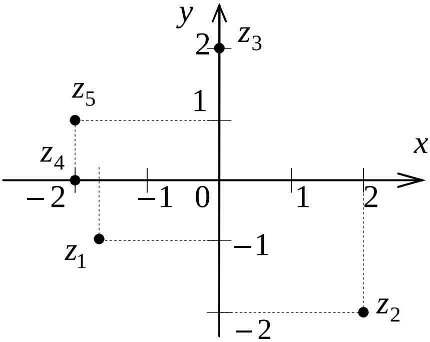

Рис. 111

$\underline{z_5 = -2 + i}$:

$x_5 = -2; \quad y_5 = 1;$

$|z_5| = \sqrt{x_5^2 + y_5^2} = \sqrt{5}$;

$\arg z_5 = \operatorname{arctg}(y_5/x_5) + \pi$,

$x_5 < 0, y_5 \geq 0$;

$\arg z_5 = \operatorname{arctg}(-1/2) +$

$+ \pi = \pi - \operatorname{arctg}(1/2)$;

$z_5 = \sqrt{5}\, e^{i(\pi - \operatorname{arctg}(1/2))}$;

$$z_5 = \sqrt{5}\left(\cos(\pi - \operatorname{arctg}(1/2)) + i \sin(\pi - \operatorname{arctg}(1/2))\right). \quad \blacksquare$$

3.7.5. Дії над комплексними числами в тригонометричній і показниковій формах

Якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ – два комплексні числа в тригонометричній формі, то їх добуток:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 +$$

$$+ i^2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Добутком двох комплексних чисел z_1 і z_2 є комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів, а аргумент – сумі аргументів співмножників. Отже,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i};$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \qquad Arg(z_1 z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2 .$$

Якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ – два комплексні числа в тригонометричній формі, причому z_2 відмінне від нуля $z_2 \neq 0$, то їх частка:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=(r_1/r_2)\cdot(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Часткою z_1/z_2 двох комплексних чисел z_1 і z_2, де дільник $z_2\neq 0$, є комплексне число, модуль якого дорівнює частці модулів діленого z_1 і дільника z_2, а аргумент – різниці аргументів діленого z_1 і дільника z_2. Отже,

$$\frac{z_1}{z_2}==\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2));\ \ \frac{z_1}{z_2}==\frac{r_1}{r_2}e^{(\varphi_1-\varphi_2)i};$$

$$|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|;\qquad Arg\,(z_1/z_2)=Arg\,z_1-Arg\,z_2.$$

Зауваження 1. Множення комплексних чисел можна розглядати як ще один вид (поряд зі скалярним і векторним) добутку плоских векторів. Вектор, що зображує добуток комплексних чисел z_1 і z_2, дістаємо поворотом вектора z_1 проти годинникової стрілки на кут, що дорівнює φ_2, і розтягом його в $|z_2|$ разів (для випадку $|z_2|>1|$ див. рис. 112). Вектор, що зображує частку двох комплексних чисел z_1 і z_2, дістаємо поворотом вектора z_1 за годинниковою стрілкою на кут, що дорівнює φ_2, і стиском його в $|z_2|$ разів (для випадку $|z_2|>1|$ див. рис. 113).

Натуральним степенем z^n комплексного числа z називається комплексне число, отримане множенням числа z самого на себе n раз, де n – натуральне число.

Із правила множення комплексних чисел у тригонометричній формі випливає ***перша формула Муавра***:

$$z^n=(r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Коренем n***-го степеня*** $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа z називається таке комплексне число, n-й степінь якого дорівнює z:

Очевидно, що корінь n-го степеня з нуля дорівнює нулю.

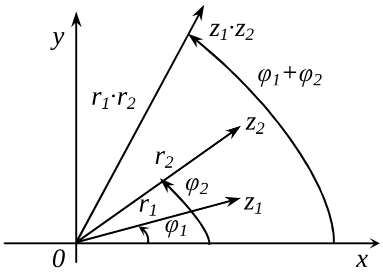

Рис. 112

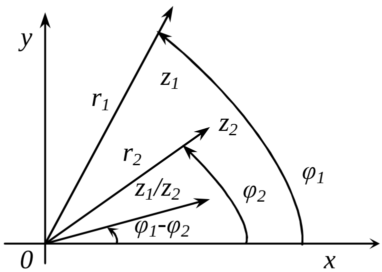

Рис. 113

Якщо комплексне число z відмінне від нуля $z \neq 0$, то корінь n-го степеня $\sqrt[n]{z}$ має рівно n різних значень, що визначаються за ***другою формулою Муавра***:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

де $k = 0,1,2,\ldots,n-1$; $\sqrt[n]{r}$ – арифметичне значення кореня з додатного числа.

На комплексній площині всі корені n-го степеня $\sqrt[n]{z}$ з комплексного числа $z \neq 0$ зображуються вершинами правильного n-кутника, вписаного в коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{r}$.

<u>Зауваження 2</u>. Хоча б один корінь n-го степеня з додатного дійсного числа буде дійсним.

<u>Приклад 1</u>. Піднести до степеня: $\left(\sqrt{3}+i\right)^{10}$.

□ Запишемо число $\sqrt{3}+i$ в тригонометричній формі

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)\right).$$

За першою формулою Муавра

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{10} = \left(2\left(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)\right)\right)^{10} =$$

$$= 2^{10}\left(\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)\right) = 2^{10}\left(\cos(\pi + 2\pi/3) + \right.$$

$$\left. + i\sin(\pi + 2\pi/3)\right) = 2^{10}\left(-\cos(2\pi/3) - i\sin(2\pi/3)\right) =$$

$$= 2^{10}\left(1/2 - i \cdot \sqrt{3}/2\right) = 2^9 - i \cdot 2^9\sqrt{3}\,. \quad ■$$

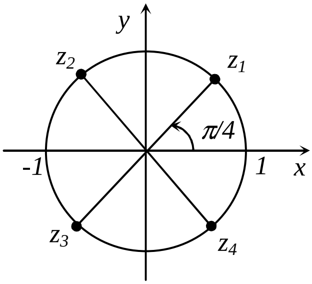

Рис. 114

Приклад 2. Знайти всі значення кореня четвертого степеня $\sqrt[4]{-1}$.

