

Рис. 111

$$z_5 = -2 + i;$$

$$x_5 = -2; \quad y_5 = 1;$$

$$|z_5| = \sqrt{x_5^2 + y_5^2} = \sqrt{5};$$

$$\arg z_5 = \arctg(y_5/x_5) + \pi,$$

$$x_5 < 0, y_5 \geq 0;$$

$$\arg z_5 = \arctg(-1/2) + \pi = \pi - \arctg(1/2);$$

$$z_5 = \sqrt{5} e^{i(\pi - \arctg(1/2))};$$

$$z_5 = \sqrt{5} (\cos(\pi - \arctg(1/2)) + i \sin(\pi - \arctg(1/2))). \quad \blacksquare$$

### 3.7.5. Дії над комплексними числами в тригонометричній і показниковій формах

Якщо  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  і  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  – два комплексні числа в тригонометричній формі, то їх добуток:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &+ i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Добутком двох комплексних чисел  $z_1$  і  $z_2$  є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів, а аргумент – сумі аргументів співмножників. Отже,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i};$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

Якщо  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  і  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  – два комплексні числа в тригонометричній формі, причому  $z_2$  відмінне від нуля  $z_2 \neq 0$ , то їх частка:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= (r_1/r_2) \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

Часткою  $z_1/z_2$  двох комплексних чисел  $z_1$  і  $z_2$ , де дільник  $z_2 \neq 0$ , є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого  $z_1$  і дільника  $z_2$ , а аргумент – різниці аргументів діленого  $z_1$  і дільника  $z_2$ . Отже,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)); \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1 - \varphi_2)i}; \\ |z_1/z_2| &= |z_1|/|z_2|; \quad \text{Arg}(z_1/z_2) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2. \end{aligned}$$

**Зауваження 1.** Множення комплексних чисел можна розглядати як ще один вид (поряд зі скалярним і векторним) добутку плоских векторів. Вектор, що зображує добуток комплексних чисел  $z_1$  і  $z_2$ , дістаємо поворотом вектора  $z_1$  проти годинникової стрілки на кут, що дорівнює  $\varphi_2$ , і розтягом його в  $|z_2|$  разів (для випадку  $|z_2| > 1$  див. рис. 112). Вектор, що зображує частку двох комплексних чисел  $z_1$  і  $z_2$ , дістаємо поворотом вектора  $z_1$  за годинниковою стрілкою на кут, що дорівнює  $\varphi_2$ , і стиском його в  $|z_2|$  разів (для випадку  $|z_2| > 1$  див. рис. 113).

**Натуральним степенем**  $z^n$  комплексного числа  $z$  називається комплексне число, отримане множенням числа  $z$  самого на себе  $n$  раз, де  $n$  – натуральне число.

Із правила множення комплексних чисел у тригонометричній формі впливає **перша формула Муавра**:

$$z^n = (r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

**Коренем  $n$ -го степеня**  $\sqrt[n]{z}$  з комплексного числа  $z$  називається

вається таке комплексне число,  $n$ -й степінь якого дорівнює  $z$ :  
Очевидно, що корінь  $n$ -го степеня з нуля дорівнює нулю.

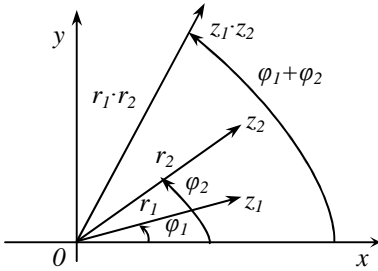


Рис. 112

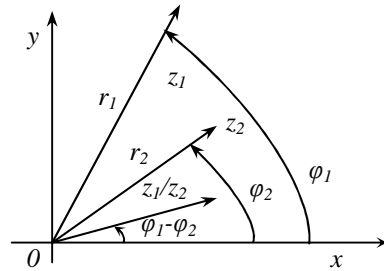


Рис. 113

Якщо комплексне число  $z$  відмінне від нуля  $z \neq 0$ , то корінь  $n$ -го степеня  $\sqrt[n]{z}$  має рівно  $n$  різних значень, що визначаються за **другою формулою Муавра**:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

де  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ;  $\sqrt[n]{r}$  – арифметичне значення кореня з додатного числа.

На комплексній площині всі корені  $n$ -го степеня  $\sqrt[n]{z}$  з комплексного числа  $z \neq 0$  зображуються вершинами правильного  $n$ -кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом  $\sqrt[n]{r}$ .

**Зауваження 2.** Хоча б один корінь  $n$ -го степеня з додатного дійсного числа буде дійсним.

**Приклад 1.** Піднести до степеня:  $(\sqrt{3} + i)^{10}$ .

□ Запишемо число  $\sqrt{3} + i$  в тригонометричній формі

$$\sqrt{3} + i = 2(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)).$$

За першою формулою Муавра

$$(\sqrt{3} + i)^{10} = (2(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)))^{10} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^{10}(\cos(5\pi/3) + i \sin(5\pi/3)) = 2^{10}(\cos(\pi + 2\pi/3) + \\
 &+ i \sin(\pi + 2\pi/3)) = 2^{10}(-\cos(2\pi/3) - i \sin(2\pi/3)) = \\
 &= 2^{10}(1/2 - i \cdot \sqrt{3}/2) = 2^9 - i \cdot 2^9 \sqrt{3}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

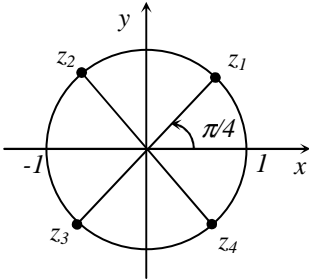


Рис. 114

Приклад 2. Знайти всі значення кореня четвертого степеня  $\sqrt[4]{-1}$ .

□ Запишемо підкореневе число  $-1$  у тригонометричній формі  $-1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi)$  (див. рис. 114).

За другою формулою Муавра

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}(\cos(\pi + 2\pi k)/4 +$$

$$+ i \sin(\pi + 2\pi k)/4), \text{ де } k = 0, 1, 2, 3.$$

Тобто, коренями є комплексні числа:

$$z_1 = \cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)(1 + i);$$

$$z_2 = \cos(3\pi/4) + i \sin(3\pi/4) = (\sqrt{2}/2)(-1 + i);$$

$$z_3 = \cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4) = (\sqrt{2}/2)(-1 - i);$$

$$z_4 = \cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4) = (\sqrt{2}/2)(1 - i),$$

які зображено на рис. 114.  $\blacksquare$

### 3.7.6. Многочлени. Розкладання на множники.

#### Розв'язування квадратних рівнянь

Функція комплексної змінної

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

називається **многочленом  $n$ -го степеня** стандартного вигляду.

Тут  $z$  – комплексний аргумент;  $n$  – степінь многочлена;  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – сталі комплексні **коефіцієнти**;  $a_0$  називається **старшим коефіцієнтом**, причому  $a_0 \neq 0$ ;  $a_n$  називається

**вільним членом.**

Теорема 1 (теорема Безу). При діленні многочлена  $P_n(z)$  на різницю  $z - a$  остача від ділення дорівнює  $P_n(a)$ .

□  $P_n(z) = Q_{n-1}(z) \cdot (z - a) + R$ . Нехай  $z \rightarrow a$ , тоді  $P_n(a) = R$ . ■

Наслідок 1. Якщо  $a$  – корінь многочлена  $P_n(z)$ , то цей многочлен  $P_n(z)$  ділиться без остачі на різницю  $z - a$ , тобто розкладається на множники

$$P_n(z) = Q_{n-1}(z) \cdot (z - a),$$

де частка  $Q_{n-1}(z)$  – многочлен на одиницю меншого степеня.

Теорема 2 (основна теорема алгебри). Будь-який многочлен  $P_n(z)$  ненульового степеня  $n \geq 1$  має хоча б один корінь (дійсний чи комплексний).

Наслідок 2. Будь-який многочлен  $P_n(z)$  ненульового степеня  $n \geq 1$  має рівно  $n$  коренів, серед яких можуть бути однакові.

Наслідок 3. Будь-який многочлен  $P_n(z)$  ненульового степеня  $n \geq 1$  розкладається на множники у вигляді:

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m},$$

де  $a_0$  – старший коефіцієнт;  $z_1, z_2, \dots, z_m$  – різні (дійсні чи комплексні) корені;  $k_1, k_2, \dots, k_m$  – відповідні кратності цих коренів, причому  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ .

Корені квадратного рівняння  $az^2 + bz + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) з комплексними коефіцієнтами  $a, b, c$  знаходяться за відомими формулами:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad D = b^2 - 4ac,$$

де  $\sqrt{D}$  – одне зі значень квадратного кореня з дискримінанта  $D$ .

