$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} *– алгебраїчне доповнення елемента* a_{ij} *матриці* A.

(Без доведення).

<u>Приклад</u>. Упевнитися, що дана матриця A невироджена, і знайти обернену матрицю A^{-1}. Перевірити рівності $AA^{-1} = E$ і $A^{-1}A = E$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ $$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

– матриця A невироджена.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\ ; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\ ; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\ ;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\ ; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\ ;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\ ; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\ ;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \ ; \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Рівності $A A^{-1} = E$ і $A^{-1} A = E$ перевірте самостійно. ■

3.2.4. Мінори матриці. Ранг матриці

Виділимо в матриці A розміру $m \times n$ будь-які k рядків і k стовпців $\left(1 \le k \le \min\{m, n\}\right)$. Визначник, складений з елементів, які стоять на перетині виділених рядів, називається ***мінором*** M_k k-го порядку матриці A.

Рангом $rank\,A$ матриці A розміру $m \times n$ називається найбільший порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці.

Ясно, що

$$0 \le rank\,A \le \min\{m, n\} ,$$

причому ранг дорівнює нулю тільки для нульової матриці.

Якщо $rank\,A = \min\{m, n\}$, то матриця A називається ***матрицею повного рангу***.

Базисним мінором матриці A називається довільний відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці.

3.2.5. Методи обчислення рангу матриці

Мінор M_{k+1} $(k+1)$-го порядку, який містить у собі деякий мінор M_k k-го порядку, називається ***обвідним*** для цього мінора M_k .

Теорема 1. *Якщо в матриці A існує відмінний від нуля мінор $M_r \ne 0$ r-го порядку, а всі його обвідні мінори M_{r+1} $(r+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то число r є рангом матриці A.*

(Без доведення).

Метод обвідних мінорів знаходження рангу матриці A розміру $m \times n$ складається з наступних кроків:

1) *Покласти* $k := 0$.

2) *Обчислити почергово обвідні мінори* M_{k+1} $(k+1)$*-го порядку. Якщо деякий мінор* M_{k+1} *відмінний від нуля, то прийняти його за базисний і перейти до кроку* 3). *Якщо всі обвідні мінори* $(k+1)$*-го порядку дорівнюють нулю, то перейти до кроку* 4).

3) *Покласти* $k := k+1$. *Якщо* $k = \min\{m, n\}$, *то перейти до кроку* 4). *У противному разі перейти до кроку* 2).

4) *Покласти* $rank\, A = k$ *і закінчити обчислення*.

Приклад 1. Знайти ранг даної матриці A методом обвідних мінорів і вказати її базисний мінор

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

□ $k = 0$; $M_1 = 1 \neq 0$; $k = 1$; $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$;

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \; ; \; k = 2 \; ; \; M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \; ;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; rank\, A = 2 \; ; \; M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

– базисний мінор. ■

Елементарними перетвореннями матриці називаються наступні операції:

1) переставлення місцями будь-яких двох паралельних рядів;

2) множення елементів будь-якого ряду на довільне ненульове число;

3) додавання до всіх елементів будь-якого ряду відповідних елементів будь-якого іншого паралельного йому ряду, помножених на одне і те ж довільне число.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними***, якщо одну з них можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначається $A \sim B$.

<u>Теорема 2</u>. *Еквівалентні матриці мають один і той же ранг*

$$A \sim B \;\Rightarrow\; rank\, A = rank\, B \,.$$

Іншими словами, *елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.*

(Без доведення).

Метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці полягає у зведені даної матриці A розміру $m \times n$ за допомогою елементарних перетворень рядків і переставлення стовпців до еквівалентної східчастої ***верхнє трапецієвидної*** (зокрема, ***верхнє трикутної***) матриці $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{1(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

в якій ненульові діагональні елементи дорівнюють одиниці.

Ранг трапецієвидної матриці $\tilde{A}$ *дорівнює числу* r *її ненульових рядків.*

Тоді

$$rank\, A = rank\, \tilde{A} = r \,.$$

За базисний мінор $\widetilde{M}_r$ трапецієвидної матриці $\widetilde{A}$ можна взяти кутовий мінор

$$\widetilde{M}_r = \begin{vmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \dots & \widetilde{a}_{1r} \\ 0 & 1 & \dots & \widetilde{a}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти ранг даної матриці A методом елементарних перетворень

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

□

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix} \sim \left| S_1 \leftrightarrow S_3 \right| \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & -6 & -3 & 5 \\ -6 & 9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left| R_1 := -R_1 \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 5 & -6 & -3 & 5 \\ -6 & 9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix} R_2 := R_2 - 5R_1 \\ R_3 := R_3 + 6R_1 \end{vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 15 \\ 0 & -9 & -7 & -15 \end{pmatrix} \sim \left| R_3 := R_3 + R_2 \right| \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \left| R_2 := R_2/9 \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 7/9 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$rank\, A = r = 2$, де R_i – i-й рядок; S_j – j-й стовпець. ■

3.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь і методи їх розв'язування

3.3.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття

Система m ***лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з*** n ***невідомими*** x_j $(j=\overline{1,\,n})$ має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m\ , \end{cases}$$

де a_{ij} $(i=\overline{1,m}\,;\ \ j=\overline{1,\,n})$ і b_i $(i=\overline{1,\,m})$ – задані числа:

a_{ij} $(i=\overline{1,m}\,;\ \ j=\overline{1,\,n})$ – ***коефіцієнти*** при невідомих;

b_i $(i=\overline{1,\,m})$ – ***вільні члени*** (***праві частини***).

Система, у якій число рівнянь дорівнює числу невідомих n, називається ***квадратною*** n***-го порядку***.

Для квадратної системи визначник Δ_n, складений з коефіцієнтів при невідомих, називається ***визначником системи***

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Система називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $b_i = 0$ $(i=\overline{1,\,m})$, і – ***неоднорідною***, якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля.

Система називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною*** (***суперечливою***), якщо вона не має жодного розв'язку.

Однорідна СЛАР завжди сумісна, бо має тривіальний (нульовий) розв'язок $x_j = 0$ $(j=\overline{1,\,n})$.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо її розв'язок єдиний, і ***невизначеною*** – в противному разі.

Введемо матричні позначення

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$C=\left(A \mid B\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ {}_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

де X – ***матриця-стовпець невідомих*** розміру $n\times 1$; A – ***основна матриця*** системи, складена з коефіцієнтів при невідомих розміру $m\times n$; B – ***матриця-стовпець вільних членів*** (***правих частин***) розміру $m\times 1$; C – ***розширена матриця*** системи розміру $m\times(n+1)$;

Тоді СЛАР можна подати в матричній формі $AX=B$.

Для квадратної системи $\Delta_n=\det A$.

Теорема Кронекера – Капеллі. *Система* m *лінійних алгебраїчних рівнянь з* n *невідомими* $AX=B$ *сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці* $C=\left(A \mid B\right)$ *дорівнює рангу основної матриці* A: $rank\,C=rank\,A=r$. *У випадку сумісності:* 1) *якщо ранг цих матриць дорівнює числу невідомих* $r=n$, *то система має єдиний розв'язок (є визначеною);* 2) *якщо цей спільний ранг менше числа невідомих* $r<n$, *то система є невизначеною і має безліч розв'язків, які залежать від* $n-r$ *довільних сталих (параметрів)* (рис. 82).

(Без доведення).

Оскільки розширена матриця C включає в себе основну матрицю A, то $rank\,A\le rank\,C$. Розширена матриця C одержана з основної матриці A доданням тільки одного стовпця, тому $rank\, C \le rank\, A + 1$.

Нехай система сумісна $rank\, C = rank\, A = r$ і M_r – деякий (довільно вибраний) базисний мінор її основної матриці A. *Якщо залишити в системі тільки всі ті рівняння, частина коефіцієнтів яких входить в базисний мінор, то одержана система буде рівносильна початковій.*

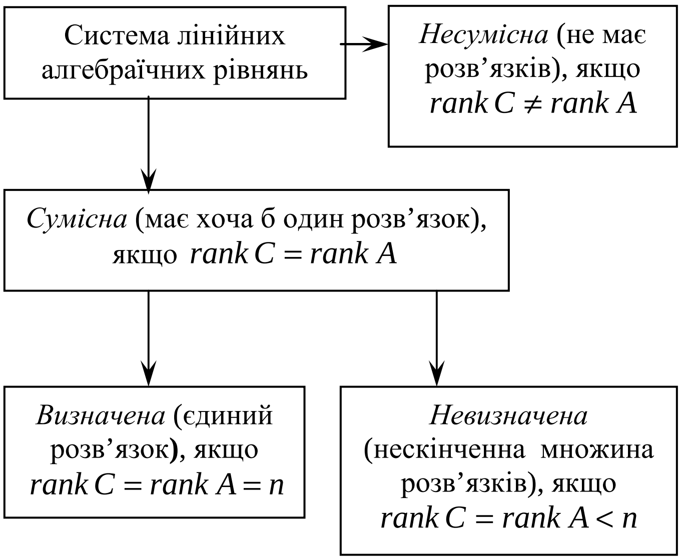

Рис. 82

Якщо сумісна система є невизначеною $rank\, C = rank\, A = r < n$, то ті r невідомі x_j, коефіцієнти при яких входять у вибраний базисний мінор M_r, називаються ***базисними***, а решта $n - r$ невідомі x_j називаються ***вільними***.

Залишимо в системі тільки всі ті рівняння, частина коефіцієнтів яких увійшла в базисний мінор, і перенесемо вправо всі члени з вільними невідомими. Розглядаючи вільні невідомі як довільні сталі (параметри), одержуємо квадратну систему r-го порядку відносно базисних невідомих, визначником якої служить базисний мінор M_r. Оскільки $M_r \ne 0$, то базисні невідомі знаходяться однозначно. Таким чином, отримуємо ***загальний розв'язок*** початкової системи. При довільно вибраних фіксованих значеннях вільних невідомих (параметрів) одержуємо ***частинний розв'язок***. Частинний розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних невідомих, називається ***опорним розв'язком***.

Приклад. Перевірити дану систему на сумісність

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$$

□ Для знаходження рангу використовуємо метод елементарних перетворень. За допомогою елементарних перетворень рядків розширеної матриці $C = \left(A \mid B\right)$ та переставлення стовпців тільки основної матриці A зводимо розширену матрицю C до східчастої форми з верхнє трапецієвидною основною матрицею A. Ранг основної матриці A дорівнює числу рядків трапеції. Якщо в розширеній матриці C нижче рядків трапеції всі елементи нульові, то її ранг дорівнює рангу основної матриці $rank\,C = rank\,A$. У противному разі ранг розширеної матриці на одиницю більший $rank\,C = rank\,A + 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 8 & -7 \end{pmatrix}; \quad C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 8 & -7 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2 - R_1 \\ R_3 := R_3 - 5R_1 \end{array} \right| \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left| R_3 := R_3 - 3R_2 \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \sim \left| R_3 := -R_3/5 \right| \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left|S_2\leftrightarrow S_4\right|\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Звідси $rank\,A=2;\quad rank\,C=3$.

Оскільки $rank\,C\neq rank\,A$, то система несумісна. ■

Зауваження 1. Загальний розв'язок СЛАР може мати різний вигляд, що, зокрема, залежить від вибору складу базисних і вільних невідомих і від способу введення довільних сталих.

Зауваження 2. Загальний розв'язок X сумісної неоднорідної СЛАР $AX=B$ можна подати у вигляді суми загального розв'язку X_0 відповідної однорідної СЛАР $AX=0$ і будь-якого частинного розв'язку X_* вихідної неоднорідної СЛАР

$$X=X_0+X_*\ .$$

В свою чергу, загальний розв'язок X_0 відповідної однорідної СЛАР можна подати у вигляді лінійної комбінації

$$X_0=C_1X_1+C_2X_2+\ldots+C_{n-r}X_{n-r}$$

$n-r$ лінійно незалежних частинних розв'язків X_j $(j=\overline{1,n-r})$ цієї однорідної СЛАР, що утворюють так звану ***фундаментальну систему розв'язків***. Тут C_j $(j=\overline{1,n-r})$ – довільні сталі (параметри).

3.3.2. Розв'язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Теорема. *Якщо основна матриця* A *квадратної системи* $AX=B$ *невироджена (тобто,* $\det A\neq 0$*), то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою*

$$X=A^{-1}B\ .$$

□ Оскільки матриця A – невироджена, то існує обернена матриця A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B\,; \qquad \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B\,;$$

$$EX = A^{-1}B\,; \qquad X = A^{-1}B\,. \quad \blacksquare$$

Приклад. Розв’язати квадратну систему

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5z = -7 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - 3z = -4 \end{cases}$$

за допомогою оберненої матриці (***матричним методом***).

$$\square \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix};$$

$$AX = B\,; \quad \det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

– матриця A невироджена.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -1\,; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 10\,;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4\,; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -1\,;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1\,; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1\,;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\,; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -16\,;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7\,; \quad A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -16 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B \ ; \quad X = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -16 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7+0-4 \\ -70+0+64 \\ 28+0-28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{matrix} x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \end{matrix} \quad \blacksquare$$

3.3.3. Розв'язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

Розв'язання квадратної системи з невиродженою основною матрицею можна подати безпосередньо через визначники.

Теорема (правило Крамера). *Якщо визначник квадратної системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулою*

$$x_j = \Delta_n^{(j)} / \Delta_n \quad , \qquad j = \overline{1,n} \ ,$$

де $\Delta_n^{(j)}$ – допоміжний визначник, одержаний з основного визначника Δ_n заміною j-го стовпця стовпцем вільних членів

$$\Delta_n^{(j)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} \dots a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Приклад 1. Розв'язати квадратну систему методом Крамера

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x - y + 2z = -3 \\ 2x - y + 3z = -4 \end{cases}$$

$$\square\quad \Delta=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=-4\neq 0\ ;\quad \Delta^{(1)}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -3 & -1 & 2\\ -4 & -1 & 3\end{vmatrix}=-4$$

$$\Delta^{(2)}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & -4 & 3\end{vmatrix}=0\ ;\quad \Delta^{(3)}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -3\\ 2 & -1 & -4\end{vmatrix}=8\ ;$$

$$x=\frac{\Delta^{(1)}}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1;\ y=\frac{\Delta^{(2)}}{\Delta}=\frac{0}{-4}=0;\ \ z=\frac{\Delta^{(3)}}{\Delta}=\frac{8}{-4}=-2\,.\ \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Перевірити, що дана система

$$\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3=3\\ 6x_1+2x_2-x_3=1\\ 3x_1+x_2-3x_3=-2\end{cases}$$

сумісна і невизначена. Користуючись методом Крамера, знайти її загальний розв'язок і виділити з нього опорний розв'язок.