□ Запишемо підкореневе число -1 у тригонометричній формі

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$$

(див. рис. 114).

За другою формулою Муавра

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}(\cos(\pi + 2\pi k)/4 +$$

$$+ i\sin(\pi + 2\pi k)/4), \text{ де } k = 0,1,2,3.$$

Тобто, коренями є комплексні числа:

$$z_1 = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(1+i)\,;$$

$$z_2 = \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(-1+i)\,;$$

$$z_3 = \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(-1-i)\,;$$

$$z_4 = \cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4) = \left(\sqrt{2}/2\right)(1-i),$$

які зображено на рис. 114. ■

3.7.6. Многочлени. Розкладання на множники. Розв'язування квадратних рівнянь

Функція комплексної змінної

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

називається ***многочленом*** n***-го степеня*** стандартного вигляду.

Тут z – комплексний аргумент: n – степінь многочлена; a_0, a_1, …, a_n – сталі комплексні ***коефіцієнти***; a_0 називається ***старшим коефіцієнтом***, причому $a_0 \neq 0$; a_n називається

вільним членом.

<u>Теорема 1 (теорема Безу)</u>. *При діленні многочлена* $P_n(z)$ *на різницю* $z-a$ *остача від ділення дорівнює* $P_n(a)$.

□ $P_n(z)=Q_{n-1}(z)\cdot(z-a)+R$. Нехай $z\to a$, тоді $P_n(a)=R$. ■

<u>Наслідок 1</u>. *Якщо* a *– корінь многочлена* $P_n(z)$, *то цей многочлен* $P_n(z)$ *ділиться без остачі на різницю* $z-a$, *тобто розкладається на множники*

$$P_n(z)=Q_{n-1}(z)\cdot(z-a),$$

де частка $Q_{n-1}(z)$ *– многочлен на одиницю меншого степеня.*

<u>Теорема 2 (основна теорема алгебри)</u>. *Будь-який многочлен* $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n\geq 1$ *має хоча б один корінь (дійсний чи комплексний).*

<u>Наслідок 2</u>. *Будь-який многочлен* $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n\geq 1$ *має рівно* n *коренів, серед яких можуть бути однакові.*

<u>Наслідок 3</u>. *Будь-який многочлен* $P_n(z)$ *ненульового степеня* $n\geq 1$ *розкладається на множники у вигляді:*

$$P_n(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m},$$

де a_0 – старший коефіцієнт; $z_1, z_2, \ldots, z_m$ – різні (дійсні чи комплексні) корені; $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – відповідні кратності цих коренів, причому $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$.

Корені квадратного рівняння $az^2+bz+c=0$ $(a\neq 0)$ з комплексними коефіцієнтами a, b, c знаходяться за відомими формулами:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}; \quad D=b^2-4ac,$$

де $\sqrt{D}$ – одне зі значень квадратного кореня з дискримінанта D.

На множині комплексних чисел для коренів квадратного рівняння залишається справедливою теорема Вієта:

$$z_1 + z_2 = -b/a, \quad z_1 z_2 = c/a.$$

Приклад. Розв'язати квадратне рівняння $4z^2 - 8z + 5 = 0$.

□ $D = 8^2 - 4\cdot 4\cdot 5 = -16$; $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$;

$$z_{1,2} = \frac{8 \pm 4i}{2\cdot 4} = 1 \pm \frac{1}{2} i. \quad ■$$

3.7.7. Комплексні функції дійсної змінної. Лінії на комплексній площині

Комплексна функція z ***дійсної змінної*** t кожному значенню t з деякої непорожньої множини D дійсних чисел за певним законом ставить у відповідність одне єдине значення комплексної змінної z з деякої області E комплексної площини. Комплексна функція $z = z(t)$ дійсної змінної t визначається рівністю $z = x(t) + i\,y(t)$, $t \in D$, де $x(t)$ та $y(t)$ – задані дійсні функції (відповідно дійсна і уявна частини змінної $z = z(t)$).

Функція $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$ в ***комплексно-параметричній формі*** задає деяку плоску лінію L. Параметричні рівняння цієї лінії: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$.

Комплексній змінній $z = z(t)$ відповідає вектор-функція.

Для знаходження похідної $z' = z'(t)$ комплексної функції $z = x(t) + i\,y(t)$ дійсної змінної треба продиференціювати окремо дійсну $x(t)$ та уявну $y(t)$ частини: $z' = x'(t) + i\,y'(t)$.

Приклад 1. Визначити вид і зобразити на комплексній площині лінію, задану рівнянням $z = 3\cos t + 3i\sin t$.

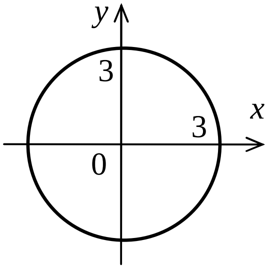

Рис. 115

□ Щоб визначити вид лінії, підставимо в її рівняння $z = x + i\,y$ і зведемо його до відповідного стандартного вигляду. Потім побудуємо цю лінію.

$$x + iy = 3\cos t + 3i\sin t\,; \qquad \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \; -$$

коло радіуса $r = 3$ з центром у початку координат, задане в параметричній формі (рис. 115). Його можна задати неявно рівнянням $|\,z\,| = 3$. Канонічне рівняння кола $x^2 + y^2 = 9$. ■

<u>Приклад 2</u>. Знайти похідну функції $z = 4\cos^2 t + i\,e^{8t}$ в точці z_0, що відповідає значенню параметра $t_0 = \pi/4$.

$$□ \quad z' = \left(4\cos^2 t + i\,e^{8t}\right)' = -8\cos t\cdot\sin t + 8i\,e^{8t} = -4\sin 2t +$$
$$+ 8i\,e^{8t}\,; \quad z'(\pi/4) = -4\sin(\pi/2) + 8i\,e^{2\pi} = -4 + 8i\,e^{2\pi}\,. \text{ ■}$$

3.7.8. Поняття функції комплексної змінної. Деякі елементарні функції комплексної змінної

Для геометричного тлумачення поняття функції комплексної змінної розглядаються два екземпляри площини комплексних чисел: ***z-площина*** $z = x + i\,y$ і ***w-площина*** $w = u + i\,v$.