На множині комплексних чисел для коренів квадратного рівняння залишається справедливою теорема Вієта:

$$z_1 + z_2 = -b/a, \quad z_1 z_2 = c/a.$$

Приклад. Розв'язати квадратне рівняння  $4z^2 - 8z + 5 = 0$ .

$$\square D = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = -16; \quad \sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i;$$

$$z_{1,2} = \frac{8 \pm 4i}{2 \cdot 4} = 1 \pm \frac{1}{2}i. \quad \blacksquare$$

### 3.7.7. Комплексні функції дійсної змінної.

#### Лінії на комплексній площині

**Комплексна функція з дійсної змінної  $t$**  кожному значенню  $t$  з деякої непорожньої множини  $D$  дійсних чисел за певним законом ставить у відповідність одне єдине значення комплексної змінної  $z$  з деякої області  $E$  комплексної площини. Комплексна функція  $z = z(t)$  дійсної змінної  $t$  визначається рівністю  $z = x(t) + i y(t)$ ,  $t \in D$ , де  $x(t)$  та  $y(t)$  – задані дійсні функції (відповідно дійсна і уявна частини змінної  $z = z(t)$ ).

Функція  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$  в **комплексно-параметричній формі** задає деяку плоску лінію  $L$ . Параметричні рівняння цієї лінії:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ .

Комплексній змінній  $z = z(t)$  відповідає вектор-функція.

Для знаходження похідної  $z' = z'(t)$  комплексної функції  $z = x(t) + i y(t)$  дійсної змінної треба продиференціювати окремо дійсну  $x(t)$  та уявну  $y(t)$  частини:  $z' = x'(t) + i y'(t)$ .

Приклад 1. Визначити вид і зобразити на комплексній площині лінію, задану рівнянням  $z = 3 \cos t + 3i \sin t$ .

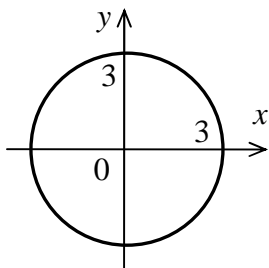


Рис. 115

□ Щоб визначити вид лінії, підставимо в її рівняння  $z = x + iy$  і зведемо його до відповідного стандартного вигляду. Потім побудуємо цю лінію.

$$x + iy = 3 \cos t + 3i \sin t ; \quad \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$$

коло радіуса  $r = 3$  з центром у початку координат, задане в параметричній формі (рис. 115). Його можна задати неявно

рівнянням  $|z| = 3$ . Канонічне рівняння кола  $x^2 + y^2 = 9$ . ■

Приклад 2. Знайти похідну функції  $z = 4 \cos^2 t + i e^{8t}$  в точці  $z_0$ , що відповідає значенню параметра  $t_0 = \pi/4$ .

$$\square z' = (4 \cos^2 t + i e^{8t})' = -8 \cos t \cdot \sin t + 8i e^{8t} = -4 \sin 2t + 8i e^{8t}; \quad z'(\pi/4) = -4 \sin(\pi/2) + 8i e^{2\pi} = -4 + 8i e^{2\pi}. \quad \blacksquare$$

### 3.7.8. Поняття функції комплексної змінної.

#### Деякі елементарні функції комплексної змінної

Для геометричного тлумачення поняття функції комплексної змінної розглядаються два екземпляри площини комплексних чисел:  $z$ -площина  $z = x + iy$  і  $w$ -площина  $w = u + iv$ .

Нехай на  $z$ -площині задана довільна множина точок  $D$ . Якщо кожній точці  $z = x + iy$  множини  $D$  за певним законом  $f$  поставлено у відповідність одну точку  $w = u + iv$  (або декілька точок)  $w$ -площини, то говорять, що на множині  $D$  задано однозначну (або багатозначну) **комплексну функцію комплексної змінної**  $w = f(z)$ .  $D$  називається **множиною визначення** функції  $w = f(z)$ , а множина  $E$  усіх значень  $w$ , що приймає функція, називається **множиною значень** цієї функції.

**Степенева функція з натуральним показником  $n$**  має вигляд  $w = z^n$ , де  $n \in \mathbb{N}$ . Степенева функція  $w = z^n$  визначена

на всій комплексній площині, однозначна, неперервна. Похідна  $w' = nz^{n-1}$  всюди неперервна.

**Коренева функція** має вигляд  $w = z^p$ , де  $p = m/n$  – нескоротний правильний дріб:  $0 < m/n < 1$ ,  $m, n \in N$ .

Коренева функція (радикал)  $w = z^p$  визначена на всій комплексній площині і багатозначна. Похідна  $w' = pz^{p-1}$  всюди визначена і неперервна, крім  $z = 0$ .

**Показникова (експоненціальна) функція** комплексної змінної визначається рівністю  $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ . На дійсній осі  $y = 0$  ця функція збігається з дійсною експонентою  $e^x$ . Зберігається основне правило: при множенні експонент їх показники додаються  $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ . Справедливі також співвідношення:  $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$ ;  $(e^z)^n = e^{nz}$ .

Модуль комплексної експоненти  $|e^z| = e^x$ , а аргумент  $Arg e^z = y + 2\pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Отже, ця функція є періодичною з уявним періодом  $2\pi i$ :  $e^{z+2\pi i} = e^z$ .

Похідна комплексної експоненти  $w = e^z$  дорівнює їй самій і всюди відмінна від нуля  $w' = e^z \neq 0$ .

**Тригонометричні та гіперболічні функції** комплексного аргументу визначаються за допомогою **основної формули Ейлера**  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  і узагальнюють відповідні дійсні функції:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad tg z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})};$$

$$ctg z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}; \quad sh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad ch z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$



$$th z = \frac{sh z}{ch z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}; \quad cth z = \frac{ch z}{sh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Оскільки комплексна експонента  $e^z$  є періодичною з уявним періодом  $2\pi i$ , то тригонометричні функції  $\sin z$  і  $\cos z$  також періодичні на всій комплексній площині з дійсним періодом  $2\pi$ , а  $tg z$  і  $ctg z$  – з дійсним періодом  $\pi$ :

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(z + 2\pi); & \cos z &= \cos(z + 2\pi); \\ tg z &= tg(z + \pi); & ctg z &= ctg(z + \pi). \end{aligned}$$

Причому на відміну від дійсних функцій, на всій комплексній площині  $\sin z$  і  $\cos z$  є необмеженими:

$$|\cos z| \rightarrow +\infty, \quad |\sin z| \rightarrow +\infty \quad \text{при } y \rightarrow \pm\infty.$$

Гіперболічні функції  $sh z$  і  $ch z$  на всій комплексній площині є періодичними з уявним періодом  $2\pi i$ , а  $th z$  і  $cth z$  – з уявним періодом  $\pi i$ :

$$\begin{aligned} sh z &= sh(z + 2\pi i); & ch z &= ch(z + 2\pi i); \\ th z &= th(z + \pi i); & cth z &= cth(z + \pi i). \end{aligned}$$

Зауваження 1. Для тригонометричних і гіперболічних функцій комплексного аргументу залишаються справедливими основні тотожності (синус і косинус суми, різниці та ін.), а також формули диференціювання.

#### **Допоміжні формули Ейлера**

$sh z = -i \sin iz$ ;  $ch z = \cos iz$ ;  $th z = -itg iz$ ;  $cth z = i ctg iz$   
дають зв'язок гіперболічних функцій з тригонометричними.

Приклад. Знайти  $\cos(3 + 4i)$ .

$$\begin{aligned} \square \cos(3 + 4i) &= \frac{e^{i(3+4i)} + e^{-i(3+4i)}}{2} = \frac{e^{-4}e^{3i} + e^4e^{-3i}}{2} = \\ &= \left( e^{-4}(\cos 3 + i \sin 3) + e^4(\cos 3 - i \sin 3) \right) / 2 = \\ &= \left( \cos 3 \cdot (e^{-4} + e^4) - i \sin 3 \cdot (e^4 - e^{-4}) \right) / 2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^4 + e^{-4}}{2} \cos 3 - i \frac{e^4 - e^{-4}}{2} \sin 3 = ch4 \cos 3 - i sh4 \sin 3. \blacksquare$$

**Логарифмічна функція**  $w = Ln z$  комплексної змінної визначається як обернена до показникової:

Комплексне число  $w = Ln z$  називається **натуральним логарифмом** ненульового комплексного числа  $z$ , якщо виконується рівність  $e^w = z$ . Звідси  $Ln z = \ln |z| + i Arg z$ .

