусу кола.

в) $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$. Тоді:

$$K = |-\cos x| \big/ (1 + (-\sin x)^2)^{3/2} = |\cos x| \big/ (1 + \sin^2 x)^{3/2};$$

$$R = (1 + \sin^2 x)^{3/2} \big/ |\cos x|. \quad ■$$

Коло, радіус якого дорівнює радіусу кривини в даній точці та яке дотикається в цій точці до кривої, називається ***колом кривини***. Центр цього кола називається ***центром кривини***.

Множина всіх центрів кривини даної лінії називається ***еволютою*** цієї лінії, а сама лінія відносно своєї еволюти називається ***евольвентою*** (***розгорткою***).

Очевидно, що сама лінія та її коло кривини у відповідній точці мають спільну дотичну. Центр кривини розміщений на нормалі з боку вгнутості даної лінії.

Вершиною кривої називається точка $M_0(x_0; y_0)$, в якій кривина максимальна. Крива може мати будь-яку кількість вершин.

<u>Приклад 2</u>. Знайти вершини заданої кривої (точки максимуму кривини): а) $y = x^2$; б) $y = \ln x$; в) $y = (e^x + e^{-x}) / 2$.

□ а) Область визначення кривої $x \in (-\infty; +\infty)$. Знайдемо похідні: $y' = 2x$, $y'' = 2$. Тоді $K = 2 / (1 + 4x^2)^{3/2}$. Дослідимо на екстремум цю функцію $K = K(x)$:

$$K' = -12x/(1+4x^2)^{5/2}\,;\; -12x/(1+4x^2)^{5/2} = 0 \text{ при } x = 0\,.$$

Оскільки при $x < 0$ маємо $K' > 0$, а при $x > 0$ – $K' < 0$, тобто в точці $x = 0$ похідна K' з додатної стає від'ємною, то в цій стаціонарній точці функція $K = K(x)$ має максимум:

$$K_{\max} = 2 \text{ при } x_{\max} = 0,\; y_{\max} = 0;\; M_0(0;0) \text{ – вершина.}$$

б) Область визначення кривої $x > 0$. Похідні $y' = 1/x$,

$y'' = -1/x^2$. Тоді $K = \dfrac{|-1/x^2|}{(1+(1/x)^2)^{3/2}} = \dfrac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Дослідимо отриману функцію $K = K(x)$ на екстремум:

$$K' = \frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}};\; K' = 0;\; \frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}} = 0 \text{ при } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

З урахуванням області визначення вибираємо $x = \sqrt{2}/2$. Оскільки в цій стаціонарній точці похідна K' з додатної стає від'ємною, то маємо точку максимуму функції $K = K(x)$. Отже,

$$x_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2},\; y_{\max} = -\frac{\ln 2}{2};\; K_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9};\; M_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\ln 2}{2}\right) \text{ –}$$

вершина.

в) Область визначення кривої $x \in (-\infty;+\infty)$.

Знайдемо похідні та кривину:

$$y' = (e^x - e^{-x})/2;\; y'' = (e^x + e^{-x})/2;\; K = 4(e^x + e^{-x})^{-2}.$$

Дослідимо на екстремум одержану функцію $K = K(x)$:

$$K' = -8(e^x + e^{-x})^{-3}(e^x - e^{-x}) = 0;\; e^x - e^{-x} = 0;\; x = 0\,.$$

Оскільки в цій стаціонарній точці $x = 0$ похідна K' з додатної стає від'ємною, то маємо точку максимуму функції $K = K(x)$.

Отже,

$$x_{\max} = 0,\; y_{\max} = 1;\; K_{\max} = 1;\; M_0(0;1) \text{ – вершина. } \blacksquare$$

1.4.4. Об'єм тіла

1. <u>Об'єм тіла з відомими площами паралельних перерізів</u>.