Нехай на z-площині задана довільна множина точок D. Якщо кожній точці $z = x + i\,y$ множини D за певним законом f поставлено у відповідність одну точку $w = u + i\,v$ (або декілька точок) w-площини, то говорять, що на множині D задано однозначну (або багатозначну) ***комплексну функцію комплексної змінної*** $w = f(z)$. D називається ***множиною визначення*** функції $w = f(z)$, а множина E усіх значень w, що приймає функція, називається ***множиною значень*** цієї функції.

Степенева функція з натуральним показником n має вигляд $w = z^n$, де $n \in N$. Степенева функція $w = z^n$ визначена на всій комплексній площині, однозначна, неперервна. Похідна $w' = nz^{n-1}$ всюди неперервна.

Коренева функція має вигляд $w = z^p$, де $p = m/n$ – нескоротний правильний дріб: $0 < m/n < 1$, $m, n \in N$.

Коренева функція (радикал) $w = z^p$ визначена на всій комплексній площині і багатозначна. Похідна $w' = p\,z^{p-1}$ всюди визначена і неперервна, крім $z = 0$.

Показникова (***експоненціальна***) ***функція*** комплексної змінної визначається рівністю $w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$. На дійсній осі $y = 0$ ця функція збігається з дійсною експонентою e^x. Зберігається основне правило: при множенні експонент їх показники додаються $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Справедливі також співвідношення: $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$; $\left(e^z\right)^n = e^{nz}$.

Модуль комплексної експоненти $\left|e^z\right| = e^x$, а аргумент $Arg\,e^z = y + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Отже, ця функція є періодичною з уявним періодом $2\pi i$: $e^{z+2\pi ni} = e^z$.

Похідна комплексної експоненти $w = e^z$ дорівнює їй самій і всюди відмінна від нуля $w' = e^z \neq 0$.

Тригонометричні та гіперболічні функції комплексного аргументу визначаються за допомогою ***основної формули Ейлера*** $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ і узагальнюють відповідні дійсні функції:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};\ tg\,z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})};$$

$$ctg\,z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}};\ \ sh\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2};\ \ ch\,z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$

$$th\,z=\frac{sh\,z}{ch\,z}=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}};\quad cth\,z=\frac{ch\,z}{sh\,z}=\frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}}.$$

Оскільки комплексна експонента e^z є періодичною з уявним періодом $2\pi i$, то тригонометричні функції $\sin z$ і $\cos z$ також періодичні на всій комплексній площині з дійсним періодом 2π, а $tg\,z$ і $ctg\,z$ – з дійсним періодом π:

$$\sin z=\sin(z+2\pi);\qquad \cos z=\cos(z+2\pi);$$

$$tg\,z=tg\,(z+\pi);\qquad ctg\,z=ctg\,(z+\pi).$$

Причому на відміну від дійсних функцій, на всій комплексній площині $\sin z$ і $\cos z$ є необмеженими:

$$|\cos z|\to+\infty,\quad |\sin z|\to+\infty\quad \text{при}\quad y\to\pm\infty.$$

Гіперболічні функції $sh\,z$ і $ch\,z$ на всій комплексній площині є періодичними з уявним періодом $2\pi i$, а $th\,z$ і $cth\,z$ – з уявним періодом πi:

$$sh\,z=sh(z+2\pi i);\qquad ch\,z=ch(z+2\pi i);$$

$$th\,z=th(z+\pi i);\qquad cthz=cth(z+\pi i).$$

Зауваження 1. Для тригонометричних і гіперболічних функцій комплексного аргументу залишаються справедливими основні тотожності (синус і косинус суми, різниці та ін.), а також формули диференціювання.

Допоміжні формули Ейлера

$$sh\,z=-i\sin iz;\quad ch\,z=\cos iz;\quad th\,z=-i\,tg\,iz;\quad cth\,z=i\,ctg\,iz$$

дають зв’язок гіперболічних функцій з тригонометричними.

Приклад. Знайти $\cos(3+4i)$.

□ $$\cos(3+4i)=\frac{e^{i(3+4i)}+e^{-i(3+4i)}}{2}=\frac{e^{-4}e^{3i}+e^4e^{-3i}}{2}=$$

$$=\left(e^{-4}(\cos 3+i\sin 3)+e^4(\cos 3-i\sin 3)\right)/2=$$

$$=\left(\cos 3\cdot(e^{-4}+e^4)-i\sin 3\cdot(e^4-e^{-4})\right)/2=$$

$$=\frac{e^4+e^{-4}}{2}\cos 3 - i\frac{e^4-e^{-4}}{2}\sin 3 = ch4\cos 3 - i\,sh4\sin 3 . \ \blacksquare$$

Логарифмічна функція $w = Ln\,z$ комплексної змінної визначається як обернена до показникової:

Комплексне число $w = Ln\,z$ називається ***натуральним логарифмом*** ненульового комплексного числа z, якщо виконується рівність $e^w = z$. Звідси $Ln\,z = \ln|z| + i\,Arg\,z$.

Функція $w = Ln\,z$ є нескінченнозначною і визначена на всій комплексній площині, за винятком початку координат $z = 0$. Якщо для аргументу $z \neq 0$ обмежитися його головним значенням $-\pi < \arg z \le \pi$, то одержимо ***головне значення логарифму*** $\ln z = \ln|z| + i\arg z$.

Зауваження 2. Якщо число z – дійсне додатне, тоді головне значення аргументу $\arg z = 0$ і головне значення логарифму співпадає зі звичайним натуральним логарифмом $\ln z = \ln|z|$.

Зауваження 3. На логарифм комплексної змінної поширюються основні властивості звичайного логарифму дійсного аргументу: $Ln(z_1 z_2) = Ln\,z_1 + Ln\,z_2$; $Ln(z_1/z_2) = Ln\,z_1 - Ln\,z_2$; $Ln(z)^n = n\,Ln\,z$.

Зауваження 4. За допомогою логарифмічної функції визначаються:

а) ***загальна степенева функція*** $w = z^a = e^{a\,Ln\,z}$, де показник $a = \alpha + i\beta$ – довільне комплексне число. Ця функція багатозначна, її ***головне значення*** $w = e^{a\ln z}$.