Функція  $w = Ln z$  є нескінченнозначною і визначена на всій комплексній площині, за винятком початку координат  $z = 0$ . Якщо для аргументу  $z \neq 0$  обмежитися його головним значенням  $-\pi < \arg z \leq \pi$ , то одержимо **головне значення логарифму**  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ .

Зауваження 2. Якщо число  $z$  – дійсне додатне, тоді головне значення аргументу  $\arg z = 0$  і головне значення логарифму співпадає зі звичайним натуральним логарифмом  $\ln z = \ln |z|$ .

Зауваження 3. На логарифм комплексної змінної поширюються основні властивості звичайного логарифму дійсного аргументу:  $Ln(z_1 z_2) = Ln z_1 + Ln z_2$ ;  $Ln(z_1 / z_2) = Ln z_1 - Ln z_2$ ;  $Ln(z)^n = n Ln z$ .

Зауваження 4. За допомогою логарифмічної функції визначаються:

а) **загальна степенева функція**  $w = z^a = e^{a Ln z}$ , де показник  $a = \alpha + i\beta$  – довільне комплексне число. Ця функція багатозначна, її **головне значення**  $w = e^{a \ln z}$ .

б) **загальна показникова функція**  $w = a^z = e^{z Ln a}$ , де основа  $a = \alpha + i\beta \neq 0$  – довільне ненульове комплексне число. Ця функція багатозначна, її **головне значення**  $w = e^{z \ln a}$ .

в) **показниково-степенева функція**  $w = z_1^{z_2} = e^{z_2 Ln z_1}$ , де основа відмінна від нуля  $z_1 \neq 0$ . Ця функція нескінченнозначна, її **головне значення**  $w = e^{z_2 \ln z_1}$ .

### 3.8. Контрольні запитання

- 1) Що називається визначником?
- 2) Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника?
- 3) За яким правилом обчислюється значення визначника  $n$ -го порядку?
- 4) Сформулюйте правила “хреста” і “трикутників” для обчислення відповідно визначників другого і третього порядку.
- 5) Сформулюйте основні властивості визначника.
- 6) Як знаходиться значення визначника трикутного вигляду?
- 7) Що називається матрицею?
- 8) Яка матриця називається невиродженою?
- 9) Як здійснюються операції додавання (віднімання) матриць і множення матриці на число? Чим відрізняється множення матриці на число від множення визначника на число?
- 10) Як здійснюється операція множення матриць? Які властивості цієї операції?
- 11) Що таке обернена матриця та як вона обчислюється?
- 12) Що називається рангом матриці?
- 13) Як знаходиться ранг матриці методом обвідних мінорів?
- 14) Які операції називаються елементарними перетвореннями матриці?
- 15) Які матриці називаються еквівалентними?
- 16) Як знаходиться ранг матриці методом елементарних перетворень?
- 17) Який вигляд має система  $m$  лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з  $n$  невідомими?
- 18) Яка система називається сумісною? Визначеною?
- 19) Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі для лінійних систем.
- 20) Як знаходиться розв’язок квадратної СЛАР за допомогою оберненої матриці?
- 21) Як розв’язується квадратна СЛАР методом Крамера?
- 22) Як розв’язується довільна СЛАР методом Гаусса?
- 23) Сформулюйте умову наявності в квадратній СЛАР нульових розв’язків.
- 24) Як використовуються блочні матриці для розв’язування СЛАР і знаходження оберненої матриці?

- 25) Як задається прямокутна система координат у просторі? Як утворюється координатна сітка цієї системи координат?
- 26) Що таке скалярні та векторні величини?
- 27) Які вектори називаються колінеарними? Компланарними? Рівними?
- 28) Як знаходяться сума, різниця двох векторів і добуток вектора на число?
- 29) Як знаходиться проекція вектора на ненульовий вектор?
- 30) Що таке координати вектора? Як здійснюються лінійні операції над векторами в координатній формі?
- 31) Як знаходяться модуль і напрямні косинуси вектора, заданого в координатній формі?
- 32) Як формулюється умова колінеарності двох векторів?
- 33) Як знаходяться координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні?
- 34) Що називається скалярним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
- 35) У чому полягає умова ортогональності двох векторів?
- 36) Що називається векторним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
- 37) У чому полягає геометричний зміст векторного добутку?
- 38) Що називається мішаним добутком трьох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
- 39) У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?
- 40) У чому полягає умова компланарності трьох векторів?
- 41) Яка трійка векторів утворює базис? Як знайти координати вектора в даному базисі?
- 42) Що називається  $n$ -вимірним векторним простором? Який простір є лінійним?
- 43) Яка система векторів називається лінійно незалежною?
- 44) Що таке базис  $n$ -вимірного векторного простору?
- 45) Що називається лінійним відображенням? Що таке матриця лінійного відображення?
- 46) Як задаються паралельне перенесення і поворот прямокутної системи координат на площині?
- 47) Що таке власні числа і власні вектори квадратної матриці?
- 48) Як знаходяться власні числа і власні вектори?
- 49) Сформулюйте властивості власних чисел і власних векторів.

- 50) Що таке матричний многочлен?
- 51) Сформулюйте теорему Келі – Гамільтона про характеристичний многочлен.
- 52) Як розв’язується СЛАР методом простих ітерацій?
- 53) Наведіть основні типи рівняння площини.
- 54) Як обчислюється кут між площинами?
- 55) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
- 56) Як обчислюється відстань від точки до площини?
- 57) Наведіть основні типи рівняння прямої у просторі.
- 58) Як обчислюється кут між прямими у просторі?
- 59) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.
- 60) Як обчислюється кут між прямою і площиною?
- 61) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.
- 62) Як знаходиться відстань між непаралельними прямими?
- 63) Як знаходиться відстань від точки до прямої у просторі?
- 64) Як записується комплексне число в алгебраїчній формі?
- 65) Наведіть умову рівності двох комплексних чисел.
- 66) Чим відрізняється між собою пара комплексно спряжених чисел?
- 67) Що служить геометричним зображенням комплексного числа і всієї множини комплексних чисел?
- 68) Які арифметичні операції зручно виконувати в алгебраїчній, а які – в тригонометричній чи показниковій формах?
- 69) Чим відрізняється добуток комплексних чисел від скалярного і векторного добутку векторів?
- 70) Скільки різних значень має корінь  $n$ -го степеня з комплексного числа? Як розміщені ці значення на комплексній площині?
- 71) Який вигляд має розклад многочлена на множники на множині комплексних чисел?
- 72) Що називається комплексною функцією дійсної змінної? Що служить графіком такої неперервної функції?
- 73) Як здійснюється диференціювання комплексної функції дійсної змінної?

- 74) Що називається комплексною функцією комплексної змінної?
- 75) Наведіть основну формулу Ейлера.
- 76) Якими формулами виражається зв'язок тригонометричних і гіперболічних функцій з комплексною експонентою  $e^z$ ?
- 77) Як визначається комплексна логарифмічна функція  $\text{Ln } z$  та її головне значення  $\text{ln } z$ ?

### 3.9. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

**Завдання 1.** Для даного визначника  $\Delta$  і вказаних чисел  $i$  та  $j$  знайти мінори  $M_{ij}$ ,  $M_{ji}$  і алгебраїчні доповнення  $A_{ij}$ ,  $A_{ji}$  відповідно елементів  $a_{ij}$  і  $a_{ji}$ . Обчислити визначник  $\Delta$  трьома способами:

- 1) розкладаючи його за елементами  $i$ -го рядка;
- 2) розкладаючи його за елементами  $j$ -го стовпця;
- 3) попередньо звівши його до східчастого (трикутного) вигляду з нулями нижче головної діагоналі.

| № в-та | Завдання   | № в-та | Завдання  |
|--------|--|--------|---|
| 1      | $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ $i = 2; \quad j = 4$ | 16     | $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $i = 3; \quad j = 1$ |
| 2      | $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ $i = 1; \quad j = 4$ | 17     | $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ $i = 3; \quad j = 4$ |

|   |   |    |   |
|---|---|----|---|
| 3 | $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ $i = 1; j = 3$  | 18 | $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 1; j = 3$ |
| 4 | $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 4; j = 3$   | 19 | $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 2; j = 3$  |
| 5 | $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 3; j = 2$   | 20 | $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 2; j = 1$   |
| 6 | $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 2; j = 4$ | 21 | $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ $i = 2; j = 1$  |
| 7 | $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 3; j = 2$  | 22 | $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ $i = 1; j = 3$    |

|    |  |    |  |
|----|--|----|--|
| 8  | $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 1; j = 4$   | 23 | $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 3; j = 4$    |
| 9  | $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i = 2; j = 4$ | 24 | $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 4; j = 1$   |
| 10 | $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 3; j = 1$    | 25 | $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 4; j = 2$ |
| 11 | $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 3; j = 4$    | 26 | $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $i = 2; j = 3$ |
| 12 | $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ $i = 2; j = 3$    | 27 | $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ $i = 4; j = 2$   |



|    |   |    |  |
|----|---|----|--|
| 13 | $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i = 4; j = 3$   | 28 | $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 1; j = 2$    |
| 14 | $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 1; j = 2$   | 29 | $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 3; j = 4$ |
| 15 | $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ $i = 1; j = 4$ | 30 | $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 2; j = 3$     |