Нехай маємо деяке тіло T. Припустимо, що відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною, що перпендикулярна до осі Ox (рис. 32). Ця площа залежить від положення січної площини, тобто є функцією від x: $S = S(x)$. Знайдемо об'єм V тіла T.

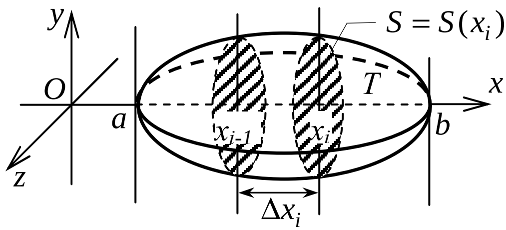

Рис. 32

Припустимо, що функція $S(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$, що служить проекцією тіла T на вісь Ox. Проведемо довільно площини $x = x_0$, $x = x_1$, ..., $x = x_i$, ..., $x = x_n$, де $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b$. Тим самим тіло розбивається на елементарні шари між сусідніми площинами $x = x_{i-1}$ і $x = x_i$. На кожному частинному проміжку $[x_{i-1}; x_i]$ візьмемо довільну точку c_i і для кожного i-го шару побудуємо елементарний циліндр, твірна якого паралельна осі Ox і має довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а напрямною служить контур перерізу тіла T площиною $x = c_i$. Тоді об'єм шару ΔV_i наближено дорівнює об'єму такого циліндра з площею основи $S(c_i)$ і висотою Δx_i: $\Delta V_i \approx S(c_i)\Delta x_i$. Об'єм V тіла T наближено дорівнює сумі V_n об'ємів усіх частинних циліндрів: $V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\Delta x_i$. Точність цього наближення підвищується зі зменшенням кроків Δx_i розбиття.

Границя цієї суми (якщо вона існує) при необмеженому здрібненні розбиття (коли $\max \Delta x_i \to 0$ і при цьому, очевидно, $n \to \infty$) визначає об'єм V даного тіла T:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\,\Delta x_i \,.$$

Таким чином, об'єм V є границею інтегральної суми V_n для неперервної функції $S(x)$ на відрізку $[a;b]$, тому вказана границя існує і дорівнює визначеному інтегралу:

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}\,.$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти об'єм еліпсоїда

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

□ У перерізі еліпсоїда (рис. 33) площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, утворюється еліпс

$$\begin{cases} y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 - x^2/a^2; \\ x = const \end{cases}$$

або $$y^2 \Big/ \left(b^2(1 - x^2/a^2)\right) + z^2 \Big/ \left(c^2(1 - x^2/a^2)\right) = 1$$

з півосями $b_1 = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $\quad c_1 = c\sqrt{1 - x^2/a^2}$.

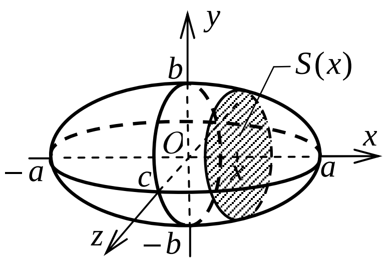

Рис. 33

Площа такого еліпса (див. прикл.7 із п.1.4.1)

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - x^2/a^2\right).$$

Обчислимо об'єм еліпсоїда, враховуючи його симетрію відносно площини Oyz:

$$V = \pi bc \int_{-a}^{a} (1 - x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc \int_0^a (1 - x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc\left(x - x^3/(3a^2)\right)\Big|_0^a = (4/3)\pi abc \text{ (куб.од.).} \ ■$$

2. <u>Об'єм тіла обертання</u>.

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком неперервної невід'ємної функції $y = y(x) \geq 0$, віссю Ox і двома прямими $x = a$ та $x = b$, де $a \leq b$. Якщо обертати цю фігуру навколо осі Ox, то утвориться тіло обертання T (рис. 34). Переріз цього тіла площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, – круг з площею $S(x) = \pi R^2 = \pi(y(x))^2$. Тоді об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

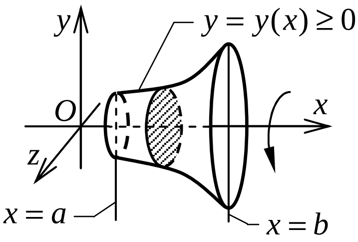

Рис. 34

$$\boxed{V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx}.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням плоскої фігури, обмеженої лініями $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$, навколо осі Ox.