б) ***загальна показникова функція*** $w = a^z = e^{z\,Ln\,a}$, де основа $a = \alpha + i\beta \neq 0$ – довільне ненульове комплексне число. Ця функція багатозначна, її ***головне значення*** $w = e^{z\ln a}$.

в) ***показниково-степенева функція*** $w = z_1^{z_2} = e^{z_2\,Ln\,z_1}$, де основа відмінна від нуля $z_1 \neq 0$. Ця функція нескінченнозначна, її ***головне значення*** $w = e^{z_2\ln z_1}$.

3.8. Контрольні запитання

1) Що називається визначником?
2) Що таке мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника?
3) За яким правилом обчислюється значення визначника n-го порядку?
4) Сформулюйте правила “хреста” і “трикутників” для обчислення відповідно визначників другого і третього порядку.
5) Сформулюйте основні властивості визначника.
6) Як знаходиться значення визначника трикутного вигляду?
7) Що називається матрицею?
8) Яка матриця називається невиродженою?
9) Як здійснюються операції додавання (віднімання) матриць і множення матриці на число? Чим відрізняється множення матриці на число від множення визначника на число?
10) Як здійснюється операція множення матриць? Які властивості цієї операції?
11) Що таке обернена матриця та як вона обчислюється?
12) Що називається рангом матриці?
13) Як знаходиться ранг матриці методом обвідних мінорів?
14) Які операції називаються елементарними перетвореннями матриці?
15) Які матриці називаються еквівалентними?
16) Як знаходиться ранг матриці методом елементарних перетворень?
17) Який вигляд має система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими?
18) Яка система називається сумісною? Визначеною?
19) Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі для лінійних систем.
20) Як знаходиться розв’язок квадратної СЛАР за допомогою оберненої матриці?
21) Як розв’язується квадратна СЛАР методом Крамера?
22) Як розв’язується довільна СЛАР методом Гаусса?
23) Сформулюйте умову наявності в квадратної СЛАР ненульових розв’язків.
24) Як використовуються блочні матриці для розвязування СЛАР і знаходження оберненої матриці?

25) Як задається прямокутна система координат у просторі? Як утворюється координатна сітка цієї системи координат?
26) Що таке скалярні та векторні величини?
27) Які вектори називаються колінеарними? Компланарними? Рівними?
28) Як знаходяться сума, різниця двох векторів і добуток вектора на число?
29) Як знаходиться проекція вектора на ненульовий вектор?
30) Що таке координати вектора? Як здійснюються лінійні операції над векторами в координатній формі?
31) Як знаходяться модуль і напрямні косинуси вектора, заданого в координатній формі?
32) Як формулюється умова колінеарності двох векторів?
33) Як знаходяться координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні?
34) Що називається скалярним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
35) У чому полягає умова ортогональності двох векторів?
36) Що називається векторним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
37) У чому полягає геометричний зміст векторного добутку?
38) Що називається мішаним добутком трьох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?
39) У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?
40) У чому полягає умова компланарності трьох векторів?
41) Яка трійка векторів утворює базис? Як знайти координати вектора в даному базисі?
42) Що називається n-вимірним векторним простором? Який простір є лінійним?
43) Яка система векторів називається лінійно незалежною?
44) Що таке базис n-вимірного векторного простору?
45) Що називається лінійним відображенням? Що таке матриця лінійного відображення?
46) Як задаються паралельне перенесення і поворот прямокутної системи координат на площині?
47) Що таке власні числа і власні вектори квадратної матриці?
48) Як знаходяться власні числа і власні вектори?
49) Сформулюйте властивості власних чисел і власних векторів.

50) Що таке матричний многочлен?
51) Сформулюйте теорему Келі – Гамільтона про характеристичний многочлен.
52) Як розв'язується СЛАР методом простих ітерацій?
53) Наведіть основні типи рівняння площини.
54) Як обчислюється кут між площинами?
55) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
56) Як обчислюється відстань від точки до площини?
57) Наведіть основні типи рівняння прямої у просторі.
58) Як обчислюється кут між прямими у просторі?
59) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.
60) Як обчислюється кут між прямою і площиною?
61) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.
62) Як знаходиться відстань між непаралельними прямими?
63) Як знаходиться відстань від точки до прямої у просторі?
64) Як записується комплексне число в алгебраїчній формі?
65) Наведіть умову рівності двох комплексних чисел.
66) Чим відрізняється між собою пара комплексно спряжених чисел?
67) Що служить геометричним зображенням комплексного числа і всієї множини комплексних чисел?
68) Які арифметичні операції зручно виконувати в алгебраїчній, а які – в тригонометричній чи показниковій формах?
69) Чим відрізняється добуток комплексних чисел від скалярного і векторного добутку векторів?
70) Скільки різних значень має корінь n-го степеня з комплексного числа? Як розміщені ці значення на комплексній площині?
71) Який вигляд має розклад многочлена на множники на множині комплексних чисел?
72) Що називається комплексною функцією дійсної змінної? Що служить графіком такої неперервної функції?
73) Як здійснюється диференціювання комплексної функції дійсної змінної?

74) Що називається комплексною функцією комплексної змінної?
75) Наведіть основну формулу Ейлера.
76) Якими формулами виражається зв'язок тригонометричних і гіперболічних функцій з комплексною експонентою e^z?
77) Як визначається комплексна логарифмічна функція $Ln\,z$ та її головне значення $\ln z$?

3.9. Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Для даного визначника Δ і вказаних чисел i та j знайти мінори M_{ij}, M_{ji} і алгебраїчні доповнення A_{ij}, A_{ji} відповідно елементів a_{ij} і a_{ji}. Обчислити визначник Δ трьома способами:

1) розкладаючи його за елементами i-го рядка;

2) розкладаючи його за елементами j-го стовпця;

3) попередньо звівши його до східчастого (трикутного) вигляду з нулями нижче головної діагоналі.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ $i=2;\quad j=4$	16	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=1$
2	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$ $i=1;\quad j=4$	17	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ $i=3;\quad j=4$

3	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ $i=1; \quad j=3$	18	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $i=1; \quad j=3$
4	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ $i=4; \quad j=3$	19	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ $i=2; \quad j=3$
5	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3; \quad j=2$	20	$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ $i=2; \quad j=1$
6	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=2; \quad j=4$	21	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ $i=2; \quad j=1$
7	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ $i=3; \quad j=2$	22	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ $i=1; \quad j=3$

8	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $i=1; \quad j=4$	23	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3; \quad j=4$
9	$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ $i=2; \quad j=4$	24	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i=4; \quad j=1$
10	$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $i=3; \quad j=1$	25	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i=4; \quad j=2$
11	$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ $i=3; \quad j=4$	26	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $i=2; \quad j=3$
12	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ $i=2; \quad j=3$	27	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ $i=4; \quad j=2$

13	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ $i=4; \quad j=3$	28	$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -4 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=1; \quad j=2$
14	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $i=1; \quad j=2$	29	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ $i=3; \quad j=4$
15	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ $i=1; \quad j=4$	30	$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $i=2; \quad j=3$

Завдання 2. Дано матриці A і B.