□ Для знаходження рангу використовуємо метод обвідних мінорів.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 6 & 2 & -1\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}\ ;\ \ rank\,A=2\ ;\ \ M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5\neq 0$$

– базисний мінор.

$$C=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 2 & 3\\ 6 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -3 & -2\end{array}\right)\ ;\quad rank\,C=2\ .$$

Оскільки $rank\,A=rank\,C=r=2<n=3$, то система сумісна і невизначена.

Приймаємо x_2 і x_3 – базисні невідомі (відповідають стовпцям базисного мінору), а x_1 – вільне невідоме (відповідає стовпцю, що не входить у базисний мінор). Нехай $x_1 = C_1$, де C_1 – довільна стала (параметр). Залишаємо в системі тільки перше та друге рівняння, що відповідають рядкам базисного мінору. Переносимо члени з вільним невідомим $x_1 = C_1$ вправо. Одержану квадратну систему відносно базисних невідомих x_2 і x_3 розв'язуємо методом Крамера.

$$x_1 = C_1 \; ; \quad \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 3 - 3C_1 \\ 2x_2 - x_3 = 1 - 6C_1 \end{cases}; \quad \Delta = M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \; ;$$

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 - 3C_1 & 2 \\ 1 - 6C_1 & -1 \end{vmatrix} = 15C_1 - 5 \; ; \quad \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 - 3C_1 \\ 2 & 1 - 6C_1 \end{vmatrix} = -5 \; ;$$

$$x_2 = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta} = \frac{15C_1 - 5}{-5} = -3C_1 + 1; \quad x_3 = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1 \; .$$

Отже, $x_1 = C_1$; $x_2 = 1 - 3C_1$; $x_2 = 1$, $C_1 \in R$
– загальний розв'язок.

Покладемо $x_1 = C_1 = 0$. Тоді $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_2 = 1$
– опорний розв'язок. ■

3.3.4. Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

Розглянемо довільну прямокутну систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими x_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Нехай A – основна матриця, а C – розширена матриця цієї системи. Елементарним перетворенням рядків розширеної матриці C і переставленню стовпців тільки основної матриці A відповідають наступні рівносильні перетворення лінійної системи:

1) переставлення місцями будь-яких двох рівнянь (перенумеровування рівнянь);

2) множення обох частин будь-якого рівняння на довільне ненульове число;

3) додавання до обох частин будь-якого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;

4) перенумеровування невідомих.

Метод Гаусса дослідження і розв'язування СЛАР складається з двох основних етапів.

На першому етапі (***прямий хід*** методу Гаусса – зверху вниз) здійснюють послідовне виключення невідомих за допомогою вказаних рівносильних перетворень системи. Спочатку виділяють перше рівняння і відповідно перше невідоме. Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то переставляють рівняння і/або перенумеровують невідомі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Ділять перше рівняння на $a_{11} \neq 0$ і за допомогою одержаного рівняння виключають послідовно перше невідоме з другого рівняння, потім з третього рівняння і т.д. до останнього найнижчого. Виділяють друге рівняння і відповідно друге невідоме. Припустимо, що $a_{22} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то переставляють рівняння і/або перенумеровують невідомі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Ділять друге рівняння на $a_{22} \neq 0$ і за допомогою одержаного рівняння виключають послідовно друге невідоме з третього рівняння, потім з четвертого рівняння і т.д. до останнього найнижчого. Цей процес продовжують до тих пір, доки не дійдуть до останнього найнижчого рівняння або ситуації, коли виділене рівняння і всі рівняння, що лежать нижче нього, мають тільки нульові коефіцієнти при невідомих.

В результаті система зводиться до наступної східчастої форми

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{1r}\tilde{x}_r + \tilde{a}_{1(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_1 \\ \qquad \tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{2r}\tilde{x}_r + \tilde{a}_{2(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \tilde{x}_r + \tilde{a}_{r(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{rn}\tilde{x}_n = \tilde{b}_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_{r+2} \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_m \end{cases}$$

Якщо хоча б один з вільних членів $\tilde{b}_j$ $\left(j = \overline{r+1,\, m}\right)$ відмінний від нуля, то система несумісна, тобто не має розв'язків.

Якщо всі вказані вільні члени дорівнюють нулю $\tilde{b}_j = 0$ $\left(j = \overline{r+1,\, m}\right)$, то система сумісна і $rank\, A = rank\, C = r$. Перші r невідомі $\tilde{x}_j$ $\left(j = \overline{1,\, r}\right)$ є базисними, а решта $n - r$ невідомі $\tilde{x}_j$ $\left(j = \overline{r+1,\, n}\right)$ – вільні. Тоді здійснюють перехід до другого етапу.

На другому етапі (***зворотний хід*** методу Гаусса – знизу вгору) вільні невідомі приймають за довільні сталі (параметри) $\tilde{x}_j = C_{j-r}$ $\left(j = \overline{r+1,\, n}\right)$. Відкидають нульові рівняння (тотожності $0 = 0$). Переносять в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержують систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих. Цю систему розв'язують, підіймаючись знизу вгору. Спочатку з останнього рівняння знаходять останнє базисне невідоме $\tilde{x}_r$. Потім одержане значення $\tilde{x}_r$ підставляють у передостаннє рівняння і визначають з нього $\tilde{x}_{r-1}$ і т.д., доки не знайдуть $\tilde{x}_1$.

Зауваження. Прямий хід методу Гаусса зручно виконувати в матричній формі, зводячи розширену матрицю до східчастого вигляду з верхнє трапецієвидною основною матрицею. При цьому застосовуються елементарні перетворення рядків розширеної матриці і переставлення стовпців тільки основної матриці (перенумеровування невідомих).

Приклад 1. Розв'язати систему методом Гауса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{cases}.$$

□ Прямий хід: $$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 3R_1 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 10 & -10 \\ 0 & 4 & -7 & 10 & -1 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2/4 \\ R_3 := R_3 - R_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -7/4 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \end{array}.$$

Оскільки останньому рядку відповідає рівняння з нульовими коефіцієнтами і відмінним від нуля вільним членом, то система несумісна (не має розв'язків). ■

Приклад 2. Розв'язати систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 \qquad - x_4 + 5x_5 = -1 \end{cases}$$

□ <u>Прямий хід</u>: $$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 3 & 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left| S_1 \leftrightarrow S_2 \right| \sim$$

$$\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 3R_1 \\ R_4 := R_4 - 5R_1 \end{array} \right| \sim$$

$$\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21 \end{array}\right) \sim \left| R_2 := -R_2/4 \right| \sim$$

$$\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} R_3 := R_3 + 4R_2 \\ R_4 := R_4 + 8R_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim \left| R_3 \leftrightarrow R_4 \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left|S_3 \leftrightarrow S_5\right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_5 & x_4 & x_3 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3/4 & -3/2 & 5/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Система сумісна, але невизначена і

$$rank\, C = rank\, A = r = 3 < n = 5.$$

Тут x_2, x_1, x_5 – базисні невідомі; x_4, x_3 – вільні невідомі.

Зворотний хід:

Вільні невідомі приймаємо за довільні сталі (параметри)

$$x_4 = C_1 \ ; \ \ x_3 = C_2 .$$

Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_2, x_1, x_5:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_1 + 2x_5 = 4 + C_1 - 2C_2 \\ x_1 + \dfrac{3}{4}x_5 = \dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{2}C_1 - \dfrac{5}{4}C_2 \\ x_5 = -7 + 8C_1 \end{cases}.$$

Цю систему розв'язуємо, підіймаючись знизу вгору, починаючи з останнього рівняння.

$$x_4 = C_1 \ ; \ \ x_3 = C_2 \ ; \ \ x_5 = -7 + 8C_1 \ ; \ \ x_1 = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2 -$$

$$-\frac{3}{4}x_5=\frac{7}{4}+\frac{3}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2-\frac{3}{4}\left(-7+8C_1\right)=7-\frac{9}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2\ ;$$

$$x_2=4+C_1-2C_2-3x_1-2x_5=4+C_1-2C_2-$$

$$-3\left(7-\frac{9}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2\right)-2\left(-7+8C_1\right)=-3-\frac{3}{2}C_1+\frac{7}{4}C_2\ .$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$x_1=7-\frac{9}{2}C_1-\frac{5}{4}C_2\ ;\ \ x_2=-3-\frac{3}{2}C_1+\frac{7}{4}C_2\ ;$$

$$x_3=C_2\ ;\quad x_4=C_1\ ;\quad x_5=-7+8C_1\ ,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Поклавши $x_3=C_2=0$ і $x_4=C_1=0$, отримуємо опорний розв'язок

$$x_1=7\ ;\ \ x_2=-3\ ;\ \ x_3=0\ ;\quad x_4=0\ ;\quad x_5=-7\ . \qquad \blacksquare$$

Приклад 3. Розв'язати систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3=9 \\ x_1-3x_2+2x_3=-3 \\ x_1-2x_2+x_3=-1 \end{cases}.$$

(Розв'язати самостійно).

3.3.5. Однорідна квадратна система лінійних алгебраїчних рівнянь

Згідно з теоремою Кронекера – Капеллі однорідна прямокутна СЛАР $AX=0$ завжди сумісна і має тривіальний (нульовий) розв'язок $X=0$, бо ранг розширеної матриці $C=\left(A\ \vdots\ 0\right)$ дорівнює рангу основної матриці A. Нульовий розв'язок $X=0$ єдиний, якщо цей спільний ранг дорівнює числу невідомих. У противному разі СЛАР має безліч розв'язків.

З наведених міркувань для квадратної СЛАР випливає така

<u>теорема</u>. *Однорідна квадратна система* $AX = 0$ *має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю* $\det A = 0$. *Якщо цей визначник відмінний від нуля, то система має лише нульовий розв'язок*.

<u>Приклад 1</u>. Знайти значення параметра α, при яких однорідна квадратна СЛАР

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок (має безліч розв'язків).

$$\square \qquad \Delta = \det A = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 1 & -\alpha & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$$\alpha^2 + 8\alpha - 33 = 0 \ ; \quad \alpha_1 = 3; \quad \alpha_2 = -11 \ . \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Переконатись, що дана однорідна квадратна СЛАР має безліч розв'язків. Знайти її загальний розв'язок і будь-який ненульовий частинний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\square \qquad \Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Отже, система має безліч розв'язків. Розв'язуємо систему методом Гаусса.

<u>Прямий хід</u>:

$$C = \left(A \mid 0\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 4R_1 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left| R_3 := R_3 - R_2 \right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left| R_2 := R_2 / 6 \right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже,

$$rank\, C = rank\, A = r = 2 < n = 3,$$

Тут x_1, x_2 – базисні невідомі; x_3 – вільне невідоме.

<u>Зворотний хід</u>:

Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Вільне невідоме приймаємо за довільну сталу (параметр)

$$x_3 = C .$$

Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільну невідому. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -2x_3 \\ x_2 = \dfrac{5}{6} x_3 \end{cases} .$$

Розв'язуємо систему, починаючи з останнього рівняння.

$$x_3 = C \ ; \quad x_2 = \frac{5}{6} C \ ;$$

$$x_1 = 2x_2 - 2C = 2 \cdot \frac{5}{6} C - 2C = -\frac{1}{3} C \ .$$

Отже, загальний розв'язок

$$x_1 = -\frac{1}{3}C\ ;\quad x_2 = \frac{5}{6}C\ ;\quad x_3 = C\ ,\quad C \in R\ .$$

Покладемо $C = 6$. Тоді маємо ненульовий частинний розв'язок $x_1 = -2$; $x_2 = 5$; $x_3 = 6$. ■

3.3.6. Розв'язування лінійної системи і обернення матриці за допомогою розбиття на блоки

Довільну матрицю прямими, паралельними її рядкам і стовпцям, можна розбити на блоки, тобто записати у вигляді ***блочної матриці***. Наприклад

$$A = \left(\begin{array}{c:c:c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right).$$

Кожний блок A_{ij} називається ***підматрицею*** матриці A.

З блочними матрицями можна виконувати звичайні операції, розглядаючи підматриці як елементи.

Нехай A – невироджена квадратна матриця n-того порядку, а E – одинична матриця того же порядку. Складемо блочну матрицю $C = \left(A \,\vdots\, E\right)$ і помножимо її зліва на матрицю A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}C = \left(A^{-1}A \,\vdots\, A^{-1}E\right) = \left(E \,\vdots\, A^{-1}\right).$$

Оскільки множення матриці C на деяку матрицю зліва рівносильне відповідним лінійним операціям з рядками матриці C, то одержаний результат можна використати для знаходження оберненої матриці.

Якщо вказана блочна матриця $\left(A \,\vdots\, E\right)$ *за допомогою елементарних перетворень її рядків зводиться до вигляду* $\left(E \,\vdots\, B\right)$, *то* $B = A^{-1}$.

Звичайно, елементарні перетворення здійснюються модифікованим ***методом Гаусса***.

Приклад. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\square \quad (A \,\vdots\, E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left|R_1 \leftrightarrow R_2\right|=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left|\begin{array}{l} R_2 := R_2-2R_1 \\ R_3 := R_3+3R_1 \end{array}\right|=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)=\left|R_2 := -3R_2-2R_3\right|=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 10 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)=\left|R_3 := R_3-10R_2\right|=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -45 & 30 & 3 & 21 \end{array}\right)=\left|R_3 := R_3:(-45)\right|=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -1/15 & -7/15 \end{array}\right)=\left|\begin{array}{l} R_2 := R_2-4R_3 \\ R_1 := R_1+R_3 \end{array}\right|=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -2/3 & 14/15 & -7/15 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 4/15 & -2/15 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -1/15 & -7/15 \end{array}\right)=\left|R_1 := R_1 - 3R_2\right|=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/15 & -1/15 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 4/15 & -2/15 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -1/15 & -7/15 \end{array}\right)=\left(E \mid A^{-1}\right);$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/15 & -1/15 \\ -1/3 & 4/15 & -2/15 \\ -2/3 & -1/15 & -7/15 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Нехай задана визначена (має, причому єдиний, розв'язок) квадратна система лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку $AX = B$, з якої треба знайти значення лише перших m невідомих x_j $\left(j=\overline{1, m};\ m<n\right)$.