**Завдання 2.** Дано матриці  $A$  і  $B$ .

- 1) Знайти матриці  $C = AB$  і  $D = BA$ .
- 2) Знайти обернену матрицю  $A^{-1}$  і перевірити, що  $AA^{-1} = E$  і  $A^{-1}A = E$ .
- 3) Розв'язати матричне рівняння  $AXB = D$ .
- 4) Побудувати характеристичний многочлен матриці  $A$ :  $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$  і перевірити, що матриця  $A$  є коренем свого характеристичного многочлена  $f(A) = 0$ .
- 5) Знайти власні числа матриці  $F$ , одержаної з  $A$  вилученням останнього рядка і останнього стовпця.

| № в-та | Завдання  |
|--------|---|
| 1      | $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ |
| 2      | $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$   |
| 3      | $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 4      | $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$   |
| 5      | $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  |
| 6      | $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ |
| 7      | $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 8      | $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  |

|    |   |
|----|---|
| 9  | $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$      |
| 10 | $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$     |
| 11 | $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$    |
| 12 | $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$   |
| 13 | $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$    |
| 14 | $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$     |
| 15 | $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ |
| 16 | $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$     |

|    |   |
|----|---|
| 17 | $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$   |
| 18 | $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$    |
| 19 | $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$    |
| 20 | $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$    |
| 21 | $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ |
| 22 | $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$     |
| 23 | $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 6 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 9 \end{pmatrix}$    |
| 24 | $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$     |

|    |   |
|----|---|
| 25 | $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$      |
| 26 | $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$  |
| 27 | $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$     |
| 28 | $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$   |
| 29 | $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$  |
| 30 | $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ |

**Завдання 3.** Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами:

- 1) методом Крамера;
  - 2) за допомогою оберненої матриці;
  - 3) методом Гаусса послідовного вилучення невідомих.
- Зробити перевірку.

| №<br>в-та | Завдання  | №<br>в-та | Завдання   |
|-----------|---|-----------|--|
| 1         | $\begin{cases} 5x + y - 2z = 4 \\ 5x + 8y + 4z = 12 \\ -2x + 4y - 3z = 11 \end{cases}$    | 16        | $\begin{cases} -3x + 2y + z = -3 \\ -x - 3y + 2z = 4 \\ x + 2y - 4z = -10 \end{cases}$   |
| 2         | $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 2, \\ x - 2y + z = 4, \\ 2x - y + z = 3. \end{cases}$       | 17        | $\begin{cases} -3x + 2y - z = 8 \\ 3x - 3y + 2z = -15 \\ -5x + 2y + 4z = -9 \end{cases}$ |
| 3         | $\begin{cases} 7x - 2y - z = 5 \\ x + 4y + z = 3 \\ -4x + 5y + 6z = 8 \end{cases}$        | 18        | $\begin{cases} 3x - 3y + 5z = -9, \\ 4x + 2y - 3z = 0, \\ x + 3y + 4z = 5. \end{cases}$  |
| 4         | $\begin{cases} 2x - y + z = 5, \\ 3x + 2y - 2z = -3, \\ 4x + 5y - 3z = -5. \end{cases}$   | 19        | $\begin{cases} x + 5y - z = -9 \\ -2x - y + 4z = 2 \\ 2x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$     |
| 5         | $\begin{cases} -3x + 5y + 8z = 2 \\ -x - 4y + 2z = 0 \\ 5x - y - 9z = 1 \end{cases}$      | 20        | $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \\ -2x - 2y - z = -9 \end{cases}$     |
| 6         | $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = -3, \\ 2x + 3y + 3z = -5, \\ 5x - 4y + 2z = 5. \end{cases}$ | 21        | $\begin{cases} 4x + y - z = 3, \\ 5x + 4z = -4, \\ -2x + 3y + 5z = 1 \end{cases}$        |
| 7         | $\begin{cases} 6x + 5y - z = -13 \\ x + 4y + 5z = 5 \\ 2x + 8y + z = -8 \end{cases}$      | 22        | $\begin{cases} 3x + y - 7z = 10 \\ -x + 3y + 2z = -3 \\ 2x - y + 4z = -2 \end{cases}$    |
| 8         | $\begin{cases} 4x + 2y - z = 1 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -5x + 2y - 4z = -8 \end{cases}$      | 23        | $\begin{cases} -3x + 5y + 8z = 2 \\ -x + 6y + 3z = 1 \\ 5x - y - 6z = 4 \end{cases}$     |

|    |  |    |  |
|----|--|----|--|
| 9  | $\begin{cases} 4x + 3y - z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ 3x + 2y - z = 4 \end{cases}$     | 24 | $\begin{cases} 3x - y + 2z = 9, \\ x + y - z = -2, \\ 4x + 4y - 3z = -5. \end{cases}$    |
| 10 | $\begin{cases} 2x + y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + 3z = 8 \\ -2x + 3y + 6z = 7 \end{cases}$   | 25 | $\begin{cases} 6x - 2y - z = 3 \\ x + 4y - 3z = -8 \\ 3x + 10y - 2z = -3 \end{cases}$    |
| 11 | $\begin{cases} 3x + 4y + z = 1, \\ 5x + y - 3z = -2, \\ 2x + 3y + 4z = 7. \end{cases}$ | 26 | $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = -1, \\ 2x + 3y + 2z = 9, \\ 5x - 4y + 4z = 9. \end{cases}$ |
| 12 | $\begin{cases} 3x + 5y - 7z = -1 \\ -x + 6y + 2z = 0 \\ 5x - y + 4z = 14 \end{cases}$  | 27 | $\begin{cases} 2x + 5y - z = 3 \\ x + 5y - 3z = 14 \\ -3x + 4y + z = -2 \end{cases}$     |
| 13 | $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ 3x - y + 5z = 2, \\ 4x + 3y + 4z = 0. \end{cases}$ | 28 | $\begin{cases} 2x + 5y - z = 1 \\ -2x + 5y + 2z = 2 \\ -3x + 4y + z = -3 \end{cases}$    |
| 14 | $\begin{cases} 3x - 2y - z = -1 \\ x + 4y + 3z = -1 \\ 4x - y - 2z = 4 \end{cases}$    | 29 | $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 3x + 3y - 4z = -6 \\ -2x + 4y - z = 5 \end{cases}$     |
| 15 | $\begin{cases} -3x + 2y + z = 2 \\ 5x + y - 4z = -5 \\ x + 4y - 3z = -4 \end{cases}$   | 30 | $\begin{cases} 2x + 5y - z = 5 \\ x + y + 2z = 0 \\ -3x + 4y + 7z = -13 \end{cases}$     |

**Завдання 4.** Перевірити, що дана квадратна однорідна система  $AX = 0$  має безліч розв'язків ( $\det A = 0$ ). Знайти всі ці розв'язки (загальний розв'язок). Знайти будь-який ненульовий частинний розв'язок.

| № в-та | Завдання   | № в-та | Завдання  |
|--------|--|--------|---|
| 1      | $\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 5x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 2y + 6z = 0 \end{cases}$  | 16     | $\begin{cases} -3x + 2y - 4z = 0 \\ 4x - 3y + 5z = 0 \\ 5x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$ |
| 2      | $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 5x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$  | 17     | $\begin{cases} 3x + 2y - 8z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \\ x - 4y + 4z = 0 \end{cases}$   |
| 3      | $\begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 10y - 7z = 0 \end{cases}$  | 18     | $\begin{cases} 3x - 6y + 5z = 0 \\ 4x - 4y - 3z = 0 \\ 2x - 8y + 13z = 0 \end{cases}$ |
| 4      | $\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 5x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$ | 19     | $\begin{cases} x + 5y - 8z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \\ 5x + y - 2z = 0 \end{cases}$    |
| 5      | $\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ 5x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$  | 20     | $\begin{cases} 2x + y - 7z = 0 \\ 3x - 4y - 4z = 0 \\ x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$    |
| 6      | $\begin{cases} 3x + 2y + 7z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 0 \\ -x + 8y + z = 0 \end{cases}$  | 21     | $\begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \\ 4x - 3y + 7z = 0 \end{cases}$    |
| 7      | $\begin{cases} 3x + 5y - z = 0 \\ x + 4y - 6z = 0 \\ x - 3y + 11z = 0 \end{cases}$   | 22     | $\begin{cases} 3x - 4y - z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$    |