1) Знайти матриці $C = AB$ і $D = BA$.

2) Знайти обернену матрицю A^{-1} і перевірити, що $AA^{-1} = E$ і $A^{-1}A = E$.

3) Розв’язати матричне рівняння $AXB = D$.

4) Побудувати характеристичний многочлен матриці A: $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ і перевірити, що матриця A є коренем свого характеристичного многочлена $f(A) = 0$.

5) Знайти власні числа матриці F, одержаної з A вилученням останнього рядка і останнього стовпця.

№ в-та	Завдання
1	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 6 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 3\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ -3 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ -5 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & -5 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\ 5 & 1 & -2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 1\\ 7 & -3 & 1\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1\\ 4 & -2 & -3\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & -6 & 3\\ 3 & -1 & 4\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$
6	$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -2\\ -3 & -1 & 4\\ 5 & 2 & -3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}5 & 2 & -2\\ 4 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 5\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & 2\\ -1 & 7 & 1\end{pmatrix}$
8	$A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 4\\ -2 & 5 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$

9	$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 4\\ 4 & 3 & -1\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$
10	$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 4 & -1 & -3\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ -6 & 2 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$
12	$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ -5 & 1 & 3\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 1\\ -5 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 7 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & -2 & -1\end{pmatrix}$
14	$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 3\\ 3 & -4 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -1\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2\\ -3 & 1 & -4\\ -2 & 2 & 3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -3 & 0 & 2\\ -1 & 4 & -2\end{pmatrix}$
16	$A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 1\\ -1 & 4 & 1\\ 5 & -3 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 6 & -3\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$

17	$A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 3\\ -3 & 1 & 8\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 6\\ 4 & 1 & 3\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$
18	$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ -1 & -5 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 6 & -3 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -4 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ -1 & -4 & 1\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$
20	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 2 & -6 & 1\\ 1 & 1 & -5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & -1\\ 2 & -4 & 5\end{pmatrix}$
21	$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ -4 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$
22	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 6 & -1\\ -3 & 2 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$
23	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -5 & 6 & -1\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ -3 & 1 & 4\\ 5 & -3 & 9\end{pmatrix}$
24	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & -3 & 5\\ 7 & 8 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}4 & 7 & 3\\ -3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$

25	$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 5\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 6 & 3\\ -2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$
26	$A=\begin{pmatrix}-2 & -6 & 3\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$
27	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ 1 & -5 & 1\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$
28	$A=\begin{pmatrix}7 & 1 & 4\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & -7 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ -1 & -3 & -1\end{pmatrix}$
29	$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 3 & 7 & -1\\ -3 & -2 & 5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & -5\end{pmatrix}$
30	$A=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 3\\ -2 & 6 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ -2 & 1 & -1\\ -3 & 4 & -1\end{pmatrix}$

Завдання 3. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами:

1) методом Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці;
3) методом Гаусса послідовного вилучення невідомих.

Зробити перевірку.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\begin{cases} 5x+y-2z=4 \\ 5x+8y+4z=12 \\ -2x+4y-3z=11 \end{cases}$	16	$\begin{cases} -3x+2y+z=-3 \\ -x-3y+2z=4 \\ x+2y-4z=-10 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x+2y+2z=2, \\ x-2y+z=4, \\ 2x-y+z=3. \end{cases}$	17	$\begin{cases} -3x+2y-z=8 \\ 3x-3y+2z=-15 \\ -5x+2y+4z=-9 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 7x-2y-z=5 \\ x+4y+z=3 \\ -4x+5y+6z=8 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x-3y+5z=-9, \\ 4x+2y-3z=0, \\ x+3y+4z=5. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x-y+z=5, \\ 3x+2y-2z=-3, \\ 4x+5y-3z=-5. \end{cases}$	19	$\begin{cases} x+5y-z=-9 \\ -2x-y+4z=2 \\ 2x+4y+3z=-1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -3x+5y+8z=2 \\ -x-4y+2z=0 \\ 5x-y-9z=1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x-2y+4z=11 \\ -2x-2y-z=-9 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x+2y+4z=-3, \\ 2x+3y+3z=-5, \\ 5x-4y+2z=5. \end{cases}$	21	$\begin{cases} 4x+y-z=3, \\ 5x+\quad 4z=-4, \\ -2x+3y+5z=1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 6x+5y-z=-13 \\ x+4y+5z=5 \\ 2x+8y+z=-8 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 3x+y-7z=10 \\ -x+3y+2z=-3 \\ 2x-y+4z=-2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 4x+2y-z=1 \\ x-3y+2z=0 \\ -5x+2y-4z=-8 \end{cases}$	23	$\begin{cases} -3x+5y+8z=2 \\ -x+6y+3z=1 \\ 5x-y-6z=4 \end{cases}$

9	$\begin{cases} 4x+3y-z=5 \\ x-2y+2z=-1 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 3x-y+2z=9, \\ x+y-z=-2, \\ 4x+4y-3z=-5. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x+y+2z=5 \\ 3x+2y+3z=8 \\ -2x+3y+6z=7 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 6x-2y-z=3 \\ x+4y-3z=-8 \\ 3x+10y-2z=-3 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x+4y+z=1, \\ 5x+y-3z=-2, \\ 2x+3y+4z=7. \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x+2y-3z=-1, \\ 2x+3y+2z=9, \\ 5x-4y+4z=9. \end{cases}$
12	$\begin{cases} 3x+5y-7z=-1 \\ -x+6y+2z=0 \\ 5x-y+4z=14 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 2x+5y-z=3 \\ x+5y-3z=14 \\ -3x+4y+z=-2 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ 3x-y+5z=2, \\ 4x+3y+4z=0. \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x+5y-z=1 \\ -2x+5y+2z=2 \\ -3x+4y+z=-3 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 3x-2y-z=-1 \\ x+4y+3z=-1 \\ 4x-y-2z=4 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ 3x+3y-4z=-6 \\ -2x+4y-z=5 \end{cases}$
15	$\begin{cases} -3x+2y+z=2 \\ 5x+y-4z=-5 \\ x+4y-3z=-4 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x+5y-z=5 \\ x+y+2z=0 \\ -3x+4y+7z=-13 \end{cases}$