Розбиттям матриць на блоки

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right);\quad X=\left(\begin{array}{c} X_1 \\ \hline X_2 \end{array}\right);\quad B=\left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right),$$

де

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix};\quad X_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix};\quad B_1=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

цю систему можна подати у вигляді

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = B_1 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 = B_2 \end{cases}.$$

Вилучивши із системи X_2, приходимо до одного рівняння відносно шуканих невідомих X_1

$$\left(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)X_1=B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \ .$$

Зауваження. Якщо невироджена квадратна матриця A розбита на блоки

$$A=\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right),$$

то обернену матрицю A^{-1} також можна подати у блочному вигляді

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right),$$

де

$$C_{11}=\left(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} ; \quad C_{21}=-A_{22}^{-1}A_{21}C_{11} ;$$

$$C_{22}=\left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} ; \quad C_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}C_{22} \ .$$

3.4. Вектори й операції над ними

3.4.1. Скалярні та векторні величини. Основні поняття

Три взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox, Oy і Oz зі спільним початком O утворюють ***декартову прямокутну систему координат*** у просторі (рис. 83). Ox називається ***віссю абсцис***, Oy – ***віссю ординат***, а Oz – ***віссю аплікат***. Три взаємно перпендикулярні координатні площини Oxy, Oxz і Oyz ділять весь простір на вісім частин (***октантів***). Сукупність площин, які перпендикулярні координатним осям, утворює просторову ***координатну сітку***.

Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою трійкою чисел $\left(x;y;z\right)$ – її ***координатами*** (x – ***абсциса***, y – ***ордината***, z – ***апліката***). Для знаходження цих координат через точку $M\left(x;y;z\right)$ проведемо три площини, які перпендикулярні координатним осям. Вони перетинають відповідні осі у точках $M_x(x;0;0)$, $M_y(0;y;0)$ і $M_z(0;0;z)$.

<u>Приклад</u>. Побудувати точки $M(2;-3;5)$ і $N(-2;4;-5)$.

□ Проведемо з початку координат O відрізок довжиною 2 одиниці в додатному напрямку осі Ox і отримаємо точку $M_x(2;0;0)$. Проведемо з точки $M_x(2;0;0)$ відрізок довжиною 3 одиниці паралельно осі Oy в від'ємному напрямку, і отримаємо точку $M_{xy}(2;-3;0)$. Проведемо з точки $M_{xy}(2;-3;0)$ відрізок довжиною 5 одиниць паралельно осі Oz в її додатному напрямку і отримаємо шукану точку $M(2;-3;5)$.

(Точку $N(-2;4;-5)$ побудувати самостійно). ■

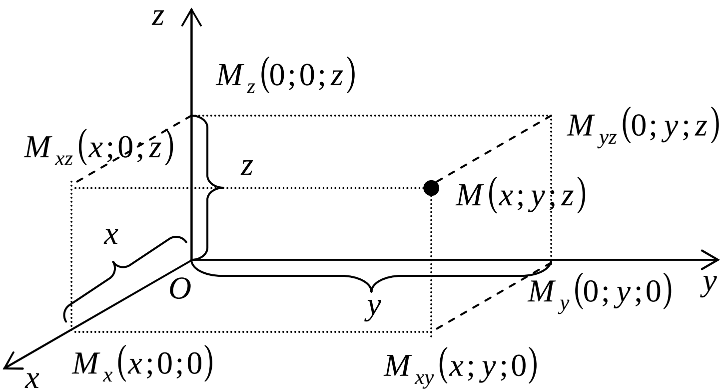

Рис. 83

Величина, яка цілком характеризується своїм числовим значенням, називається ***скалярною величиною*** (***скаляром***).

Приклади скалярів: площа фігури, густина речовини, температура, електричний заряд і т. п.

Величина, яка характеризується не тільки числовим значенням, а й напрямком, називається ***векторною величиною*** (***вектором***).

Приклади векторів: швидкість, сила, момент сили, напруженість електричного поля і т. п.

Вектор зображається напрямленим прямолінійним відрізком, в якому вказано його ***початок*** A і ***кінець*** B. Позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$ (рис. 84).

Модулем (***абсолютною величиною, довжиною***) вектора називається довжина відрізка, який зображає цей вектор. Позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $\left|\vec{a}\right|$.

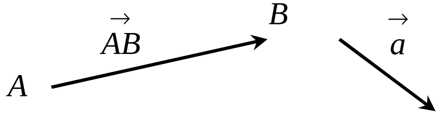

Рис. 84

Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називається ***нульовим вектором*** і позначається $\vec{0}$. Його модуль дорівнює нулю, а напрям довільний (невизначений).

Вектор одиничної довжини називається ***одиничним вектором*** (***ортом***).

<u>Зауваження 1</u>. Надалі будемо розглядати тільки ***вільні вектори***, для яких вибір положення початку не має значення. Вільний вектор цілком характеризується модулем і напрямком.

Вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називаються ***колінеарними*** (***паралельними***). Позначається $\vec{a} \parallel \vec{b}$

<u>Зауваження 2</u>. Нульовий вектор колінеарний будь-якому вектору.

Вектори, які лежать у паралельних площинах або в одній площині, називаються ***компланарними***.

<u>Зауваження 3</u>. Два вектори завжди компланарні.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними***, якщо: 1) модулі векторів рівні $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$; 2) вектори колінеарні $\vec{a} \parallel \vec{b}$ і напрямлені в один бік. Позначається $\vec{a} = \vec{b}$.

3.4.2. Лінійні операції над векторами

Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який визначається за правилом трикутника (рис. 85) або за правилом паралелограма (рис. 86).

Добутком вектора $\vec{a}$ ***на число*** λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який задовольняє наступні умови: 1) $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$; 2) $\lambda\vec{a}\parallel\vec{a}$; 3) якщо $\lambda>0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в один бік; якщо $\lambda<0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в протилежні боки; якщо $\lambda=0$, то $0\vec{a}=\vec{0}$.

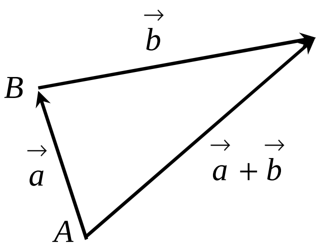

Рис. 85

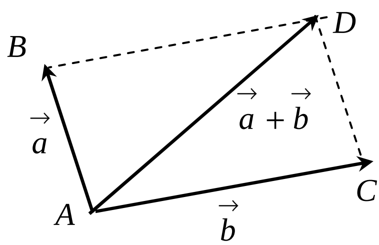

Рис. 86

Вектор $(-1)\vec{a}$ називається ***протилежним*** вектору $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$.

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

Різниця $\vec{a}-\vec{b}$ обчислюється за формулою

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \ .$$

Розглянуті операції називаються лінійними, оскільки мають відповідні властивості (аналогічні властивостям операцій над дійсними числами):

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \ ; \quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \ ;$$

$$\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda \ ; \quad (\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a}) \ ; \quad \lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b} \ ;$$

$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a} \ ; \quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a} \ ; \quad 1\vec{a}=\vec{a} \ .$$

3.4.3. Проекція вектора. Координати вектора. Рівність векторів у координатній формі

Проекцією вектора $\vec{a}$ на ненульовий вектор $\vec{b}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, називається число, яке позначається $np_{\vec{b}}\vec{a}$ і обчислюється за формулою

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi \ ,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $0\le\varphi\le\pi$ (рис. 87).

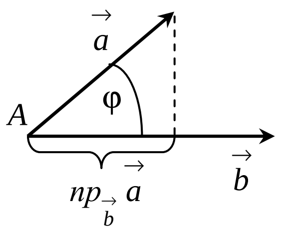

Рис. 87

Нехай у просторі задана декартова прямокутна система координат (рис. 88). Упорядкована трійка одиничних векторів (ортів) $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ зі спільним початком O, спрямованих вздовж додатного напрямку відповідно осей Ox, Oy і Oz, утворює ***координатний базис*** $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$.

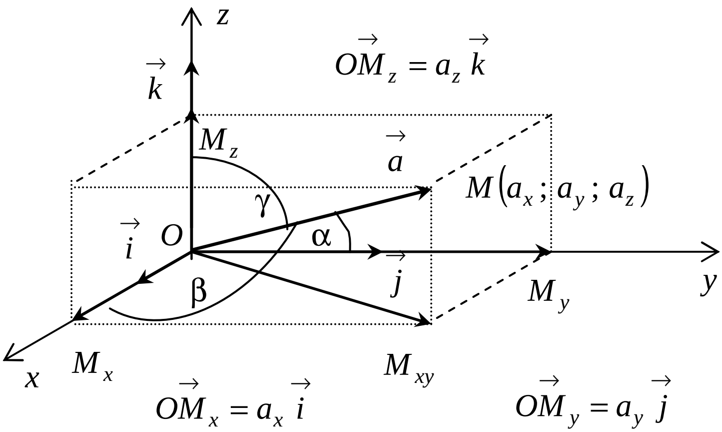

Рис. 88

Нехай у координатному просторі $Oxyz$ заданий деякий вектор $\vec{a}$ (рис. 88). Проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат

$$a_x = np_{Ox}\vec{a}\ ;\quad a_y = np_{Oy}\vec{a}\ ;\quad a_z = np_{Oz}\vec{a}$$

називаються ***координатами*** (***компонентами***) вектора $\vec{a} = \vec{a}(a_x; a_y; a_z)$.

Координатні орти мають вигляд:

$$\vec{i}(1; 0; 0),\quad \vec{j}(0; 1; 0),\quad \vec{k}(0; 0; 1)\ .$$

Оскільки вектор $\vec{a}$ – вільний, то його можна відкладати від довільної точки, зокрема, від початку координат O. Тоді вектор $\vec{OM} = \vec{a}$ служить ***радіусом-вектором*** точки $M(a_x; a_y; a_z)$.

Радіус-вектор $\vec{OM} = \vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з вимірами $|\vec{OM}_x| = |a_x|$, $|\vec{OM}_y| = |a_y|$ і $|\vec{OM}_z| = |a_z|$. Тому

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \ .$$

Модуль вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат.

Кути α, β і γ, які утворює вектор $\vec{a}$ відповідно з осями Ox, Oy і Oz, називаються ***напрямними***, а

$$\cos\alpha = a_x \Big/ |\vec{a}| \ ; \quad \cos\beta = a_y \Big/ |\vec{a}| \ ; \quad \cos\gamma = a_z \Big/ |\vec{a}|$$

називаються ***напрямними косинусами*** вектора.

Зауваження. Напрямні косинуси зв'язані співвідношенням

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \ .$$

(Перевірити самостійно).

Приклад. Знайти модуль і напрямні косинуси вектора $\vec{a}(-1; 2; -2)$. (Розв'язати самостійно).

Із співвідношень

$$\vec{a} = \vec{OM} = \vec{OM}_{xy} + \vec{OM}_z = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y + \vec{OM}_z$$

$$\text{і} \quad \vec{OM}_x = a_x \vec{i} \ ; \quad \vec{OM}_y = a_y \vec{j} \ ; \quad \vec{OM}_z = a_z \vec{k} \ ,$$

одержимо

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

– ***розклад вектора за координатним базисом*** $\left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$.

Якщо відомі координати початку $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і кінця $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, то із співвідношення

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

маємо

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1)\ .$$

Тобто, *координати вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *дорівнюють різниці відповідних координат його кінця* $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ *і початку* $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$.

Відстань між двома точками $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ обчислюється за формулою

$$M_1M_2 = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Два вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні координати*

$$\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$$

3.4.4. Лінійні операції над векторами у координатній формі. Умова колінеарності векторів

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тоді

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}\ ;$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})-(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k}\ ;$$

$$\lambda\vec{a}=\lambda(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}\ .$$

Тобто, *лінійні операції над векторами виконуються покомпонентно*:

при додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються);

при множенні вектора на число кожна координата множиться на це число.

<u>Умова колінеарності (паралельності) двох векторів</u>: *Два ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні*

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z};\quad \vec{a}\neq\vec{0};\ \vec{b}\neq\vec{0}\ .$$

$$\square\ \vec{a}\parallel\vec{b}\ \Leftrightarrow\ \exists\lambda,\ \vec{a}=\lambda\vec{b}\ \Leftrightarrow\ a_x=\lambda b_x\ ;$$

$$a_y=\lambda b_y;\ a_z=\lambda b_z\ \Leftrightarrow\ \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\ .\qquad\blacksquare$$

<u>Приклад</u>. Знайти, при яких значеннях α і β дані вектори колінеарні

$$\vec{a}=(\alpha-2;\ 4;\ -3);\quad \vec{b}=(5;\ 3\beta;\ 6)\ .$$

$$\square\ \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}\ ;\quad \frac{\alpha-2}{5}=\frac{4}{3\beta}=\frac{6}{-3}\ ;$$

$$\frac{\alpha-2}{5}=-2\ ;\ \frac{4}{3\beta}=-2\ ;\quad \alpha=-8\ ;\quad \beta=-\frac{3}{2}\ .\ \blacksquare$$

3.4.5. Поділ відрізка у заданому відношенні

Координати точки $M(x;\ y;\ z)$, яка ділить відрізок M_1M_2 у заданому відношенні λ, починаючи від точки M_1, визначаються за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ ;\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ ;\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\ .$$

$$\square\quad \overrightarrow{M_1M}\parallel\overrightarrow{MM_2}\ \Leftrightarrow\ \frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{z-z_1}{z_2-z}=\lambda\ ;$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda\ ;\quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda\ ;\quad \frac{z-z_1}{z_2-z}=\lambda\ ;$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ ;\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ ;\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\ .\quad\blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda=1$. Тоді координати середини відрізка визначаються за формулами:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\ ;\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}\ .$$

<u>Приклад</u>. Точки $A(1;-4;\ 3)$ і $B(3;\ 0;\ 6)$ служать кінцями діаметра сфери. Знайти координати її центра $C(x;\ y;\ z)$ і радіус r.

$$\square\quad AC=BC:\ x=\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\ ;\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}\ ;$$

$$x=\frac{1+3}{2}=2\ ;\ \ y=\frac{-4+0}{2}=-2\ ;\ \ z=\frac{4+6}{2}=5\ ;\ \ C(2;-2;5)\ ;$$

$$r=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ ;$$

$$r=\sqrt{(2-1)^2+(-2-(-4))^2+(5-3)^2}=3\ .\quad\blacksquare$$

3.4.6. Скалярний добуток векторів. Умова перпендикулярності двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi .$$

Нагадаємо, що $\cos 0 = 1;\ \cos 90^\circ = 0$.