|    |  |    |  |
|----|--|----|--|
| 8  | $\begin{cases} 4x + 2y - 5z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 0 \\ 2x + 5y - 8z = 0 \end{cases}$ | 23 | $\begin{cases} -3x + 5y + 4z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ x + 9y - 4z = 0 \end{cases}$     |
| 9  | $\begin{cases} 4x + y - 6z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ x + 10y - 12z = 0 \end{cases}$  | 24 | $\begin{cases} 3x - y + 5z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \\ x - 7y + 7z = 0 \end{cases}$       |
| 10 | $\begin{cases} 2x - 7y + 2z = 0 \\ 3x + 5y - 3z = 0 \\ 5x - 2y - z = 0 \end{cases}$  | 25 | $\begin{cases} 6x - 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - 3z = 0 \\ 4x - 10y + 3z = 0 \end{cases}$   |
| 11 | $\begin{cases} 3x - 4y + z = 0 \\ 5x + y - 3z = 0 \\ 2x + 5y - 4z = 0 \end{cases}$   | 26 | $\begin{cases} 3x + 2y - 6z = 0 \\ 2x - 4y + 3z = 0 \\ -x + 10y - 12z = 0 \end{cases}$ |
| 12 | $\begin{cases} 3x + 5y - z = 0 \\ -x - 6y + 2z = 0 \\ x - 7y + 3z = 0 \end{cases}$   | 27 | $\begin{cases} 2x + 5y - 6z = 0 \\ 4x - 3y - 3z = 0 \\ -2x + 8y - 3z = 0 \end{cases}$  |
| 13 | $\begin{cases} 2x - 4y + 5z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \\ -x - 3y + 8z = 0 \end{cases}$  | 28 | $\begin{cases} 2x + 5y - 4z = 0 \\ -2x + 6y + z = 0 \\ 4x - y - 5z = 0 \end{cases}$    |
| 14 | $\begin{cases} 7x - 2y - 2z = 0 \\ 3x + 4y - 3z = 0 \\ x - 10y + 4z = 0 \end{cases}$ | 29 | $\begin{cases} 2x + y - 7z = 0 \\ 3x - 3y + 4z = 0 \\ 5x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$    |
| 15 | $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0 \\ 5x + y - 4z = 0 \\ 2x + 3y - 9z = 0 \end{cases}$  | 30 | $\begin{cases} 2x - y - 8z = 0 \\ x - 3y + 6z = 0 \\ 3x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$     |

**Завдання 5.** Дано вершини трикутної піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ . Побудувати зображення піраміди  $A_1A_2A_3A_4$  у декартовій прямокутній системі координат  $Oxuz$ . Засобами векторної алгебри й аналітичної геометрії знайти:

- 1) довжину ребра  $A_1A_2$ ;
- 2) кут між ребрами  $A_1A_2$  і  $A_1A_4$ ;
- 3) площу грані  $A_1A_2A_3$ ;
- 4) об'єм піраміди  $A_1A_2A_3A_4$ ;
- 5) загальне рівняння площини  $A_1A_2A_3$ ;
- 6) кут між ребром  $A_1A_4$  і гранню  $A_1A_2A_3$ ;
- 7) канонічні рівняння прямих  $A_1A_2$  і  $A_3A_4$ ;
- 8) канонічні рівняння висоти піраміди  $A_4N$ , проведеної з вершини  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ ;
- 9) канонічні рівняння прямої  $A_3M$ , яка паралельна ребру  $A_1A_2$ ;
- 10) рівняння площини  $\alpha$ , яка проходить через точку  $A_1$  перпендикулярно ребру  $A_1A_2$ ;
- 11) довжину висоти  $A_4N$ , проведеної з вершини  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ ;
- 12) канонічні рівняння медіани  $A_1K$  трикутника  $A_1A_2A_3$ ;
- 13) координати точки  $N$  – основи висоти  $A_4N$ , проведеної з вершини  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ ;
- 14) відстань між паралельними прямими  $A_3M$  і  $A_1A_2$ ;
- 15) відстань між мимобіжними прямими  $A_1A_2$  і  $A_3A_4$ ;
- 16) загальні рівняння прямої  $l$ , що служить лінією перетину грані  $A_1A_2A_3$  і площини  $\beta: x + y + z - 1 = 0$ ; перейти від загальних рівнянь прямої  $l$  до канонічних, а потім до параметричних рівнянь;

17) координати радіус-вектора  $\overrightarrow{OA_4}$  у базисі  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ,  
 що утворений векторами  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{A_1 A_2}$ ,  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{A_1 A_3}$ ,  $\vec{e}_3 = \overrightarrow{A_1 A_4}$ .

| № в-та | Завдання  |
|--------|---|
| 1      | $A_1(-4, 2, 1), A_2(-1, 5, 4), A_3(-2, -4, 5), A_4(1, 2, -7)$ |
| 2      | $A_1(1, -5, 1), A_2(-1, 3, 4), A_3(0, -6, 1), A_4(1, 2, -8)$  |
| 3      | $A_1(-4, 2, 0), A_2(3, 1, -5), A_3(-2, 4, 6), A_4(1, -3, -3)$ |
| 4      | $A_1(7, 0, 1), A_2(3, 1, 0), A_3(-2, 4, 6), A_4(1, 5, -3)$    |
| 5      | $A_1(-6, 1, 4), A_2(-1, 0, -4), A_3(1, 5, 2), A_4(1, 2, -2)$  |
| 6      | $A_1(0, -1, 3), A_2(-2, 2, 5), A_3(5, -6, 1), A_4(3, 0, 4)$   |
| 7      | $A_1(-4, 4, -3), A_2(-1, 0, 2), A_3(2, 1, -4), A_4(1, 2, -5)$ |
| 8      | $A_1(-1, 3, 7), A_2(0, -2, 4), A_3(3, 2, -1), A_4(4, -1, 2)$  |
| 9      | $A_1(0, 1, -3), A_2(3, -5, -3), A_3(3, 1, -5), A_4(4, 2, -1)$ |
| 10     | $A_1(4, 0, 1), A_2(-1, 5, 4), A_3(-2, -3, 8), A_4(1, 2, -7)$  |
| 11     | $A_1(6, 0, -2), A_2(-1, 3, 7), A_3(-3, 1, -5), A_4(1, 2, -1)$ |
| 12     | $A_1(-4, 1, 2), A_2(4, -2, 0), A_3(0, -2, -6), A_4(1, -3, 1)$ |
| 13     | $A_1(5, -3, 7), A_2(3, -2, 6), A_3(0, -5, -4), A_4(-1, 1, 4)$ |
| 14     | $A_1(0, -7, 1), A_2(-4, 0, 2), A_3(-3, 1, 3), A_4(-1, 2, -3)$ |
| 15     | $A_1(1, 0, 5), A_2(-1, 4, -4), A_3(0, -2, 1), A_4(3, 2, -5)$  |
| 16     | $A_1(-3, 0, 1), A_2(1, -4, 0), A_3(0, -5, 1), A_4(-5, 1, -2)$ |
| 17     | $A_1(1, 6, -2), A_2(-1, 3, 4), A_3(3, -6, 2), A_4(1, 2, -3)$  |
| 18     | $A_1(-6, 0, 1), A_2(1, -4, 0), A_3(0, -5, 1), A_4(-1, 1, -5)$ |

|    |   |
|----|---|
| 19 | $A_1(3, -1, -6), A_2(-4, 3, 4), A_3(1, 0, -2), A_4(1, 2, 0)$  |
| 20 | $A_1(3, 1, 4), A_2(-1, -3, 4), A_3(1, 0, 2), A_4(1, 2, -7)$   |
| 21 | $A_1(6, -2, 3), A_2(-1, 0, -5), A_3(5, 3, -1), A_4(3, 4, -4)$ |
| 22 | $A_1(-3, 2, -3), A_2(-1, 3, 2), A_3(5, 1, -2), A_4(1, 2, -7)$ |
| 23 | $A_1(-4, 3, 6), A_2(-3, -2, 4), A_3(3, 4, -1), A_4(4, -2, 2)$ |
| 24 | $A_1(5, 1, -3), A_2(3, -4, -3), A_3(3, 1, 2), A_4(1, 2, -7)$  |
| 25 | $A_1(4, -3, 1), A_2(-1, 3, -4), A_3(2, -3, -2), A_4(1, 2, 0)$ |
| 26 | $A_1(0, -6, 1), A_2(-1, 4, 5), A_3(-2, -3, 4), A_4(1, 0, -3)$ |
| 27 | $A_1(-4, 0, 1), A_2(4, -2, 6), A_3(0, -5, 1), A_4(1, 3, -3)$  |
| 28 | $A_1(-4, -1, 0), A_2(5, 1, 2), A_3(-3, 5, -4), A_4(-1, 2, 4)$ |
| 29 | $A_1(7, -6, 0), A_2(-1, 4, -2), A_3(5, 0, -4), A_4(3, -4, 1)$ |
| 30 | $A_1(1, 6, -3), A_2(-3, 3, -5), A_3(3, 0, 2), A_4(0, 2, 2)$   |