Завдання 4. Перевірити, що дана квадратна однорідна система $AX = 0$ має безліч розв'язків ($\det A = 0$). Знайти всі ці розв'язки (загальний розв'язок). Знайти будь-який ненульовий частинний розв'язок.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ 5x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 2y + 6z = 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} -3x + 2y - 4z = 0 \\ 4x - 3y + 5z = 0 \\ 5x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 5x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 3x + 2y - 8z = 0 \\ 3x - 5y + 2z = 0 \\ x - 4y + 4z = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x - 2y - z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 10y - 7z = 0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 3x - 6y + 5z = 0 \\ 4x - 4y - 3z = 0 \\ 2x - 8y + 13z = 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 5x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x + 5y - 8z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \\ 5x + y - 2z = 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ 5x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x + y - 7z = 0 \\ 3x - 4y - 4z = 0 \\ x - 5y + 3z = 0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x + 2y + 7z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 0 \\ -x + 8y + z = 0 \end{cases}$	21	$\begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \\ 4x - 3y + 7z = 0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x + 5y - z = 0 \\ x + 4y - 6z = 0 \\ x - 3y + 11z = 0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 3x - 4y - z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

8	$\begin{cases} 4x+2y-5z=0 \\ 2x-3y+3z=0 \\ 2x+5y-8z=0 \end{cases}$	23	$\begin{cases} -3x+5y+4z=0 \\ x+y-2z=0 \\ x+9y-4z=0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 4x+y-6z=0 \\ x-3y+2z=0 \\ x+10y-12z=0 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 3x-y+5z=0 \\ x+3y-z=0 \\ x-7y+7z=0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x-7y+2z=0 \\ 3x+5y-3z=0 \\ 5x-2y-z=0 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 6x-2y-3z=0 \\ x+4y-3z=0 \\ 4x-10y+3z=0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x-4y+z=0 \\ 5x+y-3z=0 \\ 2x+5y-4z=0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x+2y-6z=0 \\ 2x-4y+3z=0 \\ -x+10y-12z=0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 3x+5y-z=0 \\ -x-6y+2z=0 \\ x-7y+3z=0 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 2x+5y-6z=0 \\ 4x-3y-3z=0 \\ -2x+8y-3z=0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x-4y+5z=0 \\ 3x-y-3z=0 \\ -x-3y+8z=0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x+5y-4z=0 \\ -2x+6y+z=0 \\ 4x-y-5z=0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 7x-2y-2z=0 \\ 3x+4y-3z=0 \\ x-10y+4z=0 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 2x+y-7z=0 \\ 3x-3y+4z=0 \\ 5x-2y-3z=0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 3x-2y+5z=0 \\ 5x+y-4z=0 \\ 2x+3y-9z=0 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x-y-8z=0 \\ x-3y+6z=0 \\ 3x-4y-2z=0 \end{cases}$

Завдання 5. Дано вершини трикутної піраміди $A_1A_2A_3A_4$. Побудувати зображення піраміди $A_1A_2A_3A_4$ у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$. Засобами векторної алгебри й аналітичної геометрії знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;

2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

3) площу грані $A_1A_2A_3$;

4) об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$;

5) загальне рівняння площини $A_1A_2A_3$;

6) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$;

7) канонічні рівняння прямих A_1A_2 і A_3A_4;

8) канонічні рівняння висоти піраміди A_4N, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

9) канонічні рівняння прямої A_3M, яка паралельна ребру A_1A_2;

10) рівняння площини α, яка проходить через точку A_1 перпендикулярно ребру A_1A_2;

11) довжину висоти A_4N, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

12) канонічні рівняння медіани A_1K трикутника $A_1A_2A_3$;

13) координати точки N – основи висоти A_4N, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

14) відстань між паралельними прямими A_3M і A_1A_2;

15) відстань між мимобіжними прямими A_1A_2 і A_3A_4;

16) загальні рівняння прямої l, що служить лінією перетину грані $A_1A_2A_3$ і площини β: $x+y+z-1=0$; перейти від загальних рівнянь прямої l до канонічних, а потім до параметричних рівнянь;

17) координати радіус-вектора $\overrightarrow{OA_4}$ у базисі $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$, що утворений векторами $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{A_1 A_2}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{A_1 A_3}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{A_1 A_4}$.