Властивості скалярним добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

4) $(\vec{a})^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$.

Безпосередньо з означення маємо $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

Тоді $пр_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів: *два ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді , коли їх скалярний добуток дорівнює нулю*

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \quad \vec{a},\vec{b} \neq \vec{0} .$$

Оскільки координатні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ взаємно перпендикулярні і мають одиничну довжину, то

$$(\vec{i})^2=1\ ;\ \ (\vec{j})^2=1\ ;\ (\vec{k})^2=1\ ;$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0\ ;\ \ \vec{i}\cdot\vec{k}=0\ ;\ \ \ \vec{j}\cdot\vec{k}=0\ .$$

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\ ;\ \ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\ .$

Тоді $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$

$$=a_xb_x(\vec{i})^2+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y(\vec{j})^2+$$

$$+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z(\vec{k})^2=$$

$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ .$$

Таким чином, *скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ .$$

Звідси $\vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0;\ \ \vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}\ .$

<u>Приклад</u>. Знайти, при якому значенні параметра α задані вектори перпендикулярні

$\vec{a}=(2\alpha;-5;-3);\ \ \ \vec{b}=(\alpha;-\alpha;6)\ .$

$$\square\ \ \vec{a}\perp\vec{b}\ \Leftrightarrow\ a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0\ ;$$

$$2\alpha\cdot\alpha+(-5)\cdot(-\alpha)+(-3)\cdot 6=0\ ;$$

$$2\alpha^2+5\alpha-18=0;\quad \alpha_1=2;\quad \alpha_2=-9/2\ .\ \ \blacksquare$$

<u>Фізичний зміст скалярного добутку</u>: якщо під дією сили $\vec{F}$ матеріальна точка здійснює переміщення $\vec{s}$, то виконана робота дорівнює скалярному добутку сили на переміщення $A=\vec{F}\cdot\vec{s}$.

3.4.7. Векторний добуток векторів. Площа трикутника

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 89) називається вектор, який позначається $\vec{a}\times\vec{b}$ і задовольняє наступні умови:

1) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) Модуль вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ дорівнює добутку модулів співмножників на синус кута φ між ними

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi .$$

Іншими словами, модуль векторного добутку $\vec{a}\times\vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (<u>геометричний зміст векторного добутку</u>):

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=S_{пар} .$$

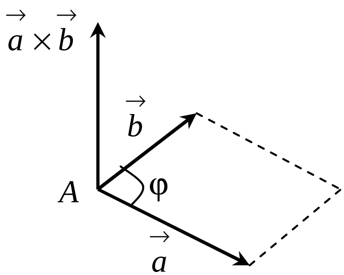

Рис. 89

3) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ напрямлений так, що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ здійснюється у додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки), якщо дивитися з кінця вектора $\vec{a}\times\vec{b}$.

Іншими словами, напрям вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ визначається за правилом буравчика.

Отже,

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a};\quad \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b};\cdot\quad |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=S_{ïàð}\ .$$

Нагадаємо, що $\sin 0 = 0$.

<u>Зауваження 1</u>. Векторний добуток нульовий, якщо вектори колінеарні або хоча б один із них нульовий.

<u>Властивості векторного добутку</u>:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

Векторний добуток не комутативний: при зміні порядку співмножників він змінює знак на протилежний, залишаючись таким же за абсолютною величиною;

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda\,\vec{a}\times\vec{b}$;

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

4) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

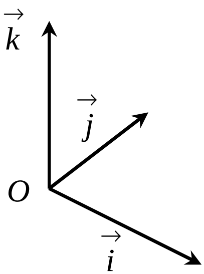

Рис. 90

Враховуючи взаємну орієнтацію координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ (рис. 90), отримаємо:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0};\quad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0};\quad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0};$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j};\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\ .$$

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Тоді *векторний добуток двох векторів дорівнює визначнику третього порядку, в якому перший рядок складається з координатних ортів, другий – з координат першого співмножника, а третій – з координат другого співмножника*

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

□ $$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+$$

$$+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}++a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. Оскільки діагональ ділить паралелограм на два рівних трикутника, то з геометричного змісту векторного добутку маємо

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|.$$

Приклад. Обчислити площу трикутника з вершинами

$$A(1;-1;2),\quad B(5;-6;2)\ \text{ і }\ C(1;3;-1).$$

□ $$\vec{AB}=\left(5-1;-6-(-1);2-2\right)=\left(4;-5;0\right);$$

$$\vec{AC}=\left(1-1;3-(-1);-1-2\right)=\left(0;4;-3\right);$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 4 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k}\ ;\quad |\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=25\ ;$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 25=12{,}5\ . \qquad \blacksquare$$

3.4.8. Мішаний добуток трьох векторів. Об’єм піраміди. Умова компланарності трьох векторів. Розклад вектора за довільним базисом

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Позначається $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ або $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Геометричний зміст: *модуль мішаного добутку* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ *чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ (рис. 91): $V_{пар-да}=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$.

$$\square\ \ V_{пар-да}=S_{пар-ма}\cdot H\ ;\ \ S_{пар-ма}=|\vec{a}\times\vec{b}|\ ;$$

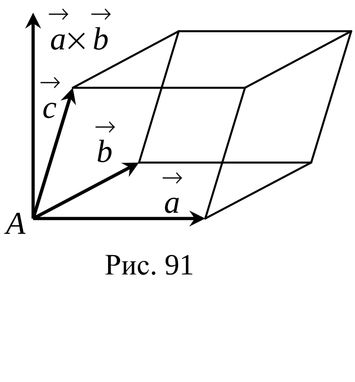

Рис. 91

$$H=\left|np_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}\right|=$$

$$=\frac{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|}{|\vec{a}\times\vec{b}\,|};$$

$$V_{пар-да} = |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot\frac{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|. \ \blacksquare$$

<u>Зауваження 1</u>. Об’єм трикутної піраміди $SABC$ обчислюється за формулою $V_{SABC} = \frac{1}{6}\,|(\vec{SA}\times\vec{SB})\cdot\vec{SC}|$.

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$;

$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$.

Тоді *мішаний добуток трьох векторів дорівнює визначнику третього порядку, в якому кожний рядок складається з координат відповідного співмножника*

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$= \left(\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k} \right)\cdot(c_x\vec{i} +$$

$$+ c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)c_x - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)c_y +$$

$$+ \left(a_x b_y - a_y b_x\right)c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad \blacksquare$$

Приклад 1. Задані координати вершин трикутної піраміди $S(4;-1;2)$, $A(5;1;4)$, $B(3;2;-1)$, $C(0;0;3)$. Знайти її об’єм.

$$\square \quad \vec{SA} = (5-4;\, 1-(-1);\, 4-2) = (1;\, 2;\, 2)\ ;$$

$$\vec{SB} = (3-4;\, 2-(-1); -1-2) = (1;\, 3;\, -3)\ ;$$

$$\vec{SC} = (0-4;\, 0-(-1);\, 3-2) = (-4;\, 1;\, 1);\quad (\vec{SA}\times\vec{SB})\cdot\vec{SC} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 54\ ;\ \ V_{SABC} = \frac{1}{6}\ |(\vec{SA}\times\vec{SB})\cdot\vec{SC}\,| =$$

$$= (1/6)\cdot|54| = 9\ . \qquad \blacksquare$$

Зауваження 2. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, то відповідний паралелепіпед вироджується і його об’єм дорівнює нулю. Звідси маємо умову компланарності трьох векторів: *три вектора компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю*:

$$\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}\ \text{– компланарні} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0\ .$$

Приклад 2. Задані три точки $A(1;\, 0;\, -1)$, $B(4;\, -1;\, 2)$ $C(0;\, 1;\, -3)$. Знайти значення параметра α, при якому точка $M(2;\, \alpha;\, -1)$ лежить в площині (ABC).

□ Указані чотири точки лежать в одній площині, якщо три вектори $\vec{AM}$, $\vec{BM}$ і $\vec{CM}$ компланарні, тобто

$$(\vec{AM}\times\vec{BM})\cdot\vec{CM} = 0\ .$$

$$\vec{AM} = (2-1;\, \alpha-0;\, -1-(-1)) = (1;\, \alpha;\, 0)\ ;$$

$$\vec{BM} = (2-4;\, \alpha-(-1);\, -1-2) = (-2;\, \alpha+1;\, -3)\ ;$$

$$\vec{CM} = \left(2-0;\ \alpha-1;\ -1-(-3)\right) = \left(2;\ \alpha-1;\ 2\right)\ ;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -2 & \alpha+1 & -3 \\ 2 & \alpha-1 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ; \quad \alpha = \frac{1}{3}\ . \qquad \blacksquare$$

<u>Зауваження 3</u>. Довільна трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворює ***базис*** у тому розумінні, що будь-який вектор $\vec{d}$ єдиним способом може бути поданий у вигляді

$$\vec{d} = d_a\,\vec{a} + d_b\,\vec{b} + d_c\,\vec{c}\ .$$

Цю рівність називають ***розкладом вектора*** $\vec{d}$ ***за базисом*** $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$. Числа d_a, d_b, d_c служать ***координатами*** вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

Якщо відомі координати базисних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і вектора $\vec{d}$ у координатному базисі $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$, то, записавши розклад вектора $\vec{d}$ за новим базисом $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ у скалярній формі, отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_x\,d_a + b_x\,d_b + c_x\,d_c = d_x \\ a_y\,d_a + b_y\,d_b + c_y\,d_c = d_y \\ a_z\,d_a + b_z\,d_b + c_z\,d_c = d_z \end{cases}$$

для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$.

Приклад 3. Перевірити, що задані три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати d_a, d_b, d_c заданого вектора $\vec{d}$ у цьому базисі $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$:

$$\vec{a} = (2; -1; 4)\ ; \quad \vec{b} = (1; 0; -3)\ ; \quad \vec{c} = (-2; 1; -1)\ ;$$

$$\vec{d} = (0; -1; 10)\ .$$

□ $$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 4 - 0 - 1 + 6 = 3 \neq 0 .$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні і утворюють базис. Складемо і розв'яжемо систему рівнянь для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$:

$$\begin{cases} 2d_a + d_b - 2d_c = 0 \\ -d_a + \quad + d_c = -1 \\ 4d_a - 3d_b - d_c = 10 \end{cases} ;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0\ ; \quad \Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3\ ;$$

$$\Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -6\ ; \quad \Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 0\ ;$$

$$d_a = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1;\ d_b = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2;\ d_c = \frac{\Delta^{(3)}}{\Delta} = \frac{0}{3} = 0 . \ ■$$

3.5. Лінійні простори та відображення. Власні вектори і власні числа

3.5.1. Поняття про n-вимірний лінійний простір

Нехай n – довільне фіксоване натуральне число. Будь-яку упорядковану множину n дійсних чисел $(x_1;\, x_2;...;x_n)$ називають ***n-вимірною точкою*** M, тобто $M=(x_1;\, x_2;...;x_n)$. Множину всіх n-вимірних точок називають ***n-вимірним точковим простором*** R^n. Числа $x_1;\, x_2;...;x_n$ називають ***координатами*** точки M. Число n називають розмірністю простору.

Одновимірний простір R^1 (пряма), двовимірний простір R^2 (площина) і тривимірний простір R^3 можна зобразити геометрично. Для інших просторів наочність зникає.

Система координат простору R^n задається сукупністю n координатних осей Ox_i, $i=\overline{1,\, n}$, зі спільним початком $O(0;\, 0;...;0)$. При цьому i-та координатна вісь – це множина всіх точок $M(x_1;\, x_2;...;x_n)$, у яких i-та координата x_i довільна, а всі інші рівні нулю $x_k=0$; $k=\overline{1,\, n}$; $k\neq i$.

Будь-яка упорядкована пара точок $A(x_1;\, x_2;...;x_n)$ (***початок***) і $B(y_1;\, y_2;...;y_n)$ (***кінець***) n-вимірного простору називається ***n-вимірним вектором*** $\vec{a}=\vec{AB}$. Вектору $\vec{a}=\vec{AB}$ відповідає упорядкована множина чисел $(a_1;\, a_2;...;\, a_n)$ – його ***координат*** (***компонент***). При цьому $a_i=y_i-x_i$; $i=\overline{1,\, n}$.

Модуль вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат: $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}$.

Компоненти n-вимірного вектора $\vec{a}(a_1;\, a_2;...;\, a_n)$ можна розміщувати у рядок або у стовпчик. При цьому говорять про ***вектор-рядок*** (***матрицю-рядок***) або ***вектор-стовпець*** (***матри-***

цю-стовпець):

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Довільній точці $M(a_1; a_2; ...; a_n)$ n-вимірного простору R^n відповідає певний ***радіус-вектор*** $\vec{a} = \vec{OM} = (a_1; a_2; ...; a_n)$ і навпаки. Тому R^n також можна розглядати як n***-вимірний векторний простір***.

Векторний простір R^n називається ***лінійним***, якщо у ньому визначено операції додавання векторів і множення вектора на число, які мають наведені раніше лінійні властивості.

Непорожня підмножина V векторів із R^n називається ***лінійним підпростором*** (***лінійним многовидом***) у R^n, якщо для двох довільних векторів $\vec{a} \in V$ і $\vec{b} \in V$ будь-яка їх лінійна комбінація $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \in V$.

Лінійний підпростір V, утворений всіма можливими лінійними комбінаціями вигляду $\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + ... + \alpha_m \vec{a_m}$, називається ***лінійною оболонкою*** системи векторів $\vec{a}_1$; $\vec{a}_2$; ...; $\vec{a}_m$.

Вектори $\vec{a}_1$; $\vec{a}_2$; ...; $\vec{a}_m$ називаються ***лінійно незалежними,*** якщо рівність

$$\alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + ... + \alpha_m \vec{a_m} = 0$$

виконується лише за умови, коли всі коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ одночасно дорівнюють нулю.

Якщо ця рівність можлива, коли хоча б один з коефіцієнтів відмінний від нуля, то вектори називаються ***лінійно залежними***.

Дана рівність у координатній формі – це лінійна однорідна система

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1m}\alpha_m = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nm}\alpha_m = 0\ , \end{cases}$$

де $\vec{a}_j = \left(a_{1j}\,;\, a_{2j}\,;\ldots;\, a_{nj}\right),\quad j = \overline{1,\, m}$. Однорідна система завжди має нульовий розв'язок $\alpha_j = 0,\quad j = \overline{1,\, m}$. Якщо крім нульового система має інші розв'язки, то вектори лінійно залежні. Якщо нульовий розв'язок єдиний, то вектори лінійно незалежні.