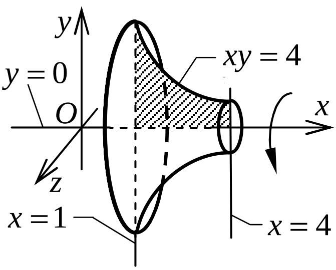

Рис. 35

□ Тіло, об'єм якого треба знайти, зображене на рис. 35. Фігура (криволінійна трапеція), що обертається, показана штриховою.

Проведемо обчислення:

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx =$$

$$= \pi\int_1^4 (4/x)^2\,dx = 16\pi\int_1^4 \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 16\pi(-1/x)\Big|_1^4 = -16\pi\cdot(1/4 - 1) = 12\pi \text{ (куб.од.).} \ \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Фігура, обмежена кривими $y = \sqrt[3]{4p^2x}$, $y = 2\sqrt{p(x-p)}$ і віссю Ox, обертається навколо осі Ox. Знайти об'єм тіла обертання.

□ Фігура, обертанням якої утворюється тіло, зображена на рис. 36. Щоб визначити межі інтегрування, знайдемо характерні точки фігури – точки перетину заданих ліній:

$$\begin{cases} y=\sqrt[3]{4p^2x}; \\ y=0; \end{cases} \quad O(0;0); \quad \begin{cases} y=2\sqrt{p(x-p)}; \\ y=0; \end{cases} \quad A(p;0);$$

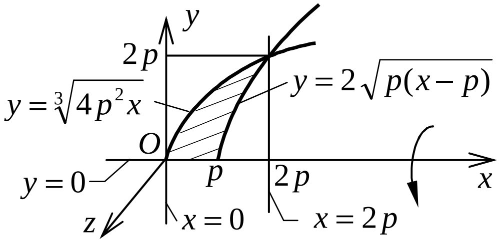

Рис. 36

$$\begin{cases} y=\sqrt[3]{4p^2x}; \\ y=2\sqrt{p(x-p)}; \end{cases}$$

$$B(2p;2p).$$

Шуканий об'єм $V=V_2-V_1$, де V_1 – об'єм тіла, отриманого обертанням криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y=2\sqrt{p(x-p)}$ і прямими $x=2p$ та $y=0$; V_2 – об'єм тіла, одержаного обертанням криволінійної трапеції, обмеженої кубічною параболою $y=\sqrt[3]{4p^2x}$ і прямими $x=2p$ та $y=0$.

Тоді

$$V=\pi\int_0^{2p} y_2^2(x)\,dx-\pi\int_p^{2p} y_1^2(x)\,dx=\pi\int_0^{2p}\left(4p^2x\right)^{2/3}dx-$$

$$-\pi\cdot 4p\int_p^{2p}(x-p)\,dx=2\pi p\sqrt[3]{2p}\cdot(3/5)x^{5/3}\Big|_0^{2p}-(4\pi p)\cdot(1/2)\times$$

$$\times(x-p)^2\Big|_p^{2p}=(24/5)\pi p^3-2\pi p^3=(14/5)\pi p^3 \text{ (куб.од.). } \blacksquare$$

Зауваження 1. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осу Oy криволінійної трапеції, обмеженої лініями $x=x(y)\geq 0$, $x=0$, $y=c$, $y=d$, де $c\leq d$, $x=x(y)$ − неперервна невід'ємна на $[c;d]$ функція, обчислюється аналогічно

$$\boxed{V=\pi\int_c^d x^2(y)\,dy}.$$

Приклад 4. Знайти об'єм частини параболоїда, утвореної обе-