№ в-та	Завдання
1	$A_1(-4, 2, 1),\ A_2(-1, 5, 4),\ A_3(-2, -4, 5),\ A_4(1, 2, -7)$
2	$A_1(1, -5, 1),\ A_2(-1, 3, 4),\ A_3(0, -6, 1),\ A_4(1, 2, -8)$
3	$A_1(-4, 2, 0),\ A_2(3, 1, -5),\ A_3(-2, 4, 6),\ A_4(1, -3, -3)$
4	$A_1(7, 0, 1),\ A_2(3, 1, 0),\ A_3(-2, 4, 6),\ A_4(1, 5, -3)$
5	$A_1(-6, 1, 4),\ A_2(-1, 0, -4),\ A_3(1, 5, 2),\ A_4(1, 2, -2)$
6	$A_1(0, -1, 3),\ A_2(-2, 2, 5),\ A_3(5, -6, 1),\ A_4(3, 0, 4)$
7	$A_1(-4, 4, -3),\ A_2(-1, 0, 2),\ A_3(2, 1, -4),\ A_4(1, 2, -5)$
8	$A_1(-1, 3, 7),\ A_2(0, -2, 4),\ A_3(3, 2, -1),\ A_4(4, -1, 2)$
9	$A_1(0, 1, -3),\ A_2(3, -5, -3),\ A_3(3, 1, -5),\ A_4(4, 2, -1)$
10	$A_1(4, 0, 1),\ A_2(-1, 5, 4),\ A_3(-2, -3, 8),\ A_4(1, 2, -7)$
11	$A_1(6, 0, -2),\ A_2(-1, 3, 7),\ A_3(-3, 1, -5),\ A_4(1, 2, -1)$
12	$A_1(-4, 1, 2),\ A_2(4, -2, 0),\ A_3(0, -2, -6),\ A_4(1, -3, 1)$
13	$A_1(5, -3, 7),\ A_2(3, -2, 6),\ A_3(0, -5, -4),\ A_4(-1, 1, 4)$
14	$A_1(0, -7, 1),\ A_2(-4, 0, 2),\ A_3(-3, 1, 3),\ A_4(-1, 2, -3)$
15	$A_1(1, 0, 5),\ A_2(-1, 4, -4),\ A_3(0, -2, 1),\ A_4(3, 2, -5)$
16	$A_1(-3, 0, 1),\ A_2(1, -4, 0),\ A_3(0, -5, 1),\ A_4(-5, 1, -2)$
17	$A_1(1, 6, -2),\ A_2(-1, 3, 4),\ A_3(3, -6, 2),\ A_4(1, 2, -3)$
18	$A_1(-6, 0, 1),\ A_2(1, -4, 0),\ A_3(0, -5, 1),\ A_4(-1, 1, -5)$

19	$A_1(3,-1,-6)$, $A_2(-4,3,4)$, $A_3(1,0,-2)$, $A_4(1,2,0)$
20	$A_1(3,1,4)$, $A_2(-1,-3,4)$, $A_3(1,0,2)$, $A_4(1,2,-7)$
21	$A_1(6,-2,3)$, $A_2(-1,0,-5)$, $A_3(5,3,-1)$, $A_4(3,4,-4)$
22	$A_1(-3,2,-3)$, $A_2(-1,3,2)$, $A_3(5,1,-2)$, $A_4(1,2,-7)$
23	$A_1(-4,3,6)$, $A_2(-3,-2,4)$, $A_3(3,4,-1)$, $A_4(4,-2,2)$
24	$A_1(5,1,-3)$, $A_2(3,-4,-3)$, $A_3(3,1,2)$, $A_4(1,2,-7)$
25	$A_1(4,-3,1)$, $A_2(-1,3,-4)$, $A_3(2,-3,-2)$, $A_4(1,2,0)$
26	$A_1(0,-6,1)$, $A_2(-1,4,5)$, $A_3(-2,-3,4)$, $A_4(1,0,-3)$
27	$A_1(-4,0,1)$, $A_2(4,-2,6)$, $A_3(0,-5,1)$, $A_4(1,3,-3)$
28	$A_1(-4,-1,0)$, $A_2(5,1,2)$, $A_3(-3,5,-4)$, $A_4(-1,2,4)$
29	$A_1(7,-6,0)$, $A_2(-1,4,-2)$, $A_3(5,0,-4)$, $A_4(3,-4,1)$
30	$A_1(1,6,-3)$, $A_2(-3,3,-5)$, $A_3(3,0,2)$, $A_4(0,2,2)$

Завдання 6. Задано квадратний тричлен az^2+bz+c з дійсними коефіцієнтами a, b, c і комплексною змінною z. Необхідно:

1) знайти корені z_1 і z_2 заданого квадратного тричлена на множині комплексних чисел (в алгебраїчній формі $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$), розкласти тричлен на множники $az^2+bz+c=$ $=a(z-z_1)(z-z_2)$ і перевірити теорему Вієта $z_1+z_2=-b/a$; $z_1 z_2=c/a$;

2) обчислити вираз $\dfrac{z_1+ci}{z_2+a}+z_1^2(a+bi)-z_2 i$, виконуючи дії в алгебраїчній формі;

3) зобразити числа $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ на комплексній площині, знайти модуль і аргумент кожного з цих чисел та подати z_1 і z_2 у тригонометричній і показниковій формах;

4) користуючись тригонометричною формою, знайти z_1^4 та $\sqrt[3]{z_2}$.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$z^2+6z+13$	11	$5z^2+2z+10$	21	$10z^2-6z+1$
2	$z^2-4z+29$	12	$z^2+8z+25$	22	z^2+4z+8
3	z^2+4z+5	13	$z^2-8z+17$	23	z^2-4z+8
4	$z^2+2z+10$	14	$4z^2+6z+5$	24	$z^2+6z+10$
5	$z^2-6z+13$	15	$z^2-2z+10$	25	$z^2+10z+29$
6	$4z^2+4z+5$	16	$5z^2+8z+5$	26	$5z^2+6z+5$
7	$8z^2-4z+1$	17	z^2-2z+2	27	$5z^2-6z+5$
8	$5z^2+2z+2$	18	z^2+2z+5	28	$5z^2+8z+4$
9	$z^2-4z+13$	19	$2z^2-2z+5$	29	$5z^2-8z+4$
10	$z^2-6z+10$	20	$4z^2+8z+5$	30	$10z^2+6z+1$

Завдання 7. На комплексній площині зобразити область D, що задана нерівностями.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z-2\le 0$, $\|z-2i\|\le 1$	16	$\|z-1-i\|\le 1$, $\|z+1\|<2$
2	$\|z-2i\|\le 2$, $\operatorname{Re} z>1$	17	$\|z-i\|>4$, $\operatorname{Im} z>1$
3	$\|z+2i\|\le 2$, $\|z\|\ge 1$	18	$\|z-2\|\le 2$, $\|z+1\|>1$
4	$2\operatorname{Re} z+3\operatorname{Im} z-6\ge 0$, $\|z\|<4$	19	$\|z-2i\|<4$, $\operatorname{Im} z>-1$
5	$\|z-2-2i\|\le 4$, $\operatorname{Im} z\le 2$	20	$\|z-1+i\|\ge 2$, $\operatorname{Re} z<0$