Максимальне число лінійно незалежних векторів дорівнює розмірності простору.

Будь-яка упорядкована множина n лінійно незалежних векторів $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ n-вимірного лінійного векторного простору R^n утворює ***базис*** у тому смислі, що *довільний вектор* $\vec{a}$ *цього простору єдиним способом можна подати у вигляді розкладу за вибраним базисом*

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n\ ,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – координати вектора $\vec{a}$ у вибраному базисі $\left\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n\right\}$.

Упорядкована множина n векторів $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ є лінійно незалежною (утворює базис) n-вимірного простору R^n тоді і тільки тоді, коли визначник, у якому стовпцями служать координати відповідних векторів, відмінний від нуля

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \ldots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \ldots & e_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{n1} & e_{n2} & \ldots & e_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

Наприклад, лінійно незалежні одиничні вектори

$$\vec{e_1} = (1;\, 0;\ldots;\, 0), \quad \vec{e_2} = (0;\, 1;\ldots;\, 0), \ \ldots, \quad \vec{e_n} = (0;\, 0;\ldots;\, 1)$$

утворюють ***канонічний координатний базис*** простору R^n. При цьому для вектора $\vec{a}(a_1;\, a_2;\ldots;\, a_n)$ маємо

$$\vec{a} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + \ldots + a_n \vec{e_n} \ .$$

Будь-які два неколінеарні вектори на площині R^2 є лінійно незалежними і утворюють базис

Будь-які три некомпланарні вектори тривимірного простору R^3 є лінійно незалежними і утворюють базис.

<u>Приклад</u>. Задано три вектори

$$\vec{a} = (2;\, -1;\, -3); \quad \vec{b} = (-1;\, 3;\, 0); \quad \vec{c} = (1;\, 2;\, -2) \ .$$

у деякому базисі простору R^3. Переконатися, що ці вектори утворюють новий базис і знайти координати вектора

$$\vec{d} = (-4;\, 7;\, 3)$$

у цьому базисі.

$$\square \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \ .$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – лінійно незалежні і утворюють базис. Нехай $\vec{d} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c}$, де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі. Тоді

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = -4 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 7 \\ -3\alpha_1 - 2\alpha_3 = 3 \end{cases}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 ;$$

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -5 ; \quad \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 10 ;$$

$$\Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 7 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 ; \quad \alpha_1 = \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1 ;$$

$$\alpha_2 = \frac{\Delta^{(2)}}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2 ; \quad \alpha_3 = \frac{\Delta^{(3)}}{\Delta} = \frac{0}{5} = 0 .$$

Отже, в новому базисі $\vec{d} = (-1;\ 2;\ 0)$. ■

3.5.2. Лінійні відображення

Нехай X і Y – довільні множини і D – деяка підмножина множини X. Якщо кожному елементу x множини D за деяким законом F ставиться у відповідність певний елемент y множини Y, то говорять, що задано ***відображення*** (***перетворення, оператор***) $y = F(x)$.

$$y = f(x),\ x \in X \quad \text{або} \quad f:\ X \to Y \quad \text{або} \quad X \xrightarrow{f} Y .$$

Множина D називається ***областю визначення*** відображення F і позначається $D(F)$.

Якщо $y = F(x)$, то елемент y називається ***образом*** елемента x, а елемент x – ***прообразом*** елемента y. Множина всіх образів y, коли x пробігає всю область визначення D, називається ***областю значень*** відображення F і позначається $E(F)$.

Інші форми запису відображення

$$F: X \to Y \quad \text{або} \quad X \xrightarrow{F} Y .$$

Два відображення F_1 і F_2 називаються ***рівними*** $F_1 = F_2$, якщо їх області визначення співпадають $D(F_1) = D(F_2) = D$ і для всіх $x \in D$ виконується рівність $F_1(x) = F_2(x)$.

Нехай X і Y – лінійні простори, $X = R^n$, $Y = R^m$. Відображення A з областю визначення $D(A)$ називається ***лінійним***, якщо виконуються умови:

1) $D(A)$ – лінійний підпростір;

2) $A(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2) = \alpha_1 A(\vec{x}_1) + \alpha_2 A(\vec{x}_2)$

для будь-яких векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D(A)$ і довільних чисел α_1, α_2.

<u>Зауваження</u>. Надалі обмежимось розглядом найбільш важливого для практики випадку, коли областю визначення лінійного відображення служить весь відповідний простір: $D(A) = R^n$.

Область значень $E(A)$ лінійного відображення $\vec{y} = A(\vec{x})$ також є лінійним підпростором. Розмірність області значень $E(A)$ називається ***рангом*** лінійного перетворення.

Множина всіх векторів $\vec{x} \in R^n$, які лінійне відображення A переводить у нульовий вектор $A(\vec{x}) = \vec{0}$, називається ***ядром*** цього відображення.

Ядро лінійного відображення також є лінійним підпростором. Розмірність ядра називається ***дефектом*** лінійного відображення A.

Сума рангу і дефекту лінійного відображення дорівнює розмірності простору R^n – області визначення.

Якщо прообраз $\vec{x}$ і образ $\vec{y}$ лінійного відображення розглядати як матриці-стовпці

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix},$$

то лінійне відображення можна подати у матричній формі

$$\vec{y} = A\vec{x},$$

де A – ***матриця лінійного відображення***, складена з його коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Нехай задано два лінійні відображення $\vec{y} = A\vec{x}$ і $\vec{z} = B\vec{y}$, де $\vec{x} \in R^n$, $\vec{y} \in R^m$, $\vec{z} \in R^k$. У результаті послідовного застосування спочатку першого, а потім другого з них можна одержати лінійне відображення $\vec{z} = BA\vec{x}$, яке називається ***добутком відображень***. Матриця цього відображення дорівнює добутку матриць відображень B і A.

Приклад 1. Для заданих двох лінійних відображень знайти добуток першого з них на друге:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 2x_1 - 3x_2 \\ y_3 = -x_1 + 4x_2 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} z_1 = -2y_1 + y_2 - y_3 \\ z_2 = y_1 - 3y_2 + 2y_3 \end{cases} .$$

□ Дані відображення мають відповідні матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо добуток BA цих матриць

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ -7 & 19 \end{pmatrix}.$$

Отже, шуканий добуток (в координатній формі)

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 11x_2 \\ z_2 = -7x_1 + 19x_2 \end{cases} . \quad ■$$

Якщо лінійне відображення кожному вектору $\vec{x} \in R^n$ ставить у відповідність той самий вектор $\vec{x}$, то відображення називається ***тотожним*** (***одиничним***) і позначається E: $E\vec{x} = \vec{x}$. Матриця тотожного відображення E є одиничною:

Нехай розмірності області визначення і області значень лінійного відображення $\vec{y} = A\vec{x}$ співпадають $n = m$. Тоді відображення A називається ***зворотним***, коли існує ***обернене лінійне відображення*** A^{-1}, яке кожному вектору $\vec{y} \in R^n$ ставить у відповідність єдиний вектор $\vec{x} \in R^n$ такий, що $\vec{y} = A\vec{x}$. Матриця оберненого відображення A^{-1} є оберненою до матриці A.

Приклад 2. Знайти матрицю, обернену до заданої матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}.$$

□ Запишемо відповідне лінійне перетворення $\vec{y}=A\vec{x}$ у координатній формі

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = -3x_1 + 4x_2 \end{cases}.$$

Розв'яжемо цю систему відносно x_1, x_2, наприклад, методом Гаусса. Одержимо обернене відображення (у координатній формі)

$$\begin{cases} x_1 = -2y_1 - y_2 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2}y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 \end{cases}.$$

Матриця цього відображення

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

є матрицею, оберненою до матриці A. ■

3.5.3. Перетворення прямокутних координат на площині. Паралельне перенесення і поворот

Нехай на площині задано дві декартові прямокутні системи координат: стара $Oxyz$ і нова $O_*x_*y_*z_*$. Треба знайти відображення, що виражає координати довільної точки (вектора) в одній системі через її координати в іншій.

Розглянемо три випадки.

Паралельне перенесення системи координат. Нехай положення початку координат нової системи O_* у старій системі задається радіус-вектором $\vec{r_0} = (x_0\,; y_0)$, а відповідні осі обох систем паралельні та однаково напрямлені (рис. 92).

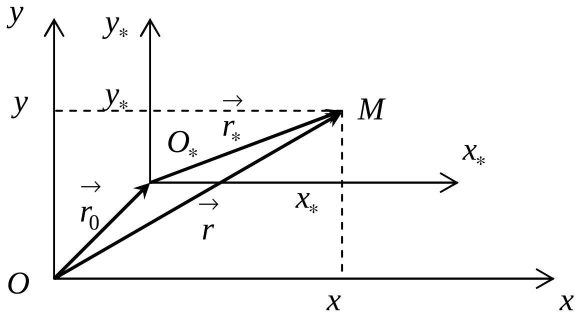

Рис. 92

Положення довільної точки M у старій системі визначається радіус-вектором $\vec{r} = (x; y)$, а у новій – радіус-вектором $\vec{r_*} = (x_*\,; y_*)$. Із трикутника OO_*M маємо $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{r_*}$. Записуючи цей вираз у координатній формі, отримаємо формули

$$\begin{cases} x = x_* + x_0 \\ y = y_* + y_0 \end{cases},$$

якими старі координати подаються через нові.

З іншого боку $\vec{r_*} = \vec{r} - \vec{r_0}$. Переходячи до координатної форми, одержимо формули

$$\begin{cases} x_* = x - x_0 \\ y_* = y - y_0 \end{cases},$$

якими нові координати подаються через старі.

<u>Поворот системи координат</u>. Нехай обидві системи мають спільний початок, тобто $O = O_*$, а осі нової системи $O_*x_*y_*z_*$

повернуті на кут φ відносно осей старої системи $Oxyz$ (рис. 93).

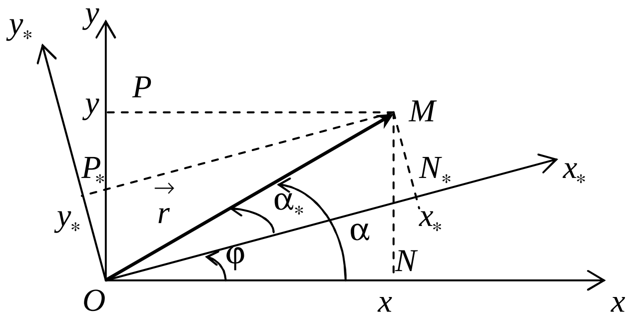

Рис. 93

Положення довільної точки M в обох системах визначається одним і тим же радіус-вектором, тобто $\vec{r} = \vec{r}_*$. Позначимо через r довжину радіус-вектора, а через α і α_* – кути які утворює радіус-вектор з віссю Ox старої і віссю Ox_* нової систем координат.

Із прямокутних трикутників ONM і OPM маємо

$$x = r\cos\alpha \ ; \quad y = r\sin\alpha \ .$$

Аналогічно, з прямокутних трикутників ON_*M і OP_*M отримаємо $x_* = r\cos\alpha_* \ ; \quad y_* = r\sin\alpha_*$.

Тоді, враховуючи співвідношення $\alpha = \alpha_* + \varphi$, одержимо

$$x = r\cos\alpha = r\cos(\alpha_* + \varphi) = r\cos\alpha_* \cos\varphi - r\sin\alpha_* \sin\varphi =$$

$$= x_* \cos\varphi - y_* \sin\varphi \ ; \quad y = r\sin\alpha = r\sin(\alpha_* + \varphi) =$$

$$= r\sin\alpha_* \cos\varphi + r\cos\alpha_* \sin\varphi = y_* \cos\varphi + x_* \sin\varphi \ .$$

Таким чином, маємо формули

$$\begin{cases} x = x_* \cos\varphi - y_* \sin\varphi \\ y = x_* \sin\varphi + y_* \cos\varphi \end{cases},$$

які виражають старі координати через нові.

Оскільки стара система координат повернута відносно нової на кут $-\varphi$, то аналогічно можна отримати формули

$$\begin{cases} x_* = x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y_* = -x \sin\varphi + y \cos\varphi \end{cases},$$

якими нові координати подаються через старі.

<u>Зауваження 1</u>. Одержані перетворення повороту є взаємно оберненими лінійними відображеннями.

<u>Паралельне перенесення і поворот системи координат</u>. Нехай положення початку координат нової системи O_* у старій системі задається радіус-вектором $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$, а осі нової системи $O_* x_* y_* z_*$ повернуті на кут φ відносно осей старої системи $Oxyz$ (рис. 94).

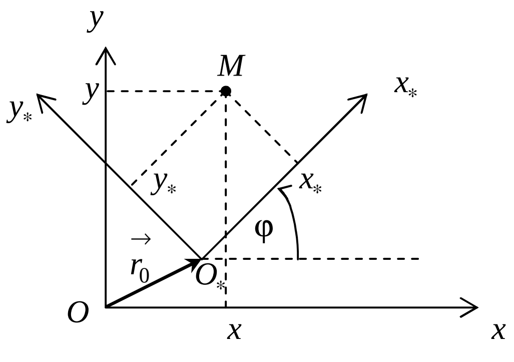

Рис. 94

Виходячи з отриманих раніше співвідношень і враховуючи незалежність паралельного перенесення і повороту, одержимо формули

$$\begin{cases} x = x_* \cos\varphi - y_* \sin\varphi + x_0 \\ y = x_* \sin\varphi + y_* \cos\varphi + y_0 \end{cases},$$

які виражають старі координати через нові, а також формули

$$\begin{cases} x_* = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi \\ y_* = -(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi \end{cases},$$

якими нові координати подаються через старі.

Зауваження 2. Перетворення координат використовуються, наприклад, для зведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду.

Приклад 1. Рівняння лінії другого порядку в старій системі координат має вигляд $4x^2 - 2xy + 4y^2 = 15$. Знайти рівняння цієї кривої в новій системі координат, яка одержана зі старої поворотом на кут $\varphi = 45^\circ$.