**Завдання 6.** Задано квадратний тричлен  $az^2 + bz + c$  з дійсними коефіцієнтами  $a, b, c$  і комплексною змінною  $z$ . Необхідно:

1) знайти корені  $z_1$  і  $z_2$  заданого квадратного тричлена на множині комплексних чисел (в алгебраїчній формі  $z_1 = x_1 + iy_1$  і  $z_2 = x_2 + iy_2$ ), розкласти тричлен на множники  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$  і перевірити теорему Вієта  $z_1 + z_2 = -b/a$ ;  $z_1 z_2 = c/a$ ;

2) обчислити вираз  $\frac{z_1 + ci}{z_2 + a} + z_1^2(a + bi) - z_2 i$ , виконуючи

дії в алгебраїчній формі;

3) зобразити числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  і  $z_2 = x_2 + iy_2$  на комплексній площині, знайти модуль і аргумент кожного з цих чисел та подати  $z_1$  і  $z_2$  у тригонометричній і показниковій формах;

4) користуючись тригонометричною формою, знайти  $z_1^4$  та  $\sqrt[3]{z_2}$ .

| № в-та | Завдання        | № в-та | Завдання         | № в-та | Завдання         |
|--------|-----------------|--------|------------------|--------|------------------|
| 1      | $z^2 + 6z + 13$ | 11     | $5z^2 + 2z + 10$ | 21     | $10z^2 - 6z + 1$ |
| 2      | $z^2 - 4z + 29$ | 12     | $z^2 + 8z + 25$  | 22     | $z^2 + 4z + 8$   |
| 3      | $z^2 + 4z + 5$  | 13     | $z^2 - 8z + 17$  | 23     | $z^2 - 4z + 8$   |
| 4      | $z^2 + 2z + 10$ | 14     | $4z^2 + 6z + 5$  | 24     | $z^2 + 6z + 10$  |
| 5      | $z^2 - 6z + 13$ | 15     | $z^2 - 2z + 10$  | 25     | $z^2 + 10z + 29$ |
| 6      | $4z^2 + 4z + 5$ | 16     | $5z^2 + 8z + 5$  | 26     | $5z^2 + 6z + 5$  |
| 7      | $8z^2 - 4z + 1$ | 17     | $z^2 - 2z + 2$   | 27     | $5z^2 - 6z + 5$  |
| 8      | $5z^2 + 2z + 2$ | 18     | $z^2 + 2z + 5$   | 28     | $5z^2 + 8z + 4$  |
| 9      | $z^2 - 4z + 13$ | 19     | $2z^2 - 2z + 5$  | 29     | $5z^2 - 8z + 4$  |
| 10     | $z^2 - 6z + 10$ | 20     | $4z^2 + 8z + 5$  | 30     | $10z^2 + 6z + 1$ |

**Завдання 7.** На комплексній площині зобразити область  $D$ , що задана нерівностями.

| № в-та | Завдання   | № в-та | Завдання   |
|--------|--|--------|--|
| 1      | $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z - 2 \leq 0,$<br>$ z - 2i  \leq 1$ | 16     | $ z - 1 - i  \leq 1,$<br>$ z + 1  < 2$             |
| 2      | $ z - 2i  \leq 2, \operatorname{Re} z > 1$                                   | 17     | $ z - i  > 4, \operatorname{Im} z > 1$             |
| 3      | $ z + 2i  \leq 2,  z  \geq 1$  | 18     | $ z - 2  \leq 2,  z + 1  > 1$                      |
| 4      | $2\operatorname{Re} z + 3\operatorname{Im} z - 6 \geq 0,$<br>$ z  < 4$       | 19     | $ z - 2i  < 4,$<br>$\operatorname{Im} z > -1$      |
| 5      | $ z - 2 - 2i  \leq 4,$<br>$\operatorname{Im} z \leq 2$                       | 20     | $ z - 1 + i  \geq 2,$<br>$\operatorname{Re} z < 0$ |

|    |   |    |  |
|----|---|----|--|
| 6  | $ z+2i  < 2, \operatorname{Re} z > -1$                          | 21 | $ z  \geq 1,  \operatorname{Im} z  < 2$                              |
| 7  | $ z  < 4,  \arg z  \leq \pi/4$                                  | 22 | $ z  \geq 2,  \arg z  \leq \pi/4$                                    |
| 8  | $ z-2i  \leq 3,$<br>$-\pi/4 < \arg z \leq \pi/3$                | 23 | $ z+2i  > 2,$<br>$-3\pi/4 < \arg z \leq -\pi/4$                      |
| 9  | $ z  \geq 2,$<br>$-3\pi/4 \leq \arg z < -\pi/2$                 | 24 | $ z-1  \geq 2,$<br>$-\pi < \arg z < -\pi/2$                          |
| 10 | $\operatorname{Re} z > -4,$<br>$-\pi/4 \leq \arg z \leq 3\pi/4$ | 25 | $\operatorname{Im} z < 2,$<br>$\pi/4 \leq \arg z \leq 3\pi/4$        |
| 11 | $\operatorname{Re} z \leq -1,$<br>$-3\pi/4 \leq \arg z < 0$     | 26 | $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z + 1 > 0,$<br>$ z  \leq 1$ |
| 12 | $ z-1+i  \leq 3,$<br>$0 < \arg z \leq 3\pi/4$                   | 27 | $ z-1-i  \leq 2,$<br>$3\pi/4 < \arg z < \pi$                         |
| 13 | $\operatorname{Im} z \geq 2,$<br>$0 < \arg z \leq 3\pi/4$       | 28 | $\operatorname{Im} z \leq -1,$<br>$-\pi < \arg z < 3\pi/4$           |
| 14 | $ \operatorname{Re} z  \leq 3,  \operatorname{Im} z  \leq 2$    | 29 | $ \operatorname{Re} z  > 1,  \operatorname{Im} z  \leq 2$            |
| 15 | $ \operatorname{Re} z  \leq 2,  \operatorname{Im} z  > 2$       | 30 | $ z  \geq 1,  \operatorname{Re} z  < 2$                              |

**Завдання 8.** Обчислити значення заданої функції  $w = f(z)$  у зазначеній точці  $z_0$ .

| № в-та | Завдання  | № в-та | Завдання   |
|--------|---|--------|--|
| 1      | $w = i \cos(\pi \bar{z}),$<br>$z_0 = -3 + 2i$   | 16     | $w = (\bar{z} - 2i) \operatorname{Ln} z,$<br>$z_0 = 1 - i$ |
| 2      | $w = i \operatorname{Ln} z, z_0 = \sqrt{3} + i$ | 17     | $w = i(-1)^z, z_0 = 3 - i$                                 |

|    |  |    |   |
|----|--|----|---|
| 3  | $w = z \operatorname{tg}(i\pi z),$<br>$z_0 = -1 - i$       | 18 | $w = \sin(\pi z^2),$<br>$z_0 = 1 - i$                     |
| 4  | $w = z \sin(\pi z),$<br>$z_0 = 1 - i$                      | 19 | $w = (3 - 2i) \sin z,$<br>$z_0 = \pi + \pi i$             |
| 5  | $w = \bar{z} \cos(\pi z),$<br>$z_0 = -2 + i$               | 20 | $w = i \sin(5\pi/z),$<br>$z_0 = -3 + 4i$                  |
| 6  | $w = i \cos(\pi z),$<br>$z_0 = -3 + 4i$                    | 21 | $w = (1 - 2i) \sin(iz),$<br>$z_0 = \pi + \pi i$           |
| 7  | $w = z \cos(5\pi/z),$<br>$z_0 = -3 - 4i$                   | 22 | $w = i \cos 2z,$<br>$z_0 = \pi - \pi i$                   |
| 8  | $w = i(\sqrt{3} - i)^z,$<br>$z_0 = -1 - 4i$                | 23 | $w = z \operatorname{Ln}(z + i),$<br>$z_0 = -2 + i$       |
| 9  | $w = z \operatorname{Ln}(iz),$<br>$z_0 = 2 + 2i$           | 24 | $w = (1 - 2i) \operatorname{tg}(\pi z),$<br>$z_0 = 2 - i$ |
| 10 | $w = z(-1 - \sqrt{3}i)^z,$<br>$z_0 = -2i$                  | 25 | $w = i \cos(5\pi i/z),$<br>$z_0 = 3 - 4i$                 |
| 11 | $w = \operatorname{ctg} \pi z, z_0 = 2 - 3i$               | 26 | $w = i \operatorname{tg} z, z_0 = 2\pi - \pi i$           |
| 12 | $w = i \operatorname{ctg}(iz),$<br>$z_0 = \pi + \pi i$     | 27 | $w = \sin^2 z, z_0 = \pi - \pi i$                         |
| 13 | $w = \cos(\pi z^2),$<br>$z_0 = -1 + i$                     | 28 | $w = (-1 + \sqrt{3}i)^z,$<br>$z_0 = 1 + i$                |
| 14 | $w = (1 - z) \operatorname{tg}(i\pi z),$<br>$z_0 = 1 - 2i$ | 29 | $w = z(\sqrt{3} + i)^z,$<br>$z_0 = 1 - i$                 |
| 15 | $w = i(z - 2i)^{2-2i},$<br>$z_0 = \sqrt{3} + 3i$           | 30 | $w = z \sin(i\pi \bar{z}),$<br>$z_0 = 2 - 2i$             |