6	$\lvert z+2i\rvert<2$, $\operatorname{Re} z>-1$	21	$\lvert z\rvert\geq 1$, $\lvert\operatorname{Im} z\rvert<2$
7	$\lvert z\rvert<4$, $\lvert\arg z\rvert\leq \pi/4$	22	$\lvert z\rvert\geq 2$, $\lvert\arg z\rvert\leq \pi/4$
8	$\lvert z-2i\rvert\leq 3$, $-\pi/4<\arg z\leq \pi/3$	23	$\lvert z+2i\rvert>2$, $-3\pi/4<\arg z\leq -\pi/4$
9	$\lvert z\rvert\geq 2$, $-3\pi/4\leq \arg z<-\pi/2$	24	$\lvert z-1\rvert\geq 2$, $-\pi<\arg z<-\pi/2$
10	$\operatorname{Re} z>-4$, $-\pi/4\leq \arg z\leq 3\pi/4$	25	$\operatorname{Im} z<2$, $\pi/4\leq \arg z\leq 3\pi/4$
11	$\operatorname{Re} z\leq -1$, $-3\pi/4\leq \arg z<0$	26	$\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z+1>0$, $\lvert z\rvert\leq 1$
12	$\lvert z-1+i\rvert\leq 3$, $0<\arg z\leq 3\pi/4$	27	$\lvert z-1-i\rvert\leq 2$, $3\pi/4<\arg z<\pi$
13	$\operatorname{Im} z\geq 2$, $0<\arg z\leq 3\pi/4$	28	$\operatorname{Im} z\leq -1$, $-\pi<\arg z<3\pi/4$
14	$\lvert\operatorname{Re} z\rvert\leq 3$, $\lvert\operatorname{Im} z\rvert\leq 2$	29	$\lvert\operatorname{Re} z\rvert>1$, $\lvert\operatorname{Im} z\rvert\leq 2$
15	$\lvert\operatorname{Re} z\rvert\leq 2$, $\lvert\operatorname{Im} z\rvert>2$	30	$\lvert z\rvert\geq 1$, $\lvert\operatorname{Re} z\rvert<2$

Завдання 8. Обчислити значення заданої функції $w=f(z)$ у зазначеній точці z_0.

№ в-та	Завдання	№ в-та	Завдання
1	$w=i\cos(\pi\bar{z})$, $z_0=-3+2i$	16	$w=(\bar{z}-2i)\,Ln\,z$, $z_0=1-i$
2	$w=i\,Ln\,z$, $z_0=\sqrt{3}+i$	17	$w=i(-1)^z$, $z_0=3-i$

3	$w = z\ tg\,(i\pi z)$, $z_0 = -1 - i$	18	$w = \sin(\pi z^2)$, $z_0 = 1 - i$
4	$w = z\sin(\pi z)$, $z_0 = 1 - i$	19	$w = (3-2i)\sin z$, $z_0 = \pi + \pi i$
5	$w = \bar{z}\ \cos(\pi z)$, $z_0 = -2 + i$	20	$w = i\sin(5\pi / z)$, $z_0 = -3 + 4i$
6	$w = i\cos(\pi z)$, $z_0 = -3 + 4i$	21	$w = (1-2i)\sin(iz)$, $z_0 = \pi + \pi i$
7	$w = z\ \cos(5\pi / z)$, $z_0 = -3 - 4i$	22	$w = i\cos 2z$, $z_0 = \pi - \pi i$
8	$w = i(\sqrt{3} - i)^z$, $z_0 = -1 - 4i$	23	$w = z\,Ln(z+i)$, $z_0 = -2 + i$
9	$w = z\,Ln(iz)$, $z_0 = 2 + 2i$	24	$w = (1-2i)\ tg\,(\pi z)$, $z_0 = 2 - i$
10	$w = z(-1 - \sqrt{3}i)^z$, $z_0 = -2i$	25	$w = i\cos(5\pi i / z)$, $z_0 = 3 - 4i$
11	$w = ctg\,\pi z$, $z_0 = 2 - 3i$	26	$w = i\,tg\,z$, $z_0 = 2\pi - \pi i$
12	$w = i\,ctg\,(iz)$, $z_0 = \pi + \pi i$	27	$w = \sin^2 z$, $z_0 = \pi - \pi i$
13	$w = \cos(\pi z^2)$, $z_0 = -1 + i$	28	$w = (-1 + \sqrt{3}i)^z$, $z_0 = 1 + i$
14	$w = (1-z)\ tg\,(i\pi z)$, $z_0 = 1 - 2i$	29	$w = z\ (\sqrt{3} + i)^z$, $z_0 = 1 - i$
15	$w = i(z - 2i)^{2-2i}$, $z_0 = \sqrt{3} + 3i$	30	$w = z\ \sin(i\pi\bar{z})$, $z_0 = 2 - 2i$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 383 с.

2. Бізюк В.В., Якунін А.В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 300 с.

3. Вища математика. У 2 ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра: Аналітична геометрія: Вступ до математичного аналізу: Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников, Ф.П. Яремчик, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1. – М.: Наука, 1997. –304 с.

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – К.: А.С.К., 2003. – 648 с.

6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1975. – 272 с.

7. Колосов А.І., Якунін А.В., Наземцева Л.В. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина перша. – Харків: ХНАМГ, 2006. – 144 с.

8. Колосов А.І., Якунін А.В., Наземцева Л.В. Збірник тестових завдань з вищої математики. Частина друга. – Харків: ХНАМГ, 2006. – 110 с.

9. Комплексний аналіз / А.А. Гольдберг, М.М. Шеремета, М.В. Заболоцький, О.Б. Скасків. – Львів: Афіша, 2002. – 208 с.

10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

11. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 495 с.

12. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. – К.: Діал, 2003. – 461 с.

13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. Т.1 – М.: Наука, 1985. – 430 с.

14. Станішевський С.О. Вища математика.– Харків: ХНАМГ, 2005.–270 с.

15. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 336 с.

З М І С Т

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

В И Щ А   М А Т Е М А Т И К А
д л я   е л е к т р о т е х н і к і в
у трьох модулях

Навчальний посібник

Модуль 1

Станішевський Степан Олександрович,
Якунін Анатолій Вікторович,
Ситникова Валентина Семенівна

Аналітична геометрія на площині. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. Площина та пряма у просторі. Комплексні числа та функції

Відповідальний за випуск *М.Й. Кадець*
Редактор *М.З. Аляб'єв*

Підп. до друку 28.10.2008 Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 16,0
Тираж 500 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи: ДК №731
від 19.12.2001