□ $$\begin{cases} x = x_* \cos 45^\circ - y_* \sin 45^\circ = x_* \sqrt{2}/2 - y_* \sqrt{2}/2 \\ y = x_* \sin 45^\circ + y_* \cos 45^\circ = x_* \sqrt{2}/2 + y_* \sqrt{2}/2 \end{cases};$$

$$4\left(x_* \sqrt{2}/2 - y_* \sqrt{2}/2\right)^2 - 2\left(x_* \sqrt{2}/2 - y_* \sqrt{2}/2\right)\times$$

$$\times\left(x_* \sqrt{2}/2 + y_* \sqrt{2}/2\right) + 4\left(x_* \sqrt{2}/2 + y_* \sqrt{2}/2\right)^2 = 15 \;;$$

$$2x_*^2 - 4x_*y_* + 2y_*^2 - x_*^2 + y_*^2 + 2x_*^2 + 4x_*y_* + 2y_*^2 = 15 \;;$$

$$3x_*^2 + 5y_*^2 = 15 \;; \quad \frac{x_*^2}{5} + \frac{y_*^2}{3} = 1 \;.$$

Отже, маємо еліпс із півосями $a = \sqrt{5}$ і $b = \sqrt{3}$. ■

Приклад 2. Загальне рівняння гіперболи в старій системі координат має вигляд $x^2 - 3y^2 + 2x + 12y - 20 = 0$. Звести рівняння гіперболи до канонічного вигляду за допомогою переходу до нової системи координат, одержаної зі старої паралельним перенесенням на вектор $\vec{r_0} = (-1; 2)$. (Розв'язати самостійно).

3.5.4. Власні вектори та власні числа квадратної матриці

Нехай A – квадратна матриця n-го порядку. Розглянемо відповідне лінійне відображення простору R^n самого в себе: $\vec{y} = A\vec{x}$. Якщо існують ненульовий вектор $\vec{x}$ і число λ такі, що виконується рівність $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, то говорять, що λ – ***власне число*** матриці A, а $\vec{x}$ – її ***власний вектор***, який відповідає власному числу λ.

Отже, множення матриці на власний вектор рівносильне множенню власного числа на цей вектор.

Вказане матричне рівняння можна подати у вигляді

$$A\vec{x} = \lambda E\vec{x}\ ; \quad (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}\,.$$

Ця однорідна квадратна система лінійних рівнянь має ненульовий розв'язок $\vec{x}$ тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю

$$\det(A - \lambda E) = 0\,.$$

Одержане рівняння називається ***характеристичним рівнянням*** матриці A. Відповідний многочлен

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

називається ***характеристичним многочленом*** матриці A.

Характеристичне рівняння можна подати в розгорнутій формі

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Власні числа $\lambda_j \ \left(j = \overline{1,n}\right)$ *є коренями характеристичного* *рівняння*.

Власні числа можуть бути дійсними чи комплексними, простими чи кратними. Множину всіх власних чисел $\lambda_j \left(j=\overline{1,n}\right)$ даної матриці називають її ***спектром***.

Якщо відоме деяке власне число λ, то з однорідної системи

$$\left(A-\lambda E\right)\vec{x}=\vec{0}$$

можна знайти відповідні власні вектори.

Найбільший модуль власного числа матриці називають її ***спектральним радіусом*** і позначають $\rho\left(A\right)$:

$$\rho\left(A\right)=\max_j\left|\lambda_j\right| .$$

<u>Властивості власних векторів і власних чисел</u>:

1) *Кожному власному вектору відповідає одне власне число*.

2) *Якщо* $\vec{x}$ *– власний вектор з власним числом* λ, *то довільний вектор* $\alpha\vec{x}$ $\left(\alpha\neq 0\right)$, *колінеарний вектору* $\vec{x}$, *також є власним вектором з тим же власним числом* λ. Тобто, *власний вектор визначається з точністю до довільного ненульового множника*. Звичайно виділяють одиничні власні вектори.

3) *Якщо* $\vec{x}_1$ *і* $\vec{x}_2$ *– власні вектори матриці* A *з одним і тим же власним числом* λ, *то їх сума* $\vec{x}_1+\vec{x}_2$ *також є власним вектором матриці* A *з тим же самим власним числом* λ.

4) *Визначник матриці* A *дорівнює добутку всіх її власних чисел* $\det A=\prod_{j=1}^{n}\lambda_j=\lambda_1\lambda_2...\lambda_n$.

5) ***Слідом*** матриці A називається сума всіх елементів головної діагоналі $Sp\,A=\sum_{j=1}^{n}a_{jj}=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$. *Слід ма-*

триці A дорівнює сумі всіх її власних чисел

$$Sp\,A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n \ .$$

<u>Зауваження</u>. Якщо $\vec{x}_j \quad \left(j = \overline{1,m}\right)$ – власні вектори матриці A відповідно з різними власними числами $\lambda_j \ \left(j = \overline{1,m}\right)$ $(m \le n)$, то ці вектори – лінійно незалежні. Обернене твердження у загальному випадку невірне: можуть існувати лінійно незалежні вектори, що відповідають одному і тому самому власному числу.

<u>Приклад 1</u>. Знайти власні числа λ_1, λ_2 та одиничні власні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

□ Власні числа знаходимо як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0 \ ; \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 32 = 0 \ ; \quad \lambda_1 = -4 \ ; \quad \lambda_2 = 8 \ .$$

З однорідної системи

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0} \ ; \quad \begin{cases} (-2-\lambda)\,x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (6-\lambda)\,x_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{де} \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

знаходимо відповідні власні вектори. Обчисливши їх модулі, виділяємо одиничні власні вектори.

При $\lambda_1 = -4$ маємо

$$\begin{cases} \left(-2-(-4)\right)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + \left(6-(-4)\right)x_2 = 0 \end{cases}; \quad x_1 = -2t; \ \ x_2 = t; \ \ t \in R \ ,$$

де t – параметр. Тоді

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix}; \quad |\vec{x}_1| = \sqrt{(-2t)^2 + t^2} = \sqrt{5}\,t; \quad \vec{e}_1 = \frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 8$ маємо

$$\begin{cases} (-2-8)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (6-8)x_2 = 0 \end{cases}; \quad x_1 = 2t; \quad x_2 = 5t; \quad t \in R; \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ 5t \end{pmatrix};$$

$$|\vec{x}_2| = \sqrt{(2t)^2 + (5t)^2} = \sqrt{29}\,t; \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{x}_2}{|\vec{x}_2|} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} \\ 5/\sqrt{29} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти власні числа λ_1, λ_2, λ_3 та одиничні власні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ матриці $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

□ Власні числа знаходимо як корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0; \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$-\lambda^3 + \lambda = 0; \quad \lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = -1.$$

З однорідної системи

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}; \quad \begin{cases} (-3-\lambda)x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (1-\lambda)x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}, \text{ де } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

знаходимо відповідні власні вектори. Обчисливши їх модулі, виділяємо одиничні власні вектори.

При $\lambda_1 = 0$ маємо

$$\begin{cases} -3x_1-2x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x_1+x_2=-2x_3 \\ x_1+x_2=-2x_3 \end{cases}; \quad \vec{x_1}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ t \end{pmatrix};$$

$$|\vec{x_1}|=\sqrt{0^2+(-2t)^2+t^2}=\sqrt{5}\,t\,; \quad \vec{e_1}=\frac{\vec{x_1}}{|\vec{x_1}|}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Власні вектори $\vec{e_2}$ і $\vec{e_3}$ знайдіть самостійно. ■

3.5.5. Матричні многочлени

Нехай A – довільна квадратна матриця n-того порядку. Якщо у довільний многочлен

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$$

замість змінної x підставити матрицю A, то отримаємо матрицю

$$f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\ldots+a_{m-1}A+a_mE\ ,$$

яка називається ***многочленом від матриці*** A (***матричним многочленом***).

Зауваження. Над многочленами від однієї і тієї ж матриці A можна здійснювати алгебраїчні дії як над звичайними многочленами.

Теорема Келі – Гамільтона. *Довільна квадратна матриця є коренем свого характеристичного многочлена*.

(Без доведення).

Приклад. Перевірити, що задана матриця

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

є коренем свого характеристичного многочлена.

□ Знаходимо характеристичний многочлен матриці A

$$f(\lambda)=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-10 \ .$$

Обчислимо $f(A)$

$$f(A)=A^2-3A-10E=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 9 & 16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 12\\ 9 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

3.5.6. Розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом простих ітерацій

Будь-яку квадратну систему лінійних рівнянь можна подати у вигляді $X = AX + B$.

Тоді її можна розв'язувати одним із методів послідовних наближень – ***методом простих ітерацій***

$$X_0 = C \ ; \quad X_k = AX_{k-1} + B \quad (k = 1,\, 2,\, 3,\, ...),$$

де вдале початкове значення C вибирається довільно, виходячи з досвіду попередніх розрахунків. За його відсутності можна, наприклад, покласти $C = 0$.

Послідовність X_k $(k = 1,\, 2,\, 3,\, ...)$ збігається до шуканого розв'язку X, якщо всі власні числа матриці A за модулем менші від одиниці.

На практиці зручніше користуватись умовою: *метод простих ітерацій є збіжним, якщо норма матриці* A *менша одиниці* $\|A\|<1$.

Приклад. Поклавши $X_0 = 0$, знайти методом простих ітерацій три перші наближення X_k $(k = 1,\, 2,\, 3)$ розв'язку X системи рівнянь $X = AX + B$, де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}3 & -0{,}5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}.$$

□ $$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2};$$

$$\|A\| = \left(|0{,}2|^2 + |0{,}3|^2 + |-0{,}4|^2 + |-0{,}5|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{0{,}54} < 1.$$

Отже, метод простих ітерацій є збіжним.

Нехай $X_0 = 0$. Тоді за формулою

$$X_k = AX_{k-1} + B \quad (k = 1, 2, 3, ...)$$

маємо: $$X_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}3 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}3 \end{pmatrix};$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}3 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}24 \\ -0{,}12 \end{pmatrix};$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}4 \\ 0{,}3 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}24 \\ -0{,}12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}196 \\ -0{,}168 \end{pmatrix}.$$ ■

3.6. Площина та пряма у просторі

3.6.1. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай на площині α задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і відомий ***вектор нормалі*** $\vec{n} = (A; B; C) \neq \vec{0}$ (рис. 95).

Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ на цій площині та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Точка M належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$. Використовуючи умову перпендикулярності векторів, маємо

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0$$

або в координатній формі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

– ***рівняння площини, що проходить через задану точку*** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\vec{n} = (A; B; C)$.

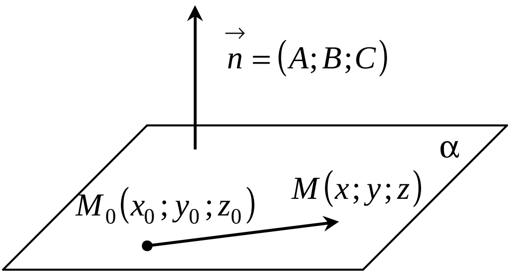

Рис. 95

3.6.2. Загальне рівняння площини. Дослідження неповного загального рівняння

Розкриємо дужки в рівнянні

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

і отримаємо $Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$. Згрупуємо сталі величини та позначимо $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Тоді одержимо

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

– ***загальне рівняння площини***, що є лінійним відносно координат x, y, z, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Зауваження. Загальне рівняння площини визначається з точністю до сталого множника.

Рівняння довільної площини можна звести до загального вигляду.

Теорема. *Будь-яка площина визначається лінійним рівнянням відносно координат* x, y, z. *Кожному лінійному рівнянню зі змінними* x, y, z *відповідає деяка площина*.

(Без доведення)

У таблиці 1 відображені особливості розміщення площини, коли один або декілька коефіцієнтів її загального рівняння дорівнюють нулю. (Частина ілюстративних зображень окремих випадків розміщення площини наведена на рис. рис. 96– 98. Ілюстрації для інших випадків зробіть самостійно).

Таблиця 1

№ п/п	Рівняння	Характеристика розміщення площини
1	$By + Cz + D = 0$	паралельна осі Ox
2	$Ax + Cz + D = 0$	паралельна осі Oy
3	$Ax + By + D = 0$	паралельна осі Oz (рис. 96)
4	$Ax + By + Cz = 0$	проходить через початок координат $O(0;0;0)$ (рис. 97)
5	$Cz + D = 0$	перпендикулярна до осі Oz (рис. 98)
6	$By + D = 0$	перпендикулярна до осі Oy
7	$Ax + D = 0$	перпендикулярна до осі Ox
8	$By + Cz = 0$	проходить через вісь Ox
9	$Ax + Cz = 0$	проходить через вісь Oy
10	$Ax + By = 0$	проходить через вісь Oz
11	$z = 0$	Координатна площина Oxy
12	$y = 0$	Координатна площина Oxz
13	$x = 0$	Координатна площина Oyz

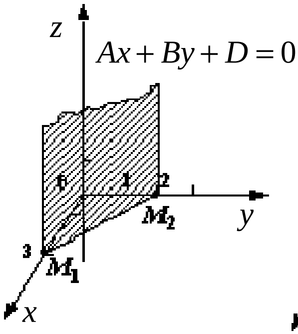

Рис. 96

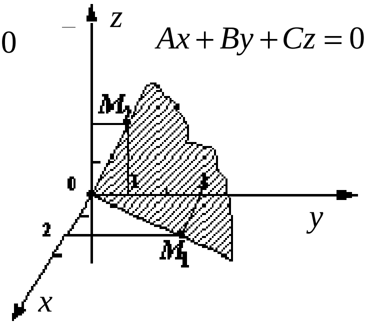

Рис. 97

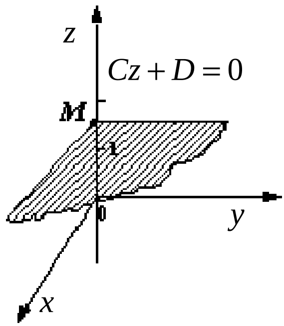

Рис. 98

Приклад. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\vec{NP}$.

$$\square \quad M \in \alpha\ ; \quad \vec{n} = \vec{NP} \perp \alpha\ ;$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

$$\vec{n} = \vec{NP} = (1-5;\ -3-(-6);\ -1-0) = (-4;\ 3;\ -1)\ ;$$

$$-4(x-1)+3(y-(-1))+(-1)(z-2)=0\ ;$$

$$-4x+4+3y+3-z+2=0\ ;\ -4x+3y-z+9=0\ ;$$

$$4x-3y+z-9=0\ . \quad \blacksquare$$

3.6.3. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай на площині α задано три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ і $M_3(x_3;y_3;z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис. 99).