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 383 с.
2. Бізюк В.В., Яқунін А.В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 300 с.
3. Вища математика. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчик, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1. – М.: Наука, 1997. – 304 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.
7. Колосов А.І., Яқунін А.В., Наземцева Л.В. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина перша. – Харків: ХНАМГ, 2006. – 144 с.
8. Колосов А.І., Яқунін А.В., Наземцева Л.В. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина друга. – Харків: ХНАМГ, 2006. – 110 с.
9. Комплексний аналіз / А.А. Гольдберг, М.М. Шеремета, М.В. Заболоцький, О.Б. Скасків. – Львів: Афіша, 2002. – 208 с.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
11. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 495 с.
12. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. Т.1 – М.: Наука, 1985. – 430 с.
14. Станішевський С.О. Вища математика.– Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.
15. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.



## З М І С Т

|  |    |
|--|----|
| Передмова . . . . .  | 3  |
| Змістовий модуль 1. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ<br>НА ПЛОЩИНІ. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО<br>АНАЛІЗУ . . . . .  | 4  |
| 1.1. Декартова прямокутна система координат<br>на площині . . . . .  | 4  |
| 1.1.1. Координатна пряма. Числові проміжки.<br>Модуль дійсного числа . . . . .   | 4  |
| 1.1.2. Декартова прямокутна система координат<br>на площині. Відстань між двома точками.<br>Ділення відрізка у заданому відношенні . . . . . | 6  |
| 1.2. Пряма на площині.<br>Основні типи рівняння прямої . . . . .   | 9  |
| 1.2.1. Рівняння з двома змінними як рівняння лінії . . . . .   | 9  |
| 1.2.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом . . . . .  | 11 |
| 1.2.3. Рівняння прямої, що проходить через задану<br>точку в заданому напрямку. Пучок прямих . . . . .                                       | 12 |
| 1.2.4. Рівняння прямої, що проходить<br>через дві задані точки . . . . .   | 12 |
| 1.2.5. Загальне рівняння прямої<br>та його окремі випадки . . . . .  | 13 |
| 1.2.6. Рівняння прямої у відрізках на осях . . . . .   | 14 |
| 1.2.7. Кут між прямими. Умови паралельності<br>та перпендикулярності прямих . . . . .  | 15 |
| 1.2.8. Відстань від точки до прямої . . . . .  | 17 |
| 1.3. Лінії другого порядку . . . . .   | 18 |
| 1.3.1. Загальне рівняння лінії другого порядку . . . . .   | 18 |
| 1.3.2. Коло . . . . .  | 19 |
| 1.3.3. Еліпс . . . . .   | 20 |
| 1.3.4. Гіпербола . . . . .   | 22 |
| 1.3.5. Парабола . . . . .  | 25 |
| 1.3.6. Лінії другого порядку як конічні перерізи<br>та їх оптична властивість . . . . .  | 27 |
| 1.4. Полярна система координат.<br>Параметрично задані лінії . . . . .   | 28 |
| 1.4.1. Полярні координати . . . . .  | 28 |

|  |      |
|--|------|
| 1.4.2. Зв'язок між полярними<br>і прямокутними координатами . . . . .  | . 29 |
| 1.4.3. Рівняння ліній другого порядку<br>в полярній системі координат . . . . .  | . 31 |
| 1.4.4. Рівняння деяких ліній у параметричній формі . . . . .   | . 32 |
| 1.5. Сталі та змінні величини . . . . .  | . 34 |
| 1.5.1. Поняття про сталі та змінні величини . . . . .  | . 34 |
| 1.5.2. Класифікація змінних величин . . . . .  | . 35 |
| 1.6. Нескінченно малі та нескінченно великі величини . . . . .   | . 37 |
| 1.6.1. Нескінченно малі величини . . . . .   | . 37 |
| 1.6.2. Властивості нескінченно малих величин . . . . .   | . 38 |
| 1.6.3. Нескінченно великі величини . . . . .   | . 40 |
| 1.6.4. Зв'язок нескінченно малих<br>і нескінченно великих . . . . .  | . 41 |
| 1.7. Границя змінної величини . . . . .  | . 42 |
| 1.7.1. Поняття про границю змінної величини . . . . .  | . 42 |
| 1.7.2. Властивості границь . . . . .   | . 43 |
| 1.7.3. Розкриття невизначеності виду $0/0$<br>для многочленів . . . . .  | . 47 |
| 1.7.4. Розкриття невизначеності виду $\infty/\infty$<br>для многочленів . . . . .  | . 48 |
| 1.7.5. Розкриття невизначеності виду $0/0$<br>для ірраціональних виразів . . . . .   | . 49 |
| 1.7.6. Ознаки існування границі . . . . .  | . 50 |
| 1.7.7. Перша стандартна границя.<br>Розкриття невизначеності виду $0/0$<br>для тригонометричних виразів . . . . .                            | . 51 |
| 1.7.8. Друга стандартна границя.<br>Розкриття невизначеності виду $1^\infty$ . . . . .   | . 54 |
| 1.7.9. Порівняння нескінченно малих.<br>Еквівалентні нескінченно малі . . . . .  | . 57 |
| 1.8. Поняття функції. Способи задання функції.<br>Основні елементарні функції та їх графіки.<br>Складена функція. Обернена функція . . . . . | . 60 |
| 1.8.1. Загальне поняття функції.<br>Області визначення та значень.<br>Графік функції. Способи задання функції . . . . .                      | . 60 |

|  |      |
|--|------|
| 1.8.2. Основні елементарні функції . . . . .   | . 62 |
| 1.8.3. Класифікація функцій за їхніми властивостями . . . . .                                      | . 66 |
| 1.8.4. Класифікація функцій за їхньою будовою . . . . .  | . 68 |
| 1.9. Неперервність функцій . . . . .   | . 70 |
| 1.9.1. Приріст аргументу та приріст функції.<br>Поняття неперервності функції в точці . . . . .    | . 70 |
| 1.9.2. Властивості функцій, які неперервні в точці . . . . .                                       | . 72 |
| 1.9.3. Односторонні границі.<br>Одностороння неперервність . . . . .                               | . 73 |
| 1.9.4. Властивості функцій, неперервних на відрізку . . . . .                                      | . 74 |
| 1.9.5. Розривні функції.<br>Точки розриву та їх класифікація . . . . .                             | . 75 |
| 1.10. Контрольні запитання . . . . .   | . 78 |
| 1.11. Індивідуальні завдання для самостійної роботи . . . . .                                      | . 81 |
| <br>Змістовий модуль 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ<br>ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ . . . . .                |      |
| 2.1. Похідна та диференціал . . . . .  | . 98 |
| 2.1.1. Похідна. Її фізичний та геометричний зміст . . . . .  | . 98 |
| 2.1.2. Правила диференціювання.<br>Похідна складеної та оберненої функцій . . . . .                | 101  |
| 2.1.3. Основні формули диференціювання . . . . .   | 103  |
| 2.1.4. Диференціювання неявно заданої функції.<br>Правило логарифмічного диференціювання . . . . . | 107  |
| 2.1.5. Похідна параметрично заданої функції . . . . .  | 109  |
| 2.1.6. Похідні вищих порядків.<br>Механічний зміст другої похідної . . . . .                       | 110  |
| 2.1.7. Диференціал функції та його властивості.<br>Диференціали вищих порядків . . . . .           | 113  |
| 2.2. Основні теореми диференціального числення . . . . .   | 118  |
| 2.2.1. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші . . . . .   | 118  |
| 2.2.2. Правило Лопітала розкриття невизначеностей . . . . .  | 120  |
| 2.2.3. Формула Тейлора . . . . .   | 127  |
| 2.3. Застосування похідних для дослідження функцій . . . . .                                       | 129  |
| 2.3.1. Умови зростання та спадання функції . . . . .   | 130  |
| 2.3.2. Максимум і мінімум функції.<br>Необхідні умови екстремуму . . . . .                         | 130  |
| 2.3.3. Достатні умови екстремуму функції . . . . .   | 133  |

|   |     |
|---|-----|
| 2.3.4. Найменше та найбільше значення функції на відрізку . . . . .   | 137 |
| 2.3.5. Застосування теорії екстремуму до розв'язування прикладних задач . . . . .                                       | 138 |
| 2.3.6. Оупуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину . . . . .   | 139 |
| 2.3.7. Асимптоти графіка функції . . . . .  | 142 |
| 2.3.8. Загальна схема дослідження функції та побудови графіка . . . . .   | 147 |
| 2.4. Контрольні запитання . . . . .   | 151 |
| 2.5. Індивідуальні завдання для самостійної роботи . . . . .  | 153 |
| <br>Змістовий модуль 3. ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. ПЛОЩИНА ТА ПРЯМА У ПРОСТОРИ. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ФУНКЦІЇ . . . . . |     |
| 3.1. Визначники та їх властивості . . . . .   | 167 |
| 3.1.1. Означення визначника. Мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника . . . . .                               | 167 |
| 3.1.2. Обчислення визначника . . . . .  | 168 |
| 3.1.3. Основні властивості визначника . . . . .   | 171 |
| 3.1.4. Зведення визначника до східчастого вигляду . . . . .   | 172 |
| 3.2. Матриці та операції над ними . . . . .   | 174 |
| 3.2.1. Означення матриці. Рівність матриць. Види матриць. Визначник квадратної матриці. Норма матриці . . . . .         | 174 |
| 3.2.2. Операції над матрицями . . . . .   | 177 |
| 3.2.3. Обернена матриця та її обчислення . . . . .  | 179 |
| 3.2.4. Мінори матриці. Ранг матриці . . . . .   | 181 |
| 3.2.5. Методи обчислення рангу матриці . . . . .  | 181 |
| 3.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь і методи їх розв'язування . . . . .  | 185 |
| 3.3.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття . . . . .   | 185 |
| 3.3.2. Розв'язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці . . . . .          | 189 |
| 3.3.3. Розв'язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера . . . . .                         | 191 |
| 3.3.4. Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса . . . . .                                     | 193 |

|  |     |
|--|-----|
| 3.3.5. Однорідна квадратна система<br>лінійних алгебраїчних рівнянь . . . . .  | 199 |
| 3.3.6. Розв'язування лінійної системи і обернення<br>матриці за допомогою розбиття на блоки . . . . .  | 202 |
| 3.4. Вектори й операції над ними . . . . .   | 205 |
| 3.4.1. Скалярні та векторні величини. Основні поняття . . . . .  | 205 |
| 3.4.2. Лінійні операції над векторами . . . . .  | 208 |
| 3.4.3. Проекція вектора. Координати вектора. Рівність<br>векторів у координатній формі . . . . .   | 209 |
| 3.4.4. Лінійні операції над векторами у координатній<br>формі. Умова колінеарності векторів . . . . .  | 212 |
| 3.4.5. Поділ відрізка у заданому відношенні . . . . .  | 214 |
| 3.4.6. Скалярний добуток векторів.<br>Умова перпендикулярності двох векторів . . . . .   | 215 |
| 3.4.7. Векторний добуток векторів. Площа трикутника . . . . .  | 217 |
| 3.4.8. Мішаний добуток трьох векторів. Об'єм<br>піраміди. Умова компланарності трьох векторів.<br>Розклад вектора за довільним базисом . . . . . | 220 |
| 3.5. Лінійні простори та відображення.<br>Власні вектори і власні числа . . . . .  | 225 |
| 3.5.1. Поняття про $n$ -вимірний лінійний простір . . . . .  | 225 |
| 3.5.2. Лінійні відображення . . . . .  | 229 |
| 3.5.3. Перетворення прямокутних координат<br>на площині. Паралельне перенесення і поворот . . . . .  | 233 |
| 3.5.4. Власні вектори та власні числа<br>квадратної матриці . . . . .  | 238 |
| 3.5.5. Матричні многочлени . . . . .   | 242 |
| 3.5.6. Розв'язування системи лінійних алгебраїчних<br>рівнянь методом простих ітерацій . . . . .   | 243 |
| 3.6. Площина та пряма у просторі . . . . .   | 244 |
| 3.6.1. Рівняння площини, що проходить через задану<br>точку перпендикулярно до заданого вектора . . . . .  | 244 |
| 3.6.2. Загальне рівняння площини.<br>Дослідження неповного загального рівняння . . . . .   | 245 |
| 3.6.3. Рівняння площини, що проходить<br>через три задані точки . . . . .  | 248 |
| 3.6.4. Рівняння площини у відрізках на осях . . . . .  | 249 |
| 3.6.5. Кут між площинами. Умови паралельності<br>та перпендикулярності двох площин . . . . .   | 251 |

|   |     |
|---|-----|
| 3.6.6. Умова перетину трьох площин у одній точці . . .  | 252 |
| 3.6.7. Відстань від точки до площини . . . . .  | 252 |
| 3.6.8. Рівняння прямої, що проходить<br>через дану точку паралельно даному вектору<br>(канонічні рівняння прямої) . . . . . | 253 |
| 3.6.9. Параметричні рівняння прямої . . . . .   | 254 |
| 3.6.10. Рівняння прямої, що проходить<br>через дві дані точки . . . . .   | 255 |
| 3.6.11. Пряма як перетин двох площин.<br>Загальні рівняння прямої . . . . .   | 255 |
| 3.6.12. Кут між двома прямими. Умови<br>перпендикулярності та паралельності двох прямих . . .                               | 256 |
| 3.6.13. Умова перетину двох непаралельних прямих.<br>Відстань між мимобіжними прямими . . . . .                             | 257 |
| 3.6.14. Кут між прямою та площиною.<br>Умови перпендикулярності та паралельності<br>прямої та площини . . . . .             | 259 |
| 3.6.15. Перетин прямої з площиною . . . . .   | 260 |
| 3.6.16. Відстань від точки до прямої . . . . .  | 261 |
| 3.7. Комплексні числа та функції . . . . .  | 264 |
| 3.7.1. Поняття комплексного числа . . . . .   | 264 |
| 3.7.2. Дії над комплексними числами<br>в алгебраїчній формі . . . . .   | 265 |
| 3.7.3. Геометрична інтерпретація. Модуль і аргумент<br>комплексного числа . . . . .   | 266 |
| 3.7.4. Тригонометрична і показникова форми<br>комплексного числа . . . . .  | 268 |
| 3.7.5. Дії над комплексними числами<br>в тригонометричній і показниковій формах . . . . .                                   | 270 |
| 3.7.6. Многочлени. Розкладання на множники.<br>Розв'язування квадратних рівнянь . . . . .                                   | 273 |
| 3.7.7. Комплексні функції дійсної змінної.<br>Лнії на комплексній площині . . . . .   | 275 |
| 3.7.8. Поняття функції комплексної змінної.<br>Деякі елементарні функції комплексної змінної . . . . .                      | 276 |
| 3.8. Контрольні запитання . . . . .   | 280 |
| 3.9. Індивідуальні завдання для самостійної роботи . . .  | 283 |
| Список літератури . . . . .   | 301 |

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**В И Щ А М А Т Е М А Т И К А**  
для електротехніків  
у трьох модулях

Навчальний посібник

Модуль 1

**Станішевський** Степан Олександрович,  
**Якунін** Анатолій Вікторович,  
**Ситникова** Валентина Семенівна

Аналітична геометрія на площині. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. Площина та пряма у просторі. Комплексні числа та функції

Відповідальний за випуск *М.Й. Кадець*  
Редактор *М.З. Аляб'єв*

|                           |                     |
|---------------------------|---------------------|
| Підп. до друку 28.10.2008 | Формат 60x84 1/16   |
| Друк на ризографі         | Ум. друк. арк. 16,0 |
| Тираж 500 пр.             | Зам. №              |

Видавець і виготовлювач:  
Харківська національна академія міського господарства,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002  
Електронна адреса: [rectorat@ksame.kharkov.ua](mailto:rectorat@ksame.kharkov.ua)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №731  
від 19.12.2001