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо три вектори

$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$

і $\overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1)$, що виходять з однієї точки M_1. Точка $M(x;y;z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні. Використовуючи умову компланарності трьох векторів, маємо

$$(\overrightarrow{M_1M}\times\overrightarrow{M_1M_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$$

або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

– ***рівняння площини, що проходить через три задані точки***.

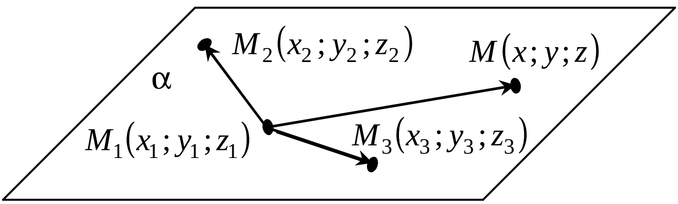

Рис. 99

Приклад. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через ці точки.

□ $\begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-2 \\ 5-1 & -6-(-1) & 0-2 \\ 1-1 & -3-(-1) & -1-2 \end{vmatrix} = 0$; $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$;

$$11x + 12y - 8z + 17 = 0 \ . \quad \blacksquare$$

3.6.4. Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай площина α перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ і $M_3(0;0;c)$ (рис. 100). Використовуючи рівняння площини, що проходить через три точки, маємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ bcx + acy + abz - abc = 0 \ ;$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

– ***рівняння площини у відрізках на осях***.

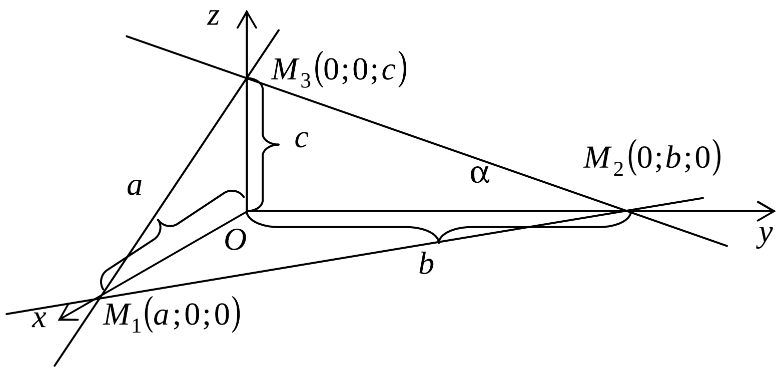

Рис. 100

Приклад 1. Звести загальне рівняння площини

$$3x - 6y + 8z + 12 = 0$$

до вигляду рівняння у відрізках на осях.

$$\square \quad 3x-6y+8z=-12 \quad \Big| :(-12)\,; \quad \frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-2/3}=1. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти точки перетину площини

$$\alpha: \quad 3x-2y+6z-12=0$$

з координатними осями і зобразити площину, побудувавши її сліди – лінії перетину з координатними площинами.

$$\square \quad \alpha \cap Ox: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ 3x-2y+6z-12=0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} a=4 \\ M_1(4;0;0) \end{matrix};$$

$$\alpha \cap Oy: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ 3x-2y+6z-12=0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} b=-6 \\ M_2(0;-6;0) \end{matrix};$$

$$\alpha \cap Oy: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 3x-2y+6z-12=0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} c=2 \\ M_3(0;0;2) \end{matrix}.$$

Площина α зображена на рис. 101. $\blacksquare$

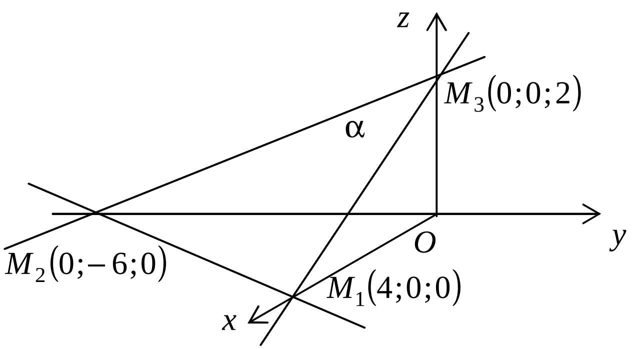

Рис. 101

3.6.5. Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини α_1 і α_2 своїми загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 .$$

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їх векторами нормалей $\vec{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ (рис. 102). Отже,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} .$$

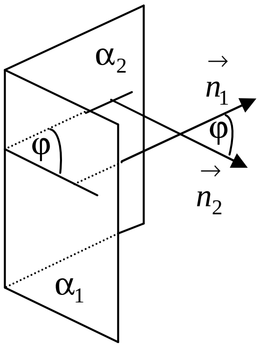

Рис. 102

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для площин.

Умова перпендикулярності двох площин

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 .$$

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} .$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} .$$

<u>Приклад</u>. Знайти кут між заданою площиною $\alpha_1 :\ 2x - y - 2z + 6 = 0$ і координатною площиною Oxy.

$$\square \quad \vec{n_1} = (2; -1; -2) ; \quad \alpha_2 :\ z = 0 ; \quad \vec{n_2} = \vec{k} = (0;0;1) ;$$

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = -\frac{2}{3} ;$$

$$\varphi = \arccos(-2/3) . \qquad \blacksquare$$

3.6.6. Умова перетину трьох площин у одній точці

Три площини $\alpha_i:\ A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0\ \ (i = 1,2,3)$ перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли квадратна система, складена з рівнянь цих площин, має єдиний розв'язок. Тобто, коли визначник системи відмінний від нуля

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

<u>Приклад</u>. Знайти точку перетину трьох площин

$$2x - 4y + 3z - 1 = 0\ ;\ \ 3x - y + 5z - 2 = 0\ ;$$

$$4x + 3y + 4z = 0\ .$$

(Розв'язати самостійно. Використати метод Крамера).

3.6.7. Відстань від точки до площини

Нехай у просторі задані площина α своїм загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис. 103).

Візьмемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1)$. Тоді відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n} = (A; B; C)$

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

Оскільки $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

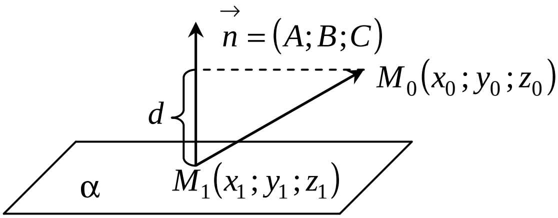

Рис. 103

Приклад. Знайти відстань d від точки $M_0(2;-4;3)$ до площини $\alpha:\ 3x-2y-6z-1=0$.

(Розв'язати самостійно).

3.6.8. Рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно даному вектору (канонічні рівняння прямої)

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{s} = (m;n;p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, що їй паралельний (рис. 104).

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій прямій та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. Точка M належить прямій тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{s}$. Використовуючи умову паралельності векторів, маємо

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

– ***канонічні рівняння прямої***.

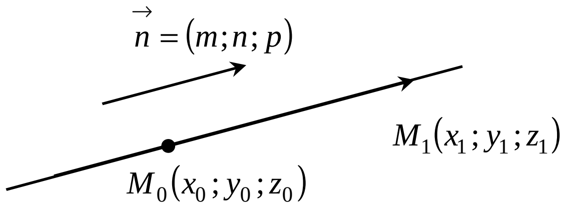

Рис. 104

3.6.9. Параметричні рівняння прямої

Якщо у канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$$

і розв'язати їх відносно x, y та z, то отримаємо:

$$\frac{x - x_0}{m} = t \;; \quad \frac{y - y_0}{n} = t \;; \quad \frac{z - z_0}{p} = t \;;$$

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

– ***параметричні рівняння прямої***, де змінна t служить параметром.

Приклад. Пряма задана своїми канонічними рівняннями

$$\frac{x - 3}{5} = \frac{y + 4}{0} = \frac{z}{-2} \;.$$

Записати параметричні рівняння цієї прямої.

(Розв'язати самостійно).

3.6.10. Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

Нехай на прямій l задано дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$. За напрямний вектор можна взяти

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тоді з канонічних рівнянь маємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

– ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-2;0;3)$ і $M_2(4;-2;3)$. (Розв’язати самостійно).

3.6.11. Пряма як перетин двох площин. Загальні рівняння прямої

Просторова лінія може задаватися як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l служить лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і } \alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

називається ***загальними рівняннями прямої***.

Зауваження 1. Загальні рівняння прямої визначаються неоднозначно.

Зауваження 2. Рівняння

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 ,$$

де λ – параметр, задає пучок площин, які проходять через пряму l.

Приклад. Пряма l задана своїми загальними рівняннями

$$\begin{cases} x-2y+4z-10=0 \\ 3x+2y-2z+6=0 \end{cases}.$$

Знайти її 1) канонічні рівняння; 2) параметричні рівняння.

□ 1) Знайдемо напрямний вектор прямої

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-4\vec{i}+14\vec{j}+8\vec{k}.$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x=0$, тоді

$$\begin{cases} -2y+4z-10=0 \\ 2y-2z+6=0 \end{cases}; \quad y=-1; \quad z=2; \quad M_0(0;-1;2).$$

Канонічні рівняння

$$\frac{x-0}{-4}=\frac{y-(-1)}{14}=\frac{z-2}{8};$$

$$\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-2}{4}.$$

(Параметричні рівняння знайти самостійно). ■

3.6.12. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності та паралельності двох прямих

Нехай задано дві прямі своїми канонічними рівняннями

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їх напрямними векторами $\vec{s}_1=(m_1;n_1;p_1)$ і $\vec{s}_2=(m_2;n_2;p_2)$. Отже,

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \ .$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \ .$$

Умова паралельності двох прямих

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \ .$$

3.6.13. Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими

Дві прямі у просторі можуть перетинатися або бути паралельними чи мимобіжними.

Нехай задано дві непаралельні прямі

$$l_1: \ \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \ \text{і} \ l_2: \ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \ .$$

Прямі l_1 і l_2 перетинаються, коли вектори $\vec{s_1} = (m_1; n_1; p_1)$, $\vec{s_2} = (m_2; n_2; p_2)$ і $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ – компланарні (лежать в одній площині). Використовуючи умову компланарності трьох векторів $(\overrightarrow{M_1 M_2} \times \vec{s_1}) \cdot \vec{s_2} = 0$, одержуємо ***умову перетину двох непаралельних прямих***:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \, .$$

<u>Зауваження 1</u>. Для довільних прямих l_1 і l_2 ця рівність служить умовою їх належності одній площині. Якщо ця умова

не виконується, то прямі l_1 і l_2 є мимобіжними.

Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими l_1 і l_2, розглянемо вектор $\vec{a} = \vec{s_1} \times \vec{s_2}$, який перпендикулярний до обох прямих. Тоді відстань d між прямими l_1 і l_2 дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ на вектор $\vec{a}$

$$d = \left| \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a} \right| \Big/ \left| \vec{a} \right| = \left| \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \left(\vec{s_1} \times \vec{s_2} \right) \right| \Big/ \left| \vec{s_1} \times \vec{s_2} \right| .$$

<u>Зауваження 2</u>. Ця формула справедлива також для прямих l_1 і l_2, що перетинаються. Зрозуміло, що при цьому $d = 0$.

<u>Приклад</u>. Знайти відстань d між заданими прямими:

$$l_1: \ \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+3}{2} \quad \text{і} \quad l_2: \ \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2} .$$

$$\square \quad \vec{a} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} .$$

Оскільки $\vec{a} \neq \vec{0}$, то прямі l_1 і l_2 – непаралельні. Далі знаходимо: $\overrightarrow{M_1M_2} = (0-2; 2-(-5); 3-(-3)) = (-2; 7; 6)$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21} \ ; \ |\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}| = -2 \cdot (-4) +$$

$$+ 7 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 = 0 \ ; \quad d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|0|}{\sqrt{21}} = 0 .$$

Отже, прямі l_1 і l_2 перетинаються. ■

3.6.14. Кут між прямою та площиною. Умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$l: \ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \ ; \quad \alpha: \ Ax+By+Cz+D=0 \ .$$

Кут φ між ними доповнює кут між напрямним вектором прямої $\vec{s}=(m;n;p)$ і вектором нормалі площини $\vec{n}=(A;B;C)$ до 90° (рис. 105). Тоді

$$\cos\left(90^\circ-\varphi\right)=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \ .$$

Застосовуючи тригонометричну формулу зведення і враховуючи, що кут φ між прямою і площиною – гострий, маємо

$$\sin\varphi=\frac{|\,Am+Bn+Cp\,|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \ .$$

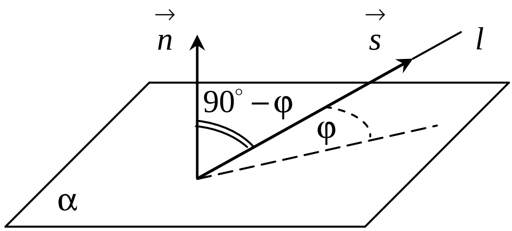

Рис. 105

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини

$$\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C} \ .$$

Умова паралельності прямої та площини

$$Am + Bn + Cp = 0\ .$$

3.6.15. Перетин прямої з площиною

Нехай задано пряму l параметричними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$l:\ \begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases};\quad \alpha:\ Ax + By + Cz + D = 0\ .$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини треба скласти і розв'язати систему їх рівнянь. Цю систему зручно розв'язувати методом вилучення невідомих (методом Гаусса), підставляючи вирази для x, y, z із параметричних рівнянь прямої у рівняння площини. Дістаємо рівняння для t

$$(Am + Bn + Cp)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)\ .$$

1) Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, тобто пряма не паралельна площині, то пряма і площина перетинаються в одній точці, що відповідає значенню параметра

$$t = -\ (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)/(Am + Bn + Cp)\ .$$

2) Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тобто точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямої l не лежить на площині α, то рівняння для t розв'язків не має. Пряма паралельна площині і не лежить на ній.

3) Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тобто точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямої l лежить на площині α, то рівняння для t виконується при всіх значеннях параметра. Пряма лежить на площині.

Приклад. Знайти проекцію N точки $M_0(2; -5; 4)$ на площину $\alpha:\ 3x + 2y - z - 6 = 0$.

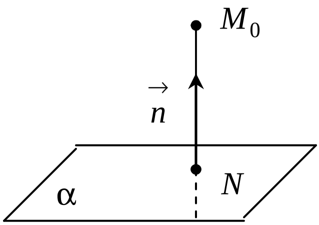

Рис. 106

□ Точка N служить основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину α (рис. 106). Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої M_0N колінеарний вектору нормалі $\vec{n}$ площини. Можна покласти $\vec{s} = \vec{n} = (3;\ 2;\ -1)$. Тоді параметричні рівняння прямої M_0N: $x = 3t + 2;\quad y = 2t - 5;\quad z = -t + 4$.

Підставляючи ці вирази у рівняння площини, одержимо значення параметра t, що відповідає точці перетину N прямої та площини

$$3(3t + 2) + 2(2t - 5) - (-t + 4) - 6 = 0\ ;\quad t = -1\ .$$

Тоді

$$x = 3(-1) + 2 = -1;\quad y = 2(-1) - 5 = -7;\quad z = -(-1) + 4 = 5\ .$$

Отже, проекцією служить точка $N(-1; -7; 5)$. ■

3.6.16. Відстань від точки до прямої

Нехай треба знайти відстань d від точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямої l, яка задана параметричними рівняннями:

$$x = mt + x_0;\quad y = nt + y_0;\quad z = pt + z_0\ .$$

Розглянемо три способи визначення цієї відстані.

Спосіб 1. Візьмемо на прямій відому точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та побудуємо паралелограм на векторах $\vec{s} = (m; n; p)$ і $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$ (рис. 107). Площа S цього паралелограма

$$S = |\vec{s}| \cdot d \quad \text{або} \quad S = |\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}|\ .$$

Звідси

$$d = |\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}| \big/ |\vec{s}| \ .$$

<u>Спосіб 2</u>. Проведемо через точку M_1 площину α, яка перпендикулярна до прямої l (рис. 108). Вектор нормалі $\vec{n}$ площини α колінеарний напрямному вектору $\vec{s}$ прямої l. Можна покласти $\vec{n} = \vec{s} = (m; n; p)$. Тоді

$$\alpha: \ \ m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0 \ .$$

Далі треба знайти точку N перетину прямої та площини. Ця точка служить основою перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на пряму l. Отже, $d = M_1N$.

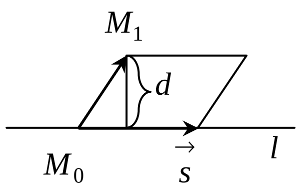

Рис. 107

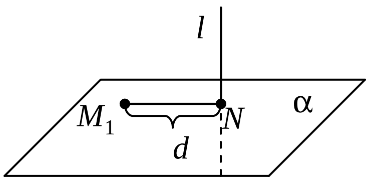

Рис. 108

<u>Спосіб 3</u>. Розглянемо функцію $u = d^2(t)$, яка дорівнює квадрату відстані

$$d(t) = \sqrt{(x_1 - mt - x_0)^2 + (y_1 - nt - y_0)^2 + (z_1 - pt - z_0)^2}$$

від точки M_1 до довільної точки прямої l.

Відстань d від точки M_1 до прямої l відповідає найменшому значенню цієї функції. Зі змісту задачі випливає, що мінімум існує і є єдиним екстремальним значенням. Тому відповідне значення параметра t_m визначається однозначно з необхідної умови екстремуму $u'(t)=0$:

$$-2m(x_1-mt-x_0)-2n(y_1-nt-y_0)-2p(z_1-pt-z_0)=0\ ;$$

$$t_m=\frac{m(x_1-x_0)+n(y_1-y_0)+p(z_1-z_0)}{m^2+n^2+p^2}\ .$$

Тоді $d=d(t_m)$.

Приклад. Знайти відстань d від заданої точки M_1 до заданої прямої l:

$$M_1(2;\,3;\,-5)\ ;\qquad \frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{2}\ .$$

□ Застосовуємо спосіб 1:

$$\vec{s}=(-1;-2;2);\quad |\vec{s}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}=3\ ;$$

$$\overrightarrow{M_0M_1}=(2-(-1);\,3-2;\,-2-0)=(3;\,1;\,-2);$$

$$\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -2 & 2\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=2\,\vec{i}+4\,\vec{j}+5\,\vec{k}\ ;$$

$$|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|=\sqrt{2^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}\ ;$$

$$d=|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M_1}|\Big/|\vec{s}|=\frac{5\sqrt{2}}{3}\ .$$

(Способами 2 і 3 розв’язати задачу самостійно). ■

3.7. Комплексні числа та функції

3.7.1. Поняття комплексного числа

Один із способів побудови комплексних чисел полягає в тому, що множину дійсних чисел розширюють приєднанням до неї нового числового об'єкта – кореня i рівняння $x^2+1=0$.

Комплексним числом (в алгебраїчній формі) називається вираз $z=x+iy$, де x,y – дійсні числа; i – ***уявна одиниця***, $i^2=-1$, $i=\sqrt{-1}$. Числа x і y називаються відповідно ***дійсною й уявною частинами*** комплексного числа z. Позначаються $x=\operatorname{Re} z$; $y=\operatorname{Im} z$.

Множина всіх комплексних чисел позначається C.

Будь-яке дійсне число x можна розглядати як комплексне число $z=x+i0=x$, у якого уявна частина дорівнює нулю: $y=0$. Таким чином, множина дійсних чисел R є підмножиною множини комплексних чисел C: $R\subset C$.

Комплексне число $z=iy=0+iy$, $y\neq 0$, у якого дійсна частина дорівнює нулю, а уявна частина відмінна від нуля, називається ***чисто уявним***.

Два комплексних числа $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ називаються ***рівними***, якщо відповідно рівні їх дійсні та уявні частини: $z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2 \ i \ y_1=y_2$.

Комплексне число ***рівне нулю*** $z=0$, якщо рівні нулю його дійсна та уявна частини: $z=0 \Leftrightarrow x=0 \ i \ y=0$.

Зауваження. Для комплексних чисел не існують поняття “більше”, “менше”.

Комплексне число $-z=-x-iy$ називається ***протилежним*** до числа $z=x+iy$.

Два комплексних числа $z=x+iy$ і $\bar{z}=x-iy$, у яких дійсні частини однакові, а уявні відрізняються тільки знаком, називаються ***комплексно спряженими***. Очевидно, що $\bar{\bar{z}}=z$.

3.7.2. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Операції додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня здійснюються за правилами дій над многочленами з врахуванням умови $i^2 = -1$ і зведенням подібних.

Зокрема, ***додавання і віднімання*** комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ здійснюються покомпонентно:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) .$$

Множення комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ здійснюється за правилом множення двочленів з урахуванням умови $i^2 = -1$ і зведенням подібних:

$$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) .$$

Зауваження 1. Для множення комплексного числа $z = x + iy$ на дійсне число a досить кожну його компоненту помножити на це число a: $az = ax + iay$.

Зауваження 2. Знайдемо натуральні степені уявної одиниці: $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$. Отже

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i .$$

Зауваження 3. При піднесенні комплексного числа до натурального степеня можна застосовувати відомі з елементарної математики формули скороченого множення.

Зауваження 4. Сума і добуток двох комплексно спряжених чисел $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$ є дійсним числом:

$$z + \bar{z} = 2x; \quad z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

Ділення комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_2 \neq 0$ виконується так: 1) треба чисельник і знаменник дробу z_1/z_2 домножити на число $\bar{z}_2$, спряжене до знаменника z_2; 2) врахувати, що $i^2 = -1$, і звести подібні; 3) почленно розділити чисельник на знаменник і одержати частку в алгебраїчній формі.

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Зауваження 5. Основні властивості розглянутих арифметичних операцій над комплексними числами співпадають з відповідними властивостями аналогічних операцій над дійсними числами. Тому для комплексних чисел залишаються справедливими всі теореми, правила, формули, що виведені для дійсних чисел на підставі цих властивостей.

Приклад. Виконати дії над комплексними числами в алгебраїчній формі:

$$z = (2-3i)(4+i) - (1-2i)^2 + 10\,(5-7i):(3-4i).$$

□ Виконуємо дії як над многочленами:

$$z = (2-3i)(4+i) - (1-2i)^2 + 10\,(5-7i):(3-4i) = (8+2i-$$

$$-12i - 3i^2 - 1 + 4i - 4i^2 + 10\,\big((5-7i)(3+4i)\big)/\big((3-4i)(3+4i)\big) =$$

$$= 8 + 2i - 12i + 3 - 1 + 4i + 4 + 10\left(15 + 20i - 21i - 28i^2\right):\left(9 -\right.$$

$$\left.-16i^2\right) = 14 - 6i + 10\,(15 + 20i - 21i + 28):(9+16) = 14 - 6i +$$

$$+ 2\,(43 - i):5 = (70 - 30i + 86 - 2i):5 = 156/5 - (32/5)\,i. \ ■$$

3.7.3. Геометрична інтерпретація. Модуль і аргумент комплексного числа

Якщо на площині введено прямокутну декартову систему координат Oxy, то між множиною всіх точок цієї площини і множиною комплексних чисел C можна встановити взаємно однозначну відповідність: кожному комплексному числу $z = x + iy$ відповідає єдина точка $M\,(x;y)$ і навпаки (рис. 109). Дійсні числа зображаються точками осі абсцис Ox, тому вісь Ox називається ***дійсною віссю***. Чисто уявні числа зображаються точками осі ординат Oy, тому вісь Oy називається ***уявною віссю***. Числу $z = 0$ відповідає початок координат $O\,(0;0)$.

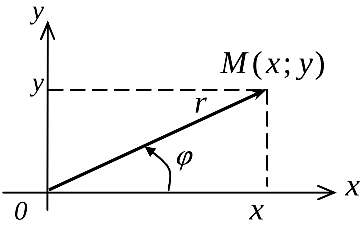

Рис. 109

Координатна площина Oxy, яка зображає множину всіх комплексних чисел C, називається ***комплексною площиною*** C або z-***площиною***.

Зауваження 1. Комплексне число $z = x + iy$ можна також зобразити радіус-вектором $\overrightarrow{OM}\,(x;y)$, що виходить із початку координат $O(0;0)$ і закінчується в точці $M\,(x;y)$ (рис. 109).

Зауваження 2. Додавання і віднімання комплексних чисел можна здійснювати за правилами (трикутника і паралелограма) відповідних операцій над векторами (рис. 110).

Якщо на комплексній площині (рис. 109) ввести також полярну систему координат $Or\varphi$ з полюсом у початку декартової

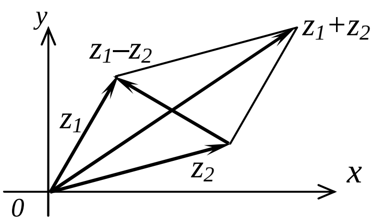

Рис. 110

системи координат і полярною віссю, суміщеною з віссю Ox, то точку $M\,(x;y)$, що зображає комплексне число $z = x + iy$ можна задати полярними координатами $M\,(r;\varphi)$.

Полярний радіус r (довжина радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$) називається ***модулем*** комплексного числа z і позначається $|z| = r$.

Очевидно, що $r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$.

Полярний кут φ (кут між радіус-вектором $\overrightarrow{OM}$ і полярною віссю Ox) називається ***аргументом*** комплексного числа z і позначається $Arg\, z = \varphi$.

Аргумент φ, як кут повороту, визначається з точністю до сталого доданку вигляду $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (довільного числа повних обертів).

Єдине значення φ, що задовольняє умову $-\pi < \varphi \le \pi$, називається ***головним значенням аргументу*** і позначається $\arg z$. Отже, $Arg\, z = \arg z + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Головне значення аргументу визначається за формулою:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & x < 0, y \ge 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0; \\ \pi/2, & x = 0;\ y > 0; \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Зауваження 3. Для числа $z = 0$ модуль дорівнює нулю $r = |0| = 0$, а аргумент φ довільний.

Зауваження 4. У рівних комплексних чисел $z_1 = z_2$ модулі також рівні $r_1 = r_2$, а аргументи зв'язані співвідношенням $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, тобто відрізняються на доданок $2\pi k$.

3.7.4. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

Використовуючи зв'язок декартових і полярних координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, комплексне число $z = x + iy$ можна подати у вигляді

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Вираз $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ називається ***тригонометричною формою комплексного числа***. Перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми задається співвідношеннями:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ .$$

Якщо звернутись до ***основної формули Ейлера***

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

(її доведення дається в теорії рядів), то від тригонометричної форми можна перейти до ***показникової форми комплексного числа*** $z = re^{i\varphi}$.

Приклад. Зобразити на комплексній площині і подати в тригонометричній та показниковій формах наступні комплексні числа, що задані в алгебраїчній формі:

$$z_1 = -\sqrt{3} - i;\ \ z_2 = 2 - 2i;\ \ z_3 = 2i;\ \ z_4 = -2;\ \ z_5 = -2 + i.$$

□ Побудуємо задані числа на комплексній площині (рис. 111). Знайдемо модуль і головне значення аргументу кожного з цих чисел та запишемо їх у тригонометричній та показниковій формах:

$$\underline{z_1 = -\sqrt{3} - i}:\ \ x_1 = -\sqrt{3};\ \ y_1 = -1;\ \ |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 2;$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}(y_1/x_1) - \pi,\ \ x_1 < 0, y_1 < 0;$$

$$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\left(1/\sqrt{3}\right) - \pi = \pi/6 - \pi = -5\pi/6;$$

$$z_1 = 2\left(\cos(-5\pi/6) + i\sin(-5\pi/6)\right);\ \ z_1 = 2e^{i(-5\pi/6)}.$$

$$\underline{z_2 = 2 - 2i}:\ \ x_2 = 2;\ \ y_2 = -2;\ \ |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 2\sqrt{2};$$

$$\arg z_2 = \operatorname{arctg}(y_2/x_2),\ \ x_2 > 0;\ \arg z_2 = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4;$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right);\ \ z_2 = 2\sqrt{2}\,e^{-i(\pi/4)}.$$

$$\underline{z_3 = 2i}:\ \ x_3 = 0;\ \ y_3 = 2;\ \ |z_3| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = 2;$$

$$\arg z_3 = \pi/2,\ \ x = 0;\ y > 0;$$

$$z_3 = 2\left(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)\right);\ \ z_3 = 2e^{i(\pi/2)}.$$

$$\underline{z_4 = -2}:\ \ x_4 = -2;\ \ y_4 = 0;\ \ |z_4| = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = 2;$$

$$\arg z_4 = \operatorname{arctg}(y_4/x_4) + \pi,\ \ x_4 < 0, y_4 \ge 0;$$

$$\arg z_4 = \operatorname{arctg} 0 + \pi = \pi;\ \ z_4 = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right);\ \ z_4 = 2e^{i\pi}